GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

SIRALI VEKTÖR METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Çetin Cemal ÖZEKEN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Çetin Cemal ÖZEKEN

11 / 02 / 2022

SIRALI VEKTÖR METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

(Doktora Tezi)

Çetin Cemal ÖZEKEN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2022

ÖZET

Bu tez çalışmasının temel amacı, metrik uzaylarda ve sıralı metrik uzaylarda elde edilmiş olan bir çok sabit nokta sonucunun literatürde var olan yaklaşımlardan farklı olarak, sıralı vektör metrik uzaylar üstünde genellemelerin yapılması ve böylece elde edilen sonuçların daha geniş fonksiyon sınıfları için uygulanabilir hale getirilmesidir. Bu genellemeler, sadece uzayın yapısını değiştirmek suretiyle değil aynı zamanda büzülme şartlarını esnetmek, fonksiyonların topolojik yapısını değiştirmek ve iteratif yöntemin kurulması esnasında değişkenler üzerine koyulan şartları da farklılaştırmak vesilesiyle elde edilmiştir. Bu çalışmada ilk olarak sıralı vektör metrik uzaylar üstünde sıra artan ve sıra azalan fonksiyonlar için sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Sonrasında sıralı vektör metrik uzaylar üstünde karma monoton özelliğe sahip fonksiyonlar için ikili sabit nokta sonuçları verilmiştir. Aynı bölümde çift monoton özelliğe sahip fonksiyonlar tanımlanmış ve karma monoton fonksiyonlar için elde edilmiş olan sonuçlar bu fonksiyonlar için yeniden yorumlanmıştır. Daha sonra herhangi bir monotonluk özelliğine sahip olmayan fonksiyonlar için elde edilen sonuçlar genişletilmiştir. Bir sonraki bölümde sıralı vektörel sözde büzülme ve sıralı vektörel hemen hemen büzülme tanımı yapılmış, vektörel hemen hemen büzülmeler için sabit nokta sonuçları verilmiştir. Son kesimde ise sıralı vektör metrik uzayların sonlu çarpımları üstünde sıralı vektörel Prešić büzülmeleri için sabit nokta sonucu elde edilmiştir. Her bir bölümde verilen örnekler ve notlar vesilesiyle elde edilen sonuçların birbiriyle olan ilişkilerinin yanında literatürdeki diğer çalışmalar ile aralarındaki ilişkiler de açık bir şekilde vurgulanmıştır.

Bilim Kodu	:	20404
Anahtar Kelimeler	:	Sıralı vektör uzayı, Riesz uzayı, vektör metrik uzay, sıralı vektör metrik uzay, sabit nokta, ikili sabit nokta, karma monoton fonksiyon, çift monoton fonksiyon, sıralı vektörel sözde büzülme, sıralı vektörel hemen hemen büzülme, sıralı vektörel Prešić tipi büzülme
Sayfa Adedi	:	76
Danışman	:	Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

FIXED POINT THEOREMS ON ORDERED VECTOR METRIC SPACES

(Ph. D. Thesis)

Çetin Cemal ÖZEKEN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2022

ABSTRACT

The main purpose of this thesis is to generalize the fixed point results obtained in metric spaces and ordered metric spaces with approaches different than the ones in the literature, on ordered vector metric spaces and hence to make the obtained results applicable for wider classes of functions. These generalizations are obtained not only by changing the space structure but also by stretching the contraction conditions, changing the topological structures of the functions, and altering the conditions on the variables during the establishment of the iterative method. In this work firstly, fixed point results for order-preserving and order-reversing functions on ordered vector metric spaces are obtained. Then, the coupled fixed point results are obtained for functions having mixed monotone property on ordered vector metric spaces. In the same chapter, functions having double monotone property are defined and the results obtained for functions having mixed monotone property are reinterpreted for these functions. Then, the mentioned results are expanded for functions not having any type of monotonicity property. In the next chapter, the definitions of ordered vector quasi-contraction and ordered vectorial almost-contraction are given, and fixed-point results are presented for vectorial almost-contraction. In the last section, fixed point results are obtained for ordered vectorial Prešić contractions on finite products of ordered vector metric spaces. In each chapter the relationships between the results obtained as well as between other studies in the literature are clearly emphasized with examples and notes.

Science Code	:	20404
Key Words	:	Ordered vector space, Riesz space, vector metric space, ordered vector metric space, fixed point, coupled fixed point, mixed monotone function, double monotone function, ordered vectorial quasi contraction, ordered vectorial almost contraction, ordered vectorial Prešić type contraction
Page Number	:	76
Supervisor	:	Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, tezimin her aşamasında büyük destek sağlayan, karşılaştığım her zorlukta beni cesaretlendiren, engin bilgi birikimi ve tecrübesiyle beni yönlendiren tez danışmanım Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tez izleme komitemizde yer alan, tez dönemi boyunca bilgi ve tecrübeleriyle beni yönlendiren Prof. Dr. Bahri TURAN ve Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI hocalarıma da teşekkür ederim. Rahmetli babam Selçuk ÖZEKEN'e, hayatımdaki en büyük destekçim olan canım annem Güller ÖZEKEN'e ve tüm sevgili aileme teşekkür ederim. Ayrıca başta dostlarım ve mesai arkadaşlarım olmak üzere manevi destekleri ile yanımda olan tüm arkadaşlarıma da teşekkür ederim. Son olarak bilimi ve bilim insanını her daim destekleyen TÜBİTAK'a (Türkiye Bilimsel ve Teknik Araştırma Kurumuna) doktora süresi boyunca 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağlamış olduğu destekten ötürü teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$(\boldsymbol{X}, \leq)$	Sıralı küme
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d})$	Metrik uzay
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{E})$	Vektör metrik uzay
$\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}$	x ve y elemanlarının supremumu
$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$	x ve y elemanlarının infimumu
$\boldsymbol{a_n} \downarrow \boldsymbol{a}$	(a_n) azalan dizi ve $\inf\{a_n : n \geq 1\} = a$
$\boldsymbol{a_n} \uparrow \boldsymbol{a}$	(a_n) artan dizi ve $\sup\{a_n : n \geq 1\} = a$
$\boldsymbol{x} \lesseqgtr \boldsymbol{y}$	x ve y karşılaştırılabilir elemanlardır
$\boldsymbol{x_n} \to \boldsymbol{x}$	(x_n) dizisi x elemanına yakınsar
$\boldsymbol{x_n} \xrightarrow{\boldsymbol{o}} \boldsymbol{x}$	(x_n) dizisi x elemanına (sıra) o-yakınsar
$\boldsymbol{x_n} \xrightarrow{\boldsymbol{d,E}} \boldsymbol{x}$	(x_n) dizisi x elemanına (vektörel) E-yakınsar

1. GİRİŞ

Başta matematik, mühendislik, ekonomi, biyoloji, kimya ve fizik olmak üzere birçok alanda doğrusal olmayan fonksiyonel denklemlerle tanımlanan sayısız problemin uygun bir sabit nokta problemine indirgenilmesi suretiyle çözülebilir olması sabit nokta teorisinin büyük bir öneme sahip olduğunu göstermektedir. Örneğin, Matematiksel Analizin birçok dalında ortaya çıkan fizibilite, varyasyonel eşitsizlik, doğrusal olmayan optimizasyon, denge, tamamlayıcılık, seçim ve eşleştirme problemlerinin çözümünde bu teori büyük bir yere sahiptir.

T sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $y' = T(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ denkleminin çözümünü sorgulamak amacıyla ilk defa Cauchy tarafından sabit nokta teoremleri kullanılmıştır. Bu teoremlerin Cauchy tarafından yapılan ispatları Lipschitz tarafından sadeleştirilmiştir. Peano tarafından ise sadece süreklilik şartı kullanılarak bahsi geçen fikirler genelleştirilmiştir. Diğer yandan, 1922 yılında Banach tarafından elde edilen ve Banach Büzülme Prensibi olarak adlandırılan teorem, 20. yüzyılın ortasından sonra önemli ölçüde gelişme gösteren metriksel sabit nokta teorisinin temel taşlarından biri olmuştur. Bu teorem şu şekildedir: (X, d) tam metrik uzay olmak üzere bir $k \in [0, 1)$ sabiti ve her $x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \tag{1.1}$$

büzülme şartını sağlayan T fonksiyonunun bir tek sabit noktası (yani $T(x^*) = x^*$ eşitliğini sağlayan tek x^* noktası) vardır. Ayrıca $x_0 \in X$ herhangi bir eleman olmak üzere her $n \geq 1$ için $x_n = T(x_{n-1})$ biçiminde tanımlanan iteratif (x_n) dizisinin limiti x^* elemanıdır. Yani $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ olur [1].

Anlaşılabileceği üzere bu teorem sadece sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti etmekle kalmayıp aynı zamanda bu noktanın nasıl bulunabileceğine dair bir yönteme de işaret etmektedir. Banach'tan günümüze birçok matematikçi bu teoremin sayısız genellemesini yaparak çok çeşitli sonuçlar elde etmiş ve bunları farklı alanlarda uygulamıştır. Bu çeşitlilik temelde, fonksiyonların tanımlandığı uzayların özelliklerin değişmesi, büzülme şartlarının ve fonksiyonların topolojik özelliklerinin farklılaşması ve iteratif yöntemin kurulması esnasında değişkenler üzerine koyulan şartların değişmesi olmak üzere üç farklı yöntem vasıtasıyla meydana gelmiştir. Bu çalışmada yer yer bu üç yöntemden bir veya birkaçı aynı anda kullanılmıştır.

Birçok araştırmacıya ilham veren klasik Banach sabit nokta prensibinin zayıf bir yönü de vardır. Bu teoremdeki büzülme şartı, fonksiyonu sürekli olmaya zorlamaktadır. Doğal olarak akla şu soru gelmiştir: Sürekli olmayan fonksiyonlar için de sabit nokta sonuçları verilebilir mi? Bu sorunun cevabını 1968 yılında Kannan vermiştir [2]. Kannan (1.1) şartı yerine; bir $b \in [0, 1/2)$ sabiti ve her $x, y \in X$ için

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq b\left[d\left(T\left(x\right), x\right) + d\left(T\left(y\right), y\right)\right] \tag{1.2}$$

sağlansın, şartını alarak bir sabit nokta teoremi elde etmiştir. Bu şartı sağlayan fonksiyonların sürekli olmasına gerek yoktur. Kannan'ın sonuçlarını takiben süreklilik gerektirmeyen birçok büzülme sınıfı için sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Bunların en önemlilerinden biri, 1972 yılında Chatterjea tarafından yapılmıştır [3]. O da (1.2) şartını aşağıdaki (1.3) şartı ile değiştirmiştir. Bu şart şu şekildedir: Bir $c \in [0, 1/2)$ sabiti ve her $x, y \in X$ için

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq c\left[d\left(T\left(x\right), y\right) + d\left(T\left(y\right), x\right)\right] \tag{1.3}$$

sağlansın. Bu arada (1.1) ve (1.2) şartları birbirinden bağımsızdır. Benzer bir yorum da (1.1) ve (1.3) şartları için yapılabilir. Detaylı bilgi için Rhoades tarafından yapılan çalışmadan faydalanılabilir [4]. 1973 yılında Zamfirescu ise Banach, Kannan ve Chatterjea büzülme sonuçlarını birleştirerek, tam metrik uzaylarda (1.1), (1.2) veya (1.3) şartlarından en az birini sağlayan fonksiyonlar için sabit nokta sonuçları vermiştir [5]. 1974 yılında Ćirić o zamana kadar var olan birçok büzülme şartından daha genel bir şartı sağlayan fonksiyonlar için sabit nokta sonucu elde etmiştir [6]. Bir $h \in [0, 1)$ sabiti ve her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq\ & h. \max\left\{d\left(x, y\right), d\left(x, T\left(x\right)\right), \right. \\ & \left. d\left(y, T\left(y\right)\right), d\left(x, T\left(y\right)\right), d\left(y, T\left(x\right)\right)\right\} \end{aligned} \tag{1.4}$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyona sözde büzülme adı verilmektedir. Ćirić'in sözde büzülmeler için verdiği sonuçlar yukarıda bahsi geçen tüm büzülmeler için verilen sonuçların birer genellemesidir. Çünkü (1.1), (1.2) veya (1.3) şartlarından birini veya birkaçını sağlayan herhangi bir fonksiyon bir sözde büzülmedir. Bu çalışmayı takiben Berinde, zayıf büzülme veya (δ, L)-zayıf büzülme diye adlandırdığı dönüşümün tanımını yaptığı çalışmada (1.4) şartı yerine aşağıdaki (1.5) şartını almıştır [7]. Buna göre bir $\delta \in (0,1)$, bazı $L \geq 0$ sabitleri ve her $x, y \in X$ için

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \delta d\left(x, y\right) + Ld\left(y, T(x)\right) \tag{1.5}$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyona (δ, L)-zayıf büzülme denilmektedir. Daha sonra bu büzülmeler hemen hemen büzülme adını almıştır. Berinde çalışmasında herhangi bir Kannan, Chatterjea, veya Zamfirescu dönüşümünün ya da $h \in (0, 1/2)$ koşulu altında herhangi bir sözde büzülmenin zayıf büzülme olduğunun altını çizmiştir. Ayrıca bu çalışmada Berinde'nin zayıf büzülmeler için verdiği sabit nokta teoremleri bahsi geçen tüm sonuçların birer genellemesidir. Zayıf büzülmeler hakkında daha fazla sonuç ve özellik için [8–10] çalışmalarından yararlanılabilir.

1965 yılında sonlu çarpım uzaylarında Prešić tarafından farklı bir büzülme tanıtılmış ve [11,12] çalışmalarında önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmalarda X^k kümesinden X kümesine tanımlanan fonksiyonlar sınıfının üyeleri için sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Burada verilen sonuçların önemi, $k = 1$ olması durumunda Banach sabit nokta teoreminin elde edilmesidir. Prešić'in elde ettiği sonuçların metrik uzaylarda ve sıralı metrik uzaylarda birçok genellemesi yapılmıştır [13–16].

Diğer yandan, kısmî sıralama ile Banach büzülme ilkesini genişletmeye yönelik başka bir eğilim daha vardır. Temel olarak, Banach sabit nokta teoreminde fonksiyonun tanımlı olduğu X metrik uzayındaki bütün elemanlar için fonksiyon büzülme şartını sağlamak zorunda olmasına karşın, X kümesinin sıralı bir metrik uzay olması durumunda fonksiyonun bu X kümesi üstünde tanımlanan kısmî sıralamaya göre yalnızca karşılaştırılabilir elemanlar için büzülme şartının sağlanması yeterli olmaktadır. Bu durum da araştırılan fonksiyon sınıfının genişlemesine sebep olmuş, teoriye büyük bir esneklik ve çeşitlilik katmıştır. Bildiğimiz kadarıyla bu eğilim 2004 yılında Ran ve Reuring [17] ile başlamış ve sayısız çalışmaya ilham kaynağı olmuştur. Bu trendin en göze çarpan çalışmalardan biri 2005 yılında Nieto ve Lopez tarafından yapılmıştır [18]. Bu çalışmada monoton fonksiyonlar için kısmî sıralı metrik uzaylarda sabit nokta sonuçları verilmiştir. 2007 yılında Nieto ve Lopez bu çalışmanın devamı olarak, ardışık terimleri karşılaştırılabilir iterasyon dizeleri vasıtasıyla monoton olmayan fonksiyonlar için de sabit nokta teoremleri vermişlerdir [19]. Nieto ve Lopez'in teorik bulguları, sundukları örnekler ve adi diferansiyel denklemlere uygulama biçimleri sayısız matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bu matematikçilerin öncülerinden sayılan Gnana Bhaskar ve Lakshmikantham, 2005 yılında bahsi geçen trendi takip ederek Nieoto ve Lopez'in irdeledikleri fonksiyon sınıflarını genişleten bir çalışma yapmıştır [20]. Bu çalışmada karma monoton özelliğe sahip fonksiyonlar için ikili sabit nokta sonuçları verilmiş ve bahsi geçen sonuçların bir de periyodik sınır değer problemine uygulaması yapılmıştır. Sonrasında Lakshmikantham ve Ćirić tarafından yapılan çalışma [21] ve Berinde tarafından yapılan çalışmalarda [22–24] sıralı metrik uzaylarda birçok ikili sabit nokta sonucu elde edilmiştir. Daha önce de bahsedildiği üzere, metrik uzayı daha genel bir uzayla değiştirmek sıklıkla başvurulan bir yöntemdir. Bu minvalde metrik uzayların genellemesi olan yarı metrik uzaylar, kısmî metrik uzaylar, fuzzy metrik uzaylar, G-metrik uzaylar gibi birçok uzayda sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Literatürde var olan metrik uzayların genellemeleri içerisinde bile en genellerinden biri olan vektör metrik uzayların tanımı Çevik ve Altun tarafından 2009 yılında yapılmıştır [25]. Bu çalışmada vektör metrik tanıtılmış, bu uzayların özellikleri incelenmiş ve bir de sabit nokta sonucu verilmiştir. Bu çalışmayı takiben 2011 yılında Altun ve Çevik tarafından vektör metrik uzaylar üstünde farklı sabit nokta sonuçları elde edilmiştir [26]. 2014 yılında Çevik tarafından yapılan çalışma ile bu uzayların topolojik yapısı daha iyi anlaşılmış ve bu uzaylar üstünde tanımlanan fonksiyonların sürekliği ile ilgili kavramlar daha geniş bir perspektifle incelenebilmiştir [27]. Vektör metrik uzay ile ilgili detaylı bilgi bir sonraki bölümde verilmiştir.

Bu tez çalışmasının temel motivasyonu, metrik uzaylar ve sıralı metrik uzaylarda elde edilmiş olan birçok sabit nokta sonucunun literatürde var olan yaklaşımlardan farklı olarak kısmî sıralı vektör metrik uzaylarda genellemelerinin elde edilmesi ve dolayısıyla daha geniş fonksiyon sınıfları için uygulanabilir hale getirilmesidir. Bu çalışmanın ikinci bölümünde diğer bölümlerin anlaşılmasında kolaylık sağlaması amacıyla sıralı küme, latis, Riesz uzayı, vektör metrik uzay gibi birçok kavram ve bunlara ait bazı özelliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde sıralı vektör metrik uzaylarda sıra artan ve sıra azalan fonksiyonlar için sabit nokta sonuçları verilmiştir. Bu sonuçlar aynı zamanda [18, 19]'da elde edilen sonuçların birer genellemesidir. Dördüncü bölümde, önce sıralı vektör metrik uzaylarda karma monoton özelliğe sahip fonksiyonlar için ikili sabit nokta teoremleri verilerek [20]'de yer alan sonuçların genellemeleri yapılmıştır. Ardından çift monoton özelliğe sahip fonksiyon tanımı yapılmış ve karma monoton özelliğe sahip fonksiyonlar için verilen sonuçlar çift monoton özelliğe sahip fonksiyonlar için yeniden yorumlanmıştır. Bu bölümün son kesiminde ise monoton olmayan fonksiyonlar için sabit nokta teoremleri verilmiş, tüm bölümde yer alan sonuçlar ile literatürdeki diğer çalışmalar ve bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar arasındaki ilişkiler vurgulanmıştır. Beşinci bölümün ilk kesiminde vektörel sözde büzülme ve vektörel hemen hemen büzülme tanımları yapılmış, metrik uzaylarda verilen benzer tanımlarla karşılaştırılmış, vektörel hemen hemen büzülmeler için sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Bu sonuçlar vasıtasıyla dördüncü bölümde sıra artan fonksiyonlar için verilen sonuçlar ile [6–9]'da elde edilen sonuçların sıralı vektör metrik uzaylarda genellemeleri yapılmıştır. Aynı bölümün ikinci kesiminde ise sıralı vektör metrik uzayların sonlu çarpım uzayları üstünde tanımlı sıralı vektörel Prešić tipi büzülmeler için sabit nokta sonuçları verilmiş ve böylece üçüncü bölümde bahsi geçen sıra artan fonksiyonlar için elde edilen sonuçların genellemesi yapılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Sıralı Kümeler ve Riesz Uzayları

Bu kesimde sıralı kümeler ve Riesz uzayları hakkında genel bilgiler verilecektir. Bu kesim, [28] ve [29] numaralı kitaplardaki bilgiler derlenerek oluşturulmuştur. Bilindiği üzere X boş olmayan bir küme ve $\preceq$, X üstünde tanımlı bir bağıntı iken $x \preceq y$ notasyonu $(x, y) \in \preceq$ ifadesi yerine kullanılmaktadır. X üstünde tanımlı bir $\preceq$ bağıntısı her $x, y, z \in X$ için; $x \preceq x$ (yansıma), $x \preceq y$ ve $y \preceq x$ ise $x = y$ (ters simetri), $x \preceq y$ ve $y \preceq z$ ise $x \preceq z$ (geçişme) özelliklerini sağlıyorsa, bu $\preceq$ bağıntısına X üstünde (kısmî) sıralama bağıntısı, $(X, \preceq)$ ikilisine de (kısmî) sıralı küme denir. $(X, \preceq) = X$ sıralı kümesinden alınan her iki x ve y elemanı için $x \preceq y$ veya $y \preceq x$ durumlarından biri sağlanıyorsa X kümesine $\preceq$ sıralamasına göre tam sıralı küme denir.

Bu tezde gösterimde birliği sağlamak ve karışıklığı önlemek amacıyla X kümesi üstündeki sıralama için $\preceq$, E üstündeki sırama için $\leqslant$, $\mathbb{R}$ üstündeki alışılmış sıralama için $\leq$, X^n üstündeki sıralama için ise $\preccurlyeq$ notasyonları kullanılmıştır. Ayrıca X kümesinden alınan x ve y elemanları karşılaştırılabilir ise bu durumu ifade etmek için $x \lesseqgtr y$ notasyonu kullanılmıştır.

Şimdi bazı sıralı küme örnekleri verilecektir.

Örnek

1. $X = \mathbb{R}$ alışılmış sıralama ile tam sıralı bir kümedir.

2. $X = \mathbb{N}$ kümesi her $x, y \in X$ için

$x \preceq y \Leftrightarrow y = kx$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır

biçiminde tanımlanan sıralama bağıntısı ile kısmî sıralı bir kümedir. Ancak $Y = \left\{x | x = 2^k, k \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi aynı sıralama ile tam sıralı bir kümedir.

3. $X = \mathbb{R}^2$ kümesi her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$ için

$x \preceq y \Leftrightarrow x_1 \leq y_1$ ve $x_2 \leq y_2$

biçiminde tanımlanan sıralama bağıntı ile kısmî sıralı bir kümedir. Bu sıralama bağıntısı koordinat sıralaması olarak bilinir.

4. $X = \mathbb{R}^2$ kümesi her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$ için

$x \preceq y \Leftrightarrow x_1 < y_1$ veya $(x_1 = y_1$ ve $x_2 \leq y_2)$

biçiminde tanımlanan sıralama bağıntı ile tam sıralı bir kümedir. Bu sıralama bağıntısı sözlüksel sıralama olarak bilinir.

5. $X = \ell_1 = \{x : x = (x_i),\ x_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty\}$ kümesi her $x = (x_i), y = (y_i) \in X$ için

$x \preceq y \Leftrightarrow$ her $i \in \mathbb{N}^+$ için $x_i \leq y_i$

biçiminde tanımlanan sıralama bağıntı ile kısmî sıralı bir kümedir.

6. $X = C[0,1] = \{f | f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f$ sürekli fonksiyon$\}$ kümesi herhangi iki $f, g \in X$ için

$f \preceq g \Leftrightarrow$ her $t \in [0,1]$ için $f(t) \leq g(t)$

biçiminde tanımlanan sıralama bağıntısı ile kısmî sıralı bir kümedir.

$X = (X, \preceq)$ boş olmayan sıralı bir küme ve $f : X \to X$ bir fonksiyon olsun. Bu çalışma boyunca herhangi iki $x, y \in X$ için $x \preceq y$ iken $f(x) \preceq f(y)$ oluyorsa f sıra artan bir fonksiyon, $f(x) \succeq f(y)$ oluyorsa f sıra azalan bir fonksiyon olarak adlandırılacaktır.

$(E, \leqslant)$ boş olmayan sıralı bir küme olmak üzere her $a, b \in E$ için, $\sup\{a, b\} = a \vee b$

ve inf $\{a,b\} = a \wedge b$ elemanları E içinde mevcut ise, E kümesine latis adı verilir. Diğer yandan E reel vektör uzayı aynı zamanda $\leqslant$ bağıntısı ile sıralı bir küme olsun. Vektör uzayı işlemleri sıralamayı koruyorsa, yani her $a, b, c \in E$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $a \leqslant b$ iken $\lambda a + c \leqslant \lambda b + c$ sağlanıyorsa E kümesine sıralı vektör uzayı adı verilir. Bir E sıralı vektör uzayında sıfır vektörü 0 ile gösterilmek üzere, $a \in E$ için $0 \leqslant a$ ise a ya pozitif eleman, E nin pozitif elemanlarının kümesine E kümesinin pozitif kısmı adı verilir. Bu küme E^+ ile gösterilir, yani $E^+ = \{a : 0 \leqslant a,\ a \in E\}$ olur. Ayrıca E sıralı kümesi hem bir sıralı vektör uzayı hem de bir latis ise bu kümeye Riesz uzayı veya vektör latis adı verilir.

Örnek

1. $E = \mathbb{R}$ kümesi alışılmış sıralama ile Riesz uzayıdır.

2. $E = \mathbb{N}^+$ kümesi ilk örnekte verilen sıralama ile latistir ancak Riesz uzayı değildir, çünkü $\mathbb{N}$ vektör uzayı değildir.

3. $E = \mathbb{R}^2$ kümesi koordinat sıralaması ile bir Riesz uzayıdır.

4. $E = \mathbb{R}^2$ kümesi sözlüksel sıralama ile bir Riesz uzayıdır.

5. $E = \ell_1$ kümesi ilk örnekte verilen sıralama ile bir Riesz uzayıdır.

6. $E = C\,[0,1]$ kümesi ilk örnekte verilen sıralama ile bir Riesz uzayıdır.

E Riesz uzayının bir (a_n) dizisi her n için $a_n \geqslant a_{n+1}$ ifadesini sağlıyorsa, (a_n) dizisine sıra azalan dizi denir ve $a_n \downarrow$ notasyonu ile gösterilecektir. Bu (a_n) dizisinin sıra azalan özelliğine ek olarak $\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ kümesinin infimumu a ise, bu durum $a_n \downarrow a$ notasyonu kullanılarak gösterilecektir. Benzer şekilde bir (a_n) dizisi her n için $a_n \leqslant a_{n+1}$ ifadesini sağlıyorsa, (a_n) dizisine sıra artan dizi denir ve $a_n \uparrow$ notasyonu ile gösterilecektir. Beklendiği üzere bir de $\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ kümesinin supremumu a ise, bu durumda $a_n \uparrow a$ notasyonu kullanılacaktır. Bir E Riesz uzayında herhangi bir $a \in E^+$ ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\dfrac{1}{n} a \downarrow 0$ sağlanıyorsa E'ye Arşimedyan Riesz uzayı adı verilir.

Örnek

İlk örnekte 2 durumunda verilen E kümesi bir Riesz uzayı olmadığı için inceleme dışı tutulmuştur. 4 durumu hariç tüm durumlarda verilen E kümeleri birer Arşimedyan Riesz uzayıdır. Ancak 4 durumunda, $a = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $(0,0) \leqslant (0,1) \leqslant \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}(1,1)$ olduğundan $\frac{1}{n}(1,1) \not\downarrow (0,0)$ elde edilir. Aslında $\{\frac{1}{n}(1,1) : n \in \mathbb{N}^+\}$ kümesinin infimumu yoktur.

Bir E Riesz uzayında boş olmayan ve üstten sınırlı her (sayılabilir) kümenin, E içinde supremumu varsa bu E uzayına Dedekind (σ-)tam Riesz uzayı adı verilir. Her Dedekind tam Riesz uzayı bir Dedekind (σ-)tam Riesz uzayıdır ve her Dedekind (σ-)tam Riesz uzayı da bir Arşimedyan Riesz uzayıdır. Ancak bu durumun tersi doğru olmayabilir.

Örnek

$E = C[0,1]$ kümesi yukarıda bahsi geçen sıralama ile Arşimedyan Riesz uzayı olmasına rağmen, Dedekind (σ-)tam Riesz uzayı değildir. Gerçekten her $n \in \mathbb{N}^+$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ (n+2)t - \frac{1}{2}n - 1 & , \quad t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2+n}\right) \\ 1 & , \quad t \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2+n}, 1\right] \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f_n fonksiyonları $C[0,1]$ uzayının birer elemanıdır. Ayrıca $\{f_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ kümesi sayılabilir ve üstten sınırlı olmasına karşın bu kümenin supremumu $C[0,1]$ içinde mevcut değildir.

E bir Riesz uzayı ve $a \in E$ olmak üzere $|a| = a \vee (-a)$ biçiminde tanımlanan $|a|$ elemanına a'nın modülü denir. E Riesz uzayında bir dizi (b_n) ve $b \in E$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}^+$ için $|b_n - b| \leqslant a_n$ ve $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi mevcutsa, (b_n) dizisi b elemanına sıra yakınsak (o-yakınsak) denir ve $b_n \xrightarrow{o} b$ yazılır. Ayrıca her $n, p \in \mathbb{N}^+$ için $|b_n - b_{n+p}| \leqslant a_n$ ve $a_n \downarrow 0$ olacak biçimde E içinde bir (a_n) dizisi mevcut ise, (b_n) sıra Cauchy (o-Cauchy) dizisidir denir. Eğer E uzayında alınan her sıra Cauchy dizisi yakınsak ise, E kümesi bir sıra Cauchy tam Riesz uzayıdır denir.

E Arşimedyan Riesz uzayı, (b_n) ve (c_n) bu uzayda birer dizi, $b, c \in E$ olmak üzere;

i. $b_n \xrightarrow{o} b$ ve $b_n \xrightarrow{o} c$ ise $b = c$

ii. $b_n \downarrow b$ (veya $b_n \uparrow b$) ise $b_n \xrightarrow{o} b$

iii. $b_n \downarrow$ (veya $b_n \uparrow$) ve $b_n \xrightarrow{o} b$ ise $b_n \downarrow b$ (veya $b_n \uparrow b$)

iv. $b_n \xrightarrow{o} b$ ve $c_n \xrightarrow{o} c$ ise her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için $\lambda b_n + \mu c_n \xrightarrow{o} \lambda b + \mu c$

önermeleri sağlanır.

2.2. Sıralı Vektör Metrik Uzaylar

Bu kesimde [25]'de tanıtılan vektör metrik uzay ve bu uzayların bazı özelliklerinden bahsedilecektir.

X boş olmayan bir küme, $(E, \leqslant)$ bir Riesz uzayı olmak üzere $d : X \times X \to E$ dönüşümü her $x, y, z \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ve $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$ şartlarını sağlıyorsa bu d dönüşümüne vektör metrik (E-metrik), (X, d, E) üçlüsüne ise vektör metrik uzay adı verilir.

Örnek

1. $(E, \leqslant)$ bir Riesz uzayı ve $X = E$ olsun. X kümesi her $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ biçiminde tanımlanan $d : X \times X \to E$ dönüşümü ile bir vektör metrik uzaydır.

2. X kümesi reel değerli bir d metriği ile metrik uzay olsun. Reel sayılar kümesi alışılmış sıralama ile bir Riesz uzayı olduğundan, $E = \mathbb{R}$ düşüncesiyle, X aynı zamanda bir vektör metrik uzay olur. Yani her metrik uzay aslında bir vektör metrik uzaydır.

3. $X \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olmak üzere $E = \mathbb{R}^2$ hem sözlüksel sıralama hem de

koordinat sıralaması ile Riesz uzayı olduğundan, E bu sıralamalardan biri ile donatılsın ve $0 \leq \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda X kümesi E hangi sıralama ile donatılırsa donatılsın $\alpha + \beta > 0$ iken her $x, y \in X$ için $d(x, y) = (\alpha |x - y|, \beta |x - y|)$ biçiminde tanımlı $d : X \times X \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü ile bir vektör metrik uzaydır.

4. Benzer şekilde $X \subseteq \mathbb{R}^2$ boş olmayan bir küme ve $E = \mathbb{R}^2$ olsun. E sözlüksel veya koordinat sıralamalarından biri ile donatılsın ve $0 \leq \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda X kümesi α ve β sabitlerinin ikisi birden sıfır değil ise, her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$ için $d(x, y) = (\alpha |x_1 - y_1|, \beta |x_2 - y_2|)$ biçiminde tanımlı $d : X \times X \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü ile bir vektör metrik uzaydır.

5. ℓ_∞ sınırlı reel sayı dizilerin kümesi olmak üzere, $X \subseteq \ell_\infty$ boş olmayan bir küme olsun ve $E = \ell_1$ kesim 2.1.'deki ilk örnekte verilen sıralama ile donatılsın. X kümesi her $x = (x_n), y = (y_n) \in X$ için

$$d((x, y) = \left(\frac{1}{2^n} |x_n - y_n| \right)$$

biçiminde tanımlanan $d : X \times X \to \ell_1$ dönüşümü ile bir vektör metrik uzaydır.

6. $X \subseteq C[0, 1]$ boş olmayan bir küme olmak üzere ve $E = \mathbb{R}^2$ olsun. E koordinat sıralaması ile donatılsın ve $0 \leq \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. O halde α ve β sabitlerinin ikisi birden sıfır değil ise her $f, g \in X$ için

$$d(f, g) = \left(\alpha \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|, \beta \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| \right)$$

biçiminde tanımlanan $d : X^2 \to C[0, 1]$ dönüşümü ile X bir sıralı vektör metrik uzay olur.

Bir (X, d, E) vektör metrik uzayında her $x, y, z, w \in X$ için aşağıdaki önermeler sağlanır:

$i.$ $0 \leqslant d(x, y)$,

ii. $d(x,y) = d(y,x)$,

iii. $|d(x,y) - d(y,z)| \leqslant d(x,y)$,

iv. $|d(x,w) - d(y,z)| \leqslant d(x,y) + d(w,z)$.

(X,d,E) vektör metrik uzayının bir dizisi (x_n) ve $x \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $a_n \downarrow 0$ ve $d(x_n,x) \leqslant a_n$ olacak şekilde E içinde bir (a_n) dizisi varsa X içinde (x_n) dizisi x'e vektörel yakınsak (E-yakınsak) denir ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ yazılır. Metrik uzaylarda olduğu gibi vektör metrik uzaylarda da limit tektir ve vektörel yakınsak bir dizinin her alt dizisi de aynı limit değerine vektörel yakınsaktır. Ayrıca $x_n \overset{d,E}{\to} x$ olması için gerek ve yeter şart $d(x_n,x) \overset{o}{\to} 0$ olmasıdır. Diğer bir önemli kavram ise E-Cauchy dizisi kavramıdır. Her n,$p \in \mathbb{N}^+$ için $a_n \downarrow 0$ ve $d(x_n,x_{n+p}) \leq a_n$ olacak şekilde E içinde bir (a_n) dizisi varsa (x_n) dizisine E-Cauchy dizisi denir. Üstelik (x_n) dizisinin bir E-Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $d(x_n,x_{n+p}) \overset{o}{\to}$ olmasıdır. Ayrıca (x_n) ve (y_n) birer E-Cauchy dizisi ise $d(x_n,y_n)$ dizisi de bir sıra Cauchy dizisidir. Beklendiği üzere, X uzayının her E-Cauchy dizisi X içinde E-yakınsak ise X bir E-tam vektör metrik uzaydır denir.

Bir başka önemli kavram da vektörel sürekliliktir. (X,d,E) ve (Y,ρ,F) iki vektör metrik uzay, $x \in X$, ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere $x_n \xrightarrow{d,E} x$ iken $f(x_n) \xrightarrow{\rho,F} f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu x'de vektörel süreklidir denir. X'in her bir elemanı için f vektörel sürekli ise f fonksiyonu X üstünde vektörel süreklidir denir [27].

X bir vektör metrik uzay ve $x = (x_1,x_2),\ y = (y_1,y_2) \in X^2$ olmak üzere

$$\tilde{d}(x,y) = d(x_1,y_1) + d(x_2,y_2)$$

biçiminde tanımlanan $\tilde{d} : X^2 \times X^2 \to E$ dönüşüm ile $(X^2,\tilde{d},E)$ üçlüsü bir vektör metrik uzaydır. Bu durumda $T : X^2 \to X$ fonksiyonunun vektörel sürekli olması için gerek ve yeter şart $\tilde{d}((x_n,y_n),(x,y)) \overset{o}{\to} 0$ iken $d(T(x_n,y_n),T(x,y)) \overset{o}{\to} 0$ sağlanmasıdır.

$(X,\preceq)$ boş olmayan sıralı bir küme ise (X,d,E) vektör metrik uzayına sıralı vektör metrik uzay denir. Bundan sonraki bölümlerde sıralı vektör metrik uzaylarda çeşitli büzülmeler için sabit nokta teoremleri incelenecektir. Her bir bölümde aksi belirtilmediği sürece $(X, \preceq)$ boş olmayan sıralı bir küme, (X, d, E) üçlüsü (kısaca X) bir E-tam sıralı vektör metrik uzay ve $(E, \leqslant)$ Arşimedyan bir Riesz uzayını göstermektedir.

3. SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde önce sıra artan ve sıra azalan fonksiyonlar için sabit nokta sonuçları verilmiştir. Daha sonra monoton olmayan fakat karşılaştırılabilir elemanları karşılaştırılabilir elemanlara eşleyen fonksiyonlar için bu sonuçlar genelleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar [30] referans numaralı çalışmada yayınlanmıştır. Bu bölümde bir $f : X \to X$ fonksiyonu bir $k \in [0,1)$ sayısı ve karşılaştırılabilir her $x, y \in X$ elemanı için

$$d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x,y) \tag{3.1}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu f fonksiyonuna bir büzülme dönüşümüdür denilecektir.

3.1. Sıra Artan Fonksiyonların Teoremleri

Bu kesimde sıra artan fonksiyonlar için sabit nokta sonuçları verilecektir.

3.1.1. Teorem

X E-tam sıralı vektör metrik uzay olsun. Ayrıca $f : X \to X$ (3.1) şartını sağlayan, (X üstündeki sıralamaya göre) sıra artan bir fonksiyon ve

(a) f dönüşümü vektörel sürekli veya

(b) (x_n) sıra artan bir dizi ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken her n için $x_n \preceq x$ olsun.

Eğer $u \preceq f(u)$ olacak şekilde $u \in X$ varsa f fonksiyonunun X içinde bir sabit noktası vardır.

İspat

Öncelikle $u = x_0$ olarak alınsın ve (x_n) dizisi her n için $x_n = f(x_{n-1})$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda her n için

$$x_{n+1} = f(x_n) = f^2(x_{n-1}) = \ldots = f^n(x_1) = f^{n+1}(x_0)$$

olur. Bir de f dönüşümünün sıra artan olduğu kullanılırsa, herhangi bir n için

$$x_0 \preceq f(x_0) = x_1 \preceq \cdots \preceq f(x_{n-1}) = f^n(x_0) = x_n$$

sağlandığı görülür. Ayrıca (x_n) dizisi sıra artan olduğundan

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leqslant kd(x_{n-1}, x_n) = kd(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \\ &\leqslant k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) = k^2 d(f(x_{n-3}), f(x_{n-2})) \\ &\ \ \vdots \\ &\leqslant k^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden her n ve p için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leqslant (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1})\, d(x_0, x_1) \\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

sağlanır. Üstelik E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan (x_n) dizisi E-Cauchy dizisidir. X uzayı E-tam olduğundan $x_n \overset{d,E}{\to} x$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcuttur. Böylece E içinde, $a_n \downarrow 0$ ve her n için $d(x_n, x) \leqslant a_n$ olacak şekilde bir (a_n) dizisi mevcuttur. Şimdi ispatın kalan kısmı her iki durum için de ayrı ayrı incelenecektir.

1. Durum: f vektörel sürekli olsun. E içinde $b_n \downarrow 0$ ve her n için $d(f(x_n), f(x)) \leqslant b_n$

olacak şekilde bir (b_n) dizisi mecuttur. Bu yüzden her n için

$$d(f(x),x) \leqslant d(f(x),f(x_n)) + d(f(x_n),x)$$

$$\leqslant b_n + d(x_{n+1},x) \leqslant b_n + a_{n+1} \leq b_n + a_n$$

ve $b_n + a_n \downarrow 0$ olduğundan $d(f(x),x) = 0$ elde edilir, yani $f(x) = x$ olur.

2. Durum: Her n için $x_n \preceq x$ olsun. Böylece

$$d(f(x),x) \leqslant d(f(x_n),f(x)) + d(f(x_n),x)$$

$$\leqslant kd(x_n,x) + d(x_{n+1},x)$$

$$\leqslant ka_n + a_{n+1}$$

$$\leqslant (k+1)a_n$$

sağlanır. Ayrıca $(k+1)a_n \downarrow 0$ olduğundan, $d(f(x),x) = 0$ bulunur. Sonuç olarak x, f fonksiyonunun bir sabit noktasıdır.

Yukarıdaki teorem sabit noktanın varlığı için yeterli olmasına karşın tekliği için yeterli değildir. Teklik için bu teoremin hipotezinlerine ek bir koşul koyulması gerekir. Bu konuya birazdan değinilecektir. X üstündeki kısmî sıralamaya $(\preceq)$ göre, X uzayının herhangi x ve y elemanları için aşağıdaki (1) ve (2) şartları birbirine denktir.

(1) Her x ve y eleman çiftinin üst veya alt sınırı olsun.

(2) Her x ve y eleman çifti ile karşılaştırılabilecek bir $z \in X$ elemanı var olsun.

Bu şartlar aşağıdakilerden daha zayıftır:

(3) Her x ve y eleman çifti karşılaştırılabilir olsun.

(4) Her x ve y eleman çifti için $x \vee y$ veya $x \wedge y$, X içinde var olsun.

(5) X bir latis olsun.

(6) X Dedekind (σ-)tam olsun.

Yukarıdaki şartların herhangi biri Teorem 3.1.1'in hipotezlerine eklenirse sabit noktanın tekliği elde edilir. Ancak diğerlerinden daha zayıf olan (1) veya (2) şartları kullanılacaktır.

3.1.2. Teorem

Teorem 3.1.1'in hipotezlerine (1) şartı eklenirse f fonksiyonunun x sabit noktası tek olur. Ayrıca her $u \in X$ için $f^n(u) \overset{d,E}{\to} x$ sağlanır.

İspat

Standart prosedür olarak f fonksiyonun bir diğer sabit noktasının y olduğu kabul edilsin. Burada amaç, $d(x,y) = 0$ olduğunun gösterilmesidir. Ancak iki durum da ayrı ayrı düşünülmelidir.

1. Durum: Eğer x ve y karşılaştırılabilir elemanlar ise

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x,y)$$

elde edilir. Ayrıca $k \in [0,1)$ olduğundan $d(x,y) = 0$ bulunur.

2. Durum: Eğer x ve y karşılaştırılamayan elemanlar ise, bu durumda X içinde x ve y ile karşılaştırılabilecek bir z elemanı vardır. Ayrıca f fonksiyonunun monotonluğu $f^n(z)$'nin de her n için $f^n(x) = x$ ve $f^n(y) = y$ ile karşılaştırılabilir olmasını gerektirir. Bu yüzden her n için

$$d(x,y) \leqslant d(f^n(x), f^n(z)) + d(f^n(z), f^n(y)) \leqslant k^n[d(x,z) + d(z,y)]$$

olur. E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan $d(x,y) = 0$ elde edilir. Yani f fonksiyonunun sabit noktası tektir.

Diğer bir yandan herhangi bir $u \in X$ için

(i) x ile u karşılaştırılabilir ise $f^n(x) = x$ ile $f^n(u)$ ile karşılaştırılabilirdir ve böylece her n için

$$d(f^n(u), x) \leqslant k^n d(u, x)$$

elde edilir.

(ii) x ile u karşılaştırılamaz ise x ve u ile karşılaştırılabilecek bir $z \in X$ elemanı vardır ve her n için

$$d(f^n(u), x) \leqslant d(f^n(u), f^n(z)) + d(f^n(z), f^n(x)) \leqslant k^n[d(u,z) + d(z,x)]$$

elde edilir, çünkü her n için $f^n(z)$ ile $f^n(x) = x$ ve $f^n(u)$ karşılaştırılabilirdir. E bir Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan, (i)'de $k^n d(u,x) \downarrow 0$ ve (ii)'de $k^n[d(u,z)+d(z,x)] \downarrow 0$ olur. Hem (i) hem de (ii) sayesinde $f^n(u) \xrightarrow{d,E} x$ sonucuna ulaşılır.

Örnek

$X = \{1,2,3,4\}$ üstündeki sıralama $x, y \in X$ olmak üzere;

$$x \preceq y \Leftrightarrow y = kx \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{N} \text{ vardır}$$

biçiminde tanımlansın ve $E = \mathbb{R}^2$ koordinat sıralaması ile donatılsın. Bilindiği üzere, $\mathbb{R}^2$ bu sıralamaya göre Arşimedyan Riesz uzayıdır. Bir $d : X \times X \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$d(x,y) = \begin{cases} \left(|x-y|, \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|\right) &, \quad (x,y) \notin \{(2,4),(4,2)\} \\ (4,4) &, \quad (x,y) \in \{(2,4),(4,2)\} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa X, $\mathbb{R}^2$-tam sıralı vektör metrik uzay olur. Ayrıca

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & , \quad x \neq 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f : X \to X$ fonksiyonu sıra artan bir fonksiyondur ve $u = 1 \preceq f(1)$ ve $k = 2/3$ değeri için (3.1) şartını sağlar. Ayrıca Teorem 3.1.1'deki (b) şartı sağlanır ve $1 \in X$ elemanı X içinden alınan her bir eleman çifti ile karşılaştırılabilirdir. Yani (1) şartı da sağlanmış olur. Bu yüzden f fonksiyonunun sabit noktası tektir ve bu sabit nokta 1'dir. Fakat f, X üstünde tanımlanan herhangi bir reel değerli metrik ile büzülme dönüşümü değildir. Bu yüzden [18]'deki Teorem 2.1, bu örneğe uygulanamaz.

Bu kısımdan itibaren ele alınacak olan varlık teoremlerinde (1) şartı hipotezlere dahil edilecektir. Bu şart sadece sabit noktanın tekliği ile ilgilidir. Teklik kısmının ispatı Teorem 3.1.2'de yapılan ispat ile çok benzerdir.

Yukarıda elde edilen sonuçların benzerlerine sıra azalan diziler vasıtasıyla da ulaşılabilir.

3.1.3. Teorem

X E-tam sıralı vektör metrik uzay olsun ve (1) şartı sağlansın. Ayrıca $f : X \to X$ (3.1) şartını sağlayan, sıra artan bir fonksiyon ve

(a) f vektörel sürekli veya

(b) (x_n) sıra azalan bir dizi ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken, her n için $x \preceq x_n$ olsun.

Eğer $f(u) \preceq u$ olacak biçimde bir $u \in X$ varsa, f fonksiyonunun X içinde bir tek sabit noktası vardır.

İspat

Öncelikle $u = x_0$ alınsın ve (x_n) dizisi her n için $x_n = f(x_{n-1})$ biçiminde tanımlansın.

Her n için $x_{n+1} = f^{n+1}(x_0)$ ve f fonksiyonu sıra artan olduğundan herhangi bir n için

$$x_0 \succeq f(x_0) = x_1 \succeq \cdots \succeq f(x_{n-1}) = f^n(x_0) = x_n$$

sağlanır. İspatın geri kalan kısmında sabit noktanın var olduğunu göstermek için Teorem 3.1.1'in ispatında yapılanların benzeri, sabit noktanın tekliğini göstermek için Teorem 3.1.2'nin ispatında yapılanların benzeri yapılır.

3.2. Sıra Azalan Fonksiyonların Teoremleri

Bu kesimde sıra azalan fonksiyonlar için sabit nokta sonuçları verilecektir.

3.2.1. Teorem

X E-tam sıralı vektör metrik uzay olsun ve (1) şartı sağlansın. Ayrıca $f : X \to X$ (3.1) şartını sağlayan, sıra azalan bir fonksiyon ve

(a) f vektörel sürekli olsun veya

(b) (x_n) dizisi her n için $x_n \lesseqgtr x_{n+1}$ şartını sağlasın ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken, her n_m için $x_{n_m} \lesseqgtr x$ olacak şekilde bir (x_{n_m}) alt dizisine sahip olsun.

Eğer $f(u) \lesseqgtr u$ olacak biçimde bir $u \in X$ varsa, f fonksiyonunun X içinde bir tek sabit noktası vardır.

İspat

Öncelikle $u = x_0$ alınsın ve (x_n) dizisi $x_n = f(x_{n-1})$ biçiminde tanımlansın. Her n için $x_{n+1} = f^{n+1}(x_0)$ olduğundan hipotez gereğince her n için x_n ve x_{n+1} karşılaştırılabilirdir. Genelliği bozmaksızın $x_0 \preceq f(x_0)$ kabul edilsin. Fonksiyon sıra azalan olduğundan herhangi bir n için

$$x_0 \preceq f(x_0) = x_1$$

$$\succeq f(x_1) = f^2(x_0) = x_2$$

$$\preceq f(x_2) = f^3(x_0) = x_3$$

$$\succeq f(x_3) = f^4(x_0) = x_4$$

$$\vdots$$

sağlanır. Tümevarım yönteminden her n için

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n d(x_1, x_0)$$

elde edilir, çünkü (x_n) dizisinin ardışık terimleri karşılaştırılabilirdir. Teorem 3.1.1'in ispatından görülebileceği gibi her n ve p için

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

bulunur ve bu durum, E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan (x_n) dizisinin E-Cauchy olduğu anlamına gelir. X uzayının E-tamlığından $x_n \overset{d,E}{\to} x$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanının var olduğu sonucuna varılır.

Eğer f vektörel sürekli ise Teorem 3.1.1'in ispatından yararlanılarak x elemanının f fonksiyonunun sabit noktası olduğu kolayca görülebilir. Ancak (x_n) dizisi monoton olmasa bile ardışık herhangi iki terimi karşılaştırılabilirdir ve dizi x'e vektörel yakınsaktır. Şimdi de (b) hipotezine gelinecek olursa, yani (x_n) dizisinin her bir terimi x ile karşılaştırılabilen bir (x_{n_m}) alt dizisi var olsun. E içinde $a_n \downarrow 0$ ve her n için $d(x_n, x) \leqslant a_n$ olacak şekilde bir (a_n) dizisi var olduğundan her m için

$$d(x, f(x)) \leqslant d(x, x_{n_{m+1}}) + d(f(x), x_{n_{m+1}})$$

$$\leqslant d(x, x_{n_{m+1}}) + d(f(x), f(x_{n_m}))$$

$$\leqslant d(x, x_{n_{m+1}}) + kd(x, x_{n_m})$$

$$\leqslant a_{n_{m+1}} + k a_{n_m}$$

$$\leqslant (k+1) a_{n_m}$$

elde edilir. Bu yüzden $f(x) = x$ olur. Sabit noktanın tek olduğu da Teorem 3.1.2'nin ispatında yapılanlara benzer bir şekilde gösterilebilir.

Örnek

Sınırlı reel sayı dizilerin ℓ_∞ kümesi $(x_n) \preceq (y_n) \Leftrightarrow$ her n için $x_n \leq y_n$ biçiminde tanımlanan $\preceq$ doğal sıralaması ile donatılsın. Aynı sıralama ve alışılmış işlemlerle $\ell_1 = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$ kümesi Arşimedyan Riesz uzayıdır. Ayrıca

$$d((x_n),(y_n)) = \left(\frac{1}{2^n}\,|x_n - y_n|\right)$$

biçiminde tanımlanan $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \ell_1$ dönüşümü ile $X = \ell_\infty$ bir ℓ_1-tam sıralı vektör metrik uzaydır. Ek olarak, X içinde genel terimi

$$x_m^n = \begin{cases} 2 & , \quad m = 1 \\ 1/2 & , \quad 2 \leq m \leq n+1 \\ 1 & , \quad m > n+1 \end{cases}$$

olan $(x_n) = ((x_m^n))$ dizisi tanımlansın. Bu (x_n) dizisi sıra azalan bir dizidir ve $x_n \overset{d,\ell_1}{\to} \mathbf{1} = (1,1,\ldots)$ olur. Bu dizinin tüm terimleri $\mathbf{1}$ sabit dizisi ile kıyaslanamadığından (b) şartı sağlanmaz. Ancak $f(x) = x/2$ kuralı ile tanımlanan $f : \ell_\infty \to \ell_\infty$ fonksiyonu monoton ve vektörel süreklidir. Her $x \in \ell_\infty$ için, $f(x) \preceq x$ ve f fonksiyonu (3.1) şartını $k = 1/2$ değeri için sağladığından, f'in tek sabit noktası $\mathbf{0} = (0,0,\ldots)$ elemanıdır.

Teorem 3.1.1 (b) veya Teorem 3.1.3 (b) şartlarının varlığı Teorem 3.2.1 (b) şartının da varlığını gerektirir. Tersine herhangi $x, y, z \in X$ elemanları için $y \preceq x \preceq z$ iken $d(x,z) \leqslant d(y,z)$ ve Teorem 3.2.1 (b) geçerli ise iteratif dizinin monotonluğundan, Teorem 3.1.1 (b) ve Teorem 3.1.3 (b) de geçerlidir. (Not 1, [19]).

Sıradaki teorem ile monoton fonksiyonların hangi koşul altında sabit noktasının var olduğundan ve bu noktanın tekliği için hangi koşulların gerektiğinden bahsedilecektir.

3.2.2. Teorem

X bir E-tam sıralı vektör metrik uzay olsun ve (1) şartı sağlansın. Ayrıca $f : X \to X$ (3.1) şartını sağlayan monoton bir fonksiyon ve

(a) f vektörel sürekli veya

(b) (x_n) dizisi her n için $x_n \leqslant x_{n+1}$ koşulunu sağlasın ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken, her n_m için $x_{n_m} \leqslant x$ olacak şekilde bir (x_{n_m}) alt dizisine sahip olsun.

Eğer $f(u) \leqslant u$ olacak biçimde bir $u \in X$ varsa, f fonksiyonunun X içinde bir tek sabit noktası vardır.

3.3. Monoton Olmayan Fonksiyonların Teoremleri

Şimdi de monotonluk şartından daha zayıf bir şartla sabit nokta teoremi verilecektir.

3.3.1. Teorem

X bir E-tam sıralı vektör metrik uzay olsun ve (1) şartı sağlansın. Ayrıca $f : X \to X$ (3.1) şartını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in X$ için $x \preceq y$ iken $f(x) \leqslant f(y)$ ve aşağıdakilerden biri

(a) f vektörel sürekli veya

(b) (x_n) dizisi her n için $x_n \leqslant x_{n+1}$ ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken her n_m için $x_{n_m} \leqslant x$ olacak şekilde bir (x_{n_m}) alt dizisine sahip olsun.

Eğer $f(u) \leqslant u$ olacak biçimde bir $u \in X$ varsa f fonksiyonunun X içinde bir tek sabit noktası vardır.

İspat

Öncelikle $u = x_0$ alınsın ve (x_n) dizisi her n için $x_n = f(x_{n-1})$ biçiminde tanımlansın. Her n için $x_{n+1} = f^{n+1}(x_0)$ ve f fonksiyonu karşılaştırılabilir elemanları karşılaştırılabilir elemanlara dönüştürdüğünden, hipotez gereğince her n için x_n ve x_{n+1} karşılaştırılabilirdir. İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.2.1'in ispatında olduğu gibi yapılır.

Örnek

$X = \{(x,0),(0,x) : x \in [0,1]\}$ üstündeki sıralama

$(x,0) \preceq (y,0) \Leftrightarrow x \leq y$ ve $(0,x) \preceq (0,y) \Leftrightarrow x \leq y,\ x \neq 0,\ y \neq 0$

olmak üzere $\mathbb{R}^2$ daha önce de bahsi geçen koordinat sıralaması ile donatılsın. Bununla birlikte $d : X \times X \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$d((x,0),(y,0)) = (2\,|x-y|\,,|x-y|)$$

$$d((0,x),(0,y)) = \left(|x-y|\,, \frac{1}{2}\,|x-y|\right)$$

$$d((x,0),(0,y)) = \left(2x+y, x+\frac{y}{2}\right)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda d dönüşümüyle X uzayı $\mathbb{R}^2$-tam sıralı vektör metrik uzaydır. Ayrıca $f : X \to X$ fonksiyonu $x \in [0,1]$ için $f((x,0)) = (0,x)$ ve $x \in (0,1]$ için $f((0,x)) = \left(0, 1-\frac{x}{2}\right)$ olsun. Bu durumda f vektörel süreklidir, fakat monoton değildir. Her $x \in [0,1]$ için, $(0,x) \lessgtr f((0,x))$ olur ve f fonksiyonu (3.1) şartını $k = 1/2$ için sağlar. Burada $(0,0)$ ve $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ elemanları f fonksiyonunun sabit noktalarıdır. Tıpkı $(1,0)$ ve $(0,1)$ elemanlarının X içinde alt ve üst sınırları olmadığı gibi $(0,0)$ ve $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ elemanlarının da X içinde alt ve üst sınırları yoktur. Bu yüzden f fonksiyonunun sabit noktası tek değildir. Ayrıca [18]'de metrik uzaylar için verilmiş olan Teorem 7 bu örneğe uygulanamaz çünkü X üstündeki herhangi bir reel değerli metrik için f büzülme dönüşümü değildir.

4. İKİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde sıralı vektör metrik uzaylar üstünde önce karma monoton özelliğe sahip olan fonksiyonlar için ikili sabit nokta sonuçları verilecektir. Daha sonra bu sonuçlar çift monoton özelliğe sahip olan fonksiyonlar için tekrar yorumlanacaktır. Son olarak bu iki monotonluk özelliğine de sahip olmayan fonksiyonlar için sabit nokta sonuçları verilecektir.

4.1. Karma Monoton Özelliğe Sahip Fonksiyonların Teoremleri

Bu kesimde sonuçlara geçmeden önce karma monoton özelliğe sahip fonksiyon ve ikili sabit nokta gibi kavramlar hatırlatılacaktır. Verilen sıralı bir $(X, \preceq)$ kümesindeki sıralama vasıtasıyla X^2 üstünde birçok sıralama tanımlanabilir. Örneğin her $s, r, x, y \in X$ elemanı için

$(s, r) \preccurlyeq (x, y) \Leftrightarrow s \preceq x$ ve $y \preceq r$

biçiminde verilen bağıntı X^2 üstünde tanımlanabilecek sıralama bağıntılarından biridir. Bu bağıntı bu kesimde önemli bir yere sahiptir. X sıralı bir küme iken aksi belirtilene kadar X^2 üstündeki sıralamanın bu olduğu düşünülecektir. Ayrıca bir $T : X^2 \to X$ fonksiyonu herhangi iki $s, r \in X$ ve her $x, y \in X$ elemanları için $s \preceq r$ iken

$T(s, y) \preceq T(r, y)$ ve $T(x, r) \preceq T(x, s)$

koşulunu sağlarsa, bu fonksiyon karma monoton özelliğine sahiptir denir. Diğer yandan, $T : X^2 \to X$ bir fonksiyon olmak üzere, bir $(x, y) \in X^2$ elemanı için $T(x, y) = x$ ve $T(y, x) = y$ sağlanıyorsa bu elemana T fonksiyonunun ikili sabit noktası denir [20].

4.1.1. Teorem

X E-tam sıralı vektör metrik uzay ve $T : X^2 \to X$ karma monoton özelliğe sahip fonksiyon olsun. T vektörel sürekli veya X aşağıdaki iki özelliğe sahip olsun:

(i) (x_n) sıra artan bir dizi ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken her n için $x_n \preceq x$,

(ii) (y_n) sıra azalan bir dizi ve $y_n \overset{d,E}{\to} y$ iken her n için $y \preceq y_n$.

Ayrıca T fonksiyonu $z \preceq x$, $y \preceq w$ koşuluyla alınan her $z, w, y, x \in X$ ve bir $k \in [0,1)$ için

$$d(T(x,y), T(z,w)) \leqslant \frac{k}{2}[d(x,z) + d(y,w)]$$

büzülme şartını sağlasın. Eğer $s \preceq T(s,r)$ ve $r \succeq T(r,s)$ olacak şekilde $s, r \in X$ elemanları mevcutsa T fonksiyonun X^2 içinde ikili sabit noktası vardır.

İspat

Öncelikle $s = x_0$ ve $r = y_0$ olsun. Her n için $x_n = T(x_{n-1}, y_{n-1})$ ve $y_n = T(y_{n-1}, x_{n-1})$ biçiminde tanımlanan (x_n) ve (y_n) dizileri için

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= T(x_n, y_n) = T(T(x_{n-1}, y_{n-1}), T(y_{n-1}, x_{n-1})) \\
&= T^2(x_{n-1}, y_{n-1}) = T^2(T(x_{n-2}, y_{n-2}), T(y_{n-2}, x_{n-2})) \\
&= T^3(x_{n-2}, y_{n-2}) = T^3(T(x_{n-3}, y_{n-3}), T(y_{n-3}, x_{n-3})) \\
&\ \vdots \\
&= T^n(x_1, y_1) = T^n(T(x_0, y_0), T(y_0, x_0)) = T^{n+1}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. T karma monoton özelliğe sahip olduğu için

$$\begin{aligned}
x_0 &\preceq T(x_0, y_0) = x_1 \\
&\preceq T(x_1, y_1) = T^2(x_0, y_0) = x_2 \\
&\preceq T(x_2, y_2) = T^3(x_0, y_0) = x_3
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\preceq T(x_{n-1}, y_{n-1}) = T^n(x_0, y_0) = x_n$$

olur. Benzer şekilde $y_{n+1} = T^n(y_1, x_1) = T^n(T(y_0, x_0), T(x_0, y_0)) = T^{n+1}(y_0, x_0)$ ve $y_0 \succeq y_1 \succeq \cdots \succeq y_n$ elde edilir. Böylece her n için

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+1}) &= d(T(x_{n-1}, y_{n-1}), T(x_n, y_n)) \\
&\leqslant \frac{k}{2}[d(x_{n-1}, x_n) + d(y_{n-1}, y_n)] \\
&= \frac{k}{2}[d(T(x_{n-2}, y_{n-2}), T(x_{n-1}, y_{n-1})) + d(T(y_{n-2}, x_{n-2}), T(y_{n-1}, x_{n-1}))] \\
&\leqslant \frac{k}{2}\left[\frac{k}{2}[d(x_{n-2}, x_{n-1}) + d(y_{n-2}, y_{n-1})] + \frac{k}{2}[d(y_{n-2}, y_{n-1}) + d(x_{n-2}, x_{n-1})]\right] \\
&= \frac{k^2}{2}[d(x_{n-2}, x_{n-1}) + d(y_{n-2}, y_{n-1})] \\
&\leqslant \frac{k^3}{2}[d(x_{n-3}, x_{n-2}) + d(y_{n-3}, y_{n-2})] \\
&\ \ \vdots \\
&\leqslant \frac{k^n}{2}[d(x_0, x_1) + d(y_0, y_1)]
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $d(y_n, y_{n+1}) \leqslant \dfrac{k^n}{2}[d(x_0, x_1) + d(y_0, y_1)]$ sağlanır. Dolayısıyla her p ve n için

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
&\leqslant \left(\frac{k^n}{2} + \frac{k^{n+1}}{2} + \cdots + \frac{k^{n+p-1}}{2}\right)[d(x_0, x_1) + d(y_0, y_1)] \\
&\leqslant \frac{k^n}{2(1-k)}[d(x_0, x_1) + d(y_0, y_1)]
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $d(y_n, y_{n+p}) \leqslant \frac{k^n}{2(1-k)}[d(x_0, x_1) + d(y_0, y_1)]$ elde edilir. E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan (x_n) ve (y_n) E-Cauchy dizileridir. X uzayının E-tamlığından $x_n \overset{d,E}{\to} x$ ve $y_n \overset{d,E}{\to} y$ olacak şekilde x,$y \in X$ elemanları vardır. Bu yüzden $a_n \downarrow 0$, $b_n \downarrow 0$ ve her n için $d(x_n, x) \leqslant a_n$, $d(y_n, y) \leqslant b_n$ koşullarını sağlayan (a_n) ve (b_n) dizileri E içinde mevcuttur. İspatın geri kalan kısmı iki durum için ayrı ayrı incelenecektir.

1. Durum: T vektörel sürekli olsun. Bu durumda $c_n \downarrow 0$ ve her n için $d(T(x_n, y_n), T(x, y)) \leqslant c_n$ olacak şekilde bir (c_n) dizisi E içinde mevcuttur.

Bu yüzden her n için

$$
\begin{aligned}
d(T(x,y),x) &\leqslant d(T(x_n,y_n),T(x,y)) + d(T(x_n,y_n),x) \\
&\leqslant c_n + d(x_{n+1},x) \\
&\leqslant c_n + a_{n+1} \leqslant c_n + a_n
\end{aligned}
$$

olduğundan $d(T(x,y),x) = 0$ elde edilir ki bu da $T(x,y) = x$ olduğu anlamına gelir. Benzer şekilde $T(y,x) = y$ sonucuna varılır.

2. Durum: Her n için $x_n \preceq x$ ve $y \preceq y_n$ olsun. Her n için

$$
\begin{aligned}
d(T(x,y),x) &\leqslant d(T(x_n,y_n),T(x,y)) + d(T(x_n,y_n),x) \\
&\leqslant \frac{k}{2}[d(x_n,x) + d(y_n,y)] + d(x_{n+1},x) \\
&\leqslant \frac{k}{2}[a_n + b_n] + a_{n+1} \leqslant \frac{k}{2}b_n + \frac{3k}{2}a_n
\end{aligned}
$$

sağlanır ve böylece $d(T(x,y),x) = 0$ elde edilir ki, bu da $T(x,y) = x$ olduğu anlamına gelir. Yine benzer şekilde $T(y,x) = y$ sonucuna varılır.

Yukarıdaki teorem sabit noktanın varlığını garanti eder ve uygun bir koşul altında fonksiyonun vektörel sürekli olmasının gerekmediğini gösterir. Ancak bu teorem ikili sabit noktanın tekliği için yeterli değildir.

Örnek

$X = \{2, 3\} \subseteq \mathbb{N}^{+}$ kümesi alınsın. X^2 üstünde

$(x, y) \preccurlyeq (s, r) \Leftrightarrow s = kx$ ve $y = lr$ olacak şekilde $k, l \in \mathbb{N}^{+}$ var

biçiminde tanımlanan bağıntı bir sıralama bağıntısıdır. Ayrıca $E = \mathbb{R}$ alınsın ve alışılmış sıralama ile donatılsın. Bu durumda X bir E-tam sıralı vektör metrik uzay olur. Bununla beraber $T : X^2 \to X$ fonksiyonu $T(2, 3) = T(3, 3) = 2$ ve $T(3, 2) = T(2, 2) = 3$ biçiminde tanımlandığında Teorem 4.1.1'in bütün hipotezleri sağlanır. T ikili sabit noktaya sahiptir, fakat bu sabit nokta tek değildir, çünkü $(2, 3)$ ve $(3, 2)$ elemanlarının ikisi de T fonksiyonun ikili sabit noktalarıdır.

Bu nedenle ikili sabit noktanın tek olması için Teorem 4.1.1'in hipotezlerine ek bir koşul koyulması zorunludur. Bu teoremdeki koşullara ek olarak, X^2 Dedekind (σ-)tam veya bir latis olursa ikili sabit noktanın tekliği elde edilebilir. Ayrıca X^2 kümesindeki herhangi iki (x, y) ve (s, r) elemanları karşılaştırılabilirlerse veya bu elemanların supremumu olan $(x, y) \vee (s, r) = (x \vee s, y \wedge r)$ ve infimumu olan $(x, y) \wedge (s, r) = (x \wedge s, y \vee r)$ elemanlardan en az biri X^2 kümesi içinde mevcut olursa ikili sabit nokta yine tek olur. Ancak, bu şartlardan daha zayıf olan bir şart Teorem 4.1.1'in hipotezlerine eklenirse de ikili sabit noktanın tekliği elde edilebilir. Bu şart, X^2 kümesinin herhangi iki (x, y) ve (s, r) elemanı için

(1) $\{(x, y), (s, r)\}$ kümesinin bir alt sınırı veya üst sınırı X^2 içinde var olması veya,

(2) (x, y) ve (s, r) ile karşılaştırılabilecek bir $(z, w) \in X^2$ var olmasıdır. Bu yüzden bir sonraki teoremde bu şartlardan biri kullanılacaktır.

4.1.2. Teorem

Teorem 4.1.1'in hipotezlerine (1) şartı eklenirse, T fonksiyonunun ikili sabit noktası tek olur.

İspat

T fonksiyonun diğer bir ikili sabit noktasının (s,r) elemanı olduğu kabul edilsin. Burada $\tilde{d}\left((s,r),(x,y)\right)=0$ olduğu iki durumda ayrı ayrı gösterilecektir.

1. Durum: (s,r) ve (x,y) elemanları karşılaştırılabilir olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tilde{d}\left((x,y),(s,r)\right) &= d\left(x,s\right)+d\left(y,r\right) \\
&= d\left(T\left(x,y\right),T(s,r)\right)+d\left(T\left(y,x\right),T(r,s)\right) \\
&\leqslant k\left[d\left(x,s\right)+d\left(y,r\right)\right]=k\tilde{d}\left((x,y),(s,r)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir ki $k\in[0,1)$ olduğundan $\tilde{d}\left((x,y),(s,r)\right)=0$ sağlanır.

2. Durum: (s,r) ve (x,y) elemanları karşılaştırılabilir olmasın. Bu durumda $\{(x,y),(s,r)\}$ kümesinin bir alt ya da üst sınırı olan $(z_1,z_2)\in X^2$ vardır. Başka bir deyişle (x,y) ve (s,r) ile karşılaştırılabilir bir (z_1,z_2) elemanı vardır. Böylece $\left(T^n\left(x,y\right),T^n\left(y,x\right)\right)=(x,y)$ ve $(T^n(s,r),T^n(r,s))=(s,r)$ elemanları her n için $\left(T^n\left(z_1,z_2\right),T^n\left(z_2,z_1\right)\right)$ ile karşılaştırılabilirdir. Buradan her n için

$$\begin{aligned}
\tilde{d}\left((x,y),(s,r)\right) &= \tilde{d}\left(\left(T^n\left(x,y\right),T^n\left(y,x\right)\right),\left(T^n(s,r),T^n(r,s)\right)\right) \\
&\leqslant \tilde{d}\left(\left(T^n\left(x,y\right),T^n\left(y,x\right)\right),\left(T^n\left(z_1,z_2\right),T^n\left(z_2,z_1\right)\right)\right) \\
&\quad+\tilde{d}\left(\left(T^n\left(z_1,z_2\right),T^n\left(z_2,z_1\right)\right),\left(T^n(s,r),T^n(r,s)\right)\right) \\
&\leqslant k^n\left(\left[d\left(x,z_1\right)+d\left(y,z_2\right)\right]+\left[d\left(z_1,s\right)+d\left(z_2,r\right)\right]\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan $\tilde{d}\left((s,r),(x,y)\right)=0$ sonucuna varılır.

Bir sonraki teorem, Teorem 4.1.1'in hipotezlerine ek olarak X üzerine belirli bir şart koyulduğunda ikili sabit noktanın bileşenlerinin eşit olduğunu göstermektedir.

4.1.3. Teorem

Teorem 4.1.1'in hipotezlerine ek olarak, X içinde alınan her eleman çifti için bir alt veya üst sınır var olursa T fonksiyonunun ikili sabit noktasının bileşenleri eşit olur.

İspat

Öncelikle T fonksiyonunun ikili sabit noktası (x, y) olsun. Burada iki farklı durum da ayrı ayrı incelenmelidir.

1. Durum: Eğer x ve y karşılaştırılabilir elemanlar olursa

$$d(x, y) = d(T(x, y), T(y, x)) \leqslant kd(x, y).$$

elde edilir. Bununla beraber $k \in [0, 1)$ olduğundan $x = y$ sonucuna ulaşılır.

2. Durum: Şimdi de x ve y karşılaştırılamayan elemanlar ve $\{x, y\}$ kümesinin bir üst sınırı z olsun. Bu durumda

$$T(x, y) \preceq T(z, y) \text{ ve } T(x, y) \succeq T(x, z) \text{ ve}$$

$$T(y, x) \preceq T(z, x) \text{ ve } T(y, x) \succeq T(y, z)$$

sağlanır. T fonksiyonunun karma monoton özelliğinden her m için

$$T^{m+1}(x, y) = T^m(T(x, y), T(y, x)) \preceq T^m(T(z, y), T(y, z)) = T^{m+1}(z, y),$$

$$T^{m+1}(x, y) = T^m(T(x, y), T(y, x)) \succeq T^m(T(x, z), T(z, x)) = T^{m+1}(x, z),$$

$$T^{m+1}(y, x) = T^m(T(y, x), T(x, y)) \preceq T^m(T(z, x), T(x, z)) = T^{m+1}(z, x),$$

$$T^{m+1}(y, x) = T^m(T(y, x), T(x, y)) \succeq T^m(T(y, z), T(z, y)) = T^{m+1}(y, z)$$

elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= d(T^{m+1}(x,y), T^{m+1}(y,x)) \\
&\leqslant d(T(T^m(x,y), T^m(y,x)), T(T^m(x,z), T^m(z,x))) \\
&\quad + d(T(T^m(x,z), T^m(z,x)), T(T^m(z,x), T^m(x,z))) \\
&\quad + d(T(T^m(z,x), T^m(x,z)), T(T^m(y,x), T^m(x,y)))
\end{aligned}
$$

olur. T fonksiyonunun aynı zamanda bir büzülme dönüşümü olması sayesinde

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &\leqslant \frac{k}{2}[d(T^m(x,y), T^m(x,z)) + d(T^m(y,x), T^m(z,x)) \\
&\quad + d(T^m(x,z), T^m(z,x)) + d(T^m(z,x), T^m(x,z)) \\
&\quad + d(T^m(z,x), T^m(y,x)) + d(T^m(x,z), T^m(x,y))] \\
&= k[d(T^m(x,y), T^m(z,x)) + d(T^m(x,z), T^m(z,x))) + d(T^m(z,x), T^m(x,y))]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $d(x,y) \leqslant k^{m+1}[d(x,z) + d(z,y)]$ olur ki, buradan da E'nin Arşimedyan Riesz uzayı olması sebebiyle $d(x,y) = 0$ sonucu çıkar.

Örnek

$X = \ell_\infty$ sınırlı reel sayı dizileri kümesi ve $E = \ell_1$ kümesi doğal sıralama ile donatılmış olsun. Bu durumda ℓ_∞ ve ℓ_1 Dedekind (σ-)tam Riesz uzayları olur. Ayrıca her $x, y \in \ell_\infty$ için $d(x,y) = \left(\frac{1}{n^2}|x_n - y_n|\right)$ biçiminde tanımlanan $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \ell_1$ dönüşümü bir vektör metrik ve $X = \ell_\infty$ ise bu metrik ile bir ℓ_1-tam sıralı vektör metrik uzayı olur. Bu arada tüm terimleri 1 olan sabit dizi $\mathbf{1}$ ile gösterilecektir. $T(x,y) = \frac{3}{11}x - \frac{1}{11}y + 9.\mathbf{1}$ biçiminde tanımlanan $T : (\ell_\infty)^2 \to \ell_\infty$ fonksiyonu ℓ_∞ üstünde karma monoton özelliğe sahiptir. Bu fonksiyon aynı zamanda vektörel süreklidir ve $k = \frac{6}{11}$ sabiti için büzülme şartını sağlar. Üstelik $(\ell_\infty)^2$ içinde alınan her eleman çifti için bir üst ve alt sınır mevcuttur. Böylece son teoremin tüm hipotezlerinin sağlanır. Sonuç olarak, T bir tek ikili sabit noktaya sahiptir ki, bu da $(11.\mathbf{1}, 11.\mathbf{1})$ elemanından başkası değildir.

X kümesinin Dedekind (σ-)tam olması durumunda $x = y$ olduğunu görmek zor değildir. Ancak, daha önce belirtildiği gibi Teorem 4.1.3'de kullanılan şart bundan çok daha zayıftır. X^2 kümesinde alınan her eleman çifti için bir üst veya alt sınır varsa bu X kümesinin bir latis olmasını gerektirmektedir. Teorem 4.1.1'in hipotezlerine (1) şartı eklendiğinde sadece ikili sabit noktanın tekliği değil, aynı zamanda bileşenlerinin eşitliği elde edilir. Ancak, X kümesinden alınan her eleman çifti için yalnızca bir alt sınır ya da yalnızca bir üst sınır olması durumu X^2 içinde alınan her eleman çiftinin en az bir alt veya üst sınırı olmasını gerektirmez. Örneğin, $X = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}^+$ kümesi ilk bölüm birinci örnekte bahsi geçen sıralama ile donatılmış olsun. Bu durumda 1 elemanının X içinden alınan her eleman çifti için bir alt sınır olduğu kolayca görülebilir. Ancak, X^2 kümesinden alınan $(3, 2)$ ve $(2, 3)$ eleman çifti için ne bir alt sınır ne de bir üst sınır vardır.

Diğer yandan, Teorem 4.1.1'de bahsedilen s ve r elemanlarının karşılaştırılabilir elemanlar olması durumunda ikili sabit noktanın bileşenleri eşit olur.

4.1.4. Teorem

Teorem 4.1.1 in hipotezlerine ek olarak, s ve r elemanları karşılaştırılabilir ise T fonksiyonun (x, y) ikili sabit noktasının bileşenleri eşittir.

İspat

Theorem 4.1.1 gereğince $s \preceq T(s, r)$ olduğu biliniyor. Öncelikle $s \preceq r$ olması halinde her n için $x_n \preceq y_n$ sağlandığı gösterilecektir. Bunun için tümevarım yöntemi kullanılacaktır. Eğer $s \preceq r$ ise T karma monoton özelliğe sahip olduğu için $x_1 = T\,(s, r) \preceq T\,(r, s) = y_1$ elde edilir. Şimdi bazı n ler için $x_n \preceq y_n$ olsun. Bu durumda

$$x_{n+1} = T^{n+1}(s, r) = T(T^n(s, r), T^n(r, s)) = T(x_n, y_n) \preceq T(y_n, x_n) = y_{n+1},$$

olduğundan, her bir n için $x_n \preceq y_n$ elde edilir. Ayrıca $x_n \overset{d,E}{\to} x$ ve $y_n \overset{d,E}{\to} y$ olduğundan E içinde $a_n \downarrow 0$, $b_n \downarrow 0$ ve $d(x_n, x) \leqslant a_n$, $d(y_n, y) \leqslant b_n$ olacak şekilde (a_n) ve her n için (b_n) dizileri mevcuttur. Böylece

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &\leqslant d(x,T^{n+1}(s,r)) + d(T^{n+1}(s,r),T^{n+1}(r,s)) + d(T^{n+1}(r,s),y) \\
&\leqslant a_{n+1} + d(T(T^n(s,r),T^n(r,s)),T(T^n(r,s),T^n(s,r))) + b_{n+1} \\
&\leqslant a_n + kd(T^n(s,r),T^n(r,s)) + b_n \\
&\leqslant a_n + k[d(T^n(s,r),x) + d(x,y) + d(y,T^n(r,s))] + b_n \\
&\leqslant (k+1)(a_n+b_n) + kd(x,y)
\end{aligned}
$$

ve buradan $(1-k)d(x,y) \leqslant (k+1)(a_n+b_n)$ elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafının infimumu 0 olduğundan $d(x,y)=0$ olur. Benzer şekilde $r \preceq s$ olması halinde her bir n için $y_n \preceq x_n$ sonucuna varılır ki, bu da $d(x,y)=0$ olmasını gerektirir.

Buraya kadar elde edilen sonuçlarda E'nin özel olarak $\mathbb{R}$ seçilmesi ve alışılmış sıralama ile donatılması durumunda [20]'de bashedilen sonuçlar elde edilmiş olur. Yani bahsi geçen çalışma bu çalışmanın özel bir durumu haline gelmiş olur. Şimdi verilecek örnek bunu vurgulamaktadır.

Örnek

$X = \{(0,x) : x \in [0,1]\} \cup \{(x,0) : x \in [0,1]\}$ ve $E = \mathbb{R}^2$ ve koordinat sıralaması ile donatılmış olsun.

Bir $d : X \times X \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$d\left((x,0),(y,0)\right) = (\frac{16}{3}\left|x-y\right|, \left|x-y\right|)$$

$$d\left((0,x),(0,y)\right) = (\left|x-y\right|, \frac{1}{6}\left|x-y\right|)$$

$$d\left((x,0),(0,y)\right) = (\frac{16}{3}x+y, x+\frac{1}{6}y)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda d bir vektör metriktir, X kümesi $\mathbb{R}^2$-tam sıralı vektör metrik uzayıdır ve $E = \mathbb{R}^2$ bir Arşimedyan Riesz uzayıdır. Ayrıca

$$T\left((x,0),(y,0)\right) = (0, x(1-y))$$

$$T\left((0,x),(0,y)\right) = (\frac{1}{32}x(1-y), 0)$$

$$T\left((0,x),(y,0)\right) = (\frac{1}{32}x, 0)$$

$$T\left((x,0),(0,y)\right) = (0, x)$$

biçiminde tanımlanan $T : X^2 \to X$ fonksiyonu X üzerinde karma monoton özelliğe sahiptir. Ayrıca T vektörel süreklidir ve büzülme şartını $k = 3/4$ sabiti için sağlar. Bununla birlikte $(0,0)$ elemanı X içinde alınan her eleman çifti için alt sınırdır. Böylece yukarıdaki tüm teoremlerin hipotezleri sağlanmış olur. Bu yüzden T bir tek ikili sabit noktaya sahiptir ve bu ikili sabit noktanın bileşenleri birbirine eşittir. Gerçekten $(0,0)$ elemanı T fonksiyonunun tek ikili sabit noktasıdır. Burada en önemli kısım ise [20]'de elde edilen sonuçların bu örneğe uygulanamayacak olmasıdır, çünkü T fonksiyonu X üstünde tanımlanacak herhangi bir reel değerli metrik ile büzülme dönüşümü olamaz.

Theorem 4.1.1'de yer alan $s \preceq T(s,r)$ ve $r \succeq T(r,s)$ şartı yerine $T(s,r) \preceq s$ ve $T(r,s) \succeq r$ şartı koyulursa benzer sonuçlar elde edilir.

4.1.5. Teorem

X (1) şartını sağlasın ve $T : X^2 \to X$ fonksiyonu X üstünde karma monoton özelliğe sahip olsun. T vektörel sürekli veya X aşağıdaki iki özelliğe sahip olsun:

(i) (x_n) sıra artan bir dizi ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken her n için $x_n \preceq x$,

(ii) (y_n) sıra azalan bir dizi ve $y_n \overset{d,E}{\to} y$ iken, her n için $y \preceq y_n$.

Ayrıca T fonksiyonu $z \preceq x$, $y \preceq w$ koşuluyla alınan her $z, w, y, x \in X$ ve bir $k \in [0,1)$ için

$d(T(x,y),T(z,w)) \leqslant \frac{k}{2}[d(x,z)+d(y,w)]$

büzülme şartını sağlasın. Eğer $T(s,r) \preceq s$ ve $T(r,s) \succeq r$ olacak şekilde $s,r \in X$ elemanları mevcutsa, T fonksiyonunun X^2 içinde bir tek ikili sabit noktası vardır.

İspat

Bu teoremin ispatında Teorem 4.1.1'in ispatındaki adımlar takip edilecektir. Öncelikle $s = x_0$ ve $r = y_0$ olarak belirlensin. Ayrıca her n için $T^n(x_0,y_0) = x_n$ ve $T^n(y_0,x_0) = y_n$ olsun. T fonksiyonunun karma monoton özelliğe sahip olması , $T(x_0,y_0) \preceq x_0$ ve $T(y_0,x_0) \succeq y_0$ sağlanması sebebiyle

$$\cdots \preceq x_n \preceq \cdots \preceq x_2 \preceq x_1 \preceq x_0 \quad \text{ve} \quad y_0 \preceq y_1 \preceq y_2 \preceq \cdots \preceq y_n \preceq \cdots .$$

olur. Theorem 4.1.1'in ispatına benzer şekilde

$$d(x_n,x_{n+1}) \leqslant \frac{k^n}{2}[d(x_0,x_1)+d(y_0,y_1)]$$

$$d(y_n,y_{n+1}) \leqslant \frac{k^n}{2}[d(x_0,x_1)+d(y_0,y_1)]$$

elde edilir ve buradan (x_n) ve (y_n) dizilerinin birer E-Cauchy dizisi olduğu görülür. X'in E-tamlığından $x_n \overset{d,E}{\to} x$ ve $y_n \overset{d,E}{\to} y$ olacak şekilde X içinde x ve y elemanları vardır. Dolayısıyla $a_n \downarrow 0$, $b_n \downarrow 0$ ve her n için $d(x_n,x) \leqslant a_n$, $d(y_n,y) \leqslant b_n$ olacak şekilde E içinde (a_n) ve (b_n) dizileri vardır. Yine Teorem 4.1.1'in ispatında olduğu gibi T fonksiyonunun vektörel sürekli olması durumunda (x,y) elemanı T fonksiyonun bir ikili sabit noktası olur. Bu yüzden diğer duruma odaklanılırsa $x_n \overset{d,E}{\to} x$ ve her n için $x_n \preceq x$ olduğundan

$$\begin{aligned} d(T(x,y),x) &\leqslant d(T(x,y),T(x_n,y_n)) + d(T(x_n,y_n),x) \\ &\leqslant \frac{k}{2}[d(x,x_n)+d(y,y_n)] + d(x_{n+1},x) \\ &\leqslant \frac{k}{2}[a_n+b_n] + a_{n+1} \leqslant \frac{k}{2}b_n + \frac{3k}{2}a_n \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $d(T(x,y),x) = 0$, yani $T(x,y) = x$ olur. Benzer bir şekilde. $T(y,x) = y$ sonucuna ulaşılır.

X uzayındaki vektörel yakınsak ve karşılaştırılabilir ardışık terimlere sahip olan her dizinin, her bir terimi dizinin limitiyle karşılaştırılabilir bir alt dizisi varsa $T : X^2 \to X$ fonksiyonu bir ikili sabit noktaya sahip olur. Yani X aşağıdaki şartı sağlaması halinde bu varlıktan söz edilebilir:

(iii) X uzayında bir x elemanına vektörel yakınsak ve her n için $x_n \lesseqgtr x_{n+1}$ koşulunu sağlayan (x_n) dizilerinin her n_m için $x_{n_m} \lesseqgtr x$ koşulunu sağlayan bir (x_{n_m}) dizisi var olsun.

4.1.6. Teorem

X, (1) şartını sağlayan bir E-tam sıralı vektör metrik uzay ve $T : X^2 \to X$ karma monoton özelliğe sahip olan bir fonksiyon olmak üzere, X üzerinde T vektörel sürekli olsun veya X (iii) şartını sağlasın. Ayrıca T fonksiyonu $z \preceq x$, $y \preceq w$ koşuluyla alınan her $z, w, y, x \in X$ ve bir $k \in [0,1)$ için

$$d(T(x,y),T(z,w)) \leqslant \frac{k}{2}[d(x,z) + d(y,w)]$$

büzülme şartını sağlasın. Eğer $T(s,r) \preceq s$ ve $(r,s) \succeq r$ veya $s \preceq T(s,r)$ ve $r \succeq T(r,s)$ olacak şekilde $s, r \in X$ elemanları mevcutsa T fonksiyonun X^2 içinde bir tek ikili sabit noktası vardır.

İspat

Öncelikle $s = x_0$, $r = y_0$ olarak belirlensin ve her n için $T^n(x_0, y_0) = x_n$, $T^n(y_0, x_0) = y_n$ olsun. Ayrıca $x_0 \preceq T(x_0, y_0) = x_1$ ve $y_0 \succeq T(y_0, x_0) = y_1$ (veya $x_0 \succeq T(x_0, y_0) = x_1$ ve $y_0 \preceq T(y_0, x_0) = y_1$) olduğu kabul edilsin. Teorem 4.1.1'in (veya Teorem 4.1.5'in) ispatında takip edilen prosedürün benzeri burada uygulanırsa, her n için $x_{n+1} \lesseqgtr x_n$ ve $y_{n+1} \lesseqgtr y_n$ olduğundan

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \frac{k^n}{2}[d(x_0, x_1) + d(y_0, y_1)]$$

$$d(y_n, y_{n+1}) \leqslant \frac{k^n}{2}[d(x_0, x_1) + d(y_0, y_1)]$$

elde edilir. Böylece ve (x_n) (y_n) dizilerinin E-Cauchy dizisi olduğu görülür. X uzayı E-tam olduğundan ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ ve $y_n \overset{d,E}{\to} y$ olacak şekilde x,$y \in X$ elemanları mevcuttur. Vektörel süreklilik durumu, Teorem 4.1.1'de yapılanlarla çok benzer olduğundan ikinci duruma odaklanılacaktır. Hipotez gereğince (x_n) ve (y_n) dizilerinin, bütün terimleri bu dizilerin limitleri olan y ve x ile karşılaştırılabilen (x_{n_m}) ve (y_{n_m}) alt dizileri mevcuttur. Buradan

$$\begin{aligned} d(T(x,y),x) &\leqslant d(T(x,y),T(x_{n_m},y_{n_m})) + d(T(x_{n_m},y_{n_m}),x) \\ &\leqslant \frac{k}{2}[d(x,x_{n_m}) + d(y,y_{n_m})] + d(x_{n_m+1},x) \\ &\leqslant \frac{k}{2}[a_{n_m} + b_{n_m}] + a_{n_m+1} \leqslant \frac{k}{2}b_{n_m} + \frac{3k}{2}a_{n_m} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $a_n \downarrow 0$, $b_n \downarrow 0$ olduğundan $a_{n_m} \downarrow 0$, $b_{n_m} \downarrow 0$ elde edilir ki, böylece $T(x,y) = x$ ve benzer şekilde $T(y,x) = y$ sonuçlarına ulaşılır.

Şimdiye kadar elde edilen sonuçlar alışılmış karma monoton özelliğe sahip fonksiyonlar kullanarak oluşturuldu. Bilindiği üzere, bu fonksiyonlar birinci değişkene göre sıra artan ve ikinci değişkene göre sıra azalan fonksiyonlardır. Benzer şekilde, birinci değişkene göre sıra azalan ve ikinci değişkene göre sıra artan fonksiyonlar kullanılarak benzer sonuçlar elde edilir. Sadeliği korumak adına, bu tür fonksiyonlardan ikinci tip karma monoton özelliğe sahip fonksiyonlar olarak bahsedilecektir. Yani, bir $T : X^2 \to X$ fonksiyonu, eğer herhangi $s, r \in X$ ve her $x, y \in X$ için

$$s \preceq r \Rightarrow T(r,y) \preceq T(s,y) \text{ ve } T(x,s) \preceq T(x,r)$$

şartını sağlıyorsa, bu fonksiyon ikinci tip karma monoton özelliğe sahiptir denir. Örneğin, $T\,(x,y) = \tan^{-1}(y-x)$ kuralıyla tanımlanan T fonksiyonu ikinci tip karma monoton özelliğe sahiptir. Şimdi de Teorem 4.1.6 bu tip fonksiyonlar yardımıyla biraz daha esnetilecektir.

4.1.7. Teorem

X, (1) şartını sağlayan bir E-tam sıralı vektör metrik uzay ve $T : X^2 \to X$ alışılmış veya ikinci tip karma monoton özelliğe sahip olan bir fonksiyon olsun. X üstünde T vektörel sürekli olsun veya X (iii) şartını sağlasın. Ayrıca T fonksiyonu $z \preceq x$, $y \preceq w$ koşuluyla alınan her $z, w, y, x \in X$ ve bir $k \in [0, 1)$ için

$$d(T(x, y), T(z, w)) \leqslant \frac{k}{2}[d(x, z) + d(y, w)]$$

büzülme şartını sağlasın. Eğer $T(s, r) \preceq s$ ve $T(r, s) \succeq r$ veya $s \preceq T(s, r)$ ve $r \succeq T(r, s)$ olacak şekilde $s, r \in X$ elemanları mevcutsa T fonksiyonun X^2 içinde bir tek ikili sabit noktası vardır.

Örnek

$X = \mathbb{R}$ kümesi alışılmış sıralama ve mutlak değer metriği ile donatılsın. Bu durumda $T(x, y) = \frac{1}{4}\tan^{-1}(y - x)$ kuralı ile tanımlanan $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci tip karma monoton özelliğine sahiptir ve $(0, 0)$ bu fonksiyonun tek ikili sabit noktasıdır.

Anlaşılacağı üzere alışılmış veya ikinci tip karma monoton özelliğe sahip fonksiyonlar bir değişkene göre sıra artan iken diğer değişkene göre sıra azalandır. Bu nedenle, yukarıdaki sonuçların benzerlerinin, her iki değişkene göre de sıra artan veya azalan fonksiyonlar için de elde edilip edilemeyeceği sorusu akla gelmektedir. Bu sorunun cevabı bir sonraki kesimde verilecektir.

4.2. Çift Monoton Özelliğe Sahip Fonksiyonların Teoremleri

Bu kesimde öncelikle çift monoton özelliğine sahip olan fonksiyonlar tanıtılacak ardından bir önceki kesimde elde edilen sonuçlar bu fonksiyonlar için yeniden yorumlanacaktır.

4.2.1. Tanım

$(X, \preceq)$ sıralı bir küme olmak üzere, bir $T : X^2 \to X$ fonksiyonu her iki değişkene göre sıra artan veya sıra azalan ise bu T fonksiyonu X üstünde çift monoton özelliğe sahiptir denir. Yani herhangi $s, r \in X$ ve her $x, y \in X$ elemanları için

$$s \preceq r \Rightarrow \begin{cases} T(s,y) \preceq T(r,y) \text{ ve } T(x,s) \preceq T(x,r) \\ \qquad\qquad \text{veya} \\ T(r,y) \preceq T(s,y) \text{ ve } T(x,r) \preceq T(x,s) \end{cases}$$

sağlanıyorsa T fonksiyonu X üstünde çift monoton özelliğe sahiptir.

Örneğin $X = [0, \infty)$ kümesi alışılmış sıralama ile X^2 ise koordinat sıralaması ile donatılmış olsun. $T\,(x,y) = 2^x + y - 1$ ve $S(x,y) = 2^{-(x+y)}$ kurallarıyla tanımlanan T ve S fonksiyonları, X üstünde çift monoton özelliğe sahiptir. Burada T fonksiyonu iki değişkene göre sıra artan iken S fonksiyonu sıra azalandır. Çift monoton özelliğe sahip fonksiyonlar ile sıra artan veya sıra azalan fonksiyonlar karıştırılmamalıdır. Sıradaki örnek, kavramlar arasındaki farkı vurgulması yönüyle önemlidir.

Örnek

$X = [0, \infty)$ kümesi alışılmış sıralama, X^2 ise

$$(s,r) \preccurlyeq (x,y) \Leftrightarrow s < x \text{ veya } (s = x \text{ ve } r \le y)$$

sözlüksel sıralama ile donatılsın ve $T : X^2 \to X$ fonksiyonu $T\,(x,y) = x + y$ kuralı ile tanımlansın. Herhangi dört $s, r, x, y \in X$ için $s \le r$ iken $s + y \le r + y$ ve $s + x \le r + x$ olduğundan $T(s,y) \le T(r,y)$ ve $T(x,s) \le T(x,r)$ elde edilir. Anlaşılacağı üzere T çift monoton özelliğe sahip iken doğal olarak karma monoton özelliğe sahip değildir. Ayrıca T sıra artan değildir. Yani herhangi dört $s, r, x, y \in X$ için $(s,r) \preccurlyeq (x,y)$ olması $T(s,r) \le T(x,y)$ olmasını gerektirmez. Özel olarak $(s,r) = (1,4)$ ve $(x,y) = (2,1)$ seçilirse, $(1,4) \preccurlyeq (2,1)$ olmasına rağmen $T(1,4) = 5 \ge T(2,1) = 3$ olduğu gözlemlenir.

Görüldüğü gibi çift monoton özelliğe sahip fonksiyonlar sınıfı, karma monoton özelliğe sahip fonksiyonlar sınıfından farklıdır. Bu nedenle, bu yeni sınıf için yukarıdaki teoremlerin yeniden düzenlenmesi gerekmektedir. Böylece benzer sonuçlar çift monoton özelliğe sahip fonksiyonlar için de elde edilecektir. Ancak bundan önce $(X, \preceq)$ sıralı bir küme iken her $s, r, x, y \in X$ için

$$(s, r) \preccurlyeq (x, y) \Leftrightarrow s \preceq x \text{ ve } r \preceq y$$

biçiminde tanımlanan bağıntının X^2 üstünde bir sıralama bağıntısı olduğunu hatırlatmakta fayda vardır. Bu sıralama doğal sıralama olarak da bilinen bir sıralamadır. Şimdi bu sıralama vasıtasıyla Teorem 4.1.7'nin çift monoton özelliğe sahip fonksiyonlara uyarlanmış hâli verilecektir. Ancak ispatı, bahsi geçen teoremin ispatına çok benzer olduğu gerekçesiyle verilmemiştir.

4.2.2. Teorem

X, (1) şartını sağlayan bir E-tam sıralı vektör metrik uzay ve $T : X^2 \to X$ çift monoton özelliğe sahip olan bir fonksiyon olmak üzere X üstünde T vektörel sürekli olsun veya X, (iii) şartını sağlasın. Ayrıca T fonksiyonu, $x \preceq z$, $y \preceq w$ koşuluyla alınan her $z, w, y, x \in X$ ve bir $k \in [0, 1)$ için

$$d(T(x, y), T(z, w)) \leqslant \frac{k}{2}[d(x, z) + d(y, w)]$$

büzülme şartını sağlasın. Eğer $T(s, r) \preceq s$ ve $T(r, s) \preceq r$ veya $s \preceq T(s, r)$ ve $r \preceq T(r, s)$ olacak şekilde $s, r \in X$ elemanları mevcutsa T fonksiyonun X^2 içinde bir tek ikili sabit noktası vardır.

Bu teorem vasıtasıyla [18], [19] ve [20] çalışmalarında ele alınan fonksiyon sınıflarından tamamen farklı bir sınıf için sabit nokta sonucu verilmiş olur. Böylece bu çalışma ile, literatürde yer alan birçok çalışmanın odaklandığı problemlere de bir çeşitlilik kazandırılmıştır.

Örnek

$X = E = \mathbb{R}$ alışılmış sıralama ve mutlak değer metriği ile donatılsın. Bir $T : X^2 \to X$ fonksiyonu, $T(x,y) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y + \frac{5}{24}$ kuralı ile tanımlansın. Bu T iki değişken için de sıra artan bir fonksiyon olduğundan çift monoton özelliğe sahip bir fonksiyondur ve $k = \frac{2}{3}$ için büzülme şartını sağlar. Ayrıca, $\mathbb{R}^2$ içinde alınan herhangi bir eleman çifti için bir alt ve bir üst sınır vardır. $\mathbb{R}$ tam sıralı olduğu için, X içinde alınan vektörel yakınsak bir dizinin herhangi iki terimi birbiriyle karşılaştırılabilirdir. Bu yüzden Teorem 4.2.2'nin bütün hipotezleri sağlanmaktadır ve $(1/2, 1/2)$ elemanı T fonksiyonunun bir tek ikili sabit noktasıdır. Ancak [20]'deki sonuçlar bu örneğe uygulanamaz, çünkü T karma monoton özelliğe sahip değildir.

4.3. Monoton Olmayan Fonksiyonların Teoremleri

Şimdiye kadar, alışılmış ve ikinci tip karma monoton ve çift monoton özelliğe sahip olan fonksiyonlar için ikili sabit noktanın varlığı ile tekliği irdelendi. Ancak sıradaki teorem ikili sabit noktanın ne varlığı ne de tekliği için herhangi bir karma veya çift monotonluk özelliği gerekmeyebileceğini göstermektedir.

4.3.1. Teorem

X, (1) şartını sağlayan bir E-tam sıralı vektör metrik uzay ve her $z, w, y, x \in X$ elemanları için $T : X^2 \to X$ fonksiyonu

$$\begin{array}{c} (x,y) \preccurlyeq (z,w) \\ (\text{yani } x \preceq z \text{ ve } w \preceq y) \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} T(x,y) \preceq T(z,w) \ \text{ ve } T(y,x) \succeq T(w,z) \\ \text{veya} \\ T(x,y) \succeq T(z,w) \ \text{ ve } T(y,x) \preceq T(w,z) \end{array} \right.$$

koşulunu sağlasın. X üstünde T vektörel sürekli veya X, (iii) şartını sağlıyorken T fonksiyonu $x \preceq z$, $w \preceq y$ koşuluyla alınan her $z, w, y, x \in X$ ve bir $k \in [0,1)$ için

$$d(T(x,y), T(z,w)) \leqslant \frac{k}{2}[d(x,z) + d(y,w)]$$

büzülme şartını sağlasın. Eğer $T(s,r) \preceq s$ ve $T(r,s) \succeq r$ veya $s \preceq T(s,r)$ ve $r \succeq T(r,s)$ olacak şekilde $s, r \in X$ mevcutsa, T fonksiyonunun X^2 içinde bir tek ikili sabit noktası vardır.

İspat

Her n için $s = x_0$, $r = y_0$, $T^n(x_0, y_0) = x_n$ ve $T^n(y_0, x_0) = y_n$ olsun. Ayrıca $x_0 \preceq T(x_0, y_0) = x_1$ ve $y_0 \succeq T(y_0, x_0) = y_1$ (veya $x_0 \succeq T(x_0, y_0) = x_1$ ve $y_0 \preceq T(y_0, x_0) = y_1$) sağlandığı kabul edilsin. T fonksiyonunun tanımı gereğince ya $x_1 = T(x_0, y_0) \preceq T(x_1, y_1) = x_2$ ve $y_1 = T(y_0, x_0) \succeq T(y_1, x_1) = y_2$ ya da $x_1 = T(x_0, y_0) \succeq T(x_1, y_1) = x_2$ ve $y_1 = T(y_0, x_0) \preceq T(y_1, x_1) = y_2$ sağlanır. Böylece her n için $x_n \lesseqgtr x_{n+1}$ ve $y_n \lesseqgtr y_{n+1}$ olduğu sonucuna ulaşılır. Burada, her n için ya $x_n \preceq x_{n+1} \Leftrightarrow y_{n+1} \preceq y_n$ ya da $x_{n+1} \preceq x_n \Leftrightarrow y_n \preceq y_{n+1}$ sağlanır. İspatın geri kalan kısmı Teorem 4.1.6'nın ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.3.1'in Teorem 4.1.7'yi genellediğinin belirtilmesinde fayda vardır. Sıradaki örnek bu durumu açıklaması açısından önemlidir.

Örnek

$X = [0, \infty)$ kümesi $d(x,y) = |x - y|$ mutlak değer metriğiyle ve

$$x \preceq y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in [0,1],\ x \leq y \quad \text{veya} \\ x, y \in (n, n+1] \quad (n \in \mathbb{N}^+),\ x \leq y. \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan sıralama ile donatılmış olsun. Böylece $s, r, x, y \in X$ olmak üzere X^2 üstünde $(s,r) \preccurlyeq (x,y) \Leftrightarrow s \preceq x$ ve $y \preceq r$ biçiminde tanımlanan sıralama için

$$(s,r) \preccurlyeq (x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} s, x \in [0,1],\ s \leq x \quad \text{veya} \\ s, x \in (n, n+1] \quad (n \in \mathbb{N}^+),\ s \leq x \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad\qquad \text{ve} \\ \begin{pmatrix} r, y \in [0,1],\ r \geq y \quad \text{veya} \\ r, y \in (n, n+1] \quad (n \in \mathbb{N}^+),\ r \geq y. \end{pmatrix} \end{cases}$$

sağlanır. $E = \mathbb{R}$ alışılmış sıralama ile donatılsın ve $T : X^2 \to X$ fonksiyonu

$$T(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x-y+2}{5} & , \quad x,y \in [0,1] \\ \dfrac{y-2x+10n-5}{5} & , \quad x,y \in (2n-1, 2n] \quad (n \in \mathbb{N}^+) \\ \dfrac{x+2(n+1-y)}{5} & , \quad x,y \in (2n, 2n+1] \quad (n \in \mathbb{N}^+) \\ \dfrac{x}{5} & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. T fonksiyonu $k = 4/5$ için büzülme şartını sağlar. Böylece Teorem 4.3.1'in bütün hipotezleri sağlanır ve T bir tek ikili sabit noktaya sahip olur ki bu da $(1/2, 1/2)$ dır. Ancak, T fonksiyonu X üstünde herhangi bir karma veya çift monoton özelliğe sahip olmadığından Teorem 4.1.7 bu örneğe uygulanamaz.

Sıradaki teorem çift monoton özelliğinin ikili sabit noktanın ne varlığı ne de tekliği için gerekmeyebileceğini göstermektedir. Bu teorem için X^2 üstünde tanımlanan sıralamanın doğal sıralama olduğu kabul edilecektir.

4.3.2. Teorem

X, (1) şartını sağlayan E-tam sıralı vektör metrik uzay ve her $z, w, y, x \in X$ için

$$\begin{array}{c} (x,y) \preccurlyeq (z,w) \\ (\text{yani } x \preceq z \text{ ve } y \preceq w) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} T(x,y) \preceq T(z,w) \;\text{ ve } T(y,x) \preceq T(w,z) \\ \qquad\qquad\text{veya} \\ T(x,y) \succeq T(z,w) \;\text{ ve } T(y,x) \succeq T(w,z) \end{cases}$$

koşulunu sağlayan $T : X^2 \to X$ fonksiyonu tanımlansın. X üstünde T vektörel sürekli veya X, (iii) şartını sağlıyorken T fonksiyonu $x \preceq z$, $y \preceq w$ koşuluyla alınan her $z, w, y, x \in X$ ve bir $k \in [0,1)$ için

$$d(T(x,y), T(z,w)) \leqslant \frac{k}{2}[d(x,z) + d(y,w)]$$

şartını sağlasın. Eğer $T(s,r) \preceq s$ ve $T(r,s) \preceq r$ veya $s \preceq T(s,r)$ ve $r \preceq T(r,s)$ olacak şekilde $s, r \in X$ mevcutsa T fonksiyonunun X^2 içinde bir tek ikili sabit noktası vardır.

Sıradaki iki not, bu bölümde elde edilen sonuçlarla bir önceki bölümde ve hâliyle [30]'de elde edilen sonuçlar arasındaki ilişkileri vurgulaması açısından önemlidir.

Not

(a) $T : X^2 \to X$ fonksiyonu X üstünde karma monoton (veya ikinci tip karma monoton) özelliğe sahip olsun. Herhangi bir $s \in X$ ve her $r \in X$ için $T_s(r) = T(r, s)$ kuralıyla tanımlanan $T_s : X \to X$ fonksiyonu sıra artan bir fonksiyon olur. Bu seçim ile yukarıdaki sonuçlar [30]'da sıra artan (veya sıra azalan) fonksiyonlar için elde edilen sonuçlar ile çakışır. Burada $(x, y) \in X^2$ elemanı T fonksiyonun bir ikili sabit noktası ise, $y \in X$ elemanı T_x fonksiyonunun ve $x \in X$ elemanı ise T_y fonksiyonunun sabit noktası olur, çünkü $T_x(y) = T(y, x) = y$ ve $T_y(x) = T(x, y) = x$ dir. Bunlara ek olarak, eğer T fonksiyonunun ikili sabit noktası (x, y) tek ise, T_x ve T_y fonksiyonları çakışır ve $x = y$ elemanı bu fonksiyonların tek sabit noktası olur.

(b) $T : X^2 \to X$ fonksiyonu X üstünde karma monoton (veya ikinci tip karma monoton) özelliğe sahip olsun. Bu sonucun (a) kısmındaki gibi herhangi bir $s \in X$ ve her $r \in X$ için $T_s : X \to X$ fonksiyonu $T_s(r) = T(s, r)$ biçiminde tanımlanırsa [30]'da bashi geçen sıra azalan (veya sıra artan) fonksiyonlar için elde edilen sonuçlara ulaşılmış olur.

(c) Eğer (a) ve (b)'de karma monoton (veya ikinci tip karma monoton) özelliği yerine çift monoton özelliği kullanılırsa benzer çıkarımlar yapılabilir.

(d) Eğer (a) ve (b)'de özel olarak $E = \mathbb{R}$ alınırsa [20]'de elde edilen sonuçlar ile [18]'de elde edilen sonuçlar ve [19]'da monoton fonksiyonlar için elde edilen sonuçlar arasındaki ilişki anlaşılabilir.

Not

Açıkça anlaşılabileceği gibi her $s, r, x, y \in X$ için

$(s, r) \preccurlyeq (x, y) \Leftrightarrow x \preceq s$ ve $r \preceq y$

biçiminde tanımlanan bağıntı bir sıralama bağıntısıdır. İlk sekiz teoremde X^2 üstündeki sıralama bu sıralama ile değiştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa benzer sonuçlar elde edilebilir. Diğer yandan her $s, r, x, y \in X$ için

$(s, r) \preccurlyeq (x, y) \Leftrightarrow x \preceq s$ ve $y \preceq r$

biçiminde tanımlanan bağıntı da bir sıralama bağıntısıdır. Benzer şekilde Teorem 4.2.2'de ve Teorem 4.3.2'de X^2 üstündeki sıralama ile bu sıralama değiştirilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa benzer sonuçlar elde edilir.

5. SIRALI VEKTÖREL BÜZÜLMELER

Bu bölümün ilk kesiminde önce vektörel sözde büzülmelerin tanımı yapılacak, metrik uzaylarda ve sıralı metrik uzaylarda yapılan tanımlarla arasındaki fark incelenecektir. Daha sonra vektörel hemen hemen büzülme tanımı yapılacak ve bu büzülmeler için sabit nokta sonuçları verilecektir. Bu kesimde verilen tanımlar ve elde edilen sonuçlar [31] referans numaralı çalışmada yayımlanmıştır. İkinci kesimde ise vektörel Prešić tipi büzülmeler için sabit nokta sonuçları verilmiştir. Bu sonuçlar ise [32] referans numaralı çalışmada yayımlanmıştır.

5.1. Sıralı Vektörel Sözde ve Sıralı Hemen Hemen Büzülmeler

Daha önceden de bahsedildiği gibi Banach, Kannan, Chatterjea ve Zamfirescu tarafından elde edilen büzülme tanımlarından daha genel olan bir büzülme tanımı Ćirić tarafından yapılmıştır [6]. Bu tanım şu şekildedir:

5.1.1. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in X$ için

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq h \max\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,T(y)), d(x,T(y)), d(y,T(x))\}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $h \in (0,1)$ sabiti varsa, bu fonksiyona sözde büzülme denir.

Bu tanım doğrultusunda herhangi bir Banach, Kannan, Chatterjea veya Zamfirescu büzülmesinin aslında bir sözde büzülme olduğunun, ancak tersinin geçerli olmadığının da altı çizilmiştir. Bu kesimde bu tanımın daha genel bir hâli sıralı vektör metrik uzaylarda yapılacaktır. Ancak gösterimde kolaylığı sağlamak adına M_x^y ve S_x^y notasyonları, sırasıyla $\{d(x,y),\ \ d(x,T(x)),\ \ d(y,T(y)),\ \ d(x,T(y)),\ \ d(y,T(x))\}$ kümesinin (varsa) maksimumunu ve supremumunu göstermek için kullanılacaktır.

5.1.2. Tanım

X bir sıralı vektör metrik uzay ve $T : X \to X$ bir fonksiyon olmak üzere, $x \preceq y$ olacak şekilde seçilen her $x, y \in X$ için

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leqslant hS_x^y \tag{5.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $h \in (0, 1)$ varsa, bu fonksiyona sıralı vektörel sözde büzülme denir.

Genel olarak, verilen herhangi bir kısmî sıralamaya göre, sonlu kümelerde bile, supremum ve maksimum kavramları çakışmayabilir. Bir Riesz uzayının sonlu bir alt kümesinin her zaman supremumu olmasına karşılık, bu kümeden alınan herhangi iki elemanının karşılaştırılabilir olmaması durumunda kümenin bir maksimumu olmayabilir. Ancak bir Riesz uzayının, tüm elemanları birbiriyle karşılaştırılabilen bir sonlu kümesinin ise maksimumu vardır ve supremumu ile çakışıktır. Örneğin, $E = \mathbb{R}$ kümesinin alışılmış sıralama ile donatıldığını düşünülürse, M_x^y ve S_x^y notasyonları ile gösterilen elemanların aynı eleman olduğu açıkça gözlemlenebilir. Bu nedenle, her sıralı sözde büzülme bir sıralı vektörel sözde büzülmedir, ancak bunun tersi doğru değildir (bkz. Örnek 5.1). Biraz önce de bahsedildiği üzere herhangi bir sıralı Kannan, Chattarjea ve Zamfirescu büzülmesi de bir sıralı vektörel sözde büzülmedir. Anlaşılacağı üzere hem metrik hem de sıralı metrik uzaylarda Kannan, Chattarjea, Zamfirescu ve Ćirić tipi büzülmeler için elde edilen sonuçlar sıralı vektörel büzülmeler kullanılarak genelleştirilebilir.

Örnek

Sırasıyla X kümesi ve bu küme üstünde tanımlanan β bağıntısı aşağıdaki gibi olsun:

$$\begin{aligned} X &= \left\{(0,0), (0,1), (1,0), (2,2)\right\} \\ \beta &= \left\{((0,0),(0,0)),\ ((0,0),(2,2)),\ ((0,1),(0,1)),\ ((0,1),(2,2)),\right. \\ &\quad \left. ((1,0),(1,0)),\ ((1,0),(2,2)),\ ((2,2),(2,2))\right\} \end{aligned}$$

Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$x \preceq y \Leftrightarrow (x, y) \in \beta$$

biçiminde tanımlanan $\preceq$ bağıntısı X üstünde bir kısmî sıralama bağıntısıdır. X kümesi bu sıralama ile, $E = \mathbb{R}^2$ ise koordinat sıralaması ile donatılmış olsun. E bir Arşimedyan Riesz uzayıdır ve X, $d\left(\left(x_1, x_2\right), \left(y_1, y_2\right)\right) = \left(\left|x_1 - y_1\right|, \left|x_2 - y_2\right|\right)$ biçiminde tanımlanan $d : X^2 \to E$ dönüşümü ile E-tam sıralı vektör metrik uzaydır. $T : X \to X$ fonksiyonu

$$T\left((0,0)\right) = T\left((1,0)\right) = (0,1) \text{ ve}$$

$$T\left((0,1)\right) = T\left((2,2)\right) = (1,0)$$

kuralıyla tanımlanmış olsun. Bu durumda $x \preceq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ ve $h = 1/2$ için T fonksiyonu

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leqslant h S_x^y$$

eşitsizliğini sağlar. Yani T bir sıralı vektörel sözde büzülme olur. Ancak, T fonksiyonu ne bir sözde büzülmedir ne de bir sıralı sözde büzülmedir. Bu yüzden bu iki tür büzülme dönüşü için elde edilen hiç bir sonuç bu örneğe uygulanamaz. Gerçekten, özel olarak $x = (0,1)$ ve $y = (2,2)$ seçilirse

$$\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,T(y)), d(x,T(y)), d(y,T(x))\} = \{(2,1), (1,1), (1,2)\}$$

olacaktır. Burada bu kümenin M_x^y maksimumu mevcut olmamasına rağmen, S_x^y supremumu $(2,2)$ elemanıdır.

Daha önce de belirtildiği gibi, sıralı sözde büzülmeler, sözde büzülmelerin genellemesidir. Benzer şekilde sıralı vektörel sözde büzülmeler de sıralı sözde büzülmelerin genellemesidir. Ancak bu çalışmada sıralı vektörel sözde büzülmelerin de genellemesi olan sıralı vektörel hemen hemen büzülmeler için sabit nokta sonuçları verilecektir.

Berinde, zayıf büzülme veya (δ, L)-zayıf büzülme olarak adlandırdığı dönüşümün tanımını şu şekilde yapmıştır [7]:

5.1.3. Tanım

(X, d) metrik uzay ve $T : X \to X$ fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in X$ için

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \delta d\left(x, y\right) + L d\left(y, T(x)\right) \tag{5.2}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\delta \in (0, 1)$ sabiti ve bazı $L \geq 0$ sabitleri varsa, bu fonksiyona (δ, L)-zayıf büzülme denir.

Daha sonra bu tür büzülmeler hemen hemen büzülme adını almıştır. Berinde çalışmasında herhangi bir Kannan, Chatterjee, veya Zamfirescu dönüşümü ya da $h \in (0, 1/2)$ koşulu altında herhangi bir sözde büzülmenin zayıf büzülme olduğunun altını çizmiştir. Ayrıca zayıf büzülmeler için sabit nokta sonuçları vermiştir [7].

5.1.4. Teorem

(X, d) tam metrik uzay ve $T : X \to X$ zayıf büzülme dönüşümü olmak üzere

(i) $F(T) = \{x \in X : T(x) = x\}$ kümesi boş küme değildir;

(ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ elemanı için, (x_n) Picard iterasyon dizisi bir $x^* \in F(T)$ elemanına yakınsar;

(iii) Her $n \in \mathbb{N}^+$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$d\left(x_n, x^*\right) \leq \frac{\delta^n}{1-\delta} d\left(x_0, x_1\right)$$

$$d\left(x_n, x^*\right) \leq \frac{\delta}{1-\delta} d\left(x_{n-1}, x_n\right)$$

Yine aynı çalışmada Berinde, bu teoremin sabit noktanın varlığı için yeterli olmasına rağmen tekliğini garanti etmediğini vurgulamaktadır. Ancak yukarıdaki teoremin hipotezine ek olarak her $x, y \in X$ için

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \theta d\left(x, y\right) + L_1 d\left(y, T(x)\right)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\theta \in (0,1)$ sabiti ve bazı $L_1 \geq 0$ sabitleri varsa T fonksiyonun bir tek sabit noktası vardır.

5.1.5. Tanım

X sıralı vektör metrik uzay, $T : X \to X$ fonksiyon olmak üzere, $x \preceq y$ olacak şekilde seçilen her $x, y \in X$ için

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leqslant \delta d\left(x, y\right) + L d\left(y, T\left(x\right)\right) \tag{5.3}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\delta \in (0,1)$ ve bazı $L \geq 0$ sabitleri varsa, bu fonksiyona sıralı vektörel hemen hemen büzülme denir.

Sıradaki önerme sıralı vektörel sözde büzülmeler ile sıralı vektörel hemen hemen büzülmeler arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

5.1.6. Önerme

Eğer S_x^y supremumu $\{d(x,y),\ \ d(x,T(x)),\ \ d(y,T(y)),\ \ d(x,T(y)),\ \ d(y,T(x))\}$ kümesindeki elemanlardan birine eşit ise, herhangi bir $h \in (0,1/2)$ sabiti için her sıralı vektörel sözde büzülme bir sıralı vektörel hemen hemen büzülmedir.

Bu önermenin ispatı, [23]'deki Önerme 3'ün ispatı ile çok benzer olduğundan verilmeyecektir. Ancak bu önerme bu durum için gerek ve yeter şart değildir. Bir önceki örnek tekrar incelendiğinde, $x = (0,1)$ ve $y = (2,2)$ alınırsa $S_x^y = (2,2)$ supremumunun

$$\{d(x,y), d(x,T(x)), d(y,T(y)), d(x,T(y)), d(y,T(x))\} = \{(2,1), (1,1), (1,2)\}$$

kümesinin bir elemanı olmadığı açıkça görülür. Ayrıca $h = 1/2$ için bu fonksiyon bir sıralı vektörel sözde büzülmedir. Ancak bu fonksiyon $\delta = 1/2$ ve $L \geq 1/2$ alınması durumunda bir sıralı vektörel hemen hemen büzülmedir.

Şimdi sıralı vektörel hemen hemen büzülmeler için sabit nokta teoremi verilecektir.

5.1.7. Teorem

X E-tam sıralı vektör metrik uzay, $T : X \to X$ fonksiyonu bir $\delta \in (0,1)$ ve bazı $L \geq 0$ için sıralı vektörel hemen hemen büzülme olmak üzere T sıra artan bir fonksiyon ve

(i) T vektörel sürekli veya

(ii) (x_n) sıra artan bir dizi ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken her n için $x_n \preceq x$ olsun.

Eğer $u \preceq T(u)$ olacak şekilde $u \in X$ varsa, T fonksiyonunun X içinde bir sabit noktası vardır.

İspat

Öncelikle $u = x_0$ olarak alınsın ve (x_n) dizisi her n için $x_n = T(x_{n-1})$ biçiminde tanımlansın. T sıra artan bir fonksiyon olduğundan $x_0 \preceq T(x_0)$ ve böyle devam edilirse her bir n için

$$x_0 \preceq x_1 = T(x_0) \preceq \ldots \preceq x_{n+1} = T(x_n) = T^n(x_0)$$

olduğundan (x_n) sıra artan dizidir. T fonksiyonu bir $\delta \in (0,1)$ sabiti ve bazı $L \geq 0$ sabitleri için sıralı vektörel hemen hemen büzülme olduğundan

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leqslant \delta d(x_{n-1}, x_n) + Ld(x_n, T(x_{n-1}))$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $x_n = T(x_{n-1})$ ve dolayısıyla

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \leqslant \delta d(x_{n-1}, x_n)$$

olduğundan her n için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \delta^n d(x_1, x_0)$$

eşitsizliğini sağlanır. Bu yüzden herhangi $n, p \in X$ elemanları için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leqslant \left(\delta^n + \cdots + \delta^{n+p-1}\right) d(x_1, x_0) \\ &\leqslant \frac{\delta^n}{1-\delta} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $(\delta^n/(1-\delta))\ d(x_1, x_0) \downarrow 0$ ve E Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan (x_n) bir E-Cauchy dizisidir. X kümesinin bir E-tam sıralı vektör metrik uzay olduğu göz önüne alınırsa X içinde $x_n \overset{d,E}{\to} x$ olacak şekilde bir x elemanının var olduğu sonucuna ulaşılır. Yani, E içinde $a_n \downarrow 0$ ve her n için $d(x_n, x) \leqslant a_n$ olacak şekilde bir (a_n) dizisi vardır. İspatın kalan kısmında iki durum ayrı ayrı incelenecektir.

(i) İlk olarak T fonksiyonu vektörel sürekli olsun. Bu durumda E içinde $b_n \downarrow 0$ ve her n için $d(T(x_n), T(x)) \leqslant b_n$ olacak şekilde (b_n) dizisi mevcuttur. Bu yüzden her n için

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &\leqslant d(x, T(x_n)) + d(T(x_n), T(x)) \\ &\leqslant d(x, x_{n+1}) + d(T(x_n), T(x)) \\ &\leqslant a_{n+1} + b_n \\ &\leqslant a_n + b_n \end{aligned}$$

sağlanır. Ayrıca $a_n + b_n \downarrow 0$ olduğundan $T(x) = x$ sonucuna ulaşılır.

(ii) Şimdi de (x_n) sıra artan dizi ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken her n için $x_n \preceq x$ olsun.

Bu durumda her n için

$$
\begin{aligned}
d(x,T(x)) &\leqslant d(x,x_{n+1}) + d(x_{n+1},T(x)) \\
&= d(x,x_{n+1}) + d(T(x_n),T(x)) \\
&\leqslant d(x,x_{n+1}) + \delta d(x_n,x) + Ld(x,T(x_n)) \\
&= d(x,x_{n+1}) + \delta d(x_n,x) + Ld(x,x_{n+1}) \\
&\leqslant (1+L)\, d(x,x_{n+1}) + \delta d(x_n,x) \\
&= (1+L)\, a_{n+1} + \delta a_n \\
&\leqslant (1+L+\delta)\, a_n
\end{aligned}
$$

sağlandığı görülür. Ayrıca $a_n \downarrow 0$ ve dolayısıyla $(1+L+\delta)\, a_n \downarrow 0$ olduğundan $T(x) = x$ sonucuna varılır. Yani iki durumdan da anlaşılabileceği üzere x elemanı T fonksiyonun sabit noktasıdır.

Bu teorem sabit noktanın varlığını garanti etmesine karşılık, bu noktanın tek olduğunu söyleyebilmek için yeterli değildir. Sıradaki örnek de bu durumu açıkça göstermektedir.

Örnek

$X = C[0,1]$ ve $\leq$ sıralaması $[0,1]$ üstünde alışılmış sıralama olmak üzere, herhangi iki $f,g \in X$ için

$$f \preceq g \Leftrightarrow \text{her } x \in [0,1] \text{ için } f(x) \leq g(x)$$

biçiminde tanımlı $\preceq$ bağıntısı X üstünde bir kısmî sıralama bağıntısıdır. $E = \mathbb{R}^2$ koordinat sıralaması ile donatılsın. Bu durumda her $f,g \in X$ için

$$d(f,g) = \left(\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|\,, 2\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|\right)$$

biçiminde tanımlanan $d : X^2 \to E$ dönüşümü ile X sıralı vektör metrik uzay olur. Ayrıca $T : X \to X$ özdeşlik fonksiyonu, yani her $f \in X$ için $T(f) = f$ olsun. Bu durumda T fonksiyonunun herhangi bir $\delta \in (0,1)$ sabiti için $L \geq 1 - \delta$ iken bir sıralı vektörel hemen hemen dönüşüm olduğu açıktır. Böylece Teorem 5.1.7'nin bütün şartları sağlanmış olur. Ancak T fonksiyonu sonsuz sayıda sabit noktaya sahiptir.

Bu örneğin diğer bir önemli yönü, herhangi bir sıralı vektörel hemen hemen büzülmenin bir sıralı vektörel sözde büzülme olmasının gerekmediğini göstermesidir. Gerçekten T özdeşlik fonksiyonu olduğundan herhangi $f, g \in X$ fonksiyonları için $d(T(f), T(g)) = d(f, g)$ dir ve $f \preceq g$ iken

$$S_f^g = \sup\{d(f,g), d(f,T(f)), d(g,T(g)), d(f,T(g)), d(g,T(f))\}$$

$$= \sup\{d(f,g), d(f,f), d(g,g), d(f,g), d(g,f)\} = d(f,g)$$

elde edilir. Bu yüzden

$$d(T(f), T(g)) \leq h.S_f^g$$

koşulunu sağlayan hiç bir $h \in (0,1)$ sabiti yoktur. Yani T fonksiyonu bir sıralı vektörel sözde büzülme olamaz.

Teorem 5.1.7'nin hipotezlerine ek bir şart eklenmesi durumunda sabit noktanın tekliği elde edilebilir.

5.1.8. Teorem

Teorem 5.1.7'in bütün şartları sağlansın. Ayrıca $x \preceq y$ olacak şekilde alınan her $x, y \in X$ için

$$d(T(x), T(y)) \leqslant \delta_1 d(x,y) + L_1 d(x, T(x)) \tag{5.4}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\delta_1 \in (0,1)$ sabiti ve bazı $L_1 \geq 0$ sabitleri var olsun. Eğer X

içinde alınan her eleman çifti için X içinde onlarla karşılaştırılabilecek bir eleman varsa T fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır.

İspat

Öncelikle x ve y elemanları T fonksiyonunun sabit noktaları olsun. Burada incelenmesi gereken iki durum vardır.

(i) İlk olarak x ve y elemanları karşılaştırılabilir olsun. Bu durumda

$$d(x,y) = d(T(x), T(y)) \leqslant \delta_1 d(x,y) + L_1 d(x, T(x))$$

olduğundan $(1-\delta_1)\ d(x,y) \leqslant 0$ ele edilir. Yani $x = y$ olur.

(ii) Şimdi de x ve y elemanları karşılaştırılabilir olmasın. Bu durumda hipotez gereğince x ve y ile karşılaştırılabilen bir w elemanı olacaktır. T fonksiyonu sıra artan olduğundan her n için $T^n(w)$, w ile, dolayısıyla x ve y ile karşılaştırılabilirdir. Buradan her n için

$$\begin{aligned}
d(x,y) &\leqslant d(x, T^n(w)) + d(T^n(w), y) \\
&= d(T(x), T^n(w)) + d(T^n(w), T(y)) \\
&\leqslant \delta_1 d(x, T^{n-1}(w)) + L_1 d(x, T(x)) + \delta_1 d(y, T^{n-1}(w)) + L_1 d(y, T(y)) \\
&\leqslant \delta_1 \left[d(x, T^{n-1}(w)) + d(y, T^{n-1}(w))\right] \\
&\ \ \vdots \\
&\leqslant \delta_1^n \left[d(x,w) + d(y,w)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\delta_1 \in (0,1)$ ve E bir Arşimedyan Riesz uzayı olduğundan $\delta_1^n \left[d(x,w) + d(y,w)\right] \downarrow 0$ olur. Böylece $x = y$ sonucuna varılır. Yani (i) ve (ii)'den, T fonksiyonunun sabit noktasının biricik olduğu söylenir.

Örnek

$X = \{0,1,2\}$ ve $\beta = \{(0,0),(1,1),(2,2),(0,1)\}$ olsun. Bu durumda

$$x \preceq y \Leftrightarrow (x,y) \in \beta$$

biçiminde tanımlanan $\preceq$ bağıntısı X üstünde bir sıralama bağıntısıdır. X kümesi bu sıralama ile, $E = \mathbb{R}^2$ koordinat sıralaması ile donatılmış olsun. E bir Arşimedyan Riesz uzayıdır ve $d(x,y) = (|x-y|,|x-y|)$ biçiminde tanımlanan $d : X^2 \to E$ dönüşümü ile X E-tam sıralı vektör metrik uzayıdır. $T : X \to X$ fonksiyonu

$$T(0) = T(1) = 0 \text{ ve } T(2) = 1$$

kuralı ile tanımlanırsa T bir sıra artan fonksiyon olur. Bu durumda $x \preceq y$ olacak şekilde alınan her $x, y \in X$ için T fonksiyonu

$$d(T(x),T(y)) \leqslant \delta d(x,y) + Ld(x,T(y))$$

koşulunu $\delta = 1/3$ ve her bir $L \geq 0$ sabiti için sağlar. Üstelik aynı T fonksiyonu

$$d(x,y) = d(T(x),T(y)) \leqslant \delta_1 d(x,y) + L_1 d(x,T(x))$$

koşulunu ise $\delta_1 = 1/2$ ve her bir $L_1 \geq 0$ için sağlar. Ayrıca X içinde alınan bir (x_n) sıra artan dizisi için $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken her n için $x_n \preceq x$ sağlanır. Görüldüğü üzere Teorem 5.1.8'in bütün hipotezleri sağlanır ve 0 elemanı T fonksiyonun bir tek sabit noktasıdır. Diğer yandan $x = 2$ ve $y = 1$ olarak alınırsa $d(T(x),T(y)) = (1,1)$ iken $d(x,y) = (1,1)$ ve $d(y,T(x)) = (0,0)$ olduğu gözlemlenir. Bu durumda ise (5.2)'i sağlayacak hiç bir $L \geq 0$ sabiti bulunamaz. Yani Teorem 5.1.4 bu örneğe uygulanamaz. Bu öneğin diğer bir önemli bir yanı ise, herhangi bir $h \in (0,1)$ için T fonksiyonunun sıralı vektörel sözde büzülme dönüşümü olmasına karşılık, sözde büzülme dönüşümü olmamasıdır. Gerçekten $x = 2$ ve $y = 1$ olarak alınması durumunda (5.1) koşulunu sağlayan herhangi bir $h \in (0,1)$ elemanı yoktur. Bu da metrik uzaylarda sözde dönüşümler için elde edilen sonuçların bu örneğe uygulanamayacağını gösterir.

5.2. Sıralı Vektörel Prešić Tipi Büzülmeler

Bu kesimde sıralı vektörel Prešić tipi büzülmeler için sabit nokta sonuçları verilecektir. Sonlu çarpım uzaylarında önemli bir büzülme şartı Prešić tarafından ortaya koyulmuş ve $[11,12]$'de önemli sonuçlar elde edilmiştir.

5.2.1. Teorem

(X,d) tam metrik uzay, k pozitif bir tamsayı, $\beta_1,\ldots,\beta_k$ negatif olmayan reel sayıları için $\sum\limits_{i=1}^{k}\beta_i<1$ olmak üzere $T:X^k\to X$ fonksiyonu her $x_0,\ldots,x_{k-1},x_k\in X$ için

$$d\left(T\left(x_0,\ldots,x_{k-1}\right),T\left(x_1,\ldots,x_k\right)\right)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\beta_i d\left(x_{i-1},x_i\right)$$

şartını sağlıyorsa $T\left(x,\ldots,x\right)=x$ olacak şekilde bir tek $x\in X$ elemanı vardır. Ayrıca, X'den alınan keyfi $x_0,\ldots,x_{k-1}$ elemanları için $x_{n+k}=T\left(x_n,,x_{n+1},\ldots,x_{n+k-1}\right)$ biçiminde tanımlanan (x_n) dizisi yakınsaktır ve bu limit değeri yani $\lim x_n=T\left(\lim x_n,,\lim x_{n+1},\ldots,\lim x_{n+k-1}\right)$ olur

Burada $k=1$ alınması durumunda klasik Banach büzülme prensibi elde edilir. Yani bu teorem Banach sabit nokta teoreminin bir genellemesidir. Prešić tipi büzülmeler için elde edilen sonuçlar [13–16] gibi birçok çalışmaya ilham kaynağı olmuş ve hem metrik uzaylarda hem de sıralı metrik uzaylarda çok sayıda genellemesi yapılmıştır. Bu bölümde ise aynı sonuçlar [14, 18, 25, 30] çalışmalarında yer alan fikirlerle birleştirilerek bunların sıralı vektör metrik uzayların sonlu çarpım uzaylarında bir genellemesi yapılmış ve literatüre önemli bir katkıda bulunulmuştur.

Sıralı metrik uzaylarda ve koni metrik uzaylarda yukarıdaki tanıma benzer tanımlar kullanılmış ve sıralı Prešić tipi büzülmeler için sabit nokta sonuçları verilmiştir [14]. Bu kesimde benzer bir tanım da sıralı vektör metrik uzaylarda kullanılacaktır. X bir sıralı vektör metrik uzay, k pozitif bir tamsayı ve $\beta_1,\ldots,\beta_k$ negatif olmayan reel sayıları için $\sum\limits_{i=1}^{k}\beta_i<1$ olmak üzere bir $T:X^k\to X$ fonksiyonu $x_0\preceq x_1\preceq\ldots\preceq x_{k-1}\preceq x_k$

koşuluyla alınan her $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$ için

$$d\left(T\left(x_0, \ldots, x_{k-1}\right), T\left(x_1, \ldots, x_k\right)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i d\left(x_{i-1}, x_i\right) \tag{5.5}$$

şartını sağlıyorsa, bu fonksiyon sıralı vektörel Prešić tipi büzülme diye adlandırılacaktır.

5.2.2. Teorem

X E-tam sıralı vektör metrik uzay, k pozitif bir tam sayı, $T : X^k \to X$ fonksiyonu bir sıralı vektörel Prešić tipi büzülme olmak üzere T sıra artan bir fonksiyon olsun ve aşağıdakilerden biri sağlansın:

(i) T vektörel sürekli veya

(ii) (x_n) sıra artan dizi ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken her n için $x_n \preceq x$ olsun.

Eğer $x_0 \preceq x_1 \preceq \ldots \preceq x_{k-1} \preceq x_k = T\left(x_0, \ldots, x_{k-1}\right)$ olacak şekilde $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$ varsa $F\left(x\right) = T\left(x, \ldots x\right)$ olarak tanımlanan F ilişik operatörünün sabit noktası vardır. Üstelik bu sabit noktanın tek olması için gerek ve yeter şart $A = \{x \in X : F\left(x\right) = x\}$ kümesinin iyi sıralı bir küme olmasıdır. Ayrıca x bu F fonksiyonun sabit noktası iken $w_0 \preceq x$ koşuluyla alınan her $w_0 \in X$ için genel terimi $w_n = F\left(w_{n-1}\right)$ olan (w_n) dizisi x'e vektörel yakınsaktır.

İspat

Verilen $x_0, \ldots, x_{k-1}$ elemanları için $x_0 \preceq x_1 \preceq \ldots \preceq x_{k-1} \preceq x_k = T\left(x_0, \ldots, x_{k-1}\right)$ sağlansın ve bu elemanlar yardımıyla her n için x_{k+n} =T $\left(x_n, \ldots, x_{n+k-1}\right)$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi tanımlansın. Burada T fonksiyonu sıra artan olduğundan $x_k = T\left(x_0, \ldots, x_{k-1}\right) \preceq T\left(x_1, \ldots, x_k\right) = x_{k+1}$ olduğu kolayca görülebilir. Bu prosedür takip edilirse her n için

$$x_0 \preceq x_1 \preceq \ldots \preceq x_{k-1} \preceq x_k \preceq \ldots \preceq x_{k+n-1} \preceq x_{k+n} \preceq \ldots \tag{5.6}$$

olur. Bu yüzden (x_n) sıra artan bir dizi olur. Ayrıca, T sıralı vektörel Prešić tipi büzülme olduğundan $x_0 \preceq x_1 \preceq \ldots \preceq x_{k-1} \preceq x_k$ koşuluyla alınan her $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k \in X$ için

$$d\left(T\left(x_0, \ldots, x_{k-1}\right), T\left(x_1, \ldots, x_k\right)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i d\left(x_{i-1}, x_i\right)$$

elde edilir. Bu koşulda $1 \leq i \leq k$ aralığındaki her i için $\beta_i \in [0,1)$ ve $\sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i < 1$ olduğu unutulmamalıdır. Benzer bir çıkarım k sayısından büyük veya eşit her n için yapılabilir. Yani her n $(\geq k)$ için

$$d\left(T\left(x_{n-k}, \ldots, x_{n-1}\right), T\left(x_{n-k+1}, \ldots, x_n\right)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i d\left(x_{n-k+i-1}, x_{n-k+i}\right)$$

elde edilir. Şimdi de

$$\Omega = \left[\sum_{j=1}^{k} \beta_j\right]^{1/k} \text{ ve } \mathcal{S} = \sup\left\{\frac{d\left(x_{j-1}, x_j\right)}{\Omega^j} : 1 \leq j \leq k\right\}$$

iken her n için $d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leqslant \mathcal{S}\Omega^n$ sağlandığı tümevarım yöntemi ile gösterilecektir. Öncelikle $n = 1, \ldots, k$ için $d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leqslant \mathcal{S}\Omega^n$ olduğu açıkça görülebilir. Buna ilaveten

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leqslant \mathcal{S}\Omega^n, d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) \leqslant \mathcal{S}\Omega^{n+1}, \ldots, d\left(x_{n+k-1}, x_{n+k}\right) \leqslant \mathcal{S}\Omega^{n+k-1}$$

olduğunu kabul edilirse, (5.5) ve (5.6)'dan dolayı

$$\begin{aligned}
d\left(x_{n+k}, x_{n+k+1}\right) &= d\left(T\left(x_n, \ldots, x_{n+k-1}\right), T\left(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}\right)\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i d\left(x_{n+i-1}, x_{n+i}\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i \mathcal{S}\Omega^{n+i-1} = \mathcal{S}\Omega^n \sum_{i=1}^{k} \beta_i \Omega^{i-1} \\
&\leqslant \mathcal{S}\Omega^n \sum_{i=1}^{k} \beta_i \\
&\leqslant \mathcal{S}\Omega^{n+k}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır ki, tümevarım yöntemi ile istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Her $n, p \in \mathbb{N}^{+}$ için

$$
\begin{aligned}
d\left(x_n, x_{n+p}\right) &\leqslant d\left(x_n, x_{n+1}\right) + d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \ldots + d\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}\right) \\
&\leqslant \mathcal{S}\Omega^{n} + \mathcal{S}\Omega^{n+1} + \ldots + \mathcal{S}\Omega^{n+p-1} \\
&\leqslant \mathcal{S}\Omega^{n}\left[1 + \Omega + \Omega^{2} + \ldots + \Omega^{p-1}\right] \\
&= \mathcal{S}\Omega^{n}\frac{1-\Omega^{p}}{1-\Omega} \\
&\leqslant \mathcal{S}\frac{\Omega^{n}}{1-\Omega}
\end{aligned}
$$

ve $\mathcal{S}\dfrac{\Omega^{n}}{1-\Omega} \downarrow 0$ olduğundan (x_n) dizisinin bir E-Cauchy dizisi olduğu sonucuna varılır. X kümesi bir E-tam Riesz uzayı olduğundan $x_n \overset{d,E}{\to} x$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı vardır. Yani, $a_n \downarrow 0$ ve her n için $d\left(x_n, x\right) \leqslant a_n$ olacak şekilde E içinde bir (a_n) dizisi mevcuttur. Şimdi $F : X \to X$ operatörünü $F\left(x\right) = T\left(x, \ldots, x\right)$ kuralıyla tanımlayalım. İspatın bundan sonraki kısmında iki durum ayrı ayrı incelenecektir.

(i) İlk olarak X içinde alınan bir (x_n) dizisi için $\left(\left(x_n, \ldots, x_n\right)\right)$ de X^{k} içinde alınan bir dizidir. Üstelik f fonksiyonu vektörel sürekli ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ olursa, $b_n \downarrow 0$ ve her n için $d\left(T\left(x_n, \ldots, x_n\right), T\left(x, \ldots, x\right)\right) \leqslant b_n$ olacak şekilde bir (b_n) dizisi vardır.
Bu yüzden her n için

$$
\begin{aligned}
d\left(F\left(x\right), x\right) &= d\left(T\left(x, \ldots, x\right), x\right) \\
&\leqslant d\left(T\left(x_n, \ldots, x_n\right), x\right) + d\left(T\left(x_n, \ldots, x_n\right), T\left(x, \ldots, x\right)\right) \\
&= d\left(x_{n+1}, x\right) + d\left(T\left(x_n, \ldots, x_n\right), T\left(x, \ldots, x\right)\right) \\
&\leqslant a_{n+1} + b_n
\end{aligned}
$$

elde edilir ki, $a_{n+1} + b_n \downarrow 0$ olduğundan $F(x) = x$ sonucuna varılır.

(ii) (x_n) sıra artan dizi ve $x_n \overset{d,E}{\to} x$ iken her n için $x_n \preceq x$ olsun. Bu durumda her n için

$$
\begin{aligned}
d(x, F(x)) &\leqslant d(x, x_{n+k}) + d(x_{n+k}, F(x)) \\
&= d(x, x_{n+k}) + d(T(x_n, \ldots, x_{n+k-1}), T(x, \ldots, x)) \\
&\leqslant d(x, x_{n+k}) + d(T(x_n, \ldots, x_{n+k-1}), T(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}, x)) \\
&\quad + d(T(x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}, x), T(x_{n+2}, \ldots, x_{n+k-1}, x, x)) \\
&\quad + d(T(x_{n+2}, \ldots, x_{n+k-1}, x), T(x_{n+3}, \ldots, x_{n+k-1}, x, x, x)) \\
&\quad + \cdots + d(T(x_{n+k-1}, x, \ldots, x), T(x, \ldots, x))
\end{aligned}
$$

olur ve (5.5)'den dolayı

$$
\begin{aligned}
d(x, F(x)) &\leqslant d(x, x_{n+k}) + \left[\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i d(x_{n+i-1}, x_{n+i}) + d(x_{n+k-1}, x)\right] \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^{k-2} \beta_i d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) + d(x_{n+k-1}, x)\right] \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^{k-3} \beta_i d(x_{n+i+1}, x_{n+i+2}) + d(x_{n+k-1}, x)\right] \\
&\quad + \ldots + d(x_{n+k-1}, x) \\
&\leqslant d(x, x_{n+k}) + \beta_1 d(x_n, x_{n+1}) + \left[\sum_{i=1}^{2} \beta_i\right] d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad + \ldots + \left[\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i\right] d(x_{n+k-2}, x_{n+k-1}) + \left[\sum_{i=1}^{k} \beta_i\right] d(x_{n+k-1}, x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca $\sum_{i=1}^{k} \beta_i < 1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
d(x, F(x)) &\leqslant d(x, x_{n+k}) + d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) \\
&\quad + \ldots + d(x_{n+k-2}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x) \\
&\leqslant a_{n+k} + \mathcal{S}\Omega^n + \mathcal{S}\Omega^{n+1} + \mathcal{S}\Omega^{n+2} \\
&\quad + \ldots + \mathcal{S}\Omega^{n+k-1} + a_{n+k-1}
\end{aligned}
$$

sağlanır, $a_n \downarrow 0$ ve $\mathcal{S}\Omega^n \downarrow 0$ olduğu için $F(x) = x$ sonucuna varılır.

Şimdi de sabit noktanın tekliği gösterilecektir. Öncelikle $A = \{x \in X : F(x) = x\}$ iyi sıralı olsun. Bu durumda A'nın her alt kümesinin bir en küçük elemanı vardır ve herhangi iki $s, t \in A$ karşılaştırılabilirdir. Genelliği bozmaksızın $s \preceq t$ olsun. İlişik fonksiyonu F'nin tanımından $s = T(s, \ldots, s)$ ve $t = T(t, \ldots, t)$ elemanları için

$$
\begin{aligned}
d(s, t) &= d(T(s, \ldots, s), T(t, \ldots, t)) \\
&\leqslant d(T(s, \ldots, s), T(s, \ldots, s, t)) + d(T(s, \ldots, s, t), T(s, \ldots, s, t, t)) \\
&\quad + \cdots + d(T(s, t, \ldots, t), T(t, \ldots, t)) \\
&\leqslant \beta_k d(s, t) + \beta_{k-1} d(s, t) + \cdots + \beta_1 d(s, t) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{k} \beta_i\right] d(s, t)
\end{aligned}
$$

sağlandığı görülür ve $\sum_{i=1}^{k} \beta_i < 1$ olduğundan $d(s, t) = 0$ sonucuna varılır. Bu durumda $s = t$, yani sabit nokta tektir. Diğer yandan F'nin sabit noktası tek ise A tek nokta kümesi olur, yani doğal olarak A iyi sıralıdır. İspatın son kısmı için x elemanı F operatörünün sabit noktası olsun, (w_n) dizisi her n için $w_n = F(w_{n-1})$ kuralıyla tanımlansın ve $w_0 \preceq x$ koşuluyla bir $w_0 \in X$ elemanı alınsın. Bu durumda T sıra artan olduğu için F de sıra artandır ve her n için $w_n \preceq x$ sağlanır.

Böylece herhangi bir n için

$$
\begin{aligned}
d\left(w_n, x\right) &= d\left(T\left(w_{n-1}, \ldots, w_{n-1}\right), T\left(x, \ldots, x\right)\right) \\
&\leqslant d\left(T\left(w_{n-1}, \ldots, w_{n-1}\right), T\left(w_{n-1}, \ldots w_{n-1}, x\right)\right) \\
&\quad + \cdots + d\left(T\left(w_{n-1}, x, \ldots, x\right), T\left(x, \ldots, x\right)\right) \\
&= \left[\sum_{i=1}^{k} \beta_i\right] d\left(w_{n-1}, x\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu olay n kez tekrarlanırsa

$$
d\left(w_n, x\right) \leqslant \left[\sum_{i=1}^{k} \beta_i\right]^n d\left(w_0, x\right) = \Omega^{nk} d\left(w_0, x\right)
$$

sağlandığı görülür ki, bu da (w_n) dizisinin x elemanına vektörel yakınsak olduğu anlamına gelir.

Teorem 5.2.1'de $k = 1$ alınması durumunda klasik Banach büzülme prensibinin elde edildiği daha önce belirtilmişti. Benzer bir çıkarım da [18] ve [30] çalışmalarında yer alan sonuçlar için de yapılabilir.

Not

(i) Teorem 5.2.2'de $k = 1$ alınması durumunda [30]'da sıra artan fonksiyonlar için verilen sonuçlar elde edilir. Ayrıca bu koşula ek olarak $E = \mathbb{R}$ alınır ve alışılmış sıralama ile donatılırsa, bu sefer [18]'de azalmayan fonksiyonlar için verilen sonuçlar elde edilir.

(ii) Teorem 5.2.2'de X E-tam sıralı vektör metrik uzay ve özel olarak $E = \mathbb{R}$ olarak alınırsa X sıralı metrik uzay olur. Bu durumda sıralı metrik uzaylarda sıralı Prešić tipi büzülmeler için verilen sonuçlar, örneğin [15]'de verilmiş olan Sonuç 17, bu teorem vasıtasıyla elde edilebilir.

Sıradaki örneğe Teorem 5.2.2 uygulanabilir olmasına rağmen ne Teorem 5.2.1 ne de sıralı metrik uzaylarda ve metrik uzaylarda Prešić tipi büzülmeler için elde edilen sonuçlar uygulanamazlar. Bu yönüyle aşağıdaki örnek önemlidir.

Örnek

$E = \mathbb{R}^2$ koordinat sıralaması ile, $X = \{0, 1, 2\}$ kümesi $\leq$ alışılmış sıralama olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$x \preceq y \Leftrightarrow (x, y \in \{0, 1\} \text{ iken } x \leq y) \text{ veya } x = y = 2$$

biçiminde tanımlanan sıralama ile donatılmış olsun. Bu durumda E Arşimedyan Riesz uzayıdır $d(x, y) = (2|x-y|, 3|x-y|)$ kuralı ile tanımlanmış olan $d : X^2 \to \mathbb{R}^2$ dönüşümü ile X kümesi E-tam sıralı vektör metrik uzay olur. Ayrıca

$$T(x, y) = \begin{cases} 2 & , \quad (x, y) = (1, 2) \text{ veya } (x, y) = (2, 0) \\ 1 & , \quad (x, y) = (2, 1) \text{ veya } (x, y) = (0, 2) \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

kuralı ile tanımlanan $T : X^2 \to X$ fonksiyonu sıra artan bir fonksiyon olur. Bu arada $x_0, x_1, x_2 \in X$ olmak üzere $x_0 \preceq x_1 \preceq x_2$ koşulu ancak 5 durum için sağlanır ki bunlar

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0$$

$$x_0 = x_1 = 0, \; x_2 = 1$$

$$x_0 = 0, \; x_1 = x_2 = 1$$

$$x_0 = x_1 = x_2 = 1$$

$$x_0 = x_1 = x_2 = 2$$

durumlarıdır. Bu beş durumun her birisi

$$d(T(x_0, x_1), T(x_1, x_2)) \leqslant \frac{1}{3} d(x_0, x_1) + \frac{1}{2} d(x_1, x_2)$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca X içinde alınan her sıra artan (x_n) dizisinin her bir terimi için $x_n \preceq x$ eşitsizliğini sağlanır. Bu yüzden Teorem 5.2.2'de $k = 2$, $\beta_1 = 1/3$ ve $\beta_2 = 1/2$ olarak alınırsa bu teoremin bütün hipotezlerinin sağlandığı ve 0 elemanının T fonksiyonun tek sabit noktası olduğu görülür. Ancak, Teorem 5.2.1'de özel olarak $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ olarak alınırsa $d\left(T\left(x_0, x_1\right), T\left(x_1, x_2\right)\right) = (4, 6)$ olmasına karşılık $\frac{1}{3}\, d\left(x_0, x_1\right) + \frac{1}{2}\, d\left(x_1, x_2\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\right)$ olduğundan Teorem 5.2.1 bu örneğe uygulanamaz. Üstelik [15]'de geçen Sonuç 17 gibi sıralı metrik uzaylarda Prešić tipi büzülmeler için elde edilen sonuçlar da bu örneğe uygulanamaz.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında öncelikle sıralı vektör metrik uzaylar üstünde sıra artan ve sıra azalan fonksiyonlar için sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Ardından sıralı vektör metrik uzaylar üstünde karma monoton özelliğe sahip fonksiyonlar için sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Çift monoton özelliği tanımlanmış ve karma monoton özelliğe sahip fonksiyonlar için elde edilmiş olan sonuçlar çift monoton özelliğe sahip olan fonksiyonlar için yeniden yorumlanmıştır. Daha sonra herhangi bir monotonluk özelliğine sahip olmayan fonksiyonlar için elde edilen sonuçlar genişletilmişir. Ayrıca tanımı yapılan sıralı vektörel sözde büzülmelerin metrik uzaylarda ve sıralı metrik uzaylarda tanımlanan sözde büzülmelerden farkı incelenmiştir. Daha sonra tanımı yapılan sıralı vektörel hemen hemen büzülmeler için sabit nokta sonuçları verilmiştir. Son olarak sıralı vektör metrik uzayların sonlu çarpımları üstünde sıralı vektörel Prešić tipi büzülmeler için sabit nokta sonucu elde edilmiştir. Her bir bölüm örnekler ile zenginleştirilmiş, bu örnekler ve notlar vasıtasıyla tez içinde elde edilen sonuçların birbirleriyle ve literatürdeki diğer çalışmalar ile ilişkileri incelenmiştir. Ayrıca bu çalışma metrik uzaylarda ve sıralı metrik uzaylarda hâli hazırda var olan sonuçların genelleştirilerek daha geniş fonksiyon sınıfları için uygulanabilir hale getirilmesine de vesile olmuştur. Sıralı vektör metrik uzaylar üstünde yapılan çalışmaların on yıldan az bir zaman diliminde gerçekleştirilmiş olması göz önüne alındığında bu uzaylar üstünde yakın gelecekte birçok çalışmanın yapılması beklenmektedir. Bu tez bu alanda yapılacak yeni çalışmalara da bir zemin hazırlaması yönüyle literatüre önemli bir katkı sağlayacak ve yakın gelecekte birçok matematikçinin ilgisini çekecektir.

KAYNAKLAR

1. Banach, S. (1922). Sur les operations dans les ensembles abstracits et leur application aux equations integrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133-181.

2. Kannan, R. (1968). Some results on fixed points. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 10, 71-76.

3. Chatterjea, S.K. (1972) Fixed-point theorems. *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*, 25, 727-730.

4. Rhoades, B.E. (1977). A comparison of various definitions of contractive mappings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 226, 257-290.

5. Zamfirescu, T. (1972). Fix point theorems in metric spaces. *Archiv der Mathematik.* 23, 292-298.

6. Ćirić, L.B. (1974). A generalization of Banach's contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45, 267-273.

7. Berinde, V. (2004). Approximating fixed point of weak contractions using the Picard iteration. *Nonlinear Analysis Forum*, 9, 43-54.

8. Berinde, V. (2003). On the approximation of fixed points of weak contractive mappings. *Carpathian Journal of Mathematics*, 19, 7-22.

9. Berinde, V. (2003). Approximating fixed points of weak ϕ-contractions. *Fixed Point Theory*, 4, 131-142.

10. Berinde, V. (2007). *Iterative Approximation of Fixed Points.* Berlin, Germany: Springer, 3-58.

11. Prešić, S.B. (1965). Sur une classe din equations aux differences finite et. sur la convergence de certains suites. *Publications de l'Institut Mathematique*, 5(19), 75-78.

12. Prešić, S.B. (1965). Sur la convergence des suites, Comptes. *Rendus de l'Académie de Paris*, 260, 3828-3830.

13. Luong, N. V. and Thuan, N. X. (2012). Some fixed point theorems of Prešić-Cirić type. *Acta Universitatis Apulensis*, 30, 237-249.

14. Malhotra, S. K., Shukla,S. and Sen, R. (2012). A generalization of Banach contraction principle in ordered cone metric spaces. *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 5(2), 59-67.

15. Shukla, S. and Radenović, S. (2013). A generalization of Prešić type mappings in 0-Complete ordered partial metric spaces. *Chinese Journal of Mathematics*. 2013, 1-8.

16. Shukla, S. and Radenović, S. (2014). Prešić-Maia type theorems in ordered metric spaces. *Gulf Journal of Mathematics*, 2(2), 73-82.

17. Ran, A. C. M. and Reurings, M.C.B. (2004). A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132, 1435-1443.

18. Nieto, J. J. and Rodríguez-López, R. (2005). Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations. *Order*, 22(3), 223-239.

19. Nieto, J. J. and Rodríguez-López, R. (2007). Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations. *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, 23, 2205-2212.

20. Gnana Bhaskar, T. and Lakshmikantham, V. (2006). Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications,* 65(7), 1379-1393.

21. Lakshmikantham, V. and Ćirić, L. (2009). Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 70(12), 4341-4349.

22. Berinde, V. (2011). Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications,* 74(18), 7347-7355.

23. Berinde, V. (2012). Coupled fixed point theorems for ϕ-contractive mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 75(6), 3218-3228.

24. Berinde, V. and Păcurar, M. (2012). Coupled fixed point theorems for generalized symmetric Meir-Keeler contractions in ordered metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications,* 2012(1), 1-11.

25. Çevik, C. and Altun, I. (2009). Vector metric spaces and some properties. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 34(2), 375-382.

26. Altun, I. and Çevik, C. (2011). Some common fixed point theorems in vector metric spaces. *Filomat*, 25(1), 105-113.

27. Çevik, C. (2014). On continuity of functions between vector metric spaces. *Journal of Function Spaces*, 2014, 1-6.

28. Aliprantis, C. D. and Border, K. C. (1999). *Infinite Dimensional Analysis (Third edition).* Berlin: Springer-Verlag, 311-322.

29. Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C. (1971). *Riesz Space I.* Amsterdam: North-Holland, 48-124.

30. Çevik, C., Altun, I., Şahin, H., Özeken, Ç. C. (2017). Some fixed point theorems for contractive mapping in ordered vector metric spaces. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10, 1424-1432.

31. Özeken, Ç. C. and Çevik C. (2021). Ordered vectorial quasi and qlmost contractions on ordered vector metric spaces. *Mathematics*, 9(19), 2443-2450.

32. Özeken, Ç. C. and Çevik C. (2021). Prešić type operators on ordered vector metric spaces. *Journal of Science and Art*, 21(4), 935-942.

GAZİ GELECEKTİR...