
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

YÜKSEK BASAMAKTAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Abdullah AHMETOĞLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Abdullah AHMETOĞLU

26/ 02/ 2024

YÜKSEK BASAMAKTAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

(Doktora Tezi)

Abdullah AHMETOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2024

ÖZET

Bu tezde yüksek basamaktan sınır değer problemleri için Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine çalışılmıştır. Amaca yönelik önemli temel tanım ve teoremlere yer verildikten sonra Lyapunov tipi eşitsizliklere ilişkin literatürdeki bazı önemli sonuçlar sistematik biçimde bahsedilmiştir. Daha sonra dördüncü bölümde dördüncü basamaktan bazı sınır değer problemleri için ve beşinci bölümde tek basamaktan sınır değer problemleri için Lyapunov tipi eşitsizliklerle ilgili elde edilmiş orijinal sonuçlara yer verilmiştir.

Bilim Kodu	:	20406
Anahtar Kelimeler	:	Sınır değer problemleri, Lyapunov tipi eşitsizlikler, Green fonksiyonları
Sayfa Adedi	:	77
Danışman	:	Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

LYAPUNOV TYPE INEQUALITIES FOR HIGHER ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEMS

(Ph. D. Thesis)

Abdullah AHMETOĞLU

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2024

ABSTRACT

In this thesis, Lyapunov-type inequalities for higher order boundary value problems are studied. After giving place to important basic definitions and theorems for the purpose, some important results in the literature related to Lyapunov-type inequalities are mentioned systematically. Then, in the fourth chapter, the original results about the Lyapunov-type inequalities for some fourth order boundary value problems and in the fifth chapter for the single order boundary value problems are given.

Science Code	:	20406
Key Words	:	Boundary value problems, Lyapunov-type inequalities, green functions
Page Number	:	77
Supervisor	:	Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında bana her türlü desteği veren, kıymetli zamanını benden esirgemeyen tez danışmanım sayın Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ'a, tez izleme komitelerinde beni dinleyip yol gösteren değerli hocalarım sayın Prof. Dr. Adil MISIR ve Prof. Dr. Abdullah Özbekler'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bütün bu süreç boyunca bu yükü benimle paylaşan sevgili eşim Aybeniz AHMETOĞLU'na teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ŞEKİLLERİN LİSTESİ viii

SİMGELER VE KISALTMALAR ix

1. GİRİŞ 1

2. GREEN FONKSİYONLARI 3

2.1. Temel Bilgiler 3

2.2. Green Fonksiyonlarının İnşası 8

3. LİTERATÜRDEKİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLERLE İLGİLİ SONUÇLAR 23

3.1. İkinci Basamaktan Sınır Değer Problemleri için Lyapunov tipi Eşitsizlikler 23

3.2. Üçüncü Basamaktan Sınır Değer Problemleri için Lyapunov tipi Eşitsizlikler 27

3.3. Yüksek Basamaktan Sınır Değer Problemleri için Lyapunov tipi Eşitsizlikler 32

4. DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN BAZI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN YENİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER 43

5. $(2n+1)$-İNCİ BASAMAKTAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN YENİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER 57

6. SONUÇ VE ÖNERİLER 69

KAYNAKLAR 71

ÖZGEÇMİŞ 77

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 1.1. $u'(t) + u(t) = e^{-t^4}, u(0) = u(1)$ probleminin yaklaşık çözümü..... 7

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{G(t,s)}$	Green fonksiyonu
$\boldsymbol{\mathcal{M}_{n\times n}}$	$n \times n$ türünden matris sınıfı
$\boldsymbol{\mathcal{L}^1(J,\mathbb{R}^n)}$	J üzerinde tüm Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{\mathcal{AL}(J,\mathbb{R}^n)}$	J üzerinde mutlak sürekli fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{u^{(n)}}$	u fonksiyonunun n-inci basamaktan türevi

1. GİRİŞ

Lyapunov tipi eşitsizlikler sınır değer problemlerinin çözümlerinin davranışını incelemek için önemli konulardan biridir. Bu eşitsizlik ve birçok genellemeleri, diferensiyel denklemde, fark denkleminde ve zaman skalasında, salınım teorisi, kararlılık, varlık teklik teoremleri, özdeğer problemleri, diskonjuge vb. uygulama alanlarına sahiptir. Lyapunov'un [1] nolu temel makalesinin ortaya çıkışından bu yana çeşitli ispatlar, genellemeler ve iyileştirmeler ortaya çıkmıştır. Literatürde klasik Lyapunov eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik aşağıdaki gibidir:

$a, b \in \mathbb{R}$ için $a < b$ iken her $t \in (a, b)$ için $u(t) \neq 0$ ve $q(t)$ reel değerli sürekli pozitif bir fonksiyon olmak üzere $u(t)$, ikinci basamaktan

$$u''(t) + q(t)u(t) = 0$$

diferensiyel denkleminin

$$u(a) = u(b) = 0$$

Dirichlet sınır koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü olmak üzere

$$\int_a^b q(s)ds \geq \frac{4}{b-a}$$

eşitsizliğine klasik Lyapunov eşitsizliği denir.

Lyapunov'un 1907 yılında ikinci basamaktan sınır değer problemi için yaptığı bu çalışma ve elde ettiği klasik Lyapunov eşitsizliği daha sonrasında araştırmacılar tarafından büyük ilgi görmüş genelleştirilerek ve geliştirilerek yüksek basamaktan sınır değer problemlerine ve diferensiyel denklem sistemlerine uygulanmış ve çeşitli Lyapunov tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Bu anlamda, Lyapunov tipi eşitsizlikler elde etmek için çeşitli yöntem ve metotlar geliştirilmiştir. Bu yöntemler arasında en iyi olasılıklı sabitlerin bulunmasında önemli metot olan, Green fonksiyonunun kullanıldığı metotlar gösterilebilir.

Green fonksiyonları ilk olarak Riemann tarafından ünlü matematikçi George Green için atfedilerek kullanılmıştır. Adi diferensiyel denklem kuramında Green fonksiyonları L lineer diferensiyel operatör olmak üzere $Lu(t) = f(t)$ diferensiyel denklemi ve sınır değer koşullarından oluşan problemin çözümünü bulmak için kullanılır. Green fonksiyonu $f(t)$ terimine bağlı olmadığından bir anlamda L'nin tersi olarak da düşünülebilir ve $u(t)$ çözüm fonksiyonu, integral çekirdeği Green fonksiyonu olan integral denklemi ile verilebilir.

Tezde önce, Green fonksiyonları ile ilgili bazı temel konulara yer verilmiştir. Daha sonra Green fonksiyonlarının tanımı ve bazı sınır değer problemleri için Green fonksiyonunun nasıl inşa edildiğine dair örnekler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde literatür taraması sonucunda daha önceki yıllarda elde edilmiş bazı temel sonuçlara yer verilmiştir. Bu bölümde ikinci, üçüncü ve yüksek basamaktan sınır değer problemleri için elde edilmiş Lyapunov tipi eşitsizliklerden sistematik bir şekilde bahsedilmiştir.

Tamamen özgün ve orijinal sonuçlardan oluşan dördüncü ve beşinci bölümlerde yüksek basamaktan bazı sınır değer problemleri için elde edilmiş sonuçlara yer verilmiştir. Bu çalışmalarda öncelikle verilen sınır değer problemleri için Green fonksiyonları bulunmuş ve daha sonra bu fonksiyon kullanılarak çeşitli Lyapunov tipi eşitsizlikler elde edilmiştir.

2. GREEN FONKSİYONLARI

Bu tez boyunca t bağımsız değişken ve u bağımlı değişken olarak alınacaktır.

2.1. Temel Bilgiler

Verilen $m \in \mathbb{R}$ sayısı ve $t \in \mathbb{R}$ için $f(t)$ fonksiyonu sürekli olmak üzere birinci basamaktan

$$u'(t) + mu(t) = f(t) \tag{2.1}$$

diferensiyel denklemi göz önüne alınsın [2.1]. Bu denklemde eşitliğin iki tarafı da e^{mt} fonksiyonu ile çarpılırsa Eş. 2.1 diferensiyel denkleminden

$$\frac{d}{dt}(e^{mt}u(t)) = e^{mt}f(t) \tag{2.2}$$

elde edilir. Eş. 2.2 diferensiyel denkleminde her iki tarafın 0'dan t'ye integrali alınırsa

$$e^{mt}u(t) - u(0) = \int_0^t e^{ms}f(s)ds \tag{2.3}$$

eşitliği elde edilir. $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$u_c(t) = ce^{-mt} + \int_0^t e^{-m(t-s)}f(s)ds \tag{2.4}$$

şeklindeki integral denklemi ile Eş. 2.1 diferensiyel denkleminin çözümlerinin kümesi aynıdır. Bir $u(0) = u_0$ başlangıç değer koşulu ilave edilirse tek türlü çözülebilir bir problem elde edilir ve $c = u_0$ olmak üzere tek çözüm Eş. 2.4 ile verilendir.
Fakat, sınırlı $[0,1]$ aralığında tanımlı ve

$$u(0) = u(1) \tag{2.5}$$

sınır koşulunu sağlayan Eş. 2.1'in çözümleri incelenirse bu durumda $u(0)$'ın olası değerlerinin bilinmediğine dikkat edilmelidir. Böylece problem, Eş. 2.4 eşitliğinde ifade edilen çözümlerin bir boyutlu kümesi içerisinde, tanım aralığının başlangıç ve bitiş noktasında aynı değerleri olan u_c fonksiyonu için reel bir c parametresini bulmaya eşdeğerdir.

Eş. 2.4 integral denkleminde Eş. 2.5 kullanılırsa

$$c_m = \frac{1}{1-e^{-m}} \int_0^1 e^{-m(1-s)} f(s) ds \tag{2.6}$$

elde edilir. Yani, $m \neq 0$ ise Eş. 2.5 sınır şartına sahip Eş. 2.1 probleminin bir tek çözümü vardır ve aralığın uç noktalarında bu tür bir çözümün elde edilen c_m değeri Eş. 2.6 ile ifade edilen değerdir.

$m = 0$ olduğunda Eş. 2.6 ifadesi tanımsızdır. Bu durumda, Eş. 2.3'de $m = 0$ ve Eş. 2.5 koşulu kullanılırsa çözümün varlığını garantilemek için bir gerek şart olan $\int_0^1 f(s)ds = 0$ elde edilir. Homogen olmayan f fonksiyonu üzerindeki bu koşul altında Eş. 2.5 sınır şartına sahip Eş. 2.1 probleminin sonsuz sayıda çözümü vardır. Gerçekten, bu çözümlerin kümesi, $c \in \mathbb{R}$ için

$$u_c(t) = c + \int_0^t f(s)ds$$

şeklindedir.

Eş. 2.1 ve Eş. 2.5 problemi aşağıdaki gibi düşünülebilir: $X = \{u \in \mathcal{L}^1([0,1], \mathbb{R}), u(0) = u(1)\}$, $\|u\| = maks\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\}$ normuna sahip Banach uzayı olsun ve $Y = \mathcal{L}^1([0,1], \mathbb{R})$, supremum normuna sahip olsun. Her $m \in \mathbb{R}$ için

$$L_m : X \longrightarrow Y$$
$$u \longrightarrow L_m u = u' + mu$$

lineer operatörü tanımlansın. $f \in Y$ verildiğinde $L_m u_m = f$ olacak şekilde $u_m \in X$ fonksiyonları bulunsun. Eğer u_m tek çözüm ise $u_m = {L_m}^{-1} f$ şeklinde yazılabilir. Burada ${L_m}^{-1}$, $L_m u_m = f$ diferensiyel denkleminin tek $u_m \in X$ çözümünü belirleyen herhangi bir $f \in Y$ fonksiyonu olacak şekilde ${L_m}^{-1}: Y \longrightarrow X$ şeklinde operatör olarak tanımlanır. Bir başka deyişle; çözümün tekliği, $L_m: X \longrightarrow Y$ ters çevrilebilir olmak üzere reel m parametresinin değerine bağlıdır.

Eş. 2.6'da verilen bu değer Eş. 2.4'te yerine yazılırsa $m \neq 0$ için Eş. 2.1 ve Eş. 2.5 probleminin tek çözümü $\chi_{(0,t)}(s) = \begin{cases} 0, & s \notin (0,t) \\ 1, & s \in (0,t) \end{cases}$, $(0,t)$ aralığının gösterge fonksiyonu ve

$$G_m(t,s) = \frac{1}{1-e^{-m}} \begin{cases} e^{-m(t-s)}, & 0 < s < t < 1 \\ e^{-m(1+t-s)}, & 0 < t < s < 1 \end{cases} \tag{2.7}$$

olmak üzere

$$u_m(t) = c_m e^{-mt} + \int_0^t e^{-m(t-s)} f(s) ds$$

$$= e^{-mt} \frac{1}{1-e^{-m}} \int_0^1 e^{-m(1-s)} f(s) ds + \int_0^t e^{-m(t-s)} f(s) ds$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-m(t+1-s)}}{1-e^{-m}} f(s) ds + \int_0^1 e^{-m(t-s)} \chi_{(0,t)}(s) f(s) ds$$

$$\left(\int_t^1 \chi_{(0,t)}(s) ds = 0 \text{ olmak üzere } \int_0^t \chi_{(0,t)}(s) ds + \int_t^1 \chi_{(0,t)}(s) ds = \int_0^1 \chi_{(0,t)}(s) ds \right)$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{e^{-m(t+1-s)}}{1-e^{-m}} + e^{-m(t-s)} \chi_{(0,t)}(s) \right] f(s) ds$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-m(t+1-s)} + e^{-m(t-s)} \chi_{(0,t)}(s) - e^{-m(t-s+1)} \chi_{(0,t)}(s)}{1-e^{-m}} f(s) ds$$

$$= \int_0^t \frac{e^{-m(t+1-s)} + e^{-m(t-s)}\chi_{(0,t)}(s) - e^{-m(t-s+1)}\chi_{(0,t)}(s)}{1-e^{-m}} f(s)ds$$

$\left(s \in (0,t) \text{ için } \chi_{(0,t)}(s) = 1\right)$

$$+ \int_1^t \frac{e^{-m(t+1-s)} + e^{-m(t-s)}\chi_{(0,t)}(s) - e^{-m(t-s+1)}\chi_{(0,t)}(s)}{1-e^{-m}} f(s)ds$$

$\left(s \in (t,1) \text{ (veya } s \notin (0,t)) \text{ için } \chi_{(0,t)}(s) = 0\right)$

$$= \int_0^t \frac{e^{-m(t-s)}}{1-e^{-m}} f(s)ds + \int_t^1 \frac{e^{-m(t+1-s)}}{1-e^{-m}} f(s)ds$$

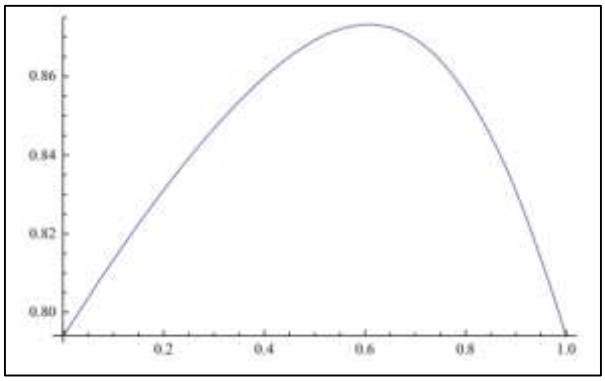
$$= \int_0^1 G_m(t,s)ds = L_m^{-1} f(t) \tag{2.8}$$

ifadesi ile verilendir. Elde edilen G_m, Eş. 2.1 ve Eş. 2.5 sınır değer problemine karşılık gelen Green fonksiyonudur. Bu tür bir fonksiyon L_m^{-1} ters operatörünün çekirdeğidir ve problemin çözümleri hakkında çok önemli fikirler verir. Bunlardan ilki, durumların çoğunda direk integral alarak çözümlerin tam ifadesi elde edilebilir. Örneğin, $f(t) = t$ ise

$$u_m(t) = \frac{e^{-m(1-t)}}{m(e^m - 1)} + \frac{t}{m} - \frac{1}{m^2} \tag{2.9}$$

elde edilir.

Anti türevlerin analizi çalışmadığında ve verilen bir f fonksiyonu için integralin tam ifadesi hesaplanamadığında nümerik integral kullanılabilir ve böylece istenilen fonksiyonun grafiği çizilir. Bu duruma bir örnek olarak $m = 1$ ve $f(t) = e^{-t^4}$ olmak üzere Eş. 2.1 ve Eş. 2.5 sınır değer problemi incelenebilir. Bu durumda, çözümün tam ifadesini veren integrali çözülemez. Fakat integral nümerik olarak çözülebilir ve Şekil 1.1'de gösterildiği gibi yaklaşık grafik çizilebilir.



Şekil 1.1. $u'(t) + u(t) = e^{-t^4},\ u(0) = u(1)$ probleminin yaklaşık çözümü [2]

Diğer yandan, ilgili bir sınır değer probleminin sağladığı en önemli bilgi kalitatif teoridir. Yukarıdaki örnekte, $m \neq 0$ ve her $t, s \in [0,1]$ için $mG_m(t,s) > 0$ olduğu açıktır. Buradan aşağıdaki karşılaştırma elde edilir:

$[0,1]$ aralığında $L_m u \geq 0$ olacak şekilde $u \in X$ olsun. Böylece $[0,1]$ aralığında $mu \geq 0$ sağlanır. Doğrudan bir sonuç olarak, $[0,1]$ aralığında $f_1 \geq f_2$ ise karşılık gelen çözümlerin $[0,1]$ aralığında $mu_1 \geq mu_2$ eşitsizliğini sağladığına dikkat edilmelidir. Ek olarak, sabitlenmiş her $t, s \in [0,1]$ için G_m Green fonksiyonu $m \in (0,\infty)$'a göre kesin azalan ve pozitiftir. Böylece $[0,1]$ aralığında $0 < m_1 < m_2$ ve $f_1 \geq f_2 \geq 0$ ise her $t \in [0,1]$ ve $i = 1,2$ için $L_{m_i} u_i = f_i$ diferensiyel denkleminin X'de karşılık gelen çözümleri $[0,1]$ aralığında negatif olmayandır ve

$$u_1(t) = \int_0^1 G_{m_1}(t,s) f_1(s) ds \geq \int_0^1 G_{m_2}(t,s) f_1(s) ds$$

$$\geq \int_0^1 G_{m_2}(t,s) f_2(s) ds = u_2(t) \qquad (2.10)$$

eşitsizliğini sağlar.

Bu temel örnek, incelenen diferensiyel denklemin Green fonksiyonu kullanılarak kalitatif ve kantitatif özelliklerin önemine sadece genel bir bakıştır. Lineer problemlerin çözümlerinin varlığına dair çok daha fazla sonuç Green fonksiyonunun yardımıyla elde edilebilir.

2.2. Green Fonksiyonlarının İnşası

Bu alt bölümde iki noktalı

$$Bu(a) + Cu(b) = h \tag{2.11}$$

sınır değer şartları ile birlikte $t \in J = [a, b]$ için birinci basamaktan n-boyutlu

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t) \tag{2.12}$$

lineer diferensiyel sisteminin çözümüyle ilgilenilecektir [2, s. 6]. Burada n pozitif bir tamsayı, $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$, $A: J \to \mathcal{M}_{n\times n}$ bir $\mathcal{L}^1(J, \mathcal{M}_{n\times n})$ fonksiyonu, $f: J \to \mathbb{R}^n$ bir $\mathcal{L}^1(J, \mathbb{R}^n)$ sınıfına ait fonksiyon, $B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $h \in \mathbb{R}^n$ sabit katsayılara sahip ve $u: J \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{AL}(J, \mathbb{R}^n)$ sınıfına aittir. Bilindiği gibi $\mathcal{L}^1(J, \mathcal{M}_{n\times n})$ ve $\mathcal{L}^1(J, \mathbb{R}^n)$, J üzerinde tüm Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların kümesi ve $\mathcal{AL}(J, \mathbb{R}^n)$, J üzerinde mutlak sürekli fonksiyonların kümesi olarak tanımlanır. Ayrıca, n, a, b, A, f, B, C ve h, problemin bilinen verileri ve u bilinmeyen fonksiyondur.

İlk olarak, homogen problemin ($f \equiv 0, h \equiv 0$) çözümlerinin yapısı incelenecektir. Yani, $t \in J$ için

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \\ Bu(a) + Cu(b) = 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

probleminin çözümü ele alınacaktır.

Şimdi Eş. 2.13 homogen probleminin çözümleri ve Eş. 2.11-Eş. 2.12 homogen olmayan problemin genel çözümü arasında bir sonuç verilecektir.

2.2.1. Teorem [2, Teorem 1.2.2]

u fonksiyonunun Eş. 2.11-Eş. 2.12 probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart y'nin homogen Eş. 2.13 probleminin bir çözümü ve p'nin Eş. 2.11-Eş. 2.12'nin bir çözümü olmak üzere $u = y + p$ olmasıdır.

İspat

Eş. 2.13'ün bir çözümü y ve Eş. 2.11-Eş. 2.12 probleminin bir çözümü p olsun. Sonuç olarak,

$$y'(t) + p'(t) = A(t)y(t) + A(t)p(t) + f(t) = A(t)\big(y(t) + p(t)\big) + f(t) \tag{2.14}$$

ve

$u = y + p, J$ üzerinde Eş. 2.12 sistemini sağlar. Diğer yandan,

$$B(y + p)(a) + C(y + p)(b) = Bp(a) + Cp(b) = h \tag{2.15}$$

ve dolayısıyla u, Eş. 2.11-Eş. 2.12 probleminin bir çözümüdür.

Diğer yandan, Eş. 2.11-Eş. 2.12 probleminin iki çözümü u_1 ve u_2 olsun. Böylece, her $t \in J$ için

$$u_1'(t) - u_2'(t) = A(t)(u_1(t) - u_2(t)) \tag{2.16}$$

ve

$$B\big(u_1(a) - u_2(a)\big) + C(u_1(b) - u_2(b)) = h - h = 0 \tag{2.17}$$

elde edilir. Yani, Eş. 2.11-Eş. 2.12 probleminin iki çözümünün farkı homogen Eş. 2.13 probleminin bir çözümüdür. Böylece ispat tamamlanır.

$\emptyset: J \to \mathcal{M}_{n\times n}$, Eş. 2.13 sistemine karşılık gelen temel matris olsun. Yani; $\emptyset$, regüler matris ve $t \in J$ için lineer

$$\emptyset'(t) = A(t)\emptyset(t) \tag{2.18}$$

matris denkleminin bir çözümüdür. Eş. 2.11-Eş. 2.12 problemi için aşağıdaki varlık ve teklik sonucuna ulaşılır.

2.2.2. Teorem [2, Teorem 1.2.3]

Eş. 2.11-Eş. 2.12 probleminin bir tek $u \in \mathcal{AL}(J, \mathbb{R}^n)$ çözümünün olması için gerek ve yeter şart

$$M_\emptyset = B\emptyset(a) + C\emptyset(b) \tag{2.19}$$

ve $\emptyset$, Eş. 2.13 sisteminin herhangi temel matrisi olmak üzere

$$|M_\emptyset| = \det(M_\emptyset) \neq 0 \tag{2.20}$$

olmasıdır.

İspat

[3, Sonuç 2.1]'deki parametrelerin değişimi yönteminden $u \in \mathcal{AL}(J, \mathbb{R}^n)$'nun Eş. 2.12 probleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart $t \in J$ için

$$u(t) = \emptyset(t)\lambda + \emptyset(t)\int_a^t \emptyset^{-1}(s)f(s)ds \tag{2.21}$$

olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^n$ olmasıdır. u fonksiyonunun Eş. 2.11 sınır koşulunu sağlaması için gerek ve yeter şart λ'nın

$$M_\emptyset\lambda \equiv \big(B\emptyset(a) + C\emptyset(b)\big)\lambda = h - C\emptyset(b)\int_a^b \emptyset^{-1}(s)f(s)ds \tag{2.22}$$

cebirsel denklemini sağlamasıdır. Bu denklemin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $M_{\emptyset}$ matrisinin tersinin olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

2.2.1. Sonuç [2, Sonuç 1.2.4]

Eş. 2.13 probleminin sadece aşikar çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart Eş. 2.11-Eş. 2.12 probleminin tek çözüme sahip olmasıdır.

Teorem 2.2.2'deki Eş. 2.20 şartı, Eş. 2.11-Eş. 2.12 probleminin bir tek çözüme sahip olmasını garanti etmek için gerek ve yeter şarttır. Bu tür bir durumda $u \in \mathcal{AL}(J, \mathbb{R}^n)$ tek çözümü

$$u(t) = \emptyset(t){M_{\emptyset}}^{-1}\left(h - C\emptyset(b)\int_a^b \emptyset^{-1}(s)f(s)ds\right) + \emptyset(t)\int_a^t \emptyset^{-1}(s)f(s)ds \qquad (2.23)$$

şeklindedir.

$(0,t)$ de $\chi_{(0,t)}(s)$ gösterge fonksiyonu gözönüne alındığında Eş. 2.23 eşitliği

$$u(t) = \emptyset(t){M_{\emptyset}}^{-1}\left(h - C\emptyset(b)\int_a^b \emptyset^{-1}(s)f(s)ds\right)$$

$$+\emptyset(t)\int_a^b \emptyset^{-1}(s)\chi_{(0,t)}(s)f(s)ds \qquad (2.24)$$

şeklinde veya buna denk olarak

$$G(t,s) = \begin{cases} -\emptyset(t){M_{\emptyset}}^{-1}C\emptyset(b)\emptyset^{-1}(s) + \emptyset(t)\emptyset^{-1}(s), & a \le s < t \le b \\ -\emptyset(t){M_{\emptyset}}^{-1}C\emptyset(b)\emptyset^{-1}(s) & , \ a \le t < s \le b \end{cases} \qquad (2.25)$$

olmak üzere

$$u(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds + \emptyset(t){M_\emptyset}^{-1}h \tag{2.26}$$

yazılabilir. $G: (J \times J)\backslash\{(t,t), t \in J\} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ fonksiyonu Eş. 2.13 problemine karşılık gelen Green fonksiyonu olarak tanımlanır.

2.2.1. Uyarı [2, Uyarı 1.2.14]

Eş. 2.26 ifadesinden $t \in J$ için

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + f(t) \\ By(a) + Cy(b) = 0 \end{cases}$$

probleminin tek çözümünün

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds$$

olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca, $t \in J$ için

$$\begin{cases} z'(t) = A(t)z(t) \\ Bz(a) + Cz(b) = h \end{cases}$$

probleminin tek çözümü

$$z(t) = \emptyset(t){M_\emptyset}^{-1}h$$

fonksiyonudur.

Şimdi birinci basamaktan lineer Eş. 2.13 sınır değer problemine karşılık gelen Green fonksiyonunun tanımı verilecektir [2].

2.2.1. Tanım [2, Tanım 1.2.16]

Aşağıdaki özellikleri sağlayan G fonksiyonuna Eş. 2.13 problemi için bir Green fonksiyonu denir.

$(G1)$ $G \equiv \left(G_{i,j}\right)_{i,j\in\{1,2,\dots,n\}} : (J \times J)\backslash\{(t,t), t \in J\} \to \mathcal{M}_{n\times n}$

$(G2)$ $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2, a \le s < t \le b\}$ ve $\{(t,s) \in \mathbb{R}^2, a \le t < s \le b\}$ üçgensel bölgesinde G mutlak süreklidir.

$(G3)$ Her $i \neq j$ için skaler $G_{i,j}$ fonksiyonları $J \times J$'ye bir sürekli genişlemeye sahiptir.

$(G4)$ Her $s \in (a,b)$ ve hemen hemen her yerde $t \in J\backslash\{s\}$ için

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = A(t)G(t,s)$$

denklemi sağlanır.

$(G5)$ $i = \{1,2,\dots,n\}$ ve her $s \in (a,b)$ için

$$\lim_{s\to t^+} G_{i,i}(s,t) = \lim_{s\to t^-} G_{i,i}(t,s) = 1 + \lim_{s\to t^+} G_{i,i}(t,s) = 1 + \lim_{s\to t^-} G_{i,i}(s,t)$$

eşitlikleri sağlanır.

$(G6)$ Her bir $s \in (a,b)$ için $t \to G(t,s)$ fonksiyonu

$$BG(a,s) + CG(b,s) = 0$$

sınır şartını sağlar.

Şimdi bir Green fonksiyonunun varlığını ve tekliğini veren bir sonuç verilecektir.

2.2.3. Teorem [2, Teorem 1.2.17]

Eş. 2.13 probleminin sadece aşikar çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart bu probleme karşılık gelen bir tek Green fonksiyonunun olmasıdır.

İspat

İlk olarak, $u = 0$'ın Eş. 2.13 probleminin bir tek çözümü olduğu kabul edilsin. Sonuç 2.2.1 ve Teorem 2.2.2'den Eş. 2.13 probleminin sadece aşikar çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $M_{\emptyset}$'nın ters çevrilebilir olmasıdır. Bu tür bir durumda Eş. 2.25 ifadesi ile verilen G fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $(G1)$-$(G6)$ özelliklerini sağlar.

Bu tür Green fonksiyonunun tekliğini göstermek için H, $(G1)$-$(G6)$ özelliklerini sağlayan bir $H: (J \times J)\backslash\{(t,t), t \in J\} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ fonksiyonu olsun ve $y: J \to \mathbb{R}^n$,

$$y(t) = \int_a^b H(t,s)f(s)ds = \int_a^t H(t,s)f(s)ds + \int_t^b H(t,s)f(s)ds \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlansın. $(G4)$ ve $(G5)$ şartlarından hemen hemen her yerde $t \in J$ için

$$y'(t) = \int_a^t \frac{\partial H(t,s)}{\partial t} f(s)ds + \int_t^b \frac{\partial H(t,s)}{\partial t} f(s)ds + H(t,t^-)\,f(t) - H(t,t^+)f(t)$$

$$= \int_a^t A(t)H(t,s)f(s)ds + \int_t^b A(t)H(t,s)f(s)ds + f(t)$$

$$= A(t)\int_a^b H(t,s)f(s)ds + f(t)$$

$$= A(t)y(t) + f(t)$$

elde edilir. Ek olarak, $(G6)$ şartından

$$By(a) + Cy(b) = B\int_a^b H(a,s)f(s)ds + C\int_a^b H(b,s)f(s)ds$$

$$= \int_a^b \big(BH(a,s) + CH(b,s)\big)f(s)ds = 0$$

bulunur. Sonuç olarak, y fonksiyonu Eş. 2.11-Eş. 2.12 probleminin bir çözümü ve

$$(u-y)(t) = \int_a^b \big(G(t,s) - H(t,s)\big)f(s)ds$$

Eş. 2.13'ün bir çözümüdür.

Eş. 2.13 sistemi sadece aşikar çözüme sahip olduğundan her $f \in \mathcal{L}^1(J,\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_a^b \big(G(t,s) - H(t,s)\big)f(s)ds = 0$$

elde edilir. Buradan $(J\times J)\backslash\{(t,t), t\in J\}$ üzerinde $G \equiv H$ elde edilir.

Karşılıklı olarak; G, Eş. 2.13 problemine karşılık gelen tek Green fonksiyonu olsun. Homogen Eş. 2.13 probleminin aşikar olmayan bir çözümünün $\Phi \in \mathcal{AL}(J,\mathbb{R}^n)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda $t,s\in J$ ve her $\lambda\in\mathbb{R}$ için Eş. 2.13 problemine karşılık gelen Green fonksiyonlarının bir ailesi için

$$H_\lambda(t,s) \coloneqq G(t,s) + \Phi(t)\lambda$$

sağlanır.

Sonuç olarak, Green fonksiyonunun tekliğinden $\Phi(t) = 0$ bulunur. Yani, Eş. 2.13 homogen sisteminin tek çözümü aşikar çözümdür. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi, n-inci basamaktan iki noktalı lineer sınır değer problemine karşılık gelen Green fonksiyonunun tanımı verilecektir.

2.2.2. Tanım [4, Tanım 2.1]

Her $i = 1,2, \dots, m$ ve $j = 0,1, \dots, n-1$ için α_j^i ve β_j^i, reel sabitler, her $k = 0,1, \dots, n$ için $a_k(t)$, sürekli reel fonksiyonlar ve her $t \in I = [a,b]$ için $a_0(t) \neq 0$ olmak üzere

$$L_n u(t) = a_0(t)u^{(n)}(t) + a_1(t)u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)u(t) \tag{2.28}$$

ve $m \leq n$ ile $i = 1,2, \dots, m$ için

$$U_i(u) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\alpha_j^i u^{(j)}(a) + \beta_j^i u^{(j)}(b)\right) \tag{2.29}$$

olmak üzere $t \in I = [a,b]$ ve $i = 1,2, \dots, m$ için

$$\begin{cases} L_n u(t) = 0 \\ U_i(u) = 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

problemi için aşağıdaki şatları sağlayan $G_n(t,s)$ fonksiyonuna Green fonksiyonu denir:

(G_1) $G_n(t,s)$, $I \times I$ karesel bölgesinde tanımlıdır.

(G_2) $k = 0,1, \dots, n-2$ için $\frac{\partial^k G_n(t,s)}{\partial t^k}$ kısmi türevleri $I \times I$ bölgesinde var ve süreklidirler.

(G_3) $\frac{\partial^{n-1} G_n(t,s)}{\partial t^{n-1}}$ ve $\frac{\partial^n G_n(t,s)}{\partial t^n}$ kısmi türevleri $a \leq t < s \leq b$ ve $a \leq s < t \leq b$ üçgensel bölgelerinde var ve süreklidirler.

(G_4) Her $t \in (a,b)$ için $\frac{\partial^{n-1} G_n}{\partial t^{n-1}}(t,t^+)$ ve $\frac{\partial^{n-1} G_n}{\partial t^{n-1}}(t,t^-)$ limitleri var ve bu limitler

$$\frac{\partial^{n-1} G_n}{\partial t^{n-1}}(t,t^+) - \frac{\partial^{n-1} G_n}{\partial t^{n-1}}(t,t^-) = -\frac{1}{a_0(t)} \tag{2.31}$$

eşitliğini sağlanır.

(G_5) Her $s \in (a,b)$ için $t \to G_n(t,s)$ fonksiyonu, $t \in [a,s)$ ve $t \in (s,b]$ aralıklarında $L_n u(t) = 0$ diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. Yani, her iki aralık üzerinde

$$a_0(t)\frac{\partial^n G_n(t,s)}{\partial t^n} + a_1(t)\frac{\partial^{n-1} G_n(t,s)}{\partial t^{n-1}} + \cdots + a_n(t)G_n(t,s) = 0 \tag{2.32}$$

eşitliği sağlanıyor.

(G_6) Her $s \in (a,b)$ için $t \to G_n(t,s)$ fonksiyonu, $i = 1,2,\dots,m$ için $U_i\big(G_n(\cdot,s)\big) = 0$ sınır koşullarını sağlar. Yani,

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\alpha_j^i \frac{\partial^j G_n(a,s)}{\partial t^j} + \beta_j^i \frac{\partial^j G_n(b,s)}{\partial t^j}\right) = 0 \tag{2.33}$$

eşitliği sağlanır.

Yukarıdaki tanımın esas önemi; $f(t)$, reel sürekli bir fonksiyon olmak üzere çekirdeği Green fonksiyonu olan integral operatörünün, yarı homogen

$$\begin{cases} L_n u(t) = f(t), \;\; t \in I \\ U_i(u) = 0 \quad , \;\; m \le n \text{ ve } i = 1,2,\dots,n \end{cases} \tag{2.34}$$

probleminin bir çözümünü vermesidir. Yani; $t \in I$ için

$u(t) = \int_a^b G_n(t,s) f(s) ds$,

Eş. (2.34) probleminin bir çözümüdür.

Şimdi, Green fonksiyonunun elde edilişine ilişkin literatürde yaygın olarak kullanılan bir metot, örnekler ile verilecektir.

2.2.1. Örnek

İkinci basamaktan

$$\begin{cases} u''(t) = f(t) \\ u(0) + u(a) = 0 \\ u'(0) + u'(a) = 0 \end{cases}$$

anti periyodik sınır değer problemi için Green fonksiyonu bulunacaktır.

$u''(t) = f(t)$ diferensiyel denklemimin genel çözümü

$$u(t) = d_1 + d_2 t + \int_0^t (t-s) f(s) ds$$

şeklindedir. $u(0) + u(a) = 0$ sınır şartı genel çözümde yerine yazılırsa

$$d_1 = -\frac{a}{2} d_2 - \frac{1}{2} \int_0^a (a-s) f(s) ds$$

ve $u'(0) + u'(a) = 0$ eşitliği genel çözümde yerine yazılırsa

$$d_2 = -\frac{1}{2} \int_0^a f(s) ds$$

elde edilir. Bunlar genel çözümde yerine yazılırsa

$$u(t) = \int_0^a \frac{2s - a - 2t}{4} f(s) ds + \int_0^t (t-s) f(s) ds$$

ve

$$u(t) = \int_0^t \frac{2s - a - 2t}{4} f(s) ds + \int_t^a \frac{2s - a - 2t}{4} f(s) ds + \int_0^t (t-s) f(s) ds$$

elde edilir. Bu durumda Green fonksiyonu

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{2t-a-2s}{4}, & 0\le s\le t\le a\\ \dfrac{2s-a-2t}{4}, & 0\le t\le s\le a\end{cases}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$\frac{2s-a-2t}{4}+(t-s)=\frac{2t-a-2s}{4}$$

eşitliği sağlandığından Green fonksiyonu simetriktir. Yani, her $t,s\in[a,b]$ için $G(t,s)=G(s,t)$ sağlanır.

2.2.2. Örnek

Üçüncü basamaktan

$$\begin{cases}u'''(t)=f(t)\\ u(0)=u'(0)=u(a)=0\end{cases}$$

sınır değer problemi için Green fonksiyonu bulunacaktır.

$u'''(t)=f(t)$ diferensiyel denkleminde her iki tarafının bir kez integrali alınırsa

$$u''(t)=d_2+\int_0^t f(s)ds$$

ve benzer şekilde integral alınmaya devam edilirse

$$u'(t)=d_1+d_2t+\int_0^t (t-s)f(s)ds$$

ve

$$u(t) = d_0 + d_1 t + \frac{1}{2} d_2 t^2 + \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f(s) ds$$

elde edilir. $u(0) = u'(0) = 0$ şartları kullanılırsa $d_0 = d_1 = 0$ bulunur. $u(a) = 0$ şartı genel çözüme yerine yazılırsa

$$d_2 = -\frac{1}{2a^2} \int_0^a (a-s)^2 f(s) ds$$

elde edilir. Bu sabitler genel çözümde yerine yazılırsa

$$u(t) = \int_0^t \left[-\frac{t^2(a-s)^2}{2a^2} + \frac{(t-s)^2}{2} \right] f(s) ds + \int_t^a \left[-\frac{t^2(a-s)^2}{2a^2} \right] f(s) ds$$

elde edilir. Dolayısıyla bu problem için Green karşılık gelen fonksiyonu

$$G(s,t) = \begin{cases} -\dfrac{t^2(a-s)^2}{2a^2} + \dfrac{(t-s)^2}{2}, & 0 \le s \le t \le a \\ -\dfrac{t^2(a-s)^2}{2a^2}, & 0 \le t \le s \le a \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

2.2.3. Örnek

Dördüncü basamaktan

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = f(t) \\ u(a) = u'(a) = u''(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemi için Green fonksiyonu bulunacaktır.

$u^{(4)}(t) = f(t)$ diferensiyel denkleminde her iki tarafın a'dan t'ye integrali alınır ve bu

işlem tekrar ettirilirse

$$u(t) = d_3 + d_2(t-a) + d_1\frac{(t-a)^2}{2} + d_0\frac{(t-a)^3}{6} + \int_a^t \frac{(t-s)^3}{6} f(s)ds$$

$$u'(t) = d_2 + d_1(t-a) + d_0\frac{(t-a)^2}{2} + \int_a^t \frac{(t-s)^2}{2} f(s)ds$$

$$u''(t) = d_1 + d_0(t-a) + \int_a^t (t-s) f(s)ds$$

elde edilir. $u''(a) = 0$ koşulu kullanılırsa $d_1 = 0$, $u'(a) = 0$ koşulu kullanılırsa $d_2 = 0$ ve $u(a) = 0$ koşulu kullanılırsa $d_3 = 0$ elde edilir. $u(b) = 0$ koşulu genel çözümde yerine yazılırsa

$$d_0\frac{(b-a)^3}{6} + \int_a^b \frac{(b-s)^3}{6} f(s)ds = 0$$

elde edilir. Buradan

$$d_0 = -\int_a^b \frac{(b-s)^3}{(b-a)^3} f(s)ds$$

olarak bulunur. Bu değerler genel çözümde yerine yazılırsa

$$u(t) = \frac{(t-a)^3}{6}\left[-\int_a^b \frac{(b-s)^3}{(b-a)^3} f(s)ds\right] + \int_a^t \frac{(t-s)^2}{2} f(s)ds$$

$$= -\int_a^b \frac{(t-a)^3(b-s)^3}{6(b-a)^3} f(s)ds + \int_a^t \frac{(t-s)^2}{2} f(s)ds$$

$$= \int_a^t \left[-\frac{(t-a)^3(b-s)^3}{6(b-a)^3} + \frac{(t-s)^3}{6}\right] f(s)ds + \int_t^b \left[-\frac{(t-a)^3(b-s)^3}{6(b-a)^3}\right] f(s)ds$$

elde edilir. Dolayısıyla bu problem için Green fonksiyonu

$$G(s,t) = \begin{cases} -\dfrac{(t-a)^3(b-s)^3}{6(b-a)^3} + \dfrac{(t-s)^3}{6}, & a \le s \le t \le b \\ -\dfrac{(t-a)^3(b-s)^3}{6(b-a)^3}, & a \le t \le s \le b \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

3. LİTERATÜRDEKİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLERLE İLGİLİ TEMEL SONUÇLAR

Bu bölümde Lyapunov tipi eşitsizliklerle ilgili ikinci, üçüncü ve yüksek basamaktan sınır değer problemleri için elde edilen sonuçlar sistematik bir biçimde verilecektir.

3.1. İkinci Basamaktan Sınır Değer Problemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

3.1.1. Teorem [1]

Eğer $u(t), a, b \in \mathbb{R}, a < b$ ardışık iki sıfır yeri ve $\forall t \in (a,b)$ için $u(t) \neq 0$ ve $q(t)$ reel değerli sürekli pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{cases} u''(t) + q(t)u(t) = 0 & (3.1) \\ u(a) = u(b) = 0 & (3.2) \end{cases}$$

probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b q(s)ds \geq \frac{4}{b-a} \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

Literatürde Eş. 3.3 eşitsizliği, klasik Lyapunov eşitsizliği olarak bilinir. Lyapunov [1]'in bu temel eşitsizliğinin yayınlanmasından sonra, literatürde çeşitli ispatlar, genelleştirmeler ve geliştirmeler yapılmıştır. Örneğin, Hartman [3], Eş. 3.1-Eş. 3.2 Dirichlet sınır değer problemi için aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizliği elde etmiştir.

3.1.2. Teorem [3]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.1 diferensiyel denkleminin Eş. 3.2 Dirichlet sınır koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b |q(s)| \frac{(s-a)(b-s)}{b-a} ds \geq 1 \tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanır.

Eş. 3.4 eşitsizliğindeki $(t-a)(b-t)$ fonksiyonunun maksimumu alınırsa

$$M(t) = (t-a)(b-t) \leq \underset{a\leq t\leq b}{maks} M(t) = M\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

elde edilir. Sonuç olarak, bu eşitsizlik Eş. 3.4'de kullanılırsa Eş. 3.4 eşitsizliğinden Eş. 3.3 klasik Lyapunov eşitsizliği elde edildiğinden Eş. 3.4 Lyapunov tipi eşitsizliğinin daha iyi bir sonuç olduğu görülür. Yani, Hartman'ın klasik Lyapunov eşitsizliğini güçlendirdiği görülür.

Kwong [5], $c \in (a,b)$ için $u'(c) = 0$ olmak üzere

$$\int_a^c q^+(s)ds > \frac{1}{c-a} \text{ ve } \int_c^b q^+(s)ds > \frac{1}{b-c} \tag{3.5}$$

eşitsizliklerinin sağlandığını gösterdi. Buradan

$$\int_a^b q^+(s)ds > \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{b-a}{(c-a)(b-c)} \geq \frac{4}{b-a}$$

elde edilir. Burada

$$q^+(t) = maks\{0, q(t)\} = \frac{q(t) + |q(t)|}{2}$$

ifadesi $q(t)$'nin negatif olmayan kısmıdır.

$$|q(t)| \geq q^+(t)$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolayca görülür. Sonuç olarak, Eş. 3.1-Eş. 3.2 problemi için

$$\int_a^b |q(s)|ds \geq \frac{4}{b-a}$$

eşitsizliği Kwong tarafından

$$\int_a^b q^+(s)ds \geq \frac{4}{b-a} \tag{3.7}$$

eşitsizliği ile güçlendirilmiştir. Eş. 3.7 eşitsizliğinin sağ tarafındaki 4 sayısı en iyi olasılık olduğu bilinmektedir. Eğer bu sayı yerine daha büyük bir sayı yazılırsa, bu durumda Eş. 3.7 eşitsizliğinin sağlanmadığı Eş. 3.1 diferensiyel denkleminin örnekleri vardır [3 (s. 345), 5 (s. 267), 6, 7].

Pinasco [8], Lyapunov eşitsizliğini $p > 1$ olmak üzere ikinci basamaktan

$$(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' + q(t)|u(t)|^{p-2}u(t) = 0 \tag{3.8}$$

yarı lineer diferensiyel denklemi için genişletmiştir.

3.1.3. Teorem [8]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.8 diferensiyel denkleminin Eş. 3.2 Dirichlet koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b |q(s)|ds \geq 2\left(\frac{2}{b-a}\right)^{p-1} \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sim ve Lee [9], $p > 1$ olmak üzere ikinci basamaktan

$$(|u'(t)|^{p-2}u'(t))' + q(t)|u(t)|^{p-2}u(t) = 0$$

yarı lineer diferensiyel denklemi için Eş. 3.9 eşitsizliğindeki Lyapunov tipi eşitsizliği

güçlendirmişlerdir.

3.1.4. Teorem [9]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.8 diferensiyel denkleminin Eş. 3.2 Dirichlet koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b |q(s)| \left(\frac{2(s-a)(b-s)}{b-a}\right)^{p-1} ds \geq 2 \tag{3.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

Eş. 3.4'deki gibi $M(t) = (t-a)(b-t)$ fonksiyonunun maksimumu alındığında Eş. 3.10 eşitsizliğinden Eş 3.9 eşitsizliğinin elde edildiğine dikkat edilmelidir. Sonuç olarak, Eş 3.9 eşitsizliğinden daha iyi bir sonuç elde edilmiştir.

Yang [10], Eş. 3.9 eşitsizliğini, $p > 1$ olmak üzere Eş. 3.2 Dirichlet koşulu altında ikinci basamaktan

$$(r(t)|u'(t)|^{p-2}u'(t))' + q(t)|u(t)|^{p-2}u(t) = 0 \tag{3.11}$$

yarı lineer problemi için genişletmiştir.

3.1.5. Teorem [10]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.11 yarı lineer diferensiyel denkleminin Eş. 3.2 Dirichlet koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b q^+(s)ds \geq \frac{2^p}{\left(\int_a^b r^{-\frac{1}{p-1}}(s)ds\right)^{p-1}} \tag{3.12}$$

eşitsizliği sağlanır.

Wang [11], $p > 1$ olmak üzere Eş. 3.2 Dirichlet koşulu altında ikinci basamaktan yarı lineer

$$(p(t)|u'(t)|^{p-2}u'(t))' + q(t)|u(t)|^{p-2}u(t) = 0$$

problemi için Eş. 3.12 eşitsizliğindeki Lyapunov tipi eşitsizliği güçlendirmiştir.

3.1.6. Teorem [11]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.11 diferensiyel denkleminin Eş. 3.2 Dirichlet koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b q^+(s)\left(\frac{\int_a^s r^{\frac{1}{1-p}}(u)du \int_s^b r^{\frac{1}{1-p}}(u)du}{\int_a^b r^{\frac{1}{1-p}}(u)du}\right)^{p-1} ds \geq \begin{cases} 1 & , \ 1 < p < 2 \\ 2^{2-p} & , \ p \geq 2 \end{cases} \tag{3.13}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2. Üçüncü Basamaktan Sınır Değer Problemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

Parhi ve Panigrahi [12], farklı sınır şartları altında üçüncü basamaktan belirli bir lineer sınır değer problemi için Eş. 3.3'deki klasik Lyapunov eşitsizliğine benzer eşitsizlikler elde etmişlerdir.

3.2.1. Teorem [12, Teorem 1]

Eğer $u(t)$,

$$u'''(t) + q(t)u(t) = 0 \tag{3.14}$$

diferensiyel denkleminin $\forall t \in (a, b)$ için $u(t) \neq 0$ olmak üzere

$$u(a) = 0 = u(b) \tag{3.15}$$

ve

$d \in [a,b]$ için $u''(d) = 0$ (3.16)

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b |q(s)|ds \geq \frac{4}{(b-a)^2} \quad (3.17)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.2. Teorem [12, Teorem 2]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.14 diferensiyel denkleminin $a, b, c \in \mathbb{R},\ a < b < c$ ardışık sıfırları ve $\forall t \in (a,b) \cup (b,c)$ için $u(t) \neq 0$ olmak üzere

$u(a) = u(b) = u(c) = 0$ (3.18)

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^c |q(s)|ds \geq \frac{4}{(c-a)^2} \quad (3.19)$$

eşitsizliği sağlanır.

Yang ve diğerleri [13], Eş. 3.17 eşitsizliğini üçüncü basamaktan belirli bir lineer sınır değer problemi için genişlettiler.

3.2.3. Teorem [13]

Eğer $u(t)$,

$(r_2(t)(r_1(t)u'(t))')' + q(t)u(t) = 0$ (3.20)

diferensiyel denkleminin $\forall t \in (a,b)$ için $u(t) \neq 0$ olmak üzere Eş. 3.15 ve

$d \in [a,b]$ için $(r_1(d)u'(d))' = 0$ (3.21)

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$2\int_a^b |q(s)|ds \geq \min_{c\in[a,b]} \left[\left(\int_a^c \frac{ds}{r_1(s)} \int_a^c \frac{ds}{r_2(s)} \right)^{-1} + \left(\int_c^b \frac{ds}{r_1(s)} \int_c^b \frac{ds}{r_2(s)} \right)^{-1} \right] \quad (3.22)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kiselak [14], Lyapunov tipi eşitsizlikleri lineer diferensiyel denklemlerden $1 < p_1, p_2$ ve $p_3 = p_1 p_2$ olmak üzere üçüncü basamaktan

$$\left(\frac{1}{r_2(t)} \left| \left(\frac{1}{r_1(t)} |u'(t)|^{p_1-2} u'(t) \right)' \right|^{p_2-2} \left(\frac{1}{r_1(t)} |u(t)|^{p_1-2} u'(t) \right)' \right)' + q(t)|u'(t)|^{p_3-2}u(t) = 0 \quad (3.23)$$

yarı-lineer diferensiyel denklem için genişletti.

3.2.4. Teorem [14, Teorem 2.1]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.23 diferensiyel denkleminin $\forall t \in (a,b)$ için $u(t) \neq 0$ olmak üzere Eş. 3.15 ve

$d \in [a,b]$ için $\left(\frac{1}{r_1(d)} |u'(d)|^{p_1-2} u'(d) \right)' = 0$ (3.24)

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$2\left(\int_a^b |q(s)|\, ds \right)^{\frac{1}{p_3}} \geq \min_{c\in[a,b]} \left[\left(\int_a^c r_1^{\frac{1}{p_1}}(s)ds \left(\int_a^c r_2^{\frac{1}{p_2}}(s)ds \right)^{\frac{1}{p_1}} \right)^{-1} + \left(\int_c^b r_1^{\frac{1}{p_1}}(s)ds \left(\int_c^b r_2^{\frac{1}{p_2}}(s)ds \right)^{1/p_1} \right)^{-1} \right] \quad (3.25)$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.5. Teorem [14, Teorem 2.2]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.23 diferensiyel denkleminin her $t \in (a,d) \cup (d,b)$ için $u(t) \neq 0$ olmak üzere $u(a) = u(d) = u(b) = 0$ ve

$$\forall t \in [a,b] \text{ için } \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r_1(t)}|u'(t)|^{p_1-2}u'(t)\right) \neq 0 \tag{3.26}$$

şartlarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise Eş. 3.25 eşitsizliği sağlanır.

Dhar ve Kong [15], Eş. 3.15 ve Eş. 3.24 koşulları altında üçüncü basamaktan Eş. 3.23 yarı lineer diferensiyel denklemi için Lyapunov tipi eşitsizlik elde ettiler.

3.2.6. Teorem [15, Teorem 2.5]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.23 diferensiyel denkleminin her $t \in (a,b)$ için $u(t) \neq 0$ iken Eş. 3.15 ve Eş. 3.24 koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$p_3 = p_1 p_2,\ q^-(t) = maks\{-q(t), 0\} \text{ ve } q^+(t) = maks\{0, q(t)\}$$

olmak üzere

$$\int_a^d q^-(s)ds + \int_d^b q^+(s)ds > 2^{p_2+p_3}\left(\int_a^b r_1^{\frac{1}{p_1}}(s)ds\right)^{-p_3}\left(\int_a^b r_2^{\frac{1}{p_2}}(s)ds\right)^{-p_2}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2.7. Teorem [15, Teorem 2.6]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.23 diferensiyel denkleminin her $t \in (a,b) \cup (b,c)$ için $u(t) \neq 0$ olmak üzere Eş. 3.18 koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\underset{a\le d\le b}{\text{maks}}\left\{\int_a^d q^-(s)ds+\int_d^b q^+(s)ds\right\}>2^{p_2+p_3}\left(\int_a^b r_1^{\frac{1}{p_1}}(s)ds\right)^{-p_3}\left(\int_a^b r_2^{\frac{1}{p_2}}(s)ds\right)^{-p_2}$$

veya

$$\underset{b\le d\le c}{\text{maks}}\left\{\int_b^d q^-(s)ds+\int_d^c q^+(s)ds\right\}>2^{p_2+p_3}\left(\int_b^c r_1^{\frac{1}{p_1}}(s)ds\right)^{-p_3}\left(\int_b^c r_2^{\frac{1}{p_2}}(s)ds\right)^{-p_2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2.7.'nin direkt bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilir.

3.2.8. Teorem [15]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.23 diferensiyel denkleminin her $t\in(a,b)\cup(b,c)$ için $u(t)\neq 0$ olmak üzere Eş. 3.18 koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\underset{a\le d\le c}{\text{maks}}\left\{\int_a^d q^-(s)ds+\int_d^c q^+(s)ds\right\}>2^{p_2+p_3}\left(\int_a^c r_1^{\frac{1}{p_1}}(s)ds\right)^{-p_3}\left(\int_a^c r_2^{\frac{1}{p_2}}(s)ds\right)^{-p_2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Dhar ve Kong [16], ardışık üç sıfıra sahip sınır koşulları altında üçüncü basamaktan Eş 3.14 lineer diferensiyel denklemi için ikinci basamaktan sınır değer problemine karşılık gelen Green fonksiyonunu kullanarak Lyapunov tipi eşitsizlik elde etmişlerdir.

3.2.9. Teorem [16]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.14 diferensiyel denkleminin her $t\in(a,b)\cup(b,c)$ için $u(t)\neq 0$ olmak üzere Eş. 3.18 koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

a) $\int_a^c (s-a)(c-s)q^-(s)ds>2$

b) $\int_a^c (s-a)(c-s)q^+(s)ds>2$

c) $\int_a^b (s-a)(c-s)q^-(s)ds + \int_b^c (s-a)(c-s)q^+(s)ds > 2$

eşitsizliklerinden biri sağlanır.

3.3. Yüksek Basamaktan Sınır Değer Problemleri için Lyapunov Tipi Eşitsizlikler

Das ve Vatsala [17], klasik Lyapunov eşitsizliğini, Green fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki yüksek basamaktan diferensiyel denkleme genişlettiler.

3.3.1. Teorem [17]

Eğer $u(t)$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$u^{(2n)}(t) + (-1)^{n-1}q(t)u(t) = 0 \tag{3.27}$$

diferensiyel denkleminin $i = 0,1, \dots, n-1$ için

$$u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0 \tag{3.28}$$

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b q^+(s)\big((s-a)(b-s)\big)^{2n-1}ds \geq (2n-1)[(n-1)!]^2(b-a)^{2n-1} \tag{3.29}$$

eşitsizliği sağlanır.

Yang [18], Lyapunov tipi eşitsizlikleri, bazı sınır şartları altında $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$u^{(2n+1)}(t) + q(t)u(t) = 0 \tag{3.30}$$

$$u^{(2n)}(t) + q(t)u(t) = 0 \tag{3.31}$$

$$u^{(n)}(t) + q(t)u(t) = 0 \tag{3.32}$$

diferensiyel denklemleri için genişletti.

3.3.2. Teorem [18, Teorem 1]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.30 diferensiyel denkleminin Eş. 3.28 ve

$d \in [a, b\,]$ için $u^{(2n)}(d) = 0$ (3.33)

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b |q(s)|ds \geq \frac{n!\,2^{n+1}}{(b-a)^{2n}} \tag{3.34}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3.3. Teorem [18, Teorem 2]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.32 diferensiyel denkleminin $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ ve $i = 1,2, \ldots, n-1$ iken $\forall t \in (t_i, t_{i+1})$ için $u(t) \neq 0$ olmak üzere

$u(a) = u(t_2) = \cdots = u(t_{n-1}) = u(b) = 0$ (3.35)

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b |q(s)|ds \geq \frac{(n-2)!\,n^{n-1}}{(n-1)^{n-2}(b-a)^{n-1}} \tag{3.36}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3.4. Teorem [18, Teorem 3]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.31diferensiyel denkleminin

$u(a) = u'(a) = \ldots = u^{(n-1)}(a) = 0 = u(b) = u'(b) = \ldots = u^{(n-1)}(b)$ (3.37)

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b |q(s)|((s-a)(b-s))^{2n-1}ds \geq (2n-1)[(n-1)!]^2(b-a)^{2n-1} \tag{3.38}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3.5. Teorem [18, Teorem 4]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.31 diferensiyel denkleminin $i = 0,1,\dots,n-1$ için

$$u^{(2i)}(a) = u^{(2i)}(b) = 0 \tag{3.39}$$

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b |q(s)|ds \geq \frac{2^n}{(b-a)^n} \tag{3.40}$$

eşitsizliği sağlanır.

$(2n)$-inci basamaktan Eş. 3.31 ve Eş. 3.39 sınır değer problemi için elde edilmiş Eş. 3.40 Lyapunov tipi eşitsizliği Çakmak [19] tarafından aşağıdaki şekilde düzeltilmiştir.

3.3.6. Teorem [19, Teorem 2]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.31 diferensiyel denkleminin Eş. 3.39 koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b |q(s)|ds \geq \frac{2^{2n}}{(b-a)^{2n-1}} \tag{3.41}$$

eşitsizliği sağlanır.

Çakmak [19], ayrıca Eş. 3.35 koşulu altında $n \geq 2$ olmak üzere n-inci basamaktan Eş. 3.32

sınır değer problemi için aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

3.3.7. Teorem [19, Teorem 1]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.32 diferensiyel denkleminin Eş. 3.35 koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\int_a^b |q(s)|ds \geq \frac{(n-2)!\, n^n}{(n-1)^{n-1}(b-a)^{n-1}} \tag{3.42}$$

eşitsizliği sağlanır.

Yang ve diğerleri [13], Eş. 3.34'deki Lyapunov tipi eşitsizliğini bazı sınır koşulları altında $n > 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(2n+1)$-inci basamaktan

$$(r_{2n}(t)(r_{2n-1}(t)(\dots(r_2(t)(r_1(t)u'(t))')'\dots)')')' + q(t)u(t) = 0 \tag{3.43}$$

lineer diferensiyel denklemi için genişlettiler.

3.3.8. Teorem [13, Teorem 2]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.43 diferensiyel denkleminin Eş. 3.28 ve

$$d \in [a,b] \text{ için } (r_{2n-1}(d)(\dots(r_2(d)(r_1(d)u'(d))')'\dots)')' = 0 \tag{3.44}$$

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$2\prod_{i=n+2}^{2n}\int_a^b \frac{ds}{r_i(s)}\int_a^b |q(s)|ds > \min_{c\in[a,b]}\left[\left(\prod_{i=1}^{n+1}\int_a^c \frac{ds}{r_i(s)}\right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+1}\int_c^b \frac{ds}{r_i(s)}\right)^{-1}\right] \tag{3.45}$$

eşitsizliği sağlanır.

Yang ve Lo [20], Eş. 3 28 koşulu altında $n \in \mathbb{N}$ için $(2n)$-inci basamaktan

$$(r_{2n-1}(t)(r_{2n-2}(t)(\dots(r_2(t)(r_1(t)u'(t))')'\dots)')')' + q(t)u(t) = 0 \qquad (3.46)$$

lineer diferensiyel denklemi için Lyapunov tipi eşitsizlik elde ettiler.

3.3.9. Teorem [20]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.46 diferensiyel denkleminin Eş. 3 28 koşulu sağlayan aşikar olmayan bir çözüm ise

$n = 1$ için

$$2\int_a^b \frac{ds}{r_1(s)}\int_a^b |q(s)|ds \geq 4, \qquad (3.47)$$

$n = 2$ için

$$2\int_a^b |q(s)|ds \geq$$

$$\min_{c\in[a,b]}\left[\left(\int_a^c \frac{ds}{r_1(s)}\int_a^c \frac{ds}{r_2(s)}\int_a^c \frac{ds}{r_3(s)}\right)^{-1} + \left(\int_c^b \frac{ds}{r_1(s)}\int_c^b \frac{ds}{r_2(s)}\int_c^b \frac{ds}{r_3(s)}\right)^{-1}\right] \qquad (3.48)$$

ve

$n \geq 3$ için

$$2\prod_{i=n+2}^{2n-1}\int_a^b \frac{ds}{r_i(s)}\int_a^b |q(s)|ds \geq \min_{c\in[a,b]}\left[\left(\prod_{i=1}^{n+1}\int_a^c \frac{ds}{r_i(s)}\right)^{-1} + \left(\prod_{i=1}^{n+1}\int_c^b \frac{ds}{r_i(s)}\right)^{-1}\right] \qquad (3.49)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

He ve Tang [21], Eş. 3.39 koşulu altında $(2n)$-inci basamaktan Eş. 3.27 sınır değer problemi için Lyapunov tipi eşitsizlikleri elde ettiler.

3.3.10. Teorem [21, Teorem 2.3]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.27 diferensiyel denkleminin Eş. 3.39 koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözüm ise

$$\int_a^b |q(s)|(s-a)(b-s)ds \geq \frac{2^{3(n-1)}}{(b-a)^{2n-3}} \tag{3.50}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3.11. Teorem [21, Teorem 2.5]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.27 diferensiyel denkleminin Eş. 3.39 koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözüm ise

$$\int_a^b q^+(s)((s-a)(b-s))^2 ds \geq \left(\frac{32}{45}\right)^{(1-(-1)^n)/4} \frac{2^{(n-2)/2}3^{n-1}5^{(n-2)/2}}{(b-a)^{2n-5}} \tag{3.51}$$

eşitsizliği sağlanır.

Zhang ve He [22], Eş. 3.39 koşulu altında $(2n)$-inci basamaktan Eş. 3.27 sınır değer problemi için Lyapunov tipi eşitsizlikler elde ettiler.

3.3.12. Teorem [22, Teorem 2.4]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.27 diferensiyel denkleminin Eş. 3.39 koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözüm ise

$$\int_a^b q^2(s)ds \geq \frac{48\pi^{4(n-1)}}{(b-a)^{4n-1}} \tag{3.52}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3.13. Teorem [22, Teorem 2.5]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.27 diferensiyel denkleminin Eş. 3.39 koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise $n \geq 2$ için

$$\int_a^b q^+(s)((s-a)(b-s))^2 ds \geq \frac{3\pi^{2n-4}}{(b-a)^{2n-5}} \tag{3.53}$$

eşitsizliği sağlanır.

Yang ve diğerleri [23], çift basamaktan belirli bir sınır değer problemleri için Lyapunov tipi eşitsizlik elde ettiler.

3.3.14. Teorem [23, Teorem 2]

Eğer $u(t)$, $i = 0,1,\dots,n$ için $q_i(t)$'ler $[a,b]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$u^{(2n)}(t) + \sum_{i=0}^{n} q_i(t)u^{(i)}(t) = 0 \tag{3.54}$$

diferensiyel denkleminin $n \geq 2$ iken $i = 0,1,\dots,n-1$ için

$$u^{(2i)}(a) = u^{(2i)}(b) = 0$$

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise

$$\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^{n-2} \frac{1}{\sqrt{3(b-a)}} \left(\int_a^b \left(q_n(s)(s-a)(b-s)\right)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \sum_{0\leq 2i<n} \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^{2(n-i-2)} \frac{1}{3(b-a)} \int_a^b |q_{2i}(s)|\left((s-a)(b-s)\right)^2 ds$$
$$+ \sum_{1\leq 2i-1<n} \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^{2(n-i-1)} \frac{1}{\sqrt{3}} \int_a^b |q_{2i-1}(s)|(s-a)(b-s)\, ds > 1$$

eşitsizliği sağlanır.

Agarwal ve Özbekler [24], çift basamaktan belirli bir sınır değer problemi için Lyapunov tipi eşitsizlik elde ettiler.

3.3.15. Teorem [24, Teorem 2]

Eğer $u(t)$, $(2n)$-inci basamaktan

$$u^{(2n)}(t) + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{m} q_i(t)|u(t)|^{\alpha_i - 1}u(t) = 0 \tag{3.55}$$

diferensiyel denkleminin Eş (3.28) koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise $i = 1,2,\dots,m$ için $\theta_i = (2-\alpha_i){\alpha_i}^{\alpha_i/(2-\alpha_i)}2^{2/(\alpha_i-2)}$ olmak üzere

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{m} {q_i}^+(s)ds \int_a^b \sum_{i=1}^{m} {q_i}^+(s)\theta_i ds > \frac{4^{4n-3}(2n-1)^2[(n-1)!]^4}{(b-a)^{4n-2}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Agarwal ve Özbekler [25], n-inci basamaktan belirli bir sınır değer problemi için Lyapunov tipi eşitsizlik elde ettiler.

3.3.16. Teorem [25, Teorem 2.2]

Eğer $u(t), n$-inci basamaktan

$$u^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{m} q_i(t)|u(t)|^{\alpha_i - 1}u(t) = f(t) \tag{3.56}$$

diferensiyel denkleminin $j = 1,2,\dots,r-1$ iken $\forall t \in (a_j, a_{j+1})$ için $u(t) \neq 0, r \geq 2$ ve her $i = 1,2,\dots,r$ için $k_i \geq 0$ iken $\sum_{i=1}^{n} k_i + r = n$ ve $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ olmak üzere $i = 1,2,\dots,r$ için

$$u(a_i) = u'(a_i) = u''(a_i) = \cdots = u^{(k_i)}(a_i) = 0 \tag{3.57}$$

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise $\sigma = min\{k_1, k_r\}$ ve $\rho_i = (2-\alpha_i)\alpha_i{}^{\alpha_i/(2-\alpha_i)}2^{2/(\alpha_i-2)}$ olmak üzere

$$\int_{a_1}^{a_r}\sum_{i=1}^{m}|q_i(s)|ds\int_{a_1}^{a_r}\left(\sum_{i=1}^{m}|q_i(s)|\rho_i+|f(s)|\right)ds>\frac{n^{2n-2}(\sigma+1)^{-2(\sigma+1)}}{4(n-\sigma-1)^{2(n-\sigma-1)}}\frac{[n!]^2}{(a_r-a_1)^{2n-2}}$$

eşitsizliği sağlanır.

Dhar ve Kong [26], $(2n+1)$-inci basamaktan belirli bir sınır değer problemi için $(2n)$-inci basamaktan sınır değer problemine karşılık gelen Green fonksiyonunu kullanarak aşağıdaki Lyapunov tipi eşitsizliği elde ettiler.

3.3.17. Teorem [26, Teorem 2.1]

Eğer $u(t)$, $(2n+1)$-inci basamaktan

$$u^{(2n+1)}(t)+(-1)^{n-1}q(t)u(t)=0 \tag{3.58}$$

diferensiyel denkleminin $\forall t\in(a,c)\cup(c,b)$ için $u(t)\neq 0$ olmak üzere $i=0,1,\dots,n-1$ için

$$u^{(i+1)}(a)=u^{(i+1)}(b)=0 \tag{3.59}$$

ve $c\in[a,b]$ için $u(c)=0$ koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise $\alpha,\beta>0$ için $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz$ fonksiyonu Beta fonksiyonu ve

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{i}2^{2k-2i}\binom{n-1+i}{i}\binom{i}{k}B(n+1,n+k-i)$$

olmak üzere

$$\int_a^b |q(s)|ds > \frac{(2n-1)!\,2^{2n}}{(b-a)^{2n}S_n}$$

eşitsizliği sağlanır.

Aktaş [27], $(n+1)$-inci basamaktan

$$\left(\frac{\left|u^{(n)}\right|^{p-2}u^{(n)}}{(1-|u^{(n)}|^p)^{(p-1)/p}}\right)' + \sum_{i=0}^{n-1} q_i(t)\frac{\left|u^{(i)}\right|^{p-2}u^{(i)}}{(1+|u^{(n)}|^p)^{(p-1)/p}} = 0 \tag{3.60}$$

lineer olmayan diferensiyel denklem için anti periyodik sınır şartları altında Lyapunov tipi eşitsizlik elde etti.

3.3.18. Teorem [27, Teorem 2.3]

Eğer $u(t)$, Eş. 3.60 diferensiyel denkleminin $i = 0,1,\dots,n$ için

$$u^{(i)}(a) + u^{(i)}(b) = 0 \tag{3.61}$$

koşullarını sağlayan aşikar olmayan bir çözümü ise $Re(z) > 1$ için $\zeta(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} 1/i^z$ Riemann zeta fonksiyonu ve $n = 1,2,\dots$ için

$$S_n = \frac{(2^{2n}-1)(b-a)^{2n-1}}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\,\zeta(2n)$$

olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left((b-a)S_{n-i}\right)^{(p-1)/2}\int_a^b |q_i(s)|ds > 2 \tag{3.62}$$

eşitsizliği sağlanır.

4. DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN BAZI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN YENİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Tezin üçüncü bölümünde Lyapunov tipi eşitsizlikler ile ilgili literatürde yer alan bazı sonuçlardan bahsedilmiştir. Bununla beraber, sonuçları bu tezde açık bir şekilde yer almayan, ancak elde edilen orijinal sonuçlar için ilham kaynağı olan Lyapunov tipi eşitsizliklerle ilgili bazı sonuçlar literatürde yer almaktadır [28-70].

Bu bölümde, $n \in \mathbb{N}, q \in C([0,\infty),\mathbb{R}), a,b \in \mathbb{R}$ ve $a<b$ olmak üzere dördüncü basamaktan

$$u^{(4)}(t)+(-1)^{n-1}q(t)u(t)=0 \tag{4.1}$$

diferensiyel denklemi ve

$$u(a)=u'(a)=u''(a)=u''(b)=0 \tag{4.2}$$

$$u''(a)=u(b)=u'(b)=u''(b)=0 \tag{4.3}$$

$$u(a)=u'(a)=u'''(a)=u''(b)=0 \tag{4.4}$$

$$u''(a)=u(b)=u'(b)=u'''(b)=0 \tag{4.5}$$

$$u'(a)=u'''(a)=u(b)=u'(b)=0 \tag{4.6}$$

$$u(a)=u'(a)=u'(b)=u'''(b)=0 \tag{4.7}$$

$$u(a)=u'''(a)=u'(b)=u''(b)=0 \tag{4.8}$$

$$u'(a)=u''(a)=u(b)=u'''(b)=0 \tag{4.9}$$

iki noktalı sınır değer koşullarından herhangi birinden oluşan sınır değer problemleri incelenecektir [62]. Green fonksiyonu kullanılarak her bir koşul altında problem için yeni Lyapunov tipi eşitsizlikler verilecektir. Literatürde Green fonksiyonları yardımıyla elde

edilen Lyapunov tipi eşitsizliklerin en iyi olasılıklı sonuçlar olduğu bilinmektedir.

Öncelikle, ana teoremlerin ispatlarında kullanılmak üzere önemli bir Lemma verilecektir. Bu lemmada dördüncü basamaktan homogen olmayan

$$u^{(4)}(t) = f(t) \tag{4.10}$$

diferensiyel denklemi ve Eş. 4.2-Eş. 4.9 koşullarından herhangi birinden oluşan sınır değer problemi için Green fonksiyonları inşa edilecektir.

4.1 Lemma [62]

$u(t)$, Eş. 4.10 diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.2-Eş. 4.9 koşullarından herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ve i =1(1)8 için $G_i(t,s)$,

$$G_1(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{(s-a)^3(b-t)}{6(b-a)} - \dfrac{(t-s)(t-a)(s-a)(3b-a-s-t)}{6(b-a)}; & a \le s \le t \\ -\dfrac{(t-a)^3(b-s)}{6(b-a)}; & t \le s \le b \end{cases} \tag{4.11}$$

$$G_2(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{(s-a)(b-t)^3}{6(b-a)}; & a \le s \le t \\ -\dfrac{(t-a)(b-s)^3}{6(b-a)} - \dfrac{(s-t)(b-t)(b-s)(b+s+t-3a)}{6(b-a)}; & t \le s \le b \end{cases} \tag{4.12}$$

$$G_3(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{(s-a)^2(b-t)}{2} - \dfrac{(t-s)(3bs+3bt+3a^2-st-s^2-t^2-6ab)}{6}; & a \le s \le t \\ -\dfrac{(t-a)^2(b-s)}{2}; & t \le s \le b \end{cases} \tag{4.13}$$

$$G_4(t,s) = \begin{cases} -\dfrac{(s-a)(b-t)^2}{2} & ;\ a \le s \le t \\ -\dfrac{(t-a)(b-s)^2}{2} - \dfrac{(s-t)(3as+3at+3b^2-st-s^2-t^2-6ab)}{6} & ;\ t \le s \le b \end{cases} \tag{4.14}$$

$$G_5(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(b-t)^2(6as+2bt+b^2-2at-3s^2-4ab)}{12(b-a)} ;\ a \le s \le t \\ \dfrac{(b-s)^2(6at+2bs+b^2-2as-3t^2-4ab)}{12(b-a)} ;\ t \le s \le b \end{cases} \tag{4.15}$$

$$G_6(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(s-a)^2(6bt+2as+a^2-2bs-3t^2-4ab)}{12(b-a)} ;\ a \le s \le t \\ \dfrac{(t-a)^2(6bs+2at+a^2-2bt-3s^2-4ab)}{12(b-a)} ;\ t \le s \le b \end{cases} \tag{4.16}$$

$$G_7(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(s-a)(b-t)(b-a+t-s)}{2} & ;\ a \le s \le t \\ \dfrac{(t-a)(b-s)(b-a+s-t)}{2} & \\ +\dfrac{(s-t)(4st+3a^2+3b^2+s^2+t^2-3as-3at-3bs-3bt)}{6} & ;\ t \le s \le b \end{cases} \tag{4.17}$$

$$G_8(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(s-a)(b-t)(b-a+t-s)}{2} & \\ +\dfrac{(t-s)(4st+3a^2+3b^2+s^2+t^2-3as-3at-3bs-3bt)}{6} & ;\ a \le s \le t \\ \dfrac{(t-a)(b-s)(b-a+s-t)}{2} & ;\ t \le s \le b \end{cases} \tag{4.18}$$

olmak üzere

$$u(t) = \int_a^b G_i(t,s) f(s) ds \tag{4.19}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 4.10 diferensiyel denkleminde $u(t)$ çözümünü elde etmek için a'dan b'ye integraller alarak

$$u'''(t) = d_3 + \int_a^t f(s) ds, \tag{4.20}$$

$$u''(t) = d_2 + d_3(t-a) + \int_a^t (t-s) f(s) ds, \tag{4.21}$$

$$u'(t) = d_1 + d_2(t-a) + d_3 \frac{(t-a)^2}{2} + \int_a^t \frac{(t-s)^2}{2} f(s) ds \tag{4.22}$$

ve

$$u(t) = d_0 + d_1(t-a) + d_2 \frac{(t-a)^2}{2} + d_3 \frac{(t-a)^3}{6} + \int_a^t \frac{(t-s)^3}{6} f(s) ds \tag{4.23}$$

elde edilir. Dolayısıyla Eş. 4.23, Eş. 4.10 diferensiyel denkleminin genel çözümüdür. Şimdi Eş. 4.2 sınır değer koşulu kullanılarak d_0, d_1, d_2 ve d_3 sabitleri bulunacaktır. $u(a) = u'(a) = u''(a) = 0$ koşullarından $d_0 = d_1 = d_2 = 0$ ve $u''(b) = 0$ koşulundan

$$d_3 = -\int_a^b \frac{b-s}{b-a} f(s) ds$$

elde edilir. d_0, d_1, d_2 ve d_3 değerleri Eş. 4.23 genel çözümünde yerine yazılırsa $i = 1$ için Eş. 4.19 elde edilir. Benzer şekilde, Eş. 4.23 genel çözümünde Eş. 4.3-Eş. 4.9 sınır koşulları kullanılarak i =2(1)8 için Eş. 4.19 elde edilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.1. Uyarı

Her $t, s \in [a, b]$ için i =1(1)4 iken $G_i(t, s) \leq 0$ ve i =5(1)8 iken $G_i(t, s) \geq 0$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Şimdi tezin ana teoremlerinden biri verilecektir.

4.1 Teorem [62, Teorem 2.1]

Eğer $u(t)$, n tek sayı olmak üzere Eş. 4.1 diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.2-Eş. 4.5 sınır koşullarının herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $q^+(t) = maks\{q(t), 0\}$, $|u(t_0)| = maks\{|u(t)|: a \leq t \leq b\}$ ve $i = 1(1)4$ için $G_i(t, s)$, Eş. 4.11-Eş. 4.14'deki gibi olmak üzere

$$\int_a^b q^+(s)|G_i(t_0, s)|ds > 1 \tag{4.24}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$u(t)$, n tek sayısı için Eş. 4.1 diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.2-Eş. 4.5 koşullarının herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü olsun. Ayrıca, genelliği bozmaksızın (a, b) aralığında $u(t) > 0$ olsun. Eş. 4.19 eşitliğinden i =1(1)4 için

$$u(t) = \int_a^b (-1)^n q(s)u(s)G_i(t, s)ds \tag{4.25}$$

elde edilir. $u(t_0) = maks\{u(t): a \leq t \leq b\}$ olacak biçimde $t_0 \in (a, b)$ seçilsin. n tek sayı olmak üzere i =1(1)4 için Eş. 4.25 integral denkleminden

$$u(t_0) = \int_a^b [-q(s)u(s)]G_i(t_0, s)ds \leq u(t_0) \int_a^b q^+(s)|G_i(t_0, s)|\, ds \tag{4.26}$$

elde edilir. Eş. 4.26 eşitsizliğinin iki tarafı da $u(t_0)$ ile bölünürse Eş. 4.24 eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 4.1'in ispatına benzer olduğundan verilmeyecektir.

4.2. Teorem [62, Teorem 2.2]

Eğer $u(t)$, n çift sayı olmak üzere Eş. 4.1 diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.6-Eş. 4.9 koşullarının herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $q^+(t) = maks\{q(t), 0\}$, $|u(t_0)| = maks\{|u(t)|: a \leq t \leq b\}$ ve i =5(1)8 için $G_i(t,s)$, Eş. 4.15-Eş. 4.18'deki gibi olmak üzere

$$\int_a^b q^+(s)G_i(t_0,s)ds > 1 \tag{4.27}$$

eşitsizliği sağlanır.

$q^+(t) \leq |q(t)|$ olduğundan yukarıdaki sonuçlarda $q^+(t)$ yerine $|q(t)|$ yazılarak Teorem 4.1 ve Teorem 4.2'den aşağıdaki teorem elde edilir.

4.3. Teorem [62, Teorem 2.3]

Eğer $u(t)$, Eş. 4.1 diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.2-Eş. 4.9 koşullarının herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $|u(t_0)| = maks\{|u(t)|: a \leq t \leq b\}$ ve i =1(1)8 için $G_i(t,s)$, Eş. 4.11-Eş. 4.18'deki gibi olmak üzere

$$\int_a^b |q(s)||G_i(t_0,s)|ds > 1 \tag{4.28}$$

eşitsizliği sağlanır.

Eş. 4.11-Eş. 4.18'deki Green fonksiyonları için aşağıdaki eşitsizlikler kolaylıkla elde edilebilir:

$$G_1(t,s) \geq \begin{cases} G_1(s) \coloneqq -\dfrac{(s-a)^3(b-s)}{6(b-a)} - \dfrac{(s-a)(b-s)(3b-2s-a)}{6}; & a \leq s \leq t \\ G_1^*(s) \coloneqq -\dfrac{(s-a)^3(b-s)}{6(b-a)} & ; \ t \leq s \leq b \end{cases}$$

$$\geq G_1(s), \tag{4.29}$$

$$G_2(t,s) \geq \begin{cases} G_2^*(s) \coloneqq -\dfrac{(s-a)(b-s)^3}{6(b-a)} & ; \ a \leq s \leq t \\ G_2(s) \coloneqq -\dfrac{(s-a)(b-s)^3}{6(b-a)} - \dfrac{(s-a)(b-s)(b+2s-3a)}{6}; & t \leq s \leq b \end{cases}$$

$$\geq G_2(s), \tag{4.30}$$

$$G_3(t,s) \geq \begin{cases} G_3(s) \coloneqq -\dfrac{(s-a)^2(b-s)}{2} - \dfrac{(b-s)(s(b-s)+(b-a)^2)}{2}; & a \leq s \leq t \\ G_3^*(s) \coloneqq -\dfrac{(s-a)^2(b-s)}{2} & ; \ t \leq s \leq b \end{cases}$$

$$\geq G_3(s), \tag{4.31}$$

$$G_4(t,s)$$

$$\geq \begin{cases} G_4^*(s) \coloneqq -\dfrac{(b-s)^2(s-a)}{2} & ; \ a \leq s \leq t \\ G_4(s) \coloneqq -\dfrac{(b-s)^2(s-a)}{2} - \dfrac{(s-a)(5as+3b^2-s^2-a^2-6ab)}{6}; & t \leq s \leq b \end{cases}$$

$$\geq G_4(s), \tag{4.32}$$

$$G_5(t,s) \leq \begin{cases} G_5^*(s) \coloneqq \dfrac{(b-s)^3(3b-4a+3s)}{12(b-a)} & ; \ a \leq s \leq t \\ G_5^{**}(s) \coloneqq \dfrac{(b-s)^2(4as+2bs+b^2-3a^2-4ab)}{12(b-a)}; & t \leq s \leq b \end{cases}$$

$$\leq G_5(s) = maks\{G_5^*(s), G_5^{**}(s)\}, \tag{4.33}$$

$$G_6(t,s) = \begin{cases} G_6^{**}(s) := \dfrac{(s-a)^2(6b^2+2as+a^2-2bs-3s^2-4ab)}{12(b-a)}; & a \le s \le t \\ G_6^{*}(s) := \dfrac{(s-a)^3(6b-a-3s)}{12(b-a)} & ; \ t \le s \le b \end{cases}$$

$$\le G_6(s) = maks\{G_6^{*}(s), G_6^{**}(s)\}, \qquad (4.34)$$

$$G_7(t,s)$$

$$\le \begin{cases} G_7^{*}(s) := \dfrac{(s-a)(b-s)(2b-a-s)}{2} & ; \ a \le s \le t \\ G_7(s) := \dfrac{(s-a)(b-s)(b+s-2a)}{2} + \dfrac{(s-a)(2s^2+b^2-ab-as-bs)}{2} & ; \ t \le s \le b \end{cases}$$

$$\le G_7(s) \qquad (4.35)$$

ve

$$G_8(t,s) \le$$

$$\begin{cases} G_8(s) := \dfrac{(s-a)(b-s)(2b-a-s)}{2} + \dfrac{(b-s)(4b^2+3a^2+s^2-2bs-6as)}{6}; & a \le s \le t \\ G_8^{*}(s) := \dfrac{(s-a)(b-s)(b+s-2a)}{2} & ; \ t \le s \le b \end{cases}$$

$$\le G_8(s) \qquad (4.36)$$

Böylece, Eş. 4.24 ve Eş. 4.27 Lyapunov tipi eşitsizliklerinde sırasıyla Eş. 4.29-Eş. 4.32 ve Eş. 4.33-Eş. 4.36 eşitsizlikleri kullanılırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

4.4. Teorem [62, Teorem 2.4]

Eğer $u(t)$, n tek sayısı olmak üzere Eş. 4.1 diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.2-Eş. 4.5 koşullarının herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $q^{+}(t) = maks\{q(t), 0\}$ ve i =1(1)4 için $G_i(t)$, Eş. 4.29-Eş. 4.32'deki gibi olmak üzere

$$\int_a^b q^{+}(s)|G_i(s)|ds > 1 \qquad (4.37)$$

eşitsizliği sağlanır.

4.5. Teorem [62, Teorem 2.5]

Eğer $u(t)$, n çift sayı olmak üzere Eş. 4.1 diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.6-Eş. 4.9 koşullarının herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $q^+(t) = maks\{q(t), 0\}$ ve i =5(1)8 için $G_i(t)$, Eş. 4.33-Eş. 4.36'daki gibi olmak üzere

$$\int_a^b q^+(s)G_i(s)ds > 1 \tag{4.38}$$

eşitsizliği sağlanır.

$q^+(t) \leq |q(t)|$ olduğundan Teorem 4.4 ve Teorem 4.5'den aşağıdaki teorem elde edilir.

4.6. Teorem [62, Teorem 2.6]

Eğer $u(t)$, Eş. 4.1 diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.2-Eş. 4.9 koşullarının herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise i =1(1)8 için $G_i(t)$, Eş. 4.29-Eş. 4.36'daki gibi olmak üzere

$$\int_a^b |q(s)||G_i(s)|ds > 1 \tag{4.39}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi her $t, s \in [a, b]$ için sırasıyla i =1(1)4 ve i =5(1)8 iken $G_i(t, s)$ fonksiyonlarının minimum ve maksimum değerleri bulunacaktır. Aslında burada her $t, s \in [a, b]$ için i =1(1)8 iken $|G_i(t, s)|$ fonksiyonlarının maksimumu bulunacaktır. İlk olarak, her $t, s \in [a, b]$ için Eş. 4.29'daki $G_1(t, s)$ fonksiyonu ele alınsın. $G_1^*(t) = -\frac{(t-a)^3(b-t)}{6(b-a)}$ fonksiyonu $t = \frac{a+3b}{4}$ noktasında minimum değerini alır. Yani,

$$\min_{a\le t\le b} G_1^*(t) = G_1\left(\frac{a+3b}{4}\right) = -\frac{9(b-a)^3}{512} \le G_1^*(t) \tag{4.40}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan ilk olarak, $t \le s \le b$ için $-\frac{9(b-a)^3}{512} \le G_1^*(s) \le G_1(t,s) \le 0$ elde edilir. İkinci olarak, $G_1(t,s)$ fonksiyonu $a \le s \le t$ aralığında incelensin. $t \in [a,b]$ için $G_1(t) = -\frac{(t-a)^3(b-t)}{6(b-a)} - \frac{(t-a)(b-t)(3b-2t-a)}{6}$ olmak üzere $t \in [a,b]$ için $G_1^{**}(t) = -\frac{(t-a)(b-t)(3b-2t-a)}{6}$ şeklinde tanımlansın.

$$\min_{a\le t\le b} G_1^*(t) + \min_{a\le t\le b} G_1^{**}(t) \le \min_{a\le t\le b} G_1(t) \le 0 \tag{4.41}$$

olduğu bilinmektedir. Bu durumda $G_1^{**}(t)$ fonksiyonunun minimum değeri

$$\min_{a\le t\le b} G_1^{**}(t) = G_1^{**}\left(\frac{a+5b+\sqrt{7}a-\sqrt{7}b}{6}\right) = -\frac{(b-a)^3(7\sqrt{7}+10)}{324} \le G_1^{**}(t) \tag{4.42}$$

şeklinde bulunur. Buradan

$$-\frac{9(b-a)^3}{512} - \frac{(b-a)^3(7\sqrt{7}+10)}{324} \le \min_{a\le s\le t\le b} G_1(t,s) \le 0 \tag{4.43}$$

ve dolayısıyla

$$0 \ge G_1(t,s) \ge \text{maks}\left\{\min_{a\le s\le b} G_1(s), \min_{a\le s\le b} G_1^*(s)\right\}$$
$$= \text{maks}\left\{-\frac{9(b-a)^3}{512}, -\frac{9(b-a)^3}{512} - \frac{(b-a)^3\left(7\sqrt{7}+10\right)}{324}\right\} = -\frac{9(b-a)^3}{512} \tag{4.44}$$

elde edilir. Benzer şekilde, her $t,s \in [a,b]$ için Eş. 4.30-Eş. 4.36 eşitsizliklerinden

$$0 \ge G_2(t,s) \ge -\frac{9(b-a)^3}{512}, \tag{4.45}$$

i =3, 4 için

$$0 \geq G_i(t,s) \geq -\frac{2(b-a)^3}{27}, \tag{4.46}$$

i =5, 6 için

$$0 \leq G_i(t,s) \leq G_5(a,a) = G_6(b,b) = \frac{(b-a)^3}{12} \tag{4.47}$$

ve i =7, 8 için

$$0 \leq G_i(t,s) \leq \frac{4(b-a)^3}{27} \tag{4.48}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Sonuç olarak, Eş. 4.44-Eş. 4.46 ve Eş. 4.47-Eş. 4.48 eşitsizlikleri sırasıyla Eş.4.24 ve Eş. 4.27 eşitsizliklerinde kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

4.1. Sonuç [62, Sonuç 2.1]

Eğer $u(t)$, n tek sayı olmak üzere Eş. 4.1 diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.2-Eş. 4.3 koşullarının herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $q^+(t) = maks\{q(t), 0\}$ olmak üzere

$$\int_a^b q^+(s)ds > \frac{512}{9(b-a)^3} \tag{4.49}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.2. Sonuç [62, Sonuç 2.2]

Eğer $u(t)$, n tek sayı olmak üzere Eş. 4.1 diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.4-Eş. 4.5 koşullarının herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $q^+(t) = maks\{q(t), 0\}$ olmak üzere

$$\int_a^b q^+(s)ds > \frac{27}{2(b-a)^3} \tag{4.50}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.3. Sonuç [62, Sonuç 2.3]

Eğer $u(t)$, n çift sayı olmak üzere Eş. 4.1 diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.6-Eş. 4.7 koşullarının herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $q^+(t) = maks\{q(t), 0\}$ olmak üzere

$$\int_a^b q^+(s)ds > \frac{12}{(b-a)^3} \tag{4.51}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.4 Sonuç [62, Sonuç 2.4]

Eğer $u(t)$, n çift sayı olmak üzere Eş. 4.1 diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.8-Eş. 4.9 koşullarının herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $q^+(t) = maks\{q(t), 0\}$ olmak üzere

$$\int_a^b q^+(s)ds > \frac{27}{4(b-a)^3} \tag{4.52}$$

eşitsizliği sağlanır.

$q^+(t) \leq |q(t)|$ olduğundan yukarıdaki sonuçlarda $q^+(t)$ yerine $|q(t)|$ yazılarak Sonuç 4.1-4.4'den aşağıdaki teorem elde edilir.

4.7. Teorem [62, Teorem 2.7]

Eğer $u(t)$, Eş. 4.1 diferensiyel denklemi ile iki noktalı Eş. 4.2-Eş. 4.3, Eş. 4.4-Eş. 4.5, Eş. 4.6-Eş. 4.7 ve Eş. 4.8-Eş. 4.9 koşullarının herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin

aşikar olmayan bir çözümü ise sırasıyla

$$\int_a^b |q(s)|ds > \frac{512}{9(b-a)^3}, \tag{4.53}$$

$$\int_a^b |q(s)|ds > \frac{27}{2(b-a)^3}, \tag{4.54}$$

$$\int_a^b |q(s)|ds > \frac{12}{(b-a)^3} \tag{4.55}$$

ve

$$\int_a^b |q(s)|ds > \frac{27}{4(b-a)^3} \tag{4.56}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Son olarak, elde edilen Lyapunov tipi eşitlikleri kullanarak lineer sınır değer probleminin bir alt sınırı bulunacaktır. Sadece Eş. 4.53 Lyapunov tipi eşitsizliğinin kullanıldığı doğrudan bir teorem verilecektir diğerleri içinde benzer şekilde uygulama verilebilir.

4.8. Teorem [62]

Eğer $u(t)$,

$u^{(4)}(t) + \lambda h(t)u(t) = 0$

diferensiyel denklemi ve iki noktalı Eş. 4.2-Eş. 4.3 koşullarından herhangi birinden oluşan sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise

$$|\lambda| > \frac{512}{9(b-a)^3 \int_a^b |h(s)|ds}$$

sağlanır.

5. $(2n+1)$-İNCİ BASAMAKTAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN YENİ LYAPUNOV TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde, $n \in \mathbb{N}$, $i = 0,1,2,\dots,n-1$, $q \in C([0,\infty),\mathbb{R})$, $a < b$ olmak üzere a ve b reel sayılar ve u aşikar olmayan çözüm olmak üzere $(2n+1)$-inci basamaktan

$$\begin{cases} u^{(2n+1)}(t) + (-1)^{n-1} q(t) u(t) = 0 & (5.1) \\ u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0 & (5.2) \\ (-1)^{n-1} u^{(n)}(a) = u^{(n)}(b) & (5.3) \end{cases}$$

sınır değer problemi için yeni Lyapunov tipi eşitsizlikler verilecektir [63].

Şimdi, ana sonuçlarımızda oldukça önem arz eden Das ve Vatsala [55]'in çalışmasından ilham alınarak elde edilen Eş. 5.1-Eş. 5.3 sınır değer problemine karşılık gelen Green fonksiyonundan bahsedilecektir. Bunun için genel

$$u^{(2n+1)}(t) = (-1)^{n-1} f(t) \quad (5.4)$$

diferensiyel denklemi göz önüne alınsın. Böylece aşağıdaki lemmada Eş. 5.4 diferensiyel denklemi ve Eş. 5.2-Eş. 5.3 koşullarından oluşan sınır değer problemi için Green fonksiyonunun inşası verilecektir.

5.1. Lemma [63, Lemma 2.1]

$u(t)$, Eş. 5.4 diferensiyel denklemi ve Eş.5.2-Eş. 5.3 koşullarından oluşan problemin aşikar olmayan bir çözümü ise

$$G_{2n+1}(t,s) = \frac{1}{(2n)!} \times$$

$$\begin{cases} \left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1+i}{i} (s-t)^{n-i} \left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^i + \frac{(t-s)^{2n}}{(2n)!}; & a \le s \le t \\ \left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1+i}{i} (s-t)^{n-i} \left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^i & ; \ t \le s \le b \end{cases} \tag{5.5}$$

olmak üzere

$$u(t) = \int_a^b G_{2n+1}(t,s) f(s) ds \tag{5.6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

İlk olarak, $G_{2n+1}(t,s)$ fonksiyonunun Tanım 2.2.2'deki tüm şartlarını sağladığı gösterilecektir. (G_1)-(G_3) ve (G_5) şartlarının sağlandığı açıktır. Dolayısıyla $G_{2n+1}(t,s)$ fonksiyonunun (G_4) ve (G_6) şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir.

Şimdi, $G_{2n+1}(t,s)$ fonksiyonunun (G_4) şartını sağladığı gösterilecektir. $G_{2n+1}(t,s)$ fonksiyonunun $t \le s$ ve $s \le t$ için $\frac{(t-s)^{2n}}{(2n)!}$ hariç terimleri aynıdır. $G_{2n+1}(t,s)$'in t'ye göre $2n$ defa türevi alındığında

$$\frac{\partial^{2n} G_{2n+1}}{\partial t^{2n}}(t,t^+) - \frac{\partial^{2n} G_{2n+1}}{\partial t^{2n}}(t,t^-) = -1 \tag{5.7}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla, $G_{2n+1}(t,s)$ fonksiyonu (G_4) şartını sağlar.

Şimdi, $G_{2n+1}(t,s)$ fonksiyonunun (G_6) şartını sağladığı gösterilecektir. $t \le s < b$ olmak üzere $\left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^n$ ve $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1+i}{i}(s-t)^{n-i-1}\left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^i$ fonksiyonlarının çarpımının türevinde bir terim her zaman $i = 1,2,\dots,n$ için $t = a$'da sıfır olan $(t-a)^i$ terimini içerir. Diğer terimin n defa türevi alınırsa ve t yerine a yazılırsa

$$\frac{\partial^n G_{2n+1}(t,s)}{\partial t^n}\Big|_{t=a} = n!\left[\frac{(s-a)(b-s)}{b-a}\right]^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1+i}{i} \tag{5.8}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $a < s \leq t$ için

$$\frac{\partial^n G_{2n+1}(t,s)}{\partial t^n}\Big|_{t=b} = (-1)^{n-1} n!\left[\frac{(s-a)(b-s)}{b-a}\right]^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1+i}{i} \tag{5.9}$$

elde edilir. Buradan da

$$(-1)^{n-1} \frac{\partial^n G_{2n+1}(t,s)}{\partial t^n}\Big|_{t=a} = \frac{\partial^n G_{2n+1}(t,s)}{\partial t^n}\Big|_{t=b} \tag{5.10}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, $G_{2n+1}(t,s)$ fonksiyonunun (G_6) şartını sağladığı gösterilmiş olur.

Bu durumda $G_{2n+1}(t,s)$, Tanım 2.2.2'in tüm şartlarını sağlar. Yani; $G_{2n+1}(t,s)$ fonksiyonu, Eş. 5.4 diferensiyel denklemi ve Eş. 5.2-Eş. 5.3 koşullarından oluşan sınır değer problemine karşılık gelen Green fonksiyonudur. Böylece Eş. 2.34'den Eş. 5.6 elde edilir ve ispat tamamlanır.

Şimdi ana teoremlerin ispatlarında oldukça önem teşkil eden $G_{2n+1}(t,s)$ Green fonksiyonunun anti simetrik özelliği yani, her $t,s \in [a,b]$ için $G_{2n+1}(t,s) = -G_{2n+1}(s,t)$ olduğunu gösteren bir lemma verilecektir.

5.2. Lemma [63, Lemma 2.2]

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1+i}{i} (s-t)^{n-i} \left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^i + (-1)^{n-1}(t-s)^{2n}$$

$$= -\left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1+i}{i} (t-s)^{n-i} \left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^i \tag{5.11}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

İspat için tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $n = 1$ için eşitliğin doğru olduğu açıktır. Bu durumda

$$\frac{(t-a)(b-s)(s-t)}{b-a} + (t-s)^2 = -\frac{(s-a)(b-t)(t-s)}{b-a} \tag{5.12}$$

eşitliğine ulaşılır. Sonraki adımda eşitliğin $n = m$ için doğru olduğu kabul edilip $n = m + 1$ için doğru olduğu ispatlanacaktır. $n = m + 1$ için Eş. 5.11 eşitliğinin sol tarafı ve Eş. 5.12 kullanılarak

$$\left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^m \left\{\sum_{i=0}^{m} \binom{m+i}{i} (s-t)^{m+1-i} \left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^{i+1} - \sum_{i=0}^{m} \binom{m+i}{i} (s-t)^{m+2-i} \left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^{i}\right\} + (-1)^m (t-s)^{2m+2}$$

$$= \left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^m \left\{\binom{2m}{m} (s-t) \left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^{m+1} - \sum_{i=0}^{m} \binom{m-1+i}{i} (s-t)^{m+2-i} \left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^{i}\right\} + (-1)^m (t-s)^{2m+2}$$

$$= \left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^m \left\{\binom{2m}{m} (s-t) \left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^{m+1} - \binom{2m-1}{m} (s-t)^2 \left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^{m}\right\} + \left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^m \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1+i}{i} (t-s)^{m+2-i} \left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^{i} \tag{5.13}$$

elde edilir.

$i = 1,2, \dots, m-1$ için

$$\binom{m-1+i}{i} = \binom{m+i}{i} - \binom{m-1+i}{i-1} \tag{5.14}$$

eşitliği Eş. 5.13'de kullanılırsa

$$-\left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^{m+1} \left\{\binom{2m}{m}(t-s)\left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^{m} + \sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+i}{i}(t-s)^{m+1-i}\left[\frac{(b-s)(t-a)}{b-a}\right]^{i}\right\} \tag{5.15}$$

elde edilir. Bu da

$$-\left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^{m+1} \sum_{i=0}^{m}\binom{m+i}{i}(t-s)^{m+1-i}\left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^{i} \tag{5.16}$$

ifadesine eşittir. İspat tamamlanır.

5.1. Uyarı

Lemma 5.2'den $G_{2n+1}(t,s)$ Green fonksiyonunun anti simetrik özelliğine sahip olduğunu, yani her $t,s \in [a,b]$ için $G_{2n+1}(t,s) = -G_{2n+1}(s,t)$ olduğunu görmek kolaydır. Bu durumda Eş. 5.5,

$$G_{2n+1}(t,s) = \frac{1}{(2n)!} \times \begin{cases} -\left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^{n} \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1+i}{i}(s-t)^{n-i}\left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^{i}; & a \le s \le t \\ \left[\frac{(t-a)(b-s)}{b-a}\right]^{n} \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1+i}{i}(s-t)^{n-i}\left[\frac{(s-a)(b-t)}{b-a}\right]^{i}; & t \le s \le b \end{cases} \tag{5.17}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer yandan, Lemma 5.2'nin ispatında $t \geq s$ için Eş. 5.9 eşitliği, Eş. 5.17 kullanılarak da elde edilebilir. Ayrıca, her $t, s \in [a, b]$ için

$$G_{2n+1}(t,s) = \frac{s-t}{2n} G_{2n}(t,s)$$

olduğu da kolaylıkla görülebilir.

5.1. Teorem [63, Teorem 2.1]

Eğer $u(t)$, $[a, b]$ aralığında Eş. 5.1-Eş. 5.3 probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $|u(t_0)| = maks\{|u(t)|: a \leq t \leq b\}$ ve $G_{2n+1}(t,s)$, Eş. 5.5 veya Eş. 5.17'deki gibi olmak üzere

$$\int_a^b |q(s)||G_{2n+1}(t_0,s)|ds \geq 1 \tag{5.18}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$a < b$ olmak üzere $i = 0,1,\dots,n-1$ için $u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0$, $(-1)^{n-1}u^{(n)}(a) = u^{(n)}(b)$ ve her $t \in (a,b)$ için $u(t) \neq 0$ olsun. $|u(t_0)| = maks\{|u(t)|: a \leq t \leq b\}$ olacak şekilde $t_0 \in (a,b)$ seçilsin. Eş. 5.1 ve Eş. 5.6 denklemlerinden $f(t) = (-1)^n q(t)u(t)$ olmak üzere

$$|u(t_0)| \leq \int_a^b |q(s)||u(s)||G_{2n+1}(t_0,s)|ds \tag{5.19}$$

ve dolayısıyla

$$|u(t_0)| \leq |u(t_0)| \int_a^b |q(s)||G_{2n+1}(t_0,s)|ds \tag{5.20}$$

elde edilir. Eşitliğin iki tarafı da $|u(t_0)|$ ile bölünürse Eş. 5.18 eşitsizliği elde edilir.

Das ve Vatsala [55]'in çalışmasında her $t, s \in [a, b]$ için $G_{2n}(t, s) \leq G_{2n}(s, s)$ olduğundan ve Uyarı 5.1'den $a \leq s \leq t$ için

$$|G_{2n+1}(t, s)| \leq \frac{b-s}{2n} G_{2n}(s, s) \tag{5.21}$$

ve $t \leq s \leq b$ için

$$G_{2n+1}(t, s) \leq \frac{s-a}{2n} G_{2n}(s, s) \tag{5.22}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece

$$G^*_{2n+1}(s) := \begin{cases} \frac{b-s}{2n} G_{2n}(s, s)\ ;\ s < \frac{a+b}{2} \\ \frac{s-a}{2n} G_{2n}(s, s)\ ;\ s > \frac{a+b}{2} \end{cases} \tag{5.23}$$

tanımlansın.

Eş. 5.21-Eş. 5.23 kullanılarak aşağıdaki teorem kolaylıkla elde edildiğinden aşağıdaki teoremin ispatı verilmeyecektir.

5.2 Teorem [63, Teorem 2.2]

Eğer $u(t)$, $[a, b]$ aralığında Eş. 5.1-Eş. 5.3 probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise $G^*_{2n+1}(s)$, Eş. 5.23'deki gibi olmak üzere

$$\int_a^b |q(s)||G^*_{2n+1}(s)|ds \geq 1 \tag{5.24}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, $t \leq s \leq b$ için $G_{2n+1}(t,s)$ fonksiyonunun maksimumu bulunacaktır. $i = 0,1,\dots,n-1$ için

$$(s-a)^i = (s-t+t-a)^i = \sum_{m=0}^{i} \binom{i}{m} (t-a)^m (s-t)^{i-m}, \tag{5.25}$$

$$(b-t)^i = (b-s+s-t)^i = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (b-s)^k (s-t)^{i-k} \tag{5.26}$$

ve $t \leq s \leq b$ aralığında

$$G_{2n+1}(t,s) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-1+i}{i} \frac{(t-a)^n (b-s)^n (s-t)^{n-i} (s-a)^i (b-t)^i}{(2n)!\,(b-a)^{n+i}} \tag{5.27}$$

olduğundan $H_1(t,s) \coloneqq (t-a)^{n+m}(b-s)^{n+k}(s-t)^{n+i-m-k}$ olmak üzere

$$G_{2n+1}(t,s) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{i} \sum_{m=0}^{i} \binom{n-1+i}{i} \binom{i}{k} \binom{i}{m} \frac{H_1(t,s)}{(2n)!\,(b-a)^{n+i}} \tag{5.28}$$

elde edilir. $H_1(t,s)$ fonksiyonu maksimum değerini

$$(t_0, s_0) = \left(\frac{a(2n+i-m)+b(m+n)}{3n+i}, \frac{a(k+n)+b(2n+i-k)}{3n+i} \right) \tag{5.29}$$

noktasında alır ve bu maksimum değer

$$H_1\left(\frac{a(2n+i-m)+b(m+n)}{3n+i}, \frac{a(k+n)+b(2n+i-k)}{3n+i} \right)$$
$$= \frac{(k+n)^{k+n}(m+n)^{m+n}(b-a)^{i+3n}}{(i+n-k-m)^{k+m-i-n}(i+3n)^{i+3n}} \tag{5.30}$$

olur. Buradan $t \leq s \leq b$ aralığında

$$C_n := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{i} \sum_{m=0}^{i} \binom{n-1+i}{i} \binom{i}{k} \binom{i}{m} \frac{(k+n)^{k+n}(m+n)^{m+n}}{(i+n-k-m)^{k+m-i-n}(i+3n)^{i+3n}} \qquad (5.31)$$

olmak üzere

$$G_{2n+1}(t,s) \leq \frac{C_n(b-a)^{2n}}{(2n)!} \qquad (5.32)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Her $t, s \in [a,b]$ için $G_{2n+1}(t,s) = -G_{2n+1}(s,t)$ olduğundan her $t, s \in [a,b]$ için

$$|G_{2n+1}(t,s)| \leq \frac{C_n(b-a)^{2n}}{(2n)!} \qquad (5.33)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi, Eş. 5.18 ve Eş. 5.33 eşitsizliklerini kullanılarak aşağıdaki ana teorem kolaylıkla elde edildiğinden ispatsız bir şekilde verilecektir.

5.3 Teorem $[63, \text{Teorem } 2.3]$

Eğer $u(t)$, $[a,b]$ aralığında Eş. 5.1-Eş. 5.3 probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise C_n, Eş. 5.31'deki gibi tanımlanmak üzere

$$\int_a^b |q(s)| ds \geq \frac{(2n)!}{C_n(b-a)^{2n}} \qquad (5.34)$$

eşitsizliği sağlanır.

5.2. Uyarı

Lemma 5.1'de $n = 1$ alınırsa,

$$G_3(t,s)=\begin{cases}-\dfrac{(t-s)(b-t)(s-a)}{2(b-a)}\ ;\ a\le s\le t\\[2ex] \dfrac{(t-a)(b-s)(s-t)}{2(b-a)}\ ;\ t\le s\le b\end{cases} \tag{5.35}$$

olmak üzere

$$u(t)=\int_a^b G_3(t,s)f(s)ds \tag{5.36}$$

elde edilir.

Şimdi, Eş. 5.36'daki Green fonksiyonunun mutlak maksimumu bulunacaktır. $t\le s\le b$ için $G_3(t,s)=\frac{(t-a)(b-s)(s-t)}{2(b-a)}$ ele alınsın. $G_3(t,s)$ fonksiyonu maksimum değerini $(t_0,s_0)=\left(\frac{2a+b}{3},\frac{a+2b}{3}\right)$ noktasında alıyor ve bu maksimum değer $G_3\left(\frac{2a+b}{3},\frac{a+2b}{3}\right)=\frac{(b-a)^2}{54}$ olarak elde edilir. $t,s\in[a,b]$ için $G_3(t,s)=-G_3(s,t)$ olduğundan $t,s\in[a,b]$ için

$$|G_3(t,s)|\le\frac{(b-a)^2}{54} \tag{5.37}$$

yazılabilir. Dolayısıyla Eş. 5.34 eşitsizliğinden $n=1$ için

$$\int_a^b|q(s)|ds\ge\frac{54}{(b-a)^2} \tag{5.38}$$

Lyapunov tipi eşitsizliği elde edilir. Buradaki 54 sayısının $n=1$ durumunda Eş. 5.1-Eş. 5.3 en iyi olasılık olduğu düşünülmektedir. Yani, Eş. 5.38 eşitsizliğindeki 54 sayısı yerine daha büyük bir sayı yazılamadığı düşünülmektedir.

Aşağıda verilmiş salınımlılık kriterini Lyapunov tipi eşitsizlik yardımıyla genişletmek için Eş. 5.34 kullanılarak alternatif bir yol izlenebilir [6]:

$u(a)=u(b)=0$ olmak üzere $a\le t\le b$ aralığında $u''(t)$ ve $u''(t)u^{-1}(t)$ sürekli

olduklarından

$$\int_a^b |u''(s)u^{-1}(s)|ds > \frac{4}{b-a} \tag{5.39}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla, Eş. 5.34'den aşağıdaki genelleştirme elde edilebilir: $a \leq t \leq b$ aralığında $u^{(2n+1)}(t)$ ve $u^{(2n+1)}(t)u^{-1}(t)$ sürekli, $i = 0,1,\dots,n-1$ için $u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0$ ve $(-1)^{n-1}u^{(n)}(a) = u^{(n)}(b)$ ise C_n, Eş. 5.31'deki gibi tanımlı olmak üzere

$$\int_a^b \left|u^{(2n+1)}(s)u^{-1}(s)\right|ds > \frac{(2n)!}{C_n(b-a)^{2n}} \tag{5.40}$$

eşitsizliği sağlanır.

Son olarak,

$$u^{(2n+1)}(t) + \lambda h(t)u(t) = 0 \tag{5.41}$$

diferensiyel denklemi ve Eş. 5.2-Eş. 5.3 koşullarından oluşan özdeğer problemi için Eş. 5.34'de elde edilen Lyapunov tipi eşitsizliğin kullanışlı bir uygulaması verilecektir. Eğer $u(t)$, Eş. 5.41 özdeğer probleminin aşikar olmayan bir çözümü ise C_n, Eş. 5.31'deki gibi tanımlı olmak üzere

$$|\lambda| > \frac{(2n)!}{C_n(b-a)^{2n}\int_a^b |h(s)|ds} \tag{5.42}$$

eşitsizliği sağlanır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde yüksek basamaktan sınır değer problemleri için Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerinde durulmuştur. Giriş Bölümünde, klasik Lyapunov eşitsizliği ve Green fonksiyonunun tarihçesinden kısaca bahsedilmiştir. İkinci Bölümde, Green fonksiyonu hakkında temel bilgiler ve Green fonksiyonunun inşası için en yaygın kullanılan metotlardan biri verilmiştir. Üçüncü Bölümde, ikinci, üçüncü ve yüksek basamaktan olmak üzere çeşitli sınır değer problemleri için Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine literatür taraması yapılmış ve sonuçlardan sistematik bir biçimde atıflar yapılarak bahsedilmiştir. Son iki bölümde ise dördüncü basamaktan ve $(2n+1)$-inci basamaktan sınır değer problemleri için çeşitli yeni sınır koşullar altında orijinal Lyapunov tipi eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca; Lyapunov tipi eşitsizliklerin bir uygulaması olarak, lineer bir sınır değer probleminin özdeğeri için bir alt sınır bulunmuştur. Bu eşitsizlikler elde edilirken daha önce bu alanda yapılmış çalışmalardan esinlenilmiştir [1-70].

Diferensiyel denklem, kısmi diferensiyel denklem, fark denklemi, zaman skalası ve q-analizde yer alan salınımlılık, diskonjuge, özdeğer problemleri, kararlılık, varlık-teklik ve diğer uygulamalarda Lyapunov tipi eşitsizliklerin kullanışlı bir araç olmasından dolayı tezin bu alanında çalışacak olan bilim insanlarını bilgilendireceği ve çalışmalarında yardımcı olabileceği düşüncesindeyiz. Bu tezde yüksek basamaktan sınır değer problemleri için Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine çalışılmasına rağmen farklı analizlerde farklı sınır değer problemleri için bu tezdeki yöntem kullanılarak yeni Lyapunov tipi eşitsizlikler elde edilip uygulamaları verilebilir. Bu konuya ilgi duyan okuyucular, önce ikinci ve daha sonra yüksek basamaktan sınır değer problemleri için Lyapunov tipi eşitsizlikler üzerine incelemeler yapabilirler. Bunun için araştırmacılara öncelikle tezde yer alan Green fonksiyonlarını elde etme yöntemlerini incelemeleri ve Green fonksiyonlarının Lyapunov tipi eşitsizliklerde nasıl kullanıldığını araştırmaları önerilir. Sonuç olarak, buradan elde edilen bilgiler ışığında farklı sınır değer problemleri için yeni ve önemli sonuçlar elde edilebilirler.

KAYNAKLAR

1. Lyapunov, A. M. (1907). Probleme general de la stabilite du movement. *Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse,* 2, 203-407.

2. Cabada, A. (2014). *Green's Functions in the Theory of Ordinary Differential Equations.* New York: Springer.

3. Hartman, P. (1964). *Ordinary Differential Equations*. New York: Wiley.

4. Cabada, A., Cid J. A., Maquez-Villamarin, B. (2012). Computation of Green's functions for boundary value problems with Mathematica. *Applied Mathematics and Computation,* 219, 1919-1936.

5. Kelley, W. G., Peterson, A. C. (2010). *The Theory of Differential Equations, Classical and Qualitative*. New York: Springer.

6. Borg, G. (1949). On a Liapounoff criterion of stability. *American Journal of Mathematics,* 71, 67-70.

7. Kwong, M. K. (1981). On Lyapunov's inequality for disfocality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 83, 486-494.

8. Pinasco, J. P. (2004). Lower bounds for eigenvalues of the one-dimensional p-Laplacian. *Abstract and Applied Analysis,* 2, 147-153.

9. Sim, I., Lee, Y. (2010). Lyapunov inequalities for one dimensional p-Laplacian problems with a singular weight function. *Journal of Inequalities and Applications,* 2010, 1-9.

10. Yang, X. (2003). On inequalities of Lyapunov type. *Applied Mathematics and Computation,* 134, 293-300.

11. Wang, X. (2011). Lyapunov type inequalities for second-order half-linear differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 382, 792-801.

12. Parhi, N., Panigrahi, S. (1999). On Lyapunov-type inequality for third-order differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 233, 445-460.

13. Yang, X., Kim, Y., Lo, K. (2010). Lyapunov-type inequality for a class of odd-order differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 234, 2962-2968.

14. Kiselak, J. (2013). Lyapunov-type inequality for third-order half-linear differential equations. *Tamkang Journal of Mathematics,* 44, 351-357.

15. Dhar, S., Kong, Q. (2014). Liapunov-type inequalities for third-order half-linear equations and applications to boundary value problems. *Nonlinear Analysis,* 110, 170-181.

16. Dhar, S., Kong, Q. (2016). Lyapunov-type inequalities for third-order linear differential equations. *Mathematical Inequalities and Applications,* 19, 297-312.

17. Das, K. M., Vatsala, A. S. (1973). On Green's function of an n-point boundary value problem. *Transactions of American Mathematical Society,* 182, 469-480.

18. Yang, X. (2003). On Liapunov-type inequality for certain higher-order differential equations. *Applied Mathematics and Computation,* 134, 307-317.

19. Çakmak, D. (2010). Lyapunov-type integral inequalities for certain higher order differential equations. *Applied Mathematics and Computation,* 216, 368-373.

20. Yang, X., Lo, K. (2010). Lyapunov-type inequality for a class of even-order differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 215, 3884-3890.

21. He, X., Tang, X. H. (2012). Lyapunov-type inequality for even order differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics,* 11, 465-473.

22. Zhang, Q. M., He, X. (2012). Lyapunov-type inequality for a class of even-order differential equations. *Journal of Inequalities and Applications,* 2012, 1-7.

23. Yang, X., Kim, Y., Lo, K. (2014). Lyapunov-type inequality for a class of even-order linear differential equations. *Applied Mathematics and Computation,* 245, 145-151.

24. Agarwal, R. P., Özbekler, A. (2015). Lyapunov-type inequalities for even order differential equations with mixed nonlinearities. *Journal of Inequalities and Applications,* 142, 1-10.

25. Agarwal, R. P., Özbekler, A. (2016). Lyapunov-type inequalities for n-th order forced differential equations with mixed nonlinearities. *Communications on Pure and Applied Mathematics,* 15, 2281-2300.

26. Dhar, S., Kong, Q. (2016). Lyapunov-type inequalities for odd order linear differential equations. *Electronic Journal of Differential Equations,* 243, 1-10.

27. Aktaş, M. F. (2021). On Lyapunov-type inequalities for $(n+1)$st order nonlinear differential equations with the anti-periodic boundary conditions. *Turkish Journal of Mathematics,* 45, 2614-2622.

28. Aftabizadeh, A. R. (1986). Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 116, 415-426.

29. Aktaş, M. F. (2013). Lyapunov-type inequalities for n-dimensional quasilinear systems. *Electronic Journal of Differential Equations,* 67, 1-8.

30. Aktaş, M. F., Çakmak, D., Tiryaki, A. (2014). Lyapunov-type inequalities for quasilinear systems with anti-periodic boundary conditions. *Journal of Mathematical Inequalities,* 8, 313-320.

31. Bai, Z. (2007). The upper and lower solution method for some fourth-order boundary value problems. *Nonlinear Analysis,* 67, 1704-1709.

32. Çakmak, D. (2013). Lyapunov-type integral inequalities for two classes of nonlinear systems with anti-periodic boundary conditions. *Applied Mathematics and Computation,* 223, 237-242.

33. Çakmak, D. (2013). On Lyapunov-type inequality for a class of nonlinear systems. *Mathematical Inequalities and Applications,* 16, 101-108.

34. Çakmak, D., Aktaş, M. F., Tiryaki, A. (2013). Lyapunov-type inequalities for nonlinear systems involving the $(p_1, p_2, \dots, p_n)$-Laplacian. *Electronic Journal of Differential Equations,* 128, 1-10.

35. Çakmak, D., Tiryaki, A. (2010). On Lyapunov-type inequality for quasilinear systems. *Applied Mathematics and Computation,* 216, 3584-3591.

36. Çakmak, D., Tiryaki, A. (2010). Lyapunov-type inequality for a class of Dirichlet quasilinear systems involving the $(p_1, p_2, \dots, p_n)$-Laplacian. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 369, 76-81.

37. Canada, A., Villegas, S. (2015). *A Variational Approach to Lyapunov Type Inequalities. From ODE's to PDE's*. New York: Springer.

38. Ehme, J., Eloe, P. W., Henderson, J. (2002). Upper and lower solution methods for fully nonlinear boundary value problems. *Journal of Differential Equations,* 180, 51-64.

39. Elgindi, M. B. M., Guan, Z. (1997). On the global solvability of a class of fourth-order nonlinear boundary value problems. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,* 20, 257-262.

40. Gregus, M. (1987). Third Order Linear Differential Equations. *Mathematics and Its Applications. East European Series,* vol. 22. D. Reidel, Dordrecht.

41. Ince, E. L. (1926). *Ordinary Differential Equations*. New York: Dover.

42. Kiselak, J. (2014). The best constant of Sobolev inequality corresponding to anti-periodic boundary value problems. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,* 62, 1-11.

43. Li, Y. (2003). Positive solutions of fourth-order boundary value problems with two parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 281, 477-484.

44. Nehari, Z. (1954). On the zeros of solutions of second-order linear differential equations. *American Journal of Mathematics,* 76, 689-697.

45. Tiryaki, A., Çakmak, D., Aktaş, M. F. (2012). Lyapunov-type inequalities for a certain class of nonlinear systems. *Computers and Mathematics with Applications,* 64, 1804-1811.

46. Tiryaki, A., Çakmak, D., Aktaş. M. F. (2014). Lyapunov-type inequalities for two classes of Dirichlet quasilinear systems. *Mathematical Inequalities and Applications,* 17, 843-863.

47. Wang, Y. (2012). Lyapunov-type inequalities for certain higher-order differential equations with anti-periodic boundary conditions. *Applied Mathematical Letters,* 25, 2375-2380.

48. Wang, Y., Cui, Y., Li, Y. (2015). Lyapunov-type inequalities for $(m+1)$th order half-linear differential equations with anti-periodic boundary conditions. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,* 14, 1-7.

49. Yang, B. (2010). Positive solutions of the $(n-1,1)$ conjugate boundary value problem. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,* 53, 1-13.

50. Yang, X. (2003). Green's function and positive solutions for higher-order ODE. *Applied Mathematics and Computation,* 136, 379-393.

51. Yao, Q. (2008). Existence and multiplicity of positive solutions to a singular elastic beam equation rigidly fixed at both ends. *Nonlinear Analysis,* 69, 2683-2694.

52. Aktaş, M. F., Çakmak, D. (2017). Lyapunov-type inequalities for third-order linear differential equations. *Electronic Journal of Differential Equations,* 139, 1-14.

53. Aktaş, M. F., Çakmak, D., Tiryaki, A. (2015). On the Lyapunov-type inequalities of a three-point boundary value problem for third order linear differential equations. *Applied Mathematical Letters,* 45, 1-6.

54. Beesack, P. R. (1962). On the Green's function of an n-point boundary value problem. *Pacific Journal of Mathematics,* 12, 801-812.

55. Das, K. M., Vatsala, A. S. (1975). Green's function for n-n boundary value problem and an analogue of Hartman's result. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 51, 670-677.

56. Pachpatte, B. G. (1995). On Lyapunov-type inequalities for certain higher order differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 195, 527-536.

57. Panigrahi, S. (2009). Lyapunov-type integral inequalities for certain higher order differential equations. *Electronic Journal of Differential Equations,* 28, 1-14.

58. Parhi, N., Panigrahi, S. (2003). Disfocality and Liapunov-type inequalities for third-order equations. *Applied Mathematical Letters,* 16, 227-233.

59. Parhi, N., Panigrahi, S. (2002). Liapunov-type inequality for higher order differential equations. *Mathematica Slovaca,* 52, 31-46.

60. Parhi, N., Panigrahi, S. (2002). Liapunov-type inequality for delay-differential equations of third-order. *Czechoslovak Mathematical Journal,* 52, 385-399.

61. Yang, X., Kim, Y., Lo, K. (2012). A Lyapunov-type inequality for a two-term even-order differential equation. *Mathematical Inequalities and Applications,* 15, 525-528.

62. Aktaş, M. F., Çakmak, D., Ahmetoğlu, A. (2019). Lyapunov-type inequalities for fourth-order boundary value problems. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas,* 113, 615-625.

63. Aktaş, M. F., Çakmak, D., Ahmetoğlu, A. (2019). On Lyapunov-type inequalities for odd order boundary value problems. *Journal of Inequalities and Applications,* 149, 1-12.

64. Aktaş, M. F. (2022). On Lyapunov-type inequalities for nonlinear Hamiltonian-type problems. *Filomat*, 36, 3423-3432.

65. Aktaş, M. F., Çakmak, D. (2019). Lyapunov-type inequalities for third order linear differential equations with two points boundary conditions. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 1, 59-66.

66. Aktaş, M. F., Çakmak, D. (2018). Lyapunov-type inequalities for third-order linear differential equations under the non-conjugate boundary conditions. *Differential Equations & Applications*, 2, 219-226.

67. Aktaş, M. F. (2018). Lyapunov-type inequalities for two classes of nonlinear systems with homogeneous Dirichlet boundary conditions. *Ukrainian Mathematical Journal*, 6, 837-850.

68. Aktaş, M. F. (2014). On the multivariate Lyapunov inequalities. *Applied Mathematics and Computation*, 232, 784-786.

69. Aktaş, M. F., Çakmak, D., Tiryaki, A. (2012). A note on Tang and He's paper. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 4867-4871.

70. Aktaş, M. F., Erçıktı, B. B. (2024). On Lyapunov-type inequalities for five different types of higher order boundary value problems, *Turkish Journal of Mathematics*, 48, 90-105.



Gazili olmak ayrıcalıktır