
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

# HEMEN HEMEN BRONZ MANİFOLDLAR

**Seher DOĞAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KASIM 2023**

## ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Seher DOĞAN

07/11/2023

HEMEN HEMEN BRONZ MANİFOLDLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Seher DOĞAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Kasım 2023

## ÖZET

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, genel bir literatür özetinin ve içerik ile ilgili bilgilerin yer aldığı giriş kısmından oluşmaktadır. İkinci bölüm, bronz oranlar, bronz Fibonacci sayıları, bronz Lucas sayıları hakkında ön bilgiler ve bazı temel kavramları kapsamaktadır. Üçüncü bölümde diferansiyellenebilir bir manifold üzerindeki hemen hemen bronz yapı tanıtılmaktadır ve bu yapının çeşitli özellikleri, bronz Fibonacci ve bronz Lucas sayıları ile ilgili olarak elde edilmiştir. Ayrıca bronz oran, kompleks bronz oran, tanjant bronz oran arasındaki ilişkiler belirlenmiştir. Dördüncü bölümde, hemen hemen bronz yapılardan birkaç örnek sunulmaktadır. Beşinci bölümde, asli lif demetleri ve tanjant demetlerdeki bağıntılar hemen hemen bronz yapı açısından incelenmiştir. Altıncı bölümde, herhangi bir lineer konneksiyon ve bu konneksiyon yardımı ile tanımlanan Schouten ve Vrănceanu konneksiyonları dikkate alınarak hemen hemen bronz manifoldlar üzerinde paralellik, yarı paralellik, anti-yarı paralelllik ve integrallenebilirlik incelenmiştir. Yedinci bölümde ise hemen hemen bronz bir Riemann manifoldu tanımlanmış ve tanımlanan manifoldun çeşitli özellikleri incelenmiştir. Bu bölüm aynı zamanda $\mathbb{R}^2$ manifoldu üzerinde tanımlanmış bronz yapının bir örneğini içerir. Son olarak, sekizinci bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

| | | |
|---|---|---|
| Bilim Kodu | : | 20402 |
| Anahtar Kelimeler | : | Hemen hemen bronz oran, hemen hemen bronz yapı, Schouten konneksiyon, Vrănceanu konneksiyon, integrallenebilirlik, paralellik |
| Sayfa Adedi | : | 81 |
| Danışman | : | Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN |

ALMOST BRONZE MANIFOLDS
(M. Sc. Thesis)

Seher DOĞAN

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
November 2023

## ABSTRACT

This master's thesis contains eight chapters. The first section includes a summary of the related literature, and the introduction contains information about the content. The second section comprises preliminary details on the bronze ratio, Fibonacci and bronze Lucas numbers, and some basic concepts. The third section introduced almost bronze structures on a differentiable manifold, and various characteristics of this structure were obtained from bronze Fibonacci and bronze Lucas numbers. Furthermore, the relations among bronze ratio, complex bronze ratio, and tangent bronze ratio were determined. A few samples of almost bronze structures were presented in the fourth section. In the fifth section, principal fiber bundles and relations to tangent bundles were scrutinized in terms of almost bronze structures. In the sixth chapter, parallelism, half parallelism, anti-half parallelism, and integrability on almost bronze manifolds are studied by considering any linear connection and Schouten and Vrănceanu connections defined with the help of this connection. In the seventh section, an almost bronze Riemann manifold was defined, and various characteristics of this manifold were analyzed. This chapter also includes a sample of the bronze structure, which was defined upon $\mathbb{R}^2$ manifold. Finally, conclusions and recommendations are given in the eighth chapter.

| | | |
|---|---|---|
| Science Code | : | 20402 |
| Keywords | : | Almost bronze ratio, almost bronze structure, Schouten connection, Vrănceanu connection, ıntegrability, parallelism |
| Number of pages | : | 81 |
| Supervisor | : | Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN |

# TEŞEKKÜR

Öncelikle lisans hayatım boyunca ders anlatımıyla zihnimde oluşturduğu farkındalık ve ilham ile Geometri Ana Bilim Dalı'na yönelmeme vesile olan sonrasında ise yüksek lisans sürecim boyunca ders seçimlerim, tez konumun belirlenmesi ve devamında da tezimin hazırlanma sürecinde zamanını, desteğini, emeğini esirgemeyen bilhassa göstermiş olduğu sabır ve hoşgörüden dolayı kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

ÖZET ..... iv

ABSTRACT ..... v

TEŞEKKÜR ..... vi

İÇİNDEKİLER ..... vii

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... ix

1. GİRİŞ ..... 1

2. TEMEL KAVRAMLAR ..... 3

2.1. Düzgün Manifoldlar ..... 3

2.2. Manifoldlar Üzerinde Yapılar ..... 14

2.3. Demet Kavramı ..... 15

2.4. Manifoldlar Üzerinde Dağılımlar ..... 18

3. HEMEN HEMEN BRONZ YAPI ..... 21

3.1. Bronz Oran ..... 21

3.2. Manifoldlar Üzerinde Hemen Hemen Bronz Yapılar ..... 22

4. HEMEN HEMEN BRONZ YAPILARA ÖRNEKLER ..... 29

4.1. Clifford Cebirinde Hemen Hemen Bronz Yapılar ..... 29

4.2. Kuaterniyon Cebirinde Hemen Hemen Bronz Yapılar ..... 32

4.2.1. Hemen hemen bronz kuaterniyonlar ..... 33

4.2.2. Hemen hemen bronz hiperbolik kuaterniyonlar ..... 35

4.2.3. Hemen hemen bronz bikuaterniyonlar ..... 36

4.2.4. Hemen hemen bronz split kuaterniyonlar ..... 37

4.2.5. Hemen hemen bronz dual split kuaterniyonlar ..... 38

4.2.6. Hemen hemen bronz hiperbolik split kuaterniyonlar ..... 39

4.3. Matrislerde Hemen Hemen Bronz Yapılar ..... 39

**Sayfa**

4.4. Üçlü Hemen Hemen Bronz Yapılar ..... 41

5. HEMEN HEMEN BRONZ YAPILARDA KONNEKSİYONLAR ... 45

5.1. Asli Lif Demetlerinde Konneksiyonlar ..... 45

5.2. Tanjant Demetlerde Konneksiyonlar ..... 48

6. HEMEN HEMEN BRONZ YAPILARDA İNTEGRALLENEBİLİRLİK VE PARALELLİK ..... 53

6.1. İntegrallenebilirlik ..... 53

6.2. Paralellik, Yarı Paralellik ve Anti-Yarı Paralellik ..... 56

7. HEMEN HEMEN BRONZ RİEMANN METRİKLERİ ..... 63

7.1. Hemen Hemen Bronz Riemann Manifoldlar ..... 63

7.2. İntegrallenabilirlik ..... 66

8. SONUÇ VE ÖNERİLER ..... 75

KAYNAKLAR ..... 77

ÖZGEÇMİŞ ..... 81

# SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| **Simgeler** | **Açıklamalar** |
|---|---|
| $\mathbf{T_pM^r}$ | $p \in M^r$ noktasındaki tanjant uzay |
| $\mathbf{f_n}$ | Fibonacci dizisi |
| $\mathbf{l_n}$ | Lucas dizisi |
| $\varphi$ | Hemen hemen bronz yapı |
| $\rho_{\mathbf{m}}$ | Hemen hemen bronz yapının öz değeri |
| $\mathbf{D}$ | $M^r$ manifoldu üzerinde dağılım |
| $\mathbf{P}$ | $M^r$ manifoldu üzerinde hemen hemen çarpım yapısı |
| $\mathbf{D_n},\ \mathbf{D_t}$ | Distrübisyon (dağılım) |
| $\nabla^{\mathbf{Sc}}$ | Schouten konneksiyon |
| $\nabla^{\mathbf{Vr}}$ | Vrănceanu konneksiyon |
| $\hat{\mathbf{H}}$ | Split kuaterniyon cebiri |
| $\hat{\mathbf{H}}(\mathbb{C})$ | Bikuaterniyon cebiri |
| $\mathbf{F}$ | $M^r$ üzerinde $(1,1)$ tipli bir tensör alanı |
| $\rho_{\mathbf{m}}^{\mathbf{t}}$ | Tanjant bronz oran |
| $\rho_{\mathbf{m}}^{\mathbf{c}}$ | Kompleks bronz oran |
| $\mathbf{Cl_n}$ | Clifford cebiri |
| **Kısaltmalar** | **Açıklamalar** |
| **o.ü.** | Olmak üzere |

# 1. GİRİŞ

Diferansiyellenebilir bir manifold üzerinde bir polinom yapısı, $(1,1)$ tipinden $C^\infty$ tensör alanları kullanılarak tanımlanır. Bu polinom yapılara örnek olarak şu yapılar sıralanabilir: hemen hemen tanjant yapılar, hemen hemen kompleks yapılar, hemen hemen çarpım yapılar, hemen hemen altın yapılar, hemen hemen gümüş yapılar, hemen hemen bronz yapılar ve hemen hemen metalik yapılar. Bu yapılar son zamanlarda birçok yazar tarafından incelenmiştir [1–5].

"Metalik oran" terimi, Spinadel tarafından 1999'da altın oranın genelleştirilmiş bir biçimi olarak tanımlandı ve "metalik aile" veya "metalik oran" kavramlarını öne sürdü [6]. Yazar, bu metalik ailesi ile Fibonacci sayılarının genelleştirilmesi yani genelleştirilmiş ikincil Fibonacci dizisi arasındaki ilişkiyi ortaya koymuştur. Fibonacci ve Lucas sayılarının Horadam, k- Fibonacci, m- Fibonacci, iki değişkenli Fibonacci, m-Lucas ve p-Lucas sayıları gibi birkaç önemli genellemesi vardır. Sonuç olarak metalik oran ailesinin üyeleri elde edilmiştir. Gümüş Fibonacci, gümüş Lucas, bronz Fibonacci ve bronz Lucas sayıları bu genellemelerin örnekleridir [7]. Kalia, gümüş Fibonacci sayılarını Fibonacci sayılarının genelleştirilmiş bir biçimi olarak ve gümüş Lucas sayılarını Lucas sayılarının genelleştirilmiş bir biçimi olarak tanımladı [7]. Yazar, gümüş Fibonacci sayıları ve gümüş Lucas sayılarının daha sonra ise bronz Fibonacci sayılarını ve bronz Lucas sayılarınınn altın oranla ilişkili olduğunu ortaya koymuştur.

Bu metalik oran ailesinin bir üyesi olarak, bronz oran tanımlanmıştır [1]. [8] numaralı kaynakta, bu bronz oran dikkate alınarak bronz yapı incelenmiştir. Kalia, metalik ortalama ailesinin üyeleri olmayan bronz Lucas ve bronz Fibonacci sayılarıyla ilişkili yeni bir bronz oran tanımladı [7]. Şahin, bu yeni bronz oranı kullanarak bir hemen hemen poly-Norden yapı tanımlamış, bu yapının geometrik özelliğini hemen hemen kompleks yapı kullanarak incelemiş ve poly-Norden manifoldları ile diferensiyellenebilir yapılara sahip diğer manifoldlar arasındaki belirli dönüşümlerin sabitliğini incelemiştir [2].

Bu çalışmada, yeni bronz oranını kullanarak diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde hemen hemen bronz yapı olarak isimlendirdiğimiz bir yapı tanımlıyoruz ve bu yapının

geometrisini, [3] numaralı kaynaktaki yönteme benzer şekilde, hemen hemen çarpım yapısı yardımı ile inceliyoruz. Manifoldlar üzerinde tanımladığımız bu yeni hemen hemen bronz yapı, literatürde henüz çalışılmamıştır. Bu çalışmamızın orijinal kısmı Hindawi Journal of Mathematics dergisinde yayımlanmıştır [9].

Bu tez şu şekilde tasarlanmıştır.

İkinci bölümde, tezin kolay anlaşılmasında ihtiyaç duyulan temel tanımlara, teoremlere ve sonuçlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, diferansiyellenebilir bir manifold üzerinde yeni hemen hemen bronz yapılar tanıtılmaktadır. Bu yapıların çeşitli özellikleri, bronz Fibonacci ve bronz Lucas sayıları ile ilgili olarak elde edilmektedir. Ayrıca bronz oranı, kompleks bronz oranı ve tanjant bronz oranı arasındaki ilişkiler belirlenmiştir.

Dördüncü bölümde, hemen hemen bronz yapılardan birkaç örnek sunulmaktadır.

Beşinci bölümde, asli lif demetleri ve teğet demetlerdeki bağlantılar, hemen hemen bronz yapı açısından incelenmiştir.

Altıncı bölümde, bronz yapının integrallenebilirlik özelliği incelenmiş ve bronz yapının Schouten ve Vrănceanu bağlantıları dikkate alınarak paralelliği incelenmiştir.

Yedinci bölümde, hemen hemen bronz bir Riemann manifoldu tanımlanmış ve tanımlanan manifoldun çeşitli özellikleri incelenmiştir. Bu bölüm aynı zamanda $\mathbb{R}^2$ manifoldundaki tanımlanmış bronz yapının bir örneğini içerir.

Son olarak sekizinci bölümde sonuç ve öneriler verilmiştir.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

Burada, tezin ilerleyen kısımlarında ihtiyaç duyulan tanımlar ve teoremlere yer verilecektir.

## 2.1. Düzgün Manifoldlar

2.1.1. Tanım

Boştan farklı bir küme $M$ ve $M$ kümesinden $\mathbb{R}^r$ uzayına herhangi bir dönüşüm $\Phi$ olsun.

a) $\Phi$ dönüşümü bire-bir,
b) $\Phi$ dönüşümünün görüntü kümesi $\mathbb{R}^r$ topolojik uzayında açık bir küme

şartları sağlanıyorsa $\Phi$ dönüşümüne $\mathbb{M}$ kümesi için $r$-boyutlu bir harita denir [10].

2.1.2. Tanım

$\Phi$ ve $\bar{\Phi}$ dönüşümleri $M$ kümesi için $r$-boyutlu iki harita olsun. $dom\Phi$ ve $dom\bar{\Phi}$ kümeleri, sırasıyla, $\Phi$ ve $\bar{\Phi}$ dönüşümlerin tanım kümeleri olmak üzere $dom\Phi \cap dom\bar{\Phi} = \emptyset$ ya da $dom\Phi \cap dom\bar{\Phi} \neq \emptyset$ durumunda $\gamma = \bar{\Phi} \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ ve $\gamma^{-1} = \Phi \circ \bar{\Phi}^{-1} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ dönüşümleri $C^k$-diferensiyellenebilir ise $\Phi$ ve $\bar{\Phi}$ haritalarına $C^k$-bağdaşık haritalar denir. Bu durumda da $\gamma$ dönüşümüne lokal koordinat transformasyonu denir [10].

2.1.3. Tanım

$\mathfrak{A} = \{U_\alpha, \Phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ kümesi, $M$ kümesinde tanımlanan haritaların bir sınıfını ifade etsin. Burada, $I$ indis kümesini ve $U_\alpha$ da $\Phi_\alpha$ haritalarının tanım kümelerini göstermektedir.

i) $\alpha \in I$ için $U_\alpha$ kümeleri $M$ kümesini örter,
ii) $\mathfrak{A}$ sınıfının tüm haritaları ikişer ikişer $C^k$-bağdaşıktır

aksiyomlarını sağlayan $\mathfrak{A}$ haritaların sınıfına $C^k$ -atlas denir [10].

2.1.4. Tanım

$\mathscr{A}$ ve $\mathscr{B}$, $M$ kümesi için iki $C^k$-atlas olsun. Eğer, $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$, $M$ için $C^k$-atlas ise $\mathscr{A}$ ve $\mathscr{B}$ atlaslarına $C^k$-bağdaşıktır denir [10].

2.1.5. Önerme

Tanım 2.1.4. de tanımlanan bağıntı $M$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısını $\sim$ ile gösterirsek, denklik sınıflarını

$$\mathscr{S} = [\mathscr{A}] = \left\{ \mathscr{B} : \mathscr{B}, M \text{ üzerinde bir } C^k\text{-atlas ve } \mathscr{A} \sim \mathscr{B} \right\}$$

şeklinde gösteririz [10].

2.1.6. Tanım

$\mathscr{S}$ denklik sınıfına $M$ kümesi üzerinde $\mathscr{A}$ atlasının doğurduğu $C^k$-yapı yapı denir [10].

2.1.7. Tanım

$\mathscr{S}$, $\mathscr{A}$ atlasının doğurduğu $C^k$- yapı olsun. $r$-boyutlu $C^k$-diferensiyellenebilir manifold manifold diye $(M, [\mathscr{A}])$ veya $(M, \mathscr{S})$ ikilisine denir. Bu ikili gösterim kısalık için çoğunlukla $M$ ile gösterilir. Buradaki $C^k$-diferensiyellenebilirlik $\forall k \in \mathbb{Z}^+$ için sağlanıyorsa bu manifolda düzgün manifold denir [10].

2.1.8. Tanım

$r$ ve $s$ boyutlu iki düzgün manifold $M^r$ ve $N^s$ olsun. $\mathfrak{p} \in M^r$ noktasında $M^r$ manifoldundan $N^s$ manifolduna herhangi bir dönüşüm $f$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{f} : \Phi(U) \longrightarrow \bar{\Phi}(\bar{U})$$

dönüşümü $\Phi(\mathfrak{p})$ noktasında $C^k$-diferensiyellenebilir olacak şekilde $\mathfrak{p}$ noktasının bir $U$ ve $f(\mathfrak{p})$ noktasının da $f(U) \subset \bar{U}$ şeklinde bir $\bar{U}$ haritası varsa, o zaman $f$ dönüşümü $\mathfrak{p} \in M^r$

noktasında $C^k$-diferensiyellenebilir bir dönüşümdür denir. Buradaki $(U,\Phi)$ ve $(\bar{U},\bar{\Phi})$ haritalarına göre $\tilde{f} = \bar{\Phi} \circ f \circ \Phi^{-1}$ dönüşümüne $f$ fonksiyonunun lokal koordinatlardaki ifadesi denir [10].

2.1.9. Tanım

$M^r$ manifoldu üzerinde $W \subset domf$ bir açık alt kümesi olmak üzere; eğer $f$, $W$ kümesindeki her noktada $C^\infty$-sınıfından diferensiyellenebilir dönüşüm ise; o zaman buna $f$, $W$ kümesi üzerinde $C^\infty$-sınıfından diferensiyellenebilir dönüşüm veya kısaca $C^\infty$-dönüşüm (düzgün dönüşüm) denir [10].

$M^r$ ve $N^s$ düzgün manifoldlar olsun.

$C^\infty(M^r,N^s) = \{f \mid f : M^r \longrightarrow N^s, \text{ düzgün dönüşüm}\}$,

$C^\infty(M^r) = \{f \mid f : M^r \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ düzgün dönüşüm}\}$,

$C^\infty(\mathfrak{p}) = \{f \mid U, \mathfrak{p} \in M^r \text{ nin bir komşuluğu o.ü. } f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ düzgün dönüşüm}\}$

gösterimleri kullanılacaktır.

2.1.10. Tanım

$M^r$ düzgün bir manifold ve $\mathfrak{p}$ noktası $M^r$ manifoldu üzerinde herhangi bir nokta olsun. Eğer $\forall f_1, g_1 \in C^\infty(\mathfrak{p})$ ve $\lambda, \beta$ reel sayıları için

$$\begin{array}{rccc} v_p & : & C^\infty(\mathfrak{p}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & f_1 & \longrightarrow & v_\mathfrak{p}(f_1) \end{array}$$

dönüşümü

a) $v_\mathfrak{p}(\lambda f_1 + \beta g_1) = \lambda v_\mathfrak{p}(f_1) + \beta v_\mathfrak{p}(g_1)$

b) $v_\mathfrak{p}(f_1 g_1) = v_\mathfrak{p}(f_1) g_1(\mathfrak{p}) + f_1(\mathfrak{p}) v_\mathfrak{p}(g_1)$

özelliklerini yerine getiriyorsa, $\mathfrak{p}$ noktasında $M^r$ nin bir tanjant vektörü olarak adlandırılır ve $M^r$ nin bu tür tanjant vektörlerinin kümesi $T_{\mathfrak{p}}M^r$ ile ifade edilir. $T_{\mathfrak{p}}M^r$ reel vektör uzayı yapısına sahiptir. Bu uzaya $M^r$ nin $\mathfrak{p}$ noktasındaki tanjant uzayı denir [10].

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $\mathfrak{p} \in M^r$ noktasında $M^r$ manifoldunun bir haritası $(U, \psi = (x^i))_{1\leq i\leq r}$ verilsin. Bu durumda

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\mathfrak{p}} : 1 \leq i \leq r \right\}$$

kümesi $T_{\mathfrak{p}}M^r$ nin bir bazıdır. Bu baz $T_{\mathfrak{p}}M^r$ tanjant uzayının doğal bazı olarak isimlendirilir [10].

2.1.11. Tanım

$r$ ve $s$ boyutlu iki düzgün manifold $M^r$ ve $N^s$ olsun. Bu manifoldlar arasında bir düzgün dönüşüm $f : M^r \longrightarrow N^s$ verilsin. Her $v_{\mathfrak{p}} \in T_{\mathfrak{p}}M^r$ ve her $g \in C^\infty(N^s)$ için

$$(df_{\mathfrak{p}}(v_{\mathfrak{p}}))(g) = v_{\mathfrak{p}}(g \circ f)$$

eşitliği ile tanımlı $df_{\mathfrak{p}} : T_{\mathfrak{p}}M^r \longrightarrow T_{f(\mathfrak{p})}N^s$ dönüşümü $f$ dönüşümünün $\mathfrak{p}$ noktasındaki türev dönüşümü olarak adlandırılır [11].

$T_{\mathfrak{p}}M^r$ ve $T_{f(\mathfrak{p})}N^s$ tanjant uzaylarının koordinat bazlarına göre $df_{\mathfrak{p}}$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris Jakobien matris olarak adlandırılır ve $J_f(\mathfrak{p})$ ile gösterilir.

$M^r$ düzgün manifoldunun $\mathfrak{p}$ noktasındaki tanjant uzaylarının ayrık birleşimini $TM^r$ (yani, $TM^r = \bigcup_{\mathfrak{p}\in M^r} T_{\mathfrak{p}}M^r$) ile gösterelim.

2.1.12. Teorem

$M^r$ düzgün manifoldu $r$ boyutlu ise $TM^r$ de $2r$ boyutlu bir düzgün manifolddur [12, 13].

2.1.13. Tanım

$TM^r$ ye $M^r$ düzgün manifoldunun tanjant manifoldu denir [12, 13].

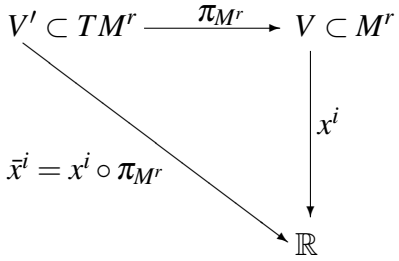
2.1.14. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $TM^r$ tanjant manifoldu üzerinde

$$\begin{array}{rcccl} \pi_{M^r} & : & TM^r & \longrightarrow & M^r \\ & & z & \longrightarrow & \pi_{M^r}(z)=\mathfrak{p} \quad (\text{eğer } z\in T_{\mathfrak{p}}M^r \text{ ise}) \end{array}$$

şeklinde tanımlı $\pi_{M^r}$ dönüşümü, sürekli ve örten bir dönüşüm olup, bu $\pi_{M^r}$ dönüşümü doğal projeksiyon olarak adlandırılır [14].

$M^r$ bir düzgün manifold olsun.$M^r$ manifoldu üzerinde bir harita $(V,\psi=(x^i))_{1\leq i\leq r}$ verilsin. O zaman $\pi^{-1}_{M^r}(V)=V'$ kümesi $TM^r$ manifoldunda açıktır.




diyagramı değişmeli olacak biçimde $\bar{x}^i : V'\subset TM^r \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını $\forall z\in V'$ için, $\bar{x}^i(z)=(x^i\circ\pi_{M^r})(z)=x^i(\pi_{M^r}(z))=x^i(\mathfrak{p})$ olarak ve $y^i=\bar{x}^{r+i} : V'\subset TM^r \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını da, $\forall z\in V'$ için $y^i(Z)=dx^i(Z)=Z[x^i]$ olarak tanımlayalım.

Buradan,

$$\begin{cases} \bar{x}^i=x^i\circ\pi_{M^r} \\ y^i(Z)=dx^i(Z)=Z[x^i];\ \ Z\in V' \end{cases}$$

sistemini elde ederiz.

$$(\bar{x}^i, y^i) = \left(x^1 \circ \pi_{M^r}, ..., x^r \circ \pi_{M^r}, dx^1, ..., dx^r\right)$$

sistemi $TM^r$ manifoldu için bir lokal koordinat sistemidir [12, 13].

2.1.15. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold, $U$ ise $M^r$ manifoldunda bir açık alt küme ve $X_1 : U \longrightarrow TM^r\,|_U$ bir dönüşüm olsun. $I_U$, $U$ üzerinde özdeşlik dönüşümü o.ü. $\pi_{M^r} \circ X_1 = I_U$ eşitliğini gerçekleyen $X_1$ dönüşümü $U$ üzerinde bir vektör alanı alanı olarak adlandırılır [10].

Vektör alanları genellikle, tanım kümesi belirtmeksizin $X_1 : M^r \longrightarrow TM^r$ şeklinde ifade edilir. Yani, $X_1$ vektör alanının tanım kümesi, $M^r$ üzerinde bir açık alt küme olduğu anlamına gelir. $M^r$ düzgün manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{X}(M^r)$ ile gösterilir ve $X_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ olmak üzere $domX_1 = U$ olduğunda, $\forall \mathfrak{p} \in U$ ve $\forall f_1 \in C^\infty(U)$ için: $X_1(f_1)(\mathfrak{p}) = (X_1)_\mathfrak{p}(f_1)$ şeklinde tanımlanır.

2.1.16. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $T_\mathfrak{p}M^r$ tanjant uzayının cebirsel duali olan $T^*_\mathfrak{p}M^r$ vektör uzayına, $M^r$ manifoldunun $\mathfrak{p}$ noktasındaki kotanjant uzayı denir. $T^*_\mathfrak{p}M^r$ uzayın her bir elemanını $\mathfrak{p}$ noktasında bir kovektör ya da kotanjant vektör olarak adlandırılır [11].

$M^r$ düzgün manifoldu ve $\mathfrak{p} \in M^r$ verilsin. $\mathfrak{p} \in U$ o.ü. $M^r$ için $\left(U, \psi = \left(x^i\right)\right)_{1 \le i \le r}$ haritasına göre

$$\left\{ dx^i\big|_\mathfrak{p} : 1 \le i \le r \right\}$$

kümesi $T^*_\mathfrak{p}M^r$ uzayının doğal bazıdır. $dx^i\big|_\mathfrak{p}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_\mathfrak{p}\right) = \delta^i_j$ olduğu açıktır.

2.1.17. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $M^r$ manifoldunun her bir $\mathfrak{q}$ noktasına bir kovektör karşılık getiren

$$\mathfrak{w} : M^r \to \bigcup_{\mathfrak{q}\in M^r} T^*_{\mathfrak{q}} M^r = T^* M^r$$

dönüşümü $M^r$ manifoldu üzerinde kovektör alanı ya da 1-form olarak isimlendirilir [11].

$M^r$ manifoldu üzerinde tanımlı kovektör alanlarının kümesi $\mathfrak{X}^*(M^r)$ ile göstereceğiz.

2.1.18. Tanım

$\mathfrak{V}$ bir reel vektör uzayı ve $\mathfrak{V}$ vektör uzayının dual uzayı da $\bar{\mathfrak{V}}$ olsun.

$$T : \underbrace{\bar{\mathfrak{V}} \times \ldots \times \bar{\mathfrak{V}}}_{k-\text{tane}} \times \underbrace{\mathfrak{V} \times \ldots \times \mathfrak{V}}_{l-\text{tane}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde her bir $(k+l)$ lineer dönüşümüne $\mathfrak{V}$ üzerinde $k$-yıncı dereceden kontravaryant ve $l$-yinci dereceden kovaryant ya da $(k,l)$ tipli/tipinden bir tensör denir [11].

$\mathfrak{V}$ vektör uzayı üzerinde tanımlı $(k,l)$ tipli tensörlerin kümesi $T^k_l(\mathfrak{V})$ ile gösterilir. $T^k_l(\mathfrak{V})$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olup $boy\mathfrak{V} = r$ ise $boy T^k_l(\mathfrak{V}) = r^{k+l}$ olur.

$\mathfrak{V}$ vektör uzayı için $\mathfrak{V} = T_{\mathfrak{p}} M^r$ alınırsa, $M^r$ düzgün manifoldunun $\mathfrak{p}$ noktasındaki $T^k_l(T_{\mathfrak{p}} M^r)$ tensör uzayını elde ederiz. Bu uzayın her bir elemanını $\mathfrak{p}$ noktasında bir $(k,l)$ tipli tensör olarak isimlendirilir.

2.1.19. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $M^r$ nin her bir noktasına $(k,l)$ tipli bir tensör karşılık getiren bir dönüşüme, $M^r$ üzerinde $(k,l)$ tipli bir tensör alanı denir [11].

Buradan, $M^r$ manifoldu üzerinde tanımlı bir tensör alanının,

$$T \;:\; M^r \longrightarrow \bigcup_{\mathfrak{p}\in M^r} T_l^k(T_{\mathfrak{p}}M^r)$$

$$\mathfrak{p} \longrightarrow T(\mathfrak{p}) \in T_l^k(T_{\mathfrak{p}}M^r)$$

biçiminde tanımlandığını ifade edebiliriz.

$M^r$ düzgün manifoldu üzerinde tanımlı tensör alanlarının kümesini $\Im_l^k(M^r)$ ile göstereceğiz.

Özel halde: $\Im_0^0(M^r) = C^\infty(M^r)$, $\Im_0^1(M^r) = \mathfrak{X}(M^r)$, $\Im_1^0(M^r) = \mathfrak{X}^*(M^r)$ gösterimleri vardır.

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $\mathfrak{p} \in M^r$, $\mathfrak{w}_1,...,\mathfrak{w}_k \in \mathfrak{X}^*(M^r)$ ve $X_1,...,X_l \in \mathfrak{X}(M^r)$ o.ü.

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M^r)\times ...\times \mathfrak{X}^*(M^r)}_{k \text{ tane}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M^r)\times ...\times \mathfrak{X}(M^r)}_{l \text{ tane}} \longrightarrow C^\infty(M^r)$$

$C^\infty(M^r)$ değerli $(k+l)$ lineer dönüşümü

$$(T(\mathfrak{w}_1,...,\mathfrak{w}_k,X_1,...,X_l)(\mathfrak{p}) = T_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{w}_{1\mathfrak{p}},...,\mathfrak{w}_{k\mathfrak{p}},X_{1\mathfrak{p}},...,X_{l\mathfrak{p}})$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.20. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $M^r$ üzerinde $(0,2)$ tipli

$$g : \mathfrak{X}(M^r)\times \mathfrak{X}(M^r) \to C^\infty(M^r)$$

tensörü non-dejenere ve simetrik ise $g$ tensörü $M^r$ düzgün manifoldu üzerinde bir yarı-Riemann metriği olarak adlandırılır [15].

2.1.21. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold ve $g$, $M^r$ üzerinde bir yarı-Riemann metriği olsun. Bu durumda $(M^r, g)$ ikilisi bir yarı-Riemann manifoldu olarak adlandırılır [15].

2.1.22. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $M^r$ üzerinde $(0,2)$ tipli $g$ tensörü simetrik ve pozitif tanımlı ise, $g$ tensörü $M^r$ düzgün manifoldu üzerinde bir Riemann metriği olarak adlandırılır [15].

2.1.23. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold ve $g$, $M^r$ üzerinde bir Riemannian metriği olsun. Bu durumda $(M^r, g)$ ikilisi bir Riemann manifoldu olarak adlandırılır [16].

2.1.24. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold ve $M^r$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm

$$\nabla : \mathfrak{X}(M^r) \times \mathfrak{X}(M^r) \to \mathfrak{X}(M^r)$$

olsun. Bu dönüşüm, $\forall f_1, g_1 \in C^\infty(M^r)$ ve $\forall X_1, Y_1, Z_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ için,

a) $\nabla_{f_1 X_1 + g_1 Y_1} Z_1 = f_1 \nabla_{X_1} Z_1 + g_1 \nabla_{Y_1} Z_1$,
b) $\nabla_{X_1}(f_1 Y_1) = f_1 \nabla_{X_1} Y_1 + (X_1 f_1) Y_1$,
c) $\nabla_{X_1}(Y_1 + Z_1) = \nabla_{X_1} Y_1 + \nabla_{X_1} Z_1$

eşitliklerini sağlanıyorsa $\nabla$ dönüşümüne $M^r$ üzerinde bir lineer konneksiyon denir [10].

$X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ vektör alanlarının lokal ifadeleri, sırasıyla, $X_1 = \sum_{i=1}^{r} X_1^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ve

$Y_1 = \sum_{j=1}^{r} Y_1^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ o.ü.

$$\nabla_{X_1} Y_1 = \sum_{h=1}^{r} \left( \sum_{i,k=1}^{r} X_1^i \frac{\partial Y_1^h}{\partial x^i} + \sum_{i,k=1}^{r} X_1^i Y_1^k \Gamma_{ik}^h \right) \frac{\partial}{\partial x^h}$$

eşitliğiyle belirlidir. Burada, $\Gamma_{ij}^k$ düzgün dönüşümleri $\nabla$ lineer konneksiyonunun bileşenleri veya Christoffel sembolleri olarak adlandırılır ve

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{r} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

eşitliği ile belirlidir [10].

2.1.25. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ ve $\forall f_1 \in C^\infty(M^r)$ için $[X_1, Y_1](f_1) = X_1(Y_1 f_1) - Y_1(X_1 f_1)$ ile tanımlı

$$[,] : \mathfrak{X}(M^r) \times \mathfrak{X}(M^r) \longrightarrow \mathfrak{X}(M^r)$$

dönüşümü Lie parantez operatörü olarak adlandırılır [10].

$X_1, Y_1, Z_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ ve $f_1, g_1 \in C^\infty(M^r)$ olmak üzere Lie parantez operatörü şağıdaki şartları sağlar

i) $[X_1, Y_1] = -[Y_1, X_1]$,
ii) $[X_1, [Y_1, Z_1]] + [Y_1, [Z_1, X_1]] + [Z_1, [X_1, Y_1]] = 0$,
iii) $[f_1 X_1, g_1 Y_1] = f_1 (X_1 g_1) Y_1 - g_1 (Y_1 f_1) X_1 + f_1 g_1 [X_1, Y_1]$,
iv) $[X_1, Y_1](f_1, g_1) = f_1 [X_1, Y_1](g_1) + g_1 [X_1, Y_1](f_1)$.

2.1.26. Tanım

$\mathscr{G}$ hem bir grup hem de bir düzgün manifold olsun. Eğer

$$\eta : \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}, \quad \eta(c,d) = cd$$

ve

$$\varphi : \mathscr{G} \to \mathscr{G}, \quad \varphi(c) = c^{-1}$$

dönüşümlerinin her ikisi de diferensiyellenebilir ise $\mathscr{G}$ grubuna Lie grubu denir [16].

2.1.27. Tanım

$\mathscr{G}$ ve $M^r$, sırasıyla, bir Lie grubu ve bir düzgün manifold olsun. $M^r$ manifoldundaki her bir $p$ noktası, $\mathscr{G}$ grubunun $\varepsilon$ birim elemanı ve $\mathscr{G}$ gubundaki her bir $g_1,\ g_2$ noktaları için

i) $\phi(p,\varepsilon) = p$,
ii) $\phi(\phi(p,g_1),g_2) = \phi(p,g_1g_2)$

özelliklerini sağlayan $\phi : M^r \times \mathscr{G} \to M^r$ dönüşümüne $\mathscr{G}$ Lie grubunun $M^r$ manifoldu üzerindeki sağ etkisi denir [17].

2.1.28. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold ve $F,G \in \Im_1^1(M^r)$ olsun. $\forall X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ için

$$\begin{aligned} 2N_{F,G}(X_1,Y_1) = {} & [F(X_1),G(Y_1)] + [G(X_1),F(Y_1)] + (FG+GF)[X_1,Y_1] - F[G(X_1),Y_1] \\ & - F[X_1,G(Y_1)] - G[F(X_1),Y_1] - G[X_1,F(Y_1)] \end{aligned}$$

eşitliği ile tanımlı $(1,2)$ tipli $N_{F,G}$ tensör alanına $F$ ve $G$ tensörlerinin torsiyon tensörü denir [18].

2.1.29. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold ve $F \in \Im_1^1(M^r)$ olsun.

$N_F = N_{F,F}$

eşitliği ile tanımlı $(1,2)$ tipli bir $N_F$ tensör alanına $F$ tensörünün Nijenhuis tensörü denir [18].

$X_1, Y_1 \in \Im_0^1(M^r)$ için

$N_F(X_1,Y_1) = F^2([X_1,Y_1]) + [F(X_1),F(Y_1)] - F([F(X_1),Y_1]) - F([X_1,F(Y_1)])$

eştiliği vardır [18].

## 2.2. Manifoldlar Üzerinde Yapılar

2.2.1. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. Eğer $M^r$ manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipli bir tensör (afinor) alanı $F$

$x^l + a_l x^{l-1} + ... + a_2 x + a_1 = 0$

cebirsel denklemini sağlar ve birim afinor alanı $I$ o.ü. $\forall \mathfrak{p} \in M^r$ için $F^{l-1}(\mathfrak{p}), F^{l-2}(\mathfrak{p}), ..., F(\mathfrak{p}), I$ afinor alanları lineer bağımsız ise, $F$ afinor alanına $M^r$ düzgün manifoldu üzerinde bir polinomial yapı ve $Q(x) = x^l + a_l x^{l-1} + ... + a_2 x + a_1$ polinomuna da yapı polinomu denir [19].

2.2.2. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $M^r$ üzerinde,

i) $Q(x) = x^2$ yapı polinomuna sahip $T$ afinor alanı hemen hemen tanjant yapı olarak adlandırılır. Yani, $T^2 = 0$ dır [4].

ii) $Q(x) = x^2 - I$ yapı polinomuna sahip $P$ afinor alanı hemen hemen çarpım yapı olarak adlandırılır. Yani, $P^2 = I$ dır [18].
iii) $Q(x) = x^2 + I$ yapı polinomuna sahip $C$ afinor alanı hemen hemen kompleks yapı olarak adlandırılır. Yani, $C^2 = -I$ dır [18].

2.2.3. Tanım

$P$ ve $F$, $M^r$ manifoldu üzerinde iki afinor alanı ve $K = P \circ F$ olmak üzere,

i) $P^2 = F^2 = I$ ve $F \circ P - P \circ F = 0$ ise $K^2 = I$,
ii) $P^2 = F^2 = I$ ve $F \circ P + P \circ F = 0$ ise $K^2 = -I$,
iii) $P^2 = F^2 = -I$ ve $F \circ P - P \circ F = 0$ ise $K^2 = I$,
iv) $P^2 = F^2 = -I$ ve $F \circ P + P \circ F = 0$ ise $K^2 = -I$

sağlıyorsa $(P,F,K)$ üçlüsüne, sırasıyla, hemen hemen hyperproduct (ahp), hemen hemen biproduct complex (abpc), hemen hemen product bicomplex (apbc) ve hemen hemen hypercomplex (ahc) yapı denir [20].

## 2.3. Demet Kavramı

2.3.1. Tanım

Boyutları $r+b$, $r$ ve $b$ olan düzgün manifoldlar, sırasıyla, $\mathbb{E}$, $M^r$ ve $\mathfrak{B}$ o.ü. $(\mathbb{E}, \pi, M^r, \mathfrak{B})$ bir lif demeti olsun. $\forall z \in \mathbb{E}$ noktası için

$V_z\mathbb{E} = \text{çek}(d\pi_z) = \{\mathbb{A}_z \in T_z\mathbb{E} : d\pi_z(\mathbb{A}_z) = 0\}$

kümesi, $T_z\mathbb{E}$ tanjant uzayının bir alt uzayıdır. $V_z\mathbb{E}$ uzayı $\mathbb{E}$ lif demetinin $z$ noktasındaki vertical (dikey) uzayı olarak adlandırılır. Ayrıca, $V_z\mathbb{E}$ uzayın elemanları dikey tanjant vektör olarak adlandırılır [21].

2.3.2. Tanım

$\mathbb{E}$ lif demeti üzerinde vektör alanlarının modülü $\mathfrak{X}(E)$ ile gösterelim. $A$, $\mathbb{E}$ üzerinde bir vektör

alanı o.ü. $\forall z \in \mathbb{E}$ için $\mathbb{A}_z \in V_z\mathbb{E}$ ise $\mathbb{A}$ dikey vektör alanı olarak adlandırılır ve $\mathbb{A} \in \mathfrak{X}^v(\mathbb{E})$ şeklinde gösterilir [21].

2.3.3. Teorem

$M^r$ düzgün bir manifold o.ü. $(TM^r, \pi_{M^r}, M^r, \mathbb{R}^r)$ dörtlüsü bir lif demetidir [21].

2.3.4. Tanım

$(TM^r, \pi_{M^r}, M^r, \mathbb{R}^r)$ lif demeti $M^r$ düzgün manifoldunun tanjant demeti olarak adlandırılır [14].

2.3.5. Teorem

$(\mathbb{E}, \pi, M^r, \mathbb{B})$ bir lif demeti olsun. $\pi_{\mathbb{E}} : T\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ dönüşümü $\forall z \in \mathbb{E}$ için $\pi_{\mathbb{E}}^{-1}(z) = T_z\mathbb{E}$ şeklinde tanımlansın.

$$T\mathbb{E} = \bigcup_{z\in\mathbb{E}} T_z\mathbb{E}$$

o.ü. $(T\mathbb{E}, \pi_{\mathbb{E}}, \mathbb{E}, \mathbb{R}^{r+b})$ dörtlüsü bir vektör demetidir. $T\mathbb{E}$, $\mathbb{E}$ manifoldunun tanjant demetidir [21].

2.3.6. Teorem

Bir $(\mathbb{E}, \pi, M^r, \mathbb{B})$ lif demeti verilsin.

$$V\mathbb{E} = \bigcup_{z\in\mathbb{E}} V_z\mathbb{E}, \quad \pi_{V\mathbb{E}} = \pi_{\mathbb{E}}|_{V\mathbb{E}} \text{ ve } \pi_{V\mathbb{E}}^{-1}(z) = V_z\mathbb{E}$$

o.ü. $(V\mathbb{E}, \pi_{V\mathbb{E}}, \mathbb{E}, \mathbb{R}^b)$ $T\mathbb{E}$ nin alt vektör demetidir [21].

2.3.7. Tanım

$V\mathbb{E}$ vektör demetine $T\mathbb{E}$ nin dikey alt demeti adı verilir [21].

2.3.8. Tanım

$(\mathbb{E},\pi,M^r,\mathbb{B})$ bir lif demeti olsun. $T\mathbb{E}=H\mathbb{E}\oplus V\mathbb{E}$ olacak biçimdeki $H\mathbb{E}$ vektör demetine $T\mathbb{E}$ tanjant demetin horizontal (yatay) alt demeti denir [21].

$$H\mathbb{E}=\bigcup_{z\in\mathbb{E}} H_z\mathbb{E},\quad \pi_{H\mathbb{E}}=\pi_{\mathbb{E}}|_{H\mathbb{E}} \quad \text{ve} \quad \pi^{-1}_{H\mathbb{E}}(z)=H_z\mathbb{E}$$

o.ü. yatay alt demet $(H\mathbb{E},\pi_{H\mathbb{E}},\mathbb{E},\mathbb{R}^r)$ şeklindedir.

Ayrıca $\forall z\in\mathbb{E}$ için,

$$T_z\mathbb{E}=H_z\mathbb{E}\oplus V_z\mathbb{E},\quad T\mathbb{E}=\bigcup_{z\in\mathbb{E}}(H_z\mathbb{E}\oplus V_z\mathbb{E})=H\mathbb{E}\oplus V\mathbb{E}$$

olur [21].

2.3.9. Tanım

$H_z\mathbb{E}$ uzayı $T_z\mathbb{E}$ tanjant uzayının bir alt uzayıdır. $T_z\mathbb{E}$ uzayına $\mathbb{E}$ manifoldunun $z$ noktasındaki yatay uzayı denir. $H_z\mathbb{E}$ uzayının elemanlarına yatay tanjant vektör adı verilir [21].

$O\in\mathfrak{X}(\mathbb{E})$ olsun. $\mathbb{E}$ nin her bir $z$ noktası için $O_z\in H_z\mathbb{E}$ ise, $O$ ya yatay vektör alanı denir ve $O\in\mathfrak{X}^h(\mathbb{E})$ ile gösterilir [21].

$\mathbb{E}$ üzerinde bir vektör alanı $X$ olsun. $X^h$ ve $X^v$, sırasıyla, $X$ vektör alanının yatay ve dikey bileşenleri o.ü. $X=X^h+X^v$ şeklindedir. Buradan, $\mathfrak{X}(\mathbb{E})=\mathfrak{X}^h(\mathbb{E})\oplus\mathfrak{X}^v(\mathbb{E})$ eşitliği vardır [21].

Dikey ve yatay alt demet tanımları göz önünde bulundurulduğunda $T\mathbb{E}=H\mathbb{E}\oplus V\mathbb{E}$ eşitliği vardır. $H\mathbb{E}$ ve $V\mathbb{E}$ ye karşılık gelen projeksiyonlar, sırasıyla, $h$ ve $v$ o.ü., $h:T\mathbb{E}\to H\mathbb{E}$ ve $v:T\mathbb{E}\to V\mathbb{E}$ dönüşümleri için

$$h^2=h,\quad v^2=v,\quad v\circ h=h\circ v=0,\quad v+h=I,$$

$$\text{çek } h=V\mathbb{E} \quad \text{ve} \quad \text{çek } v=H\mathbb{E}$$

bağıntıları vardır. Burada, $I$ birim afinor alanıdır [22].

$h - v = P$ eşitliği ile tanımlanan $P$ bir afinor alanı, $\mathbb{E}$ üzerinde bir hemen hemen çarpım yapısıdır. Bu durumda, $(\mathbb{E}, P)$ ikilisi bir hemen hemen çarpım manifoldu olarak isimlendirilir [22].

## 2.4. Manifoldlar Üzerinde Dağılımlar

2.4.1. Tanım

$M^r$, $r = k + l$ boyutlu bir düzgün manifold olsun. $M^r$ manifoldu üzerinde $k$ boyutlu diferensiyellenebilir bir dağılım, $TM^r$ tanjant demetinin rankı $k$ olan bir $D$ alt vektör demetidir [23].

$M^r$ düzgün manifoldu üzerindeki $k$-boyutlu diferensiyellenebilir bir dağılım göz önüne alınsın. Bu dağılım;

$M^r$ manifoldunun her $x$ noktası için $T_xM^r$ tanjant uzayında $k$-boyutlu bir $\triangle_x$ alt vektör uzayını karşılık getirir.

$$\begin{aligned} \triangle \ : \ M^r &\longrightarrow \bigcup_{x \in M^r} T_xM^r \\ x &\longrightarrow \triangle_x \subset T_xM^r \end{aligned}$$

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $M^r$ üzerinde bir $D$ dağılımını ve $M^r$ nin bir açık $V$ alt kümesi üzerinde tanımlı bir $X$ vektör alanını alalım. $V$ kümesinin her bir $p$ noktası için $X_\mathfrak{p}$ tanjant vektörü $\triangle_\mathfrak{p}$ uzayının bir elemanı ise $X$ vektör alanı $D$ dağılımına aittir olarak adlandırılır. Bu durum $X \in \Gamma(D)$ veya $X \in D$ olarak gösterilir [22].

2.4.2. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $D_n$ ve $D_t$, $M^r$ manifoldu üzerinde iki tümleyen dağılım, yani, $\forall x \in M^r$ için $T_xM^r = D_{nx} \oplus D_{tx}$ ve dolayısıyla $TM^r = D_n \oplus D_t$ dir [24].

$D_n$ ve $D_t$ dağılımlarına sırasıyla karşılık gelen $n$ ve $t$ projeksiyonları $M^r$ üzerinde afinor alanıdır. $n$ ve $t$ afinor alanları için

$$n^2 = n, \quad t^2 = t, \quad nt = tn = 0, \quad n + t = I_{TM^r}$$

eşitlikleri sağlanır [24].

2.4.3. Tanım

Düzgün bir manifold $M^r$ ve $M^r$ üzerinde bir lineer konneksiyon $\nabla$ olsun. $M^r$ üzerinde bir dağılım $D$ o.ü. $X_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ ve $Y_1 \in \Gamma(D)$ için, $\nabla_{X_1} Y_1 \in \Gamma(D)$ ise $D$ dağılımına $\nabla$ lineer konneksiyonuna göre paraleldir denir [3].

2.4.4. Tanım

Bir $M^r$ manifoldu üzerinde hemen hemen çarpım yapısı olan $P$ tensörünün, aynı manifold üzerinde bir lineer konneksiyon olan $\nabla$ ya göre kovaryant türevi sıfır, yani $\forall X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ için

$$(\nabla_{X_1} P) Y_1 = \nabla_{X_1} P Y_1 - P \nabla_{X_1} Y_1 = 0$$

ise $P$ hemen hemen çarpım yapısına $\nabla$ ya göre paraleldir denir [22].

2.4.5. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold ve $D_n$ de bu manifold üzerinde bir dağılım olsun. $M^r$ üzerinde bir $\nabla$ lineer konneksiyonu, $X_1 \in D_n$ ve $Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ için $(\Delta\varphi)(X_1, Y_1) \in D_n$ olacak şekilde

$$(\Delta\varphi)(X_1, Y_1) = \varphi(\nabla_{X_1} Y_1) - \varphi(\nabla_{Y_1} X_1) - \nabla\varphi_{X_1} Y_1 + \nabla_{Y_1} \varphi X_1 \tag{2.1}$$

varsa, $D_n$ dağılımına $\nabla$ ya göre yarı paralel denir. [25].

2.4.6. Tanım

$M^r$ bir düzgün manifold olsun. $TM^r = D_n \oplus D_t$ olacak şekilde $D_n$ ve $D_t$ distribüsyonlarının mevcut olduğunu varsayalım. Eğer her $X_1 \in \Gamma(TM^r)$ ve $Y_1 \in \Gamma(D_n)$ için $(\Delta\varphi)(X_1, Y_1) \in \Gamma(D_n)$ ise $D_n$ distribüsyonuna $\nabla$ lineer konneksiyonuna göre anti-yarı paralel denir [25].

Benzer şekilde $D_t$ dağılımının yarı paralelliği ve anti-yarı parallelliği tanımlanabilir.

2.4.7. Tanım

$M^r$ bir hemen hemen çarpım manifoldu ve $\nabla$, $M^r$ üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. $\forall X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ için Schouten konneksiyonu

$$\nabla^{Sc}_{X_1} Y_1 = n(\nabla_{X_1} nY_1) + t(\nabla_{X_1} tY_1) \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlı $\nabla^{Sc}$ uyarlanmış lineer konneksiyon ve Vrănceanu konneksiyonu

$$\nabla^{Vr}_{X_1} Y_1 = n(\nabla_{nX_1} nY_1) + t(\nabla_{tX_1} tY_1) + n[tX_1, nY_1] + t[nX_1, tY_1] \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlı $\nabla^{Vr}$ uyarlanmış lineer konneksiyondur [22].

# 3. HEMEN HEMEN BRONZ YAPI

Bu bölümde, düzgün bir $M^r$ manifoldu üzerinde yeni bir yapı tanımlayacağız.

## 3.1. Bronz Oran

$\left(f_{a,b}\right)$ bronz Fibonacci sayıları ve $\left(l_{a,b}\right)$ bronz Lucas sayıları, sırasıyla,

$$f_{a,b+2} = af_{a,b+1} - f_{a,b} \quad ; \quad f_{a,0} = 0 \quad f_{a,1} = 1, \tag{3.1}$$

$$l_{a,b+2} = al_{a,b+1} - l_{a,b} \quad ; \quad l_{a,0} = 2 \quad , \; l_{a,1} = a \tag{3.2}$$

reküransları ile tanımlanan bir dizisi ailesi olarak verilmiştir [7].

[1, 5, 8] numaralı kaynaklarda sunulan bronz orandan farklı olarak, yeni bir bronz oran aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\rho_m = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}. \tag{3.3}$$

Bu,

$$x^2 - mx + 1 = 0. \tag{3.4}$$

denklemin bir kökü olarak elde edilir.

Kısacası, bu ortalama bronz ortalama olarak ifade edilir. Bronz Fibonacci sayıları ve bronz Lucas sayıları aşağıdaki ilişkiye sahiptir:

$$\begin{aligned} l_{a,b} &= f_{a,b+1} - f_{a,b-1} = 2f_{a,b+1} - mf_{a,b}, \\ \left(m^2 - 4\right) f_{a,b} &= l_{a,b+1} - l_{a,b-1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Bronz ortalamaların devam eden kesirleri şu şekilde tanımlanır: $\{a-1\ ;\ 1,\ a-2\}$, yineleme ilişkisi ise şu şekilde tanımlanır:

$$\rho_m^{k+2} = m\rho_m^{k+1} - \rho_m^k. \tag{3.6}$$

Diğer bir ilişkide aşağıdaki gibidir:

$$\rho_m^k = \frac{l_{a,b} + f_{a,b}\sqrt{m^2-4}}{2}. \tag{3.7}$$

## 3.2. Manifoldlar Üzerinde Hemen Hemen Bronz Yapılar

3.2.1. Tanım

$M^r$ düzgün bir manifold, $m \in \mathbb{R} \setminus [-2,2]$ ve $I_d$ birim afinor alanı olmak üzere

$$\varphi^2 = m\varphi - I_d \tag{3.8}$$

eşitliğini sağlayan $M^r$ üzerinde $\varphi$ afinor alanına $M^r$ üzerinde bir yeni hemen hemen bronz yapı denir.

*Not*

Çalışmanın tamamında aksi belirtilmediği sürece $m \in \mathbb{R} \setminus [-2,2]$ olarak alınacaktır.

Burada, $\varphi$ nin $M^r$ manifoldu üzerinde yeni bir hemen hemen bronz yapı olduğu söylenebilir.

3.2.2. Önerme

Herhangi $k$ tamsayısı için $M^r$ manifoldu üzerinde hemen hemen bronz yapının kuvveti aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\varphi^k = f_{a,b}\varphi - f_{a,b-1}I_d \ \ , \ \ \varphi^k = \frac{l_{a,b+1} - l_{a,b-1}}{m^2-4}\varphi - \frac{l_{a,b} - l_{a,b-2}}{m^2-4}I_d, \tag{3.9}$$

burada $\left(f_{a,b}\right)$ bronz Fibonacci sayılarını ve $\left(l_{a,b}\right)$ bronz Lucas sayılarını temsil etmektedir.

$\rho_m$ bronz oran olsun. Bronz Fibonacci dizi ve bronz Lucas dizinin Binet formülleri, sırasıyla, aşağıdaki gibi tanımlanır [7] :

$$f_{a,b} = \frac{\rho_m^k - (m-\rho_m)^k}{\sqrt{m^2-4}} \quad , \quad l_{a,b} = \rho_m^k - (m-\rho_m)^k . \tag{3.10}$$

Eş 3.9 ve Eş 3.10 dikkate alındığında aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\varphi^k = \frac{\rho_m^k - (m-\rho_m)^k}{\sqrt{m^2-4}}\varphi + \frac{\rho_m^{k-1} - (m-\rho_m)^{k-1}}{\sqrt{m^2-4}} I_d,$$

$$\begin{aligned}\varphi^k = & \frac{\rho_m^{k+1} - \rho_m^{k-1} + (m-\rho_m)^{k+1} - (m-\rho_m)^{k-1}}{m^2-4}\varphi \\ & - \frac{\rho_m^k - \rho_m^{k-2} + (m-\rho_m)^k - (m-\rho_m)^{k-2}}{m^2-4} I_d .\end{aligned} \tag{3.11}$$

Basit bir hesaplama ile aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

3.2.3. Önerme

$\varphi$ hemen hemen bronz yapının aşağıdaki özellikleri vardır.

(i) $\varphi$ hemen hemen bronz yapının öz değerleri $\rho_m = \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$ ve $\bar{\rho}_m = m - \rho_m = \frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}$ dir.
(ii) $\forall p \in M^r$ için, $\varphi$, $M^r$ manifoldunun $T_p M^r$ tanjant uzayı üzerinde bir izomorfizmdir.
(iii) $\varphi$ tersinir bir yapıdır (bu tersi $\hat{\varphi} = mI_d - \varphi$ ile gösterirsek) $\hat{\varphi}$, $M^r$ manifoldu üzerinde hemen hemen bronz yapıdır.

*İspat*

i) $\varphi : \mathfrak{X}(M^r) \longrightarrow \mathfrak{X}(M^r)$ lineer dönüşüm, $\varphi$ nin öz değeri $\rho_m$ olsun. Bu durumda $\forall X_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ için $\varphi(X_1) = \rho_m(X_1)$ dir. $\varphi$ hemen hemen bronz yapı olduğundan $\varphi^2 = m\varphi - I_d$

eşitliğini sağlar. Buradan,

$$\begin{aligned}\varphi^2(X_1) = m\varphi(X_1) - I_d(X_1) &\Rightarrow \varphi(\varphi(X_1)) = m\rho_m(X_1) - X_1 \\ &\Rightarrow \varphi(\rho_m(X_1)) = m\rho_m X_1 - X_1 \\ &\Rightarrow \rho_m^2 X_1 = m\rho_m X_1 - X_1 \\ &\Rightarrow \rho_m^2 X_1 = (m\rho_m - 1)X_1\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik $\forall X_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ için doğru olduğundan $\rho_m^2 = m\rho_m - 1$ eşitliğini elde ederiz. Bu denklemin kökleri $\rho_1 = \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$ ve $\rho_2 = \frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2}$dir.

O halde $\varphi$ hemen hemen bronz yapısının öz değerleri $\rho_m$, $m - \rho_m$ dir.

ii) $\varphi \in \Im_1^1(M^r)$ olduğundan $\varphi : \mathfrak{X}(M^r) \longrightarrow \mathfrak{X}(M^r)$ bir lineer dönüşümdür. $\varphi$ nin birebir ve lineer olduğunu göstermek ispat için yeterlidir.

çek$\varphi = \{X_1 \in \mathfrak{X}(M^r) : \varphi(X_1) = 0\}$ tanımından

$$\begin{aligned}\varphi^2 = m\varphi - I_d &\Rightarrow \varphi^2(X_1) = m\varphi(X_1) - I_d(X_1) \\ &\Rightarrow \varphi\left(\underbrace{\varphi(X_1)}_{0}\right) = m\varphi(X_1) - I_d(X_1) \\ &\Rightarrow \varphi(0) = X_1 \\ &\Rightarrow 0 = X_1 \\ &\Rightarrow \text{çek}\varphi = \{0\}\end{aligned}$$

ve dolayısıyla boy(çek$\varphi$) $= 0$ olur. O halde $\varphi$ birebirdir.

$$\begin{aligned}boy(\mathfrak{X}(M^r)) &= rank\varphi + boy(\text{çek}\varphi) \\ &= rank\varphi + 0 \\ &= rank\varphi\end{aligned}$$

olduğundan $\varphi$ örtendir.

Dolayısıyla $\varphi$, $M$ üzerinde bir izomorfizmdir.

iii) $\varphi$, izomorfizm olduğundan tersi vardır.

$$\begin{aligned}
\varphi^2\varphi^{-1} = m\left(\varphi\varphi^{-1}\right) - I_d\varphi^{-1} &\Rightarrow \varphi\left(\varphi\varphi^{-1}\right) = mI_d - \varphi^{-1} \\
&\Rightarrow \varphi I_d = mI_d - \varphi^{-1} \\
&\Rightarrow \varphi = mI_d - \varphi^{-1} \\
&\Rightarrow \varphi^{-1} = mI_d - \varphi \ ; \qquad \left(\varphi^{-1} \text{ ile bileşke alınırsa}\right) \\
&\Rightarrow \varphi^{-1}\varphi^{-1} = m\left(I_d\varphi^{-1}\right) - \left(\varphi\varphi^{-1}\right) \\
&\Rightarrow \left(\varphi^{-1}\right)^2 = m\varphi^{-1} - I_d \ ; \qquad \left(\varphi^{-1} = \hat{\varphi} \text{ alınırsa}\right) \\
&\Rightarrow (\hat{\varphi})^2 = m\hat{\varphi} - I_d \\
&\Rightarrow \hat{\varphi}^2 - m\hat{\varphi} - I_d = 0
\end{aligned}$$

olup $\hat{\varphi}$ bir hemen hemen bronz yapıdır.

$M^r$ manifoldu üzerinde bir polinomial yapı genelleştirilmiş hemen hemen çarpım yapı içerir. $M^r$ manifoldu üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı ile hemen hemen bronz yapı arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teorem ile verelim.

3.2.4. Teorem

i) Eğer $\varphi$, $M^r$ üzerinde bir hemen hemen bronz yapı ise bu durumda $P_\varphi$, $M^r$ üzerinde hemen hemen çarpım yapıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$P_\varphi = \frac{1}{\sqrt{m^2-4}}\left(2\varphi - mI_d\right). \tag{3.12}$$

$(ii)$ Eğer $P$, $M^r$ üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı ise bu durumda $\varphi_P$, $M^r$ üzerinde bir hemen hemen bronz yapıdır ve bu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\varphi_P = \frac{1}{2}\left(mI_d + \sqrt{m^2-4}P\right). \tag{3.13}$$

$\varphi_P$, $P$ tarafından üretilen bir hemen hemen bronz yapı olarak adlandırılır.

*İspat*

i) $\varphi$, $M^r$ manifoldu üzerinde bir hemen hemen bronz yapı olsun. Bu durumda Eş. 3.12 eşitliğinden

$$\begin{aligned} P_\varphi^2 &= \frac{4\varphi^2 - 4m\varphi + m^2 I_d}{m^2-4} \\ &= \frac{4\left(\varphi^2 - m\varphi\right) + m^2 I_d}{m^2-4} = \frac{\left(m^2-4\right) I_d}{m^2-4} \\ &= I_d \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $P$, $M^r$ manifoldu üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı olsun. Bu durumda Eş. 3.13 eşitliğinden

$$\begin{aligned} \varphi_P^2 &= \frac{m^2 I_d + 2m\sqrt{m^2-4}P + \left(m^2-4\right) I_d}{4} \\ &= \frac{\left(m^2-2\right) I_d + m\sqrt{m^2-4}P}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(m^2-2\right) I_d + m\left(2\varphi_P - mI_d\right)\right) \\ &= m\varphi_P - I_d \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.12 ve Eş. 3.13 eşitliklerinden $\varphi_{P_\varphi} = \varphi$ ve $P_{\varphi_P} = P$ olduğu açıktır.

Teorem 3.2.4. dikkate alınırsa aşağıdaki tanımları verebiliriz.

(I) $(M^r, T)$ bir hemen hemen tanjant manifold olsun. $T$ tarafından üretilen $\varphi_T$ tensör alanı, aşağıdaki denklemle tanımlanabilir ve $M^r$ manifoldu üzerinde hemen hemen tanjant bronz yapı olarak adlandırılır,

$$\varphi_T = \tfrac{1}{2}\left(mI_d + \sqrt{m^2-4}T\right) \quad , \quad m \in \mathbb{R} \setminus [-2,2] \ \cdot$$

$\varphi_T$ tanjant bronz yapısı, $\varphi_T^2 - m\varphi_T + \frac{m^2}{4} I_d = 0$ denklemini sağlar. Reel sayılarda bu denklem,

$$x^2 - mx + \frac{m^2}{4} = 0$$

şeklindedir ve bu denklemin kökü olan tanjant bronz oran $\rho_m^t = \frac{m}{2}$ olarak elde edilir.

(II) $J$, $M^r$ manifoldu üzerinde hemen hemen kompleks yapı olsun. $J$ tarafından üretilen $\varphi_J$ tensör alanı, aşağıdaki denklemle tanımlanabilir ve $M^r$ manifoldu üzerinde hemen hemen kompleks bronz yapı olarak adlandırılır,

$$\varphi_J = \frac{1}{2}\left(mI_d + \sqrt{m^2-4}J\right) \ , \ m \in \mathbb{R} \setminus [-2,2]\,. \tag{3.14}$$

$\varphi_J$ kompleks yapı,

$$\varphi_J^2 - m\varphi_J + \frac{m^2-2}{2} I_d = 0 \tag{3.15}$$

denklemini sağlar.
$M^r = \mathbb{R}^2$ için elde edilen denklem, $x^2 - mx + \frac{m^2-2}{2} = 0$ ve bu denklemin kökleri,

$$x_1 = \frac{m}{2} + \frac{\sqrt{m^2-4}}{2} i \ , \ x_2 = \frac{m}{2} - \frac{\sqrt{m^2-4}}{2} i$$

şeklindedir.

3.2.5. Tanım

Eş. 3.15 ifadesindeki denklemin pozitif kökü olan

$$\rho_m^c = \frac{m + \sqrt{m^2-4}i}{2}$$

kompleks sayısına, kompleks bronz oran denir.

Eş. 3.14 ifadesinde $-2 < m < 2$ alınırsa, [2] numaralı kaynakta tanımlanan

$$\varphi_J^2 - m\varphi_J + I_d = 0$$

hemen hemen poly-Norden yapı elde edilir.

# 4. HEMEN HEMEN BRONZ YAPILARA ÖRNEKLER

Bu bölümde bazı hemen hemen bronz yapı örnekleri sunulacaktır.

## 4.1. Clifford Cebirinde Hemen Hemen Bronz Yapılar

$\mathbb{R}^n$ de herhangi $x$ ve $y$ vektörü için Clifford çarpımı $xy$ ile gösterilir ve $xy = \langle x,y\rangle + x\wedge y$ olarak tanımlanır. $\mathbb{R}^n$ nin Clifford cebiri $Cl_n$ şeklinde gösterilir. $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ için $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ ve $x\wedge y = -y\wedge x$ olduğundan

$$yx = \langle x,y\rangle + y\wedge x = \langle x,y\rangle - x\wedge y$$

eşitliği elde edilir.

$$xy = \langle x,y\rangle + x\wedge y,$$

$$yx = \langle y,x\rangle + y\wedge x = \langle x,y\rangle - x\wedge y$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$xy + yx = 2\langle x,y\rangle$$

bulunur. $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının bir ortanormal bazı $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ olsun. Bu durumda,

$$e_ie_j = \langle e_i,e_j\rangle + e_ie_j = e_i\wedge e_j,$$

$$e_je_i = \langle e_j,e_i\rangle + e_j\wedge e_i = e_j\wedge e_i = -e_i\wedge e_j = -e_ie_j,$$

$$e_ie_i = \langle e_i,e_i\rangle + e_i\wedge e_i = 1$$

eşitlikleri vardır. Dolayısıyla Clifford çarpımına göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının standart bazı,

$$\begin{cases} e_i^2 = e_ie_i = 1 \quad , \quad i = j \\ e_ie_j + e_je_i = 0 \quad , \quad i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

bağlantılarını sağlar.

$\varphi_{e_i} = \frac{1}{2}\left(m + \sqrt{m^2-4}e_i\right)$ olarak alırsak

$$\begin{aligned}\varphi_{e_i}^2 &= \frac{1}{4}\left[\left(m+\sqrt{m^2-4}e_i\right)\left(m+\sqrt{m^2-4}e_i\right)\right] \\ &= \frac{m^2}{4} + \frac{m}{2}\sqrt{m^2-4}e_i + \frac{m^2}{4} \\ &= m\left[\frac{1}{2}\left[m+\sqrt{m^2-4}e_i\right]\right] - 1\end{aligned}$$

eşitliğinden $\varphi_{e_i}^2 = m\varphi_{e_i} - 1$ elde edilir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}\varphi_{e_i}\varphi_{e_j} &= \left(\frac{1}{2}\left(m+\sqrt{m^2-4}e_i\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(m+\sqrt{m^2-4}e_j\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left[m^2 + m\sqrt{m^2-4}e_j + m\sqrt{m^2-4}e_i + \left(m^2-4\right)e_ie_j\right], \qquad (4.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{e_j}\varphi_{e_i} &= \left(\frac{1}{2}\left(m+\sqrt{m^2-4}e_j\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(m+\sqrt{m^2-4}e_i\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left[m^2 + m\sqrt{m^2-4}e_i + m\sqrt{m^2-4}e_j + \left(m^2-4\right)e_je_i\right] \qquad (4.3)\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 4.2 ve Eş. 4.3 toplanırsa,

$$\begin{aligned}\varphi_{e_i}\varphi_{e_j} + \varphi_{e_j}\varphi_{e_i} &= \frac{1}{4}\left[m^2 + m\sqrt{m^2-4}e_j + m\sqrt{m^2-4}e_i + \left(m^2-4\right)e_ie_j\right] \\ &\quad + \frac{1}{4}\left[m^2 + m\sqrt{m^2-4}e_i + m\sqrt{m^2-4}e_j + \left(m^2-4\right)e_je_i\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[2m^2 + 2m\sqrt{m^2-4}e_i + 2m\sqrt{m^2-4}e_j + \left(m^2-4\right)\left[e_ie_j + e_je_i\right]\right] \\ &= \frac{m^2}{2} + m\sqrt{m^2-4}e_i + m\sqrt{m^2-4}e_j \\ &= \frac{m^2}{2} + m\sqrt{m^2-4}e_i + m\sqrt{m^2-4}e_j + \left(m^2-m^2\right) \\ &= m\left(\frac{m}{2}I + \sqrt{m^2-4}e_i + \frac{m}{2}I + \sqrt{m^2-4}e_j\right) - \frac{m^2}{2} \\ &= m\left(\varphi_{e_i} + \varphi_{e_j}\right) - \frac{m^2}{2}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Bu sebeple,

$$\varphi_{e_i} = \frac{1}{2}\left(m + \sqrt{m^2-4}e_i\right)$$

eşitliği ve Eş. 4.1 eşitliği ile Clifford cebirinin yeni bir gösterimini aşağıdaki gibi elde edebiliriz;

$$\begin{cases} \varphi_{e_i} \text{ hemen hemen bronz yapı} & ; \quad i = j \\ \varphi_{e_i}\varphi_{e_j} + \varphi_{e_j}\varphi_{e_i} = m\left(\varphi_{e_i} + \varphi_{e_j}\right) - \frac{m^2}{2} & ; \quad i \neq j \end{cases}.$$

[26] numaralı kaynakta, $Cl_2$ vektör uzayında ortanormal vektörler $e_1$ ve $e_2$,

$$1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \ , \ e_1 \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ e_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ e_1e_2 \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisleri ile ifade edilmektedir. Yukarıda elde ettiğimiz $\varphi_{e_i}$ ele alındığında;

$$\begin{aligned} \varphi_{e_1} &= \frac{1}{2}\left(mI_2 + \sqrt{m^2-4}e_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m-\sqrt{m^2-4}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi_{e_2} &= \frac{1}{2}\left(mI_2 + \sqrt{m^2-4}e_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} m & \sqrt{m^2-4} \\ \sqrt{m^2-4} & m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi_{e_1} &= \frac{1}{2}\left(mI_2 + \sqrt{m^2-4}e_1\right) \\ &= \begin{pmatrix} \rho_m & 0 \\ 0 & m-\rho_m \end{pmatrix}, \\ \varphi_{e_2} &= \frac{1}{2}\left(mI_2 + \sqrt{m^2-4}e_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} m & 2\rho_m - m \\ 2\rho_m - m & m \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitliklerini elde ederiz.

### 4.2. Kuaterniyon Cebirinde Hemen Hemen Bronz Yapılar

$H$ bir kuaterniyon cebiri olsun. $H$ cebirinin bazı $\{1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ olmak üzere bu baz,

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1,$$

$$\boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{jk} = \boldsymbol{k},\ \ \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$$

denklemlerini sağlar. Herhangi bir kuaterniyon $q = S_q + \vec{V}_q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ olarak yazılabilir. $S_q = q_0$ ve $\vec{V}_q = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ sırasıyla, $q$ kuaterniyonunun skalar kısmı ve vektörel kısmı olarak adlandırılır.

Bir $q$ kuaterniyonunun normu

$$N_q = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

olarak ifade edilir. $q \neq 0$ olmak üzere $q_0 = \frac{q}{N_q}$ birim kuaterniyon olarak tanımlanır. Her birim kuaterniyonu aşağıdaki

$$q_0 = \cos\alpha + \vec{S}_0 \sin\alpha$$

biçiminde ifade edebiliriz; burada $\vec{S}_0$, $\vec{S}_0^2 = \vec{S}_0\vec{S}_0 = -1$ eşitliğini karşılayan bir birim vektörü temsil eder [27].

### 4.2.1. Hemen hemen bronz kuaterniyonlar

$p = S_p + \vec{V}_p = p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k}$ ve $q = S_q + \vec{V}_q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ iki kuaterniyon olsun. Bu kuaterniyonların kuaterniyon çarpımı, $<,>$ ve $\wedge$, sırasıyla, Öklidyen iç çarpım ve vektörel çarpım olmak üzere

$$pq = S_pS_q - \left\langle \vec{V}_p, \vec{V}_q \right\rangle + S_q\vec{V}_p + S_p\vec{V}_q + \vec{V}_p \wedge \vec{V}_q$$

şeklinde tanımlıdır [28].

4.2.1. Tanım

$\varphi$ bir kuaterniyon olsun.

$$\varphi^2 = m\varphi - 1$$

denklemini sağlayan $\varphi$ kuaterniyonuna hemen hemen bronz kuaterniyon denir.

$\varphi = S_\varphi + \vec{V}_\varphi$ alındığında, $\varphi^2 = S_\varphi^2 - \left\langle \vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi \right\rangle + 2S_\varphi\vec{V}_\varphi$ elde edilir.

$$S_\varphi^2 - \left\langle \vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi \right\rangle + 2S_\varphi\vec{V}_\varphi - mS_\varphi - m\vec{V}_\varphi = -1 \tag{4.5}$$

eşitliğinden

$$\begin{cases} S_\varphi^2 - \left\langle \vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi \right\rangle - mS_\varphi = -1, \\ 2S_\varphi\vec{V}_\varphi - m\vec{V}_\varphi = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

bulunur. Buradan, $S_\varphi = \frac{m}{2}$ veya $\vec{V}_\varphi = 0$ elde edilir. Bu durumda

$$\text{i) } \vec{V}_\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{m \mp \sqrt{m^2-4}}{4}, \tag{4.7}$$

ii) $\vec{V}_\varphi \neq 0 \Rightarrow S_\varphi = \dfrac{m}{2}$

olur.

$S_\varphi = \frac{m}{2}$ alınırsa

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 - \left\langle \vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi \right\rangle - m\left(\frac{m}{2}\right) = -1 \Rightarrow \left\langle \vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi \right\rangle = \frac{m^2 - 2m^2 + 4}{4}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\left\langle \vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi \right\rangle = \frac{4 - m^2}{4} \tag{4.8}$$

elde edilir.

Buradan hareketle $m \in \mathbb{R}^2 \setminus [-2,2]$ ise bronz kuaterniyonun yok olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca bronz dual kuaterniyon yoktur.

Ancak $m \in (-2,2)$ ise $S_\varphi = \frac{m}{2}$, $\left\langle \vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi \right\rangle = \frac{4-m^2}{4}$, $\varphi = z_0 + z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3$ dir. Buradan

$$z_0 = \frac{m}{2}, \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \frac{m^2 - 4}{4} \tag{4.9}$$

ve

$$N_\varphi = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{4 - m^2}{4} = 1 \tag{4.10}$$

elde edilir. o halde $\varphi$ birim kuaterniyondur.

$\varphi = z_o + z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3$

için

$$\cos\theta = \frac{Z_0}{\sqrt{N_\varphi}} = \frac{m}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}{\sqrt{N_\varphi}} = \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}$$

ve

$$\vec{S}_0 = \frac{z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}} \tag{4.11}$$

olmak üzere

$$\varphi = \cos\theta + \vec{S}_0 \sin\theta \tag{4.12}$$

elde edilir.

Eş. 4.9, Eş. 4.10, Eş. 4.11 ve Eş. 4.12 eşitliklerine dayanarak,

$$\varphi = \frac{m}{2} + \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}\vec{S}_0 \ , \quad \left\langle \vec{S}_0, \vec{S}_0 \right\rangle = 1 \ , \quad \vec{S}_0^2 = -1$$

polly norden kuaterniyon vardır diyebiliriz. Benzer şekilde polly norden dual kuaterniyon olduğu da söylenebilir.

### 4.2.2. Hemen hemen bronz hiperbolik kuaterniyonlar

$\varphi = z_0 + z_1\boldsymbol{i} + z_2\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k} \quad z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,$\varphi = S_\varphi + \vec{V}_\varphi$ aldığında, $\varphi^2 = S_\varphi^2 + \left\langle \vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi \right\rangle + 2S_\varphi\vec{V}_\varphi + \underbrace{V_\varphi \wedge V_\varphi}_{0}$ elde edilir Buradan

$$S_\varphi^2 + \left\langle \vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi \right\rangle + 2S_\varphi\vec{V}_\varphi - m\left(S_\varphi + \vec{V}_\varphi\right) = -1 \implies \begin{cases} S_\varphi^2 + \left\langle \vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi \right\rangle - mS_\varphi = -1, \\ 2S_\varphi\vec{V}_\varphi - m\vec{V}_\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \vec{V}_\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{m \mp \sqrt{m^2-4}}{2}, \\ \vec{V}_\varphi \neq 0 \Rightarrow S_\varphi = \frac{m}{2} \text{ ve } \left\langle \vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi \right\rangle = \frac{m^2-4}{4} \end{cases}$$

bulunur. Buradan hareketle $z_0 = \frac{m}{2} \quad , \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \frac{m^2-4}{4}$ olmak üzere

$$N_\varphi = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + \frac{m^2-4}{4} = \frac{2m^2-4}{4}$$

elde edilir.

$$\varphi_0 = \frac{\varphi}{\sqrt{N_\varphi}} = \frac{z_0 + z_1\boldsymbol{i} + z_2\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{N_\varphi}} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{m}{\sqrt{2m^2-4}} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{m^2-4}}{\sqrt{2m^2-4}}$$

ve

$$\vec{S}_0 = \frac{z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}$$

olmak üzere

$$\varphi_0 = \cos\theta + \vec{S}_0 \sin\theta \Rightarrow \varphi_0 = \frac{m}{\sqrt{2m^2-4}} + \vec{S}_0 \frac{\sqrt{m^2-4}}{\sqrt{2m^2-4}}$$

$$\Rightarrow \varphi_0 = \sqrt{\frac{2m^2-4}{4}} \left( \frac{m}{\sqrt{2m^2-4}} + \vec{S}_0 \frac{\sqrt{m^2-4}}{\sqrt{2m^2-4}} \right)$$

eşitliğinden

$$\varphi_{hq} = \frac{m}{2} + \frac{\sqrt{m^2-4}}{2}\vec{S}_0 \ , \ \left\langle \vec{S}_0, \vec{S}_0 \right\rangle = 1 \ , \ \vec{S}_0^2 = -1$$

elde edilir. Böylece hemen hemen bronz hiperbolik kuaterniyon yapının var olduğunu söyleyebiliriz.

### 4.2.3. Hemen hemen bronz bikuaterniyonlar

$\varphi$ hemen hemen bronz kuaterniyon olsun. Eş. 4.7 ve Eş 4.8 dikkate alındığında

$$S_\varphi = \tfrac{m}{2} \quad , \quad \left\langle \vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi \right\rangle = \tfrac{4-m^2}{4}$$

şeklindedir. $z_i \in \mathbb{C}, i = 0,1,2,3$ olmak üzere

$$\varphi = z_0 + z_1\boldsymbol{i} + z_2\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}$$

biçimindedir. Burada

$$z_0 = \frac{m}{2} \quad , \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \frac{4-m^2}{4} \tag{4.13}$$

dir. Dolayısıyla

$$N_\varphi = \sqrt{z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2} = 1 \tag{4.14}$$

bulunur. $N_\varphi \neq 0$ olmak üzere

$$\varphi_0 = \frac{\varphi}{\sqrt{N_\varphi}} = \frac{z_0 + z_1\boldsymbol{i} + z_2\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{N_\varphi}}$$

biçimindedir.

$$\cos\theta = \frac{Z_0}{\sqrt{N_\varphi}} = \frac{m}{2}\ ,\ \sin\theta = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}}{\sqrt{N_\varphi}} = \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}\ ,\ \vec{S}_0 = \frac{z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}}$$

olmak üzere

$$\varphi_{bq} = \frac{m}{2} + \frac{\sqrt{m^2-4}i}{2}\vec{S}_0\ ,\ \left\langle \vec{S}_0, \vec{S}_0 \right\rangle = 1\ ,\ \vec{S}_0^2 = -1.$$

elde edilir ve $\varphi_{bq}$ hemen hemen bronz bikuaterniyon yapı olarak tanımlanabilir.

### 4.2.4. Hemen hemen bronz split kuaterniyonlar

$\varphi$, $\varphi^2 = m\varphi - 1$ denklemini sağlayan split kuaterniyon olsun. $\varphi = S_\varphi + \vec{V}_\varphi$ ve $g$, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski 3-uzayında Lorentz iç çarpım olmak üzere

$$\varphi^2 = S_\varphi^2 + g\left(\vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi\right) + 2S_\varphi\vec{V}_\varphi$$

dir.

$$\varphi^2 - m\varphi = -1 \Rightarrow S_\varphi^2 + g\left(\vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi\right) + 2S_\varphi\vec{V}_\varphi - mS_\varphi - m\vec{V}_\varphi = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_\varphi^2 + g\left(\vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi\right) - mS_\varphi = -1, \\ 2S_\varphi\vec{V}_\varphi - m\vec{V}_\varphi = 0 \end{cases}$$

buradan $S_\varphi = \frac{m}{2}$ veya $\vec{V}_\varphi = 0$ bulunur.

i) $\vec{V}_\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{m \mp \sqrt{m^2-4}}{4}$,
ii) $\vec{V}_\varphi \neq 0 \Rightarrow S_\varphi = \frac{m}{2}$ ve $g\left(\vec{V}_\varphi, \vec{V}_\varphi\right) = \frac{m^2-4}{4}$.

$q_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2,3$ olmak üzere $\varphi = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ split kuaterniyon olsun.

$q_0 = \frac{m}{2}$ ve $-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \frac{m^2-4}{4}$ elde edilir. Böylece $I_\varphi = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = 1$ dir. Dolayısıyla, $\varphi$ hemen hemen bronz split kuaterniyon spacelike kuaterniyondur.

$\sinh\theta = \frac{\sqrt{-q_1^2+q_2^2+q_3^2}}{N_\varphi}$ , $\cosh\theta = \frac{q_0}{N_\varphi}$ ve $\vec{S}_0 = \frac{q_1e_1+q_2e_2+q_3e_3}{\sqrt{-q_1^2+q_2^2+q_3^2}}$ $\mathbb{E}_1^3$ uzayında spacelike birim kuaterniyon olmak üzere

$\varphi = N_\varphi\left(\cosh\theta + \vec{S}_0\sinh\theta\right)$ şeklinde yazılabilir. Buradan

$$\varphi_{sq} = \frac{m}{2} + \vec{S}_0\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}\ ,\ g\left(\vec{S}_0, \vec{S}_0\right) = 1\ ,\ \vec{S}_0^2 = 1$$

elde edilir. $\varphi_{sq}$ hemen hemen bronz split kuaterniyon olarak tanımlanır.

### 4.2.5. Hemen hemen bronz dual split kuaterniyonlar

$S_\varphi = \frac{m}{2}$ , $g\left(\vec{V}_q, \vec{V}_q\right) = \frac{m^2-4}{4}$ , $Q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}$ ve $Q_j = q_j + \varepsilon q_j^*$ olmak üzere $q_0 = \frac{m}{2}$ ve $-q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \frac{m^2-4}{4}$ biçimindedir. $-q_1q_1^* + q_2q_2^* + q_3q_3^* = 0$ , $I_Q = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{4-m^2}{4} = 1$ (time like kuaterniyon)

$$\cosh\theta = \frac{Z_0}{\sqrt{N_\varphi}} = \frac{m}{2}\quad,\quad \sinh\theta = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}}{\sqrt{N_\varphi}} = \frac{\sqrt{m^2-4}}{2}\quad,\quad \vec{S}_0 = \frac{z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2+z_3^2}}$$

olmak üzere

$$\varphi_{dsq} = \frac{m}{2} + \frac{\sqrt{m^2-4}}{2}\vec{S}_0\ ,\quad g(\vec{S}_0, \vec{S}_0) = 1\ ,\ \vec{S}_0^2 = 1$$

elde edilir. $\varphi_{dsq}$ hemen hemen bronz dual split kuaterniyon olarak tanımlanır.

### 4.2.6. Hemen hemen bronz hiperbolik split kuaterniyonlar

$\mathbb{E}_1^3$ uzayında spacelike birim kuaterniyon $\vec{S}_0 = \frac{q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3}{\sqrt{-q_1^2+q_2^2+q_3^2}}$ olmak üzere

$$\varphi_{hsq} = \frac{m}{2} + \frac{\sqrt{m^2-4}}{2}\vec{S}_0, \quad g\left(\vec{S}_0, \vec{S}_0\right) = 1, \quad \vec{S}_0^2 = 1$$

elde edilir. $\varphi_{hsq}$ hemen hemen bronz hiperbolik split kuaterniyon olarak adlandırılır.

## 4.3. Matrislerde Hemen Hemen Bronz Yapılar

$Mat(n,\mathbb{R})$, $n \times n$ tipinden reel matrislerinin cebiri ve $\bar{\varphi} \in Mat(n,\mathbb{R})$ olsun. Eğer $\bar{\varphi}$ aşağıda verilen denklemi sağlarsa

$$\bar{\varphi}^2 = m\bar{\varphi} - I_n \tag{4.15}$$

bu matris hemen hemen bronz matris olarak adlandırılır.

$n = 2$ için Eş. 4.15 çözüldüğünde hemen hemen bronz matris yapıların iki parametreli ailesini elde ederiz. Yani, $\bar{\varphi} \in Mat(2,\mathbb{R})$ için

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alalım.

i) $\bar{\varphi}^2 = m\bar{\varphi} - I_2$ ifadesi çözüldüğünde,

$$\bar{\varphi}^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix},$$

$$m\bar{\varphi} - I_2 = m\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ma-1 & mc \\ mb & md-1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu eşitliklerden

$$\bar{\varphi}^2 = m\bar{\varphi} - I_2 \implies \begin{cases} a^2+bc = ma-1 \\ ac+cd = mc \\ ab+bd = md \\ bc+d^2 = md-1 \end{cases}$$

elde edilir. Buradan, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ve $d \in \mathbb{R}$ için

$$\bar{\varphi}_{a,b} = \begin{pmatrix} a & \frac{-1}{b}\left(a^2-ma+1\right) \\ b & m-a \end{pmatrix} \text{ ve } \bar{\varphi}_{d,b} = \begin{pmatrix} m-d & \frac{-1}{b}\left(d^2-md+1\right) \\ b & d \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

bulunur.

ii) $a = \rho_m$ ve $b \in \mathbb{R}$ için,

$$\bar{\varphi}_{\rho_m,b} = \begin{pmatrix} \rho_m & b \\ 0 & m-\rho_m \end{pmatrix}, \varphi_{m-\rho_m,b} = \begin{pmatrix} m-\rho_m & 0 \\ b & d \end{pmatrix},$$

$$\bar{\varphi}_{\rho_m,b} = \begin{pmatrix} \rho_m & b \\ 0 & m-\rho_m \end{pmatrix}, \bar{\varphi}_{\rho_m,0} = \begin{pmatrix} m-\rho_m & 0 \\ 0 & \rho_m \end{pmatrix}$$

elde edilir.

iii) $a = \rho_m$ ve $b = 0$ için,

$$\bar{\varphi}_{\rho_m,0} = \begin{pmatrix} \rho_m & 0 \\ 0 & m-\rho_m \end{pmatrix}, \bar{\varphi}_{m-\rho_m,0} = \begin{pmatrix} m-\rho_m & 0 \\ 0 & \rho_m \end{pmatrix}.$$

Eş. 4.4 ve Eş. 4.16 ifadeleri için

$$\bar{\varphi}_1 = \lim_{b \longrightarrow 0} \bar{\varphi}_{\rho_m,b} \quad \text{ve} \quad \bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_{\frac{m}{2},\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}}$$

eşitliklerine sahibiz.

### 4.4. Üçlü Hemen Hemen Bronz Yapılar

$M^r$ düzgün manifoldu üzerinde iki afinor alanı $F$ , $P$ ve $K = P \circ F$ olsun. Eş. 3.13 ifadesinden,

$$\varphi_P = \tfrac{m}{2} I_d + \left(\tfrac{2\rho_m - m}{2}\right) P \quad , \quad \varphi_F = \tfrac{m}{2} I_d + \left(\tfrac{2\rho_m - m}{2}\right) F \quad , \quad \varphi_K = \tfrac{m}{2} I_d + \left(\tfrac{2\rho_m - m}{2}\right) K$$

elde edilir ve bunlar arasındaki bağıntı,

$$\sqrt{m^2-4}\varphi_K = 2\varphi_F\varphi_P - m\varphi_F - m\varphi_P + m\rho_m I_d$$

şeklindedir. Böylece $(\varphi_P, \varphi_F, \varphi_K)$ üçlüsü,

i) Bir hemen hemen hyperproduct yapıdır $\Leftrightarrow$ $\varphi_P$, $\varphi_F$, hemen hemen bronz yapı ve $\varphi_P\varphi_F = \varphi_F\varphi_P$ ise $\varphi_K$ hemen hemen bronz yapıdır.

ii) Bir hemen hemen biproduct complex yapıdır $\Leftrightarrow$ $\varphi_P$, $\varphi_F$ hemen hemen bronz yapı ve $\frac{2}{m^2}(\varphi_F\varphi_P + \varphi_P\varphi_F) = \frac{2}{m}(\varphi_F + \varphi_P) - I_d$ ise $\varphi_K$ kompleks hemen hemen bronz yapıdır.

iii) Bir hemen hemen product bicomplex yapıdır $\Leftrightarrow$ $\varphi_P$, $\varphi_F$ kompleks hemen hemen bronz yapı ve $\varphi_P\varphi_F = \varphi_F\varphi_P$ ise $\varphi_K$ hemen hemen bronz yapıdır.

iv) Bir hemen hemen hypercomplex yapıdır $\Leftrightarrow$ $\varphi_P$, $\varphi_F$ komplex hemen hemen bronz yapı ve $\frac{2}{m^2}(\varphi_F\varphi_P + \varphi_P\varphi_F) = \frac{2}{m}(\varphi_F + \varphi_P) - I_d$ ise $\varphi_K$ kompleks hemen hemen bronz yapıdır.

*İspat*

$\sqrt{m^2-4}\varphi_K = 2\varphi_F\varphi_P - m\varphi_F - m\varphi_P + m\rho_m I_d$ ifadesini elde edelim.

i) $\varphi_P$, $\varphi_F$ hemen hemen poly yapı ve $\varphi_P\varphi_F = \varphi_F\varphi_P$ olsun. Bu durumda $\varphi_K$ nın hemen hemen bronz yapı olduğunu gösterelim.

$$\varphi_K = \frac{(2\varphi_F\varphi_P - m(\varphi_F+\varphi_P) + m\rho_m I_d)}{\sqrt{m^2-4}} \Rightarrow \varphi_K^2 = \frac{(2\varphi_F\varphi_P - m(\varphi_F+\varphi_P) + m\rho_m I_d)^2}{m^2-4}$$

ifadesinde $\varphi_P^2 = m\varphi_P - I_d$ ve $\varphi_F^2 = m\varphi_F - I_d$ eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\varphi_K^2 = \frac{1}{m^2-4}\left\{\begin{array}{l} \left[4m\rho_m - 2m^2\right]\varphi_F\varphi_P + \left[m^3 - 2m^2\rho_m\right]\varphi_F \\ \quad + \left[m^3 - 2m^2\rho_m\right]\varphi_P + \left[4 - 2m^2 + m^2\rho_m^2\right] I_d \end{array}\right. \tag{4.17}$$

elde ederiz.

Şimdi de $m\varphi_K - I_d$ eşitliğini ele alalım.

$$\begin{aligned} m\varphi_K - I_d &= m\left\{\frac{1}{\sqrt{m^2-4}}\left[2\varphi_F\varphi_P - m\varphi_F - m\varphi_P + m\rho_m\right]\right\} - I_d \\ &= \frac{2m}{\sqrt{m^2-4}}\varphi_F\varphi_P - \frac{m^2}{\sqrt{m^2-4}}\varphi_F - \frac{m^2}{\sqrt{m^2-4}} + \frac{m\rho_m - \sqrt{m^2-4}}{\sqrt{m^2-4}} I_d \\ &= \frac{1}{m^2-4}\left\{2m\sqrt{m^2-4}\varphi_F\varphi_P - m^2\sqrt{m^2-4}\varphi_F - m^2\sqrt{m^2-4}\varphi_P \right. \\ &\quad \left. + \left(m^2 B_m\sqrt{m^2-4} - \left(m^2-4\right)\right) I_d\right\} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Eş. 4.17 ve Eş. 4.18 ifadelerinden $\varphi_K^2 = m\varphi_K - I_d$ olduğu görülür. O halde $\varphi_K$ hemen hemen bronz yapıdır.

ii) $\varphi_P$, $\varphi_F$ hemen hemen bronz yapı ve $\frac{2}{m^2}(\varphi_F\varphi_P + \varphi_P\varphi_F) = \frac{2}{m}(\varphi_F + \varphi_P) - I_d$ olsun. $\varphi_K$ nın kompleks hemen hemen bronz yapı olduğunu gösterelim. Eş. 3.15 denkleminden $\varphi_K$ nın

$\varphi_K^2 = m\varphi_K - \frac{m^2-2}{2} I_d$ eşitliğini sağladığını göstermeliyiz.

$$\varphi_K^2 = \frac{1}{m^2-4} \left\{ \begin{array}{l} 4\varphi_F\varphi_P\varphi_F\varphi_P - 2m\varphi_F\varphi_P\varphi_F - 2m\varphi_P\varphi_F\varphi_P - 2m\varphi_F\varphi_P^2 + 2m\rho_m\varphi_F\varphi_P \\ -2m\varphi_F^2\varphi_P + m^2\varphi_F^2 + m^2\varphi_F\varphi_P - m^2\rho_m\varphi_F \\ +m^2\left[m\varphi_F + m\varphi_P + \varphi_F\varphi_P - \frac{m^2}{2} I_d\right] + m^2\varphi_P^2 - m^2\rho_m\varphi_P \\ +2m\rho_m\varphi_F\varphi_P - m^2\rho_m\varphi_F - m^2\rho_m\varphi_P + m^2\rho_m^2 I_d \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{m^2-4} \left\{ \begin{array}{l} 4\underbrace{\varphi_F\varphi_P\varphi_F\varphi_P}_{(I)} - 2m\underbrace{\varphi_F\varphi_P\varphi_F}_{(II)} - 2m\underbrace{\varphi_P\varphi_F\varphi_P}_{(III)} + \left[4m\rho_m - 4m^2\right]\varphi_F\varphi_P \\ + \left[2m + 2m^3 - 2m^2\rho_m\right]\varphi_F + \left[2m + 2m^3 - 2m^2\rho_m\right]\varphi_P \\ + \left[-2m^2 - \frac{m^4}{2} + m^2\rho_m^2\right] I_d \end{array} \right\}$$

$\frac{2}{m^2}(\varphi_F\varphi_P + \varphi_P\varphi_F) = \frac{2}{m}(\varphi_F + \varphi_P) - I_d$ eşitliğini kullanarak $(I)$, $(II)$, $(III)$ ifadelerini açalım.

$$(I): \left\{ \begin{array}{rl} \varphi_F\varphi_P\varphi_F\varphi_P &= \varphi_F\left[m\varphi_F + m\varphi_P - \varphi_F\varphi_P - \frac{m^2}{2} I_d\right]\varphi_P \\ &= m\varphi_F^2\varphi_P + m\varphi_F\varphi_P^2 - \varphi_F^2\varphi_P^2 - \frac{m^2}{2}\varphi_F\varphi_P \\ &= \frac{m^2}{2}\varphi_F\varphi_P - I_d \end{array} \right\},$$

$$(II): \left\{ \begin{array}{rl} \varphi_F\varphi_P\varphi_F &= \varphi_F\left[m\varphi_F + m\varphi_P - \varphi_F\varphi_P - \frac{m^2}{2} I_d\right] \\ &= m\varphi_F + m\varphi_F\varphi_P - \varphi_F^2\varphi_P - \frac{m^2}{2}\varphi_F \\ &= \frac{m^2}{2}\varphi_F + \varphi_P - mI_d \end{array} \right\},$$

$$(III): \left\{ \begin{array}{rl} \varphi_P\varphi_F\varphi_P &= \left[m\varphi_F + m\varphi_P - \varphi_F\varphi_P - \frac{m^2}{2} I_d\right]\varphi_P \\ &= m\varphi_F\varphi_P + m\varphi_P^2 - \varphi_F\varphi_P^2 - \frac{m^2}{2}\varphi_P \\ &= \frac{m^2}{2}\varphi_P + \varphi_F - mI_d \end{array} \right\}$$

elde ederiz. $(I)$, $(II)$, $(III)$ eşitliklerini yerine yazarsak,

$$\varphi_K^2 = \frac{1}{m^2-4}\Bigg\{ \left[2m^2-4m+4m\rho_m\right]\varphi_F\varphi_P + \left[m^3-2m^2\rho_m\right]\varphi_F + \left[m^3-2m^2\rho_m\right]\varphi_P + \left[\frac{m^2+m^3\sqrt{m^2-4}}{2}\right] I_d \Bigg\} \tag{4.19}$$

ve

$$\begin{aligned} m\varphi_K - \frac{m^2-2}{2}I_d &= m\left[\frac{1}{\sqrt{m^2-4}}\left(2\varphi_F\varphi_P - m\varphi_F - m\varphi_P + m\rho_m I_d\right)\right] - \frac{m^2-2}{2}I_d \\ &= \frac{1}{m^2-4}\Bigg\{ 2m\sqrt{m^2-4}\varphi_F\varphi_P - m^2\sqrt{m^2-4}\varphi_F \\ &\quad - m^2\sqrt{m^2-4}\varphi_P + \frac{2m^2+m^3\sqrt{m^2-4}-8}{2}I_d \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. Eş. 4.19 ve Eş. 4.20 ifadelerinden $\varphi_K^2 = m\varphi_K - \frac{m^2-2}{2}I_d$ bulunur. O halde $\varphi_K$ bir hemen hemen bronz kompleks yapıdır.

iii) İspat (i) deki gibi yapılır.

iv) İspat (ii) deki gibi yapılır.

# 5. HEMEN HEMEN BRONZ YAPILARDA KONNEKSİYONLAR

## 5.1. Asli Lif Demetlerinde Konneksiyonlar

$B(M^r,\pi,G)$; total uzayı $B$, taban uzayı $M^r$, lif projeksiyonu $\pi$ ve grup yapısı $G$ olan bir asli lif demeti, $V$ $(V=\text{çek}\pi_*)$ ve $H$ (tümleyen dağılım, yani $TB=V\oplus H$) sırasıyla $B$ üzerinde dikey ve yatay dağılımlar olsun. O halde $v$ ve $h$ sırasıyla $V$ ve $H$ a karşılık gelen projeksiyonları göstermek üzere,

$P=v-h$

afinor alanı, $B$ üstünde bir hemen hemen çarpım yapısıdır.

$B$ asli lif demeti üzerindeki bu $P$ hemen hemen çarpım yapısının bir konneksiyon tanımlayabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki özellikleri sağlamasıdır [3].

i) $P(X)=X\Leftrightarrow X\in V$,
ii) $dR_a\circ P_u=P_{ua}\circ dR_a$, $\forall a\in G$ ve $u\in B$.

Eş. 3.13 kullanılırsa aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

5.1.1. Önerme

$B$ asli lif demeti üzerindeki bir $\varphi$ hemen hemen bronz yapısının bir konneksiyon tanımlayabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıda verilmiş olan koşulları sağlamasıdır.

i) $X\in\mathfrak{X}(B)$, $\varphi$ hemen hemen bronz yapısının $\rho_m$ öz değerine karşılık gelen öz vektördür gerek ve yeter şart $X$ dikey vektör alanıdır.
ii) $dR_a\circ\varphi_u=\varphi_{ua}\circ dR_a$, $\forall a\in G$ ve $u\in B$.

$g$, $G$ nin Lie cebiri ve $\varpi\in\wedge^1(B,g)$, $H$ nın konneksiyon 1-formu olsun. $\Omega\in\wedge^2(B,g)$ $\varpi$ nın eğrilik formu olmak üzere, $\forall X_1,Y_1\in\mathfrak{X}^h(M^r)$ için

$\Omega(X_1,Y_1)=d\varpi(h(X_1),h(Y_1))=-\varpi([X_1,Y_1])$

şeklindedir. $\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M^r)$ için $P$ hemen hemen çarpım yapısının Nijenhuis tensörü

$$N_P(X_1,Y_1) = [X_1,Y_1] + [P(X_1),P(Y_1)] - P[P(X_1),Y_1] - P[X_1,P(Y_1)] \tag{5.1}$$

biçimindedir. Bu durumda $\forall X_1,Y_1 \in \mathfrak{X}^h(M^r)$ için

$$P(X_1) = v(X_1) - h(X_1) = -h(X_1) = -X_1$$

olup

$$\begin{aligned} N_P(X_1,Y_1) = 2[X_1,Y_1] + 2P([X_1,Y_1]) &\Rightarrow \varpi(N_P(X_1,Y_1)) = 2\varpi([X_1,Y_1]) + 2\varpi(P[X_1,Y_1]) \\ &\Rightarrow \varpi(N_P(X_1,Y_1)) = 2\varpi([X_1,Y_1]) + 2\varpi([X_1,Y_1]) \\ &\Rightarrow \frac{-1}{4}\varpi(N_P(X_1,Y_1)) = -(\varpi([X_1,Y_1])) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\Omega(X_1,Y_1) = \frac{-1}{4}\varpi(N_P(X_1,Y_1))$$

eşitliği elde edilir. Eş. 3.12 , Eş. 5.1 eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} N_P(X_1,Y_1) &= [X_1,Y_1] + \frac{1}{(2\rho_m - m)^2}[2\varphi(X_1) - mI_d(X_1), 2\varphi(Y_1) - mI_d(Y_1)] \\ &\quad - \frac{1}{(2\rho_m - m)^2}(2\varphi - mI_d)[2\varphi(X_1) - mI_d(X_1), Y_1] \\ &\quad - \frac{1}{(2\rho_m - m)^2}(2\varphi - mI_d)[X_1, 2\varphi(Y_1) - mI_d(Y_1)] \\ &= [X_1,Y_1] + \frac{1}{(2\rho_m - m)^2}[\varphi(X_1), 2\varphi(Y_1) - mI_d(Y_1)] \\ &\quad - \frac{m}{(2\rho_m - m)^2}[X_1, 2\varphi(Y_1) - mI_d(Y_1)] - \frac{m}{(2\rho_m - m)^2}(2\varphi - mI_d)[\varphi(X_1), Y_1] \\ &\quad + \frac{m}{(2\rho_m - m)^2}(2\varphi - mI_d)[X_1,Y_1] \\ &\quad - \frac{2}{(2\rho_m - m)^2}(2\varphi - mI_d)[X_1, \varphi(Y_1)] + \frac{m}{(2\rho_m - m)^2}(2\varphi - mI_d)[X_1,Y_1] \\ &= [X_1,Y_1] + \frac{4}{(2\rho_m - m)^2}[\varphi(X_1), \varphi(Y_1)] - \frac{2m}{(2\rho_m - m)^2}[\varphi(X_1), Y] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2m}{(2\rho_m-m)^2}[X_1,\varphi(Y_1)]+\frac{m^2}{(2\rho_m-m)^2}[X_1,Y_1]\\
&-\frac{4}{(2\rho_m-m)^2}\varphi[\varphi(X_1),Y_1]+\frac{2m}{(2\rho_m-m)^2}[\varphi(X_1),Y_1]\\
&+\frac{2m}{(2\rho_m-m)^2}\frac{2m}{(2\rho_m-m)^2}-\frac{m^2}{(2\rho_m-m)^2}[X_1,Y_1]\\
&-\frac{4}{(2\rho_m-m)^2}\varphi[X_1,\varphi(Y_1)]+\frac{2m}{(2\rho_m-m)^2}[X_1,\varphi(Y_1)]\\
&+\frac{2m}{(2\rho_m-m)^2}\frac{2m}{(2\rho_m-m)^2}-\frac{m^2}{(2\rho_m-m)^2}[X_1,Y_1]
\end{aligned}
$$

ve buradan,

$$
\begin{aligned}
N_P(X_1,Y_1) &= \frac{4}{(2\rho_m-m)^2}\left(\varphi^2[X_1,Y_1]+[\varphi(X_1),\varphi(Y_1)]\right)-\varphi([\varphi(X_1),Y_1])-\varphi([X_1,\varphi(Y_1)])\\
&= \frac{4}{(2\rho_m-m)^2}N_\varphi(X_1,Y_1) \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
\Omega(X_1,Y_1) &= -\frac{1}{4}\varpi N_P(X_1,Y_1)\\
&= -\frac{1}{(2\rho_m-m)^2}\varpi N_\varphi(X_1,Y_1) \qquad (5.3)
\end{aligned}
$$

sonucuna varılır.

5.1.2. Önerme

Konneksiyonun flat (yani; $\Omega\equiv 0$) olması için gerek ve yeter şart hemen hemen bronz yapının integrallenebilir olmasıdır, bu ise $N_\varphi\equiv 0$ olması anlamına gelir.

$M^r$ düzgün manifoldu üzerinde $X_1$, $Y_1$ iki vektör alanı ve bir konneksiyon verildiğinde, verilen konneksiyon $L_\varpi:\mathfrak{X}(M^r)\to\mathfrak{X}(B)$ şeklinde bir lift üretir ve bu lift $\forall\, X_1,\, Y_1\in\mathfrak{X}(M^r)$ için aşağıda verilen eşitliği sağlar [3]

$$
[L_\omega X_1, L_\omega Y_1]-L_\omega[X_1,Y_1]=N_J(L_\omega X_1, L_\omega Y_1). \qquad (5.4)
$$

5.1.3. Önerme

$\varpi$ ile tanımlanan $L_{\varpi}$ liftinin bir morfizmi olması için gerek ve yeter şart ilişik olan hemen hemen bronz yapının integrallenebilir olmasıdır.

## 5.2. Tanjant Demetlerde Konneksiyonlar

$TM^r = \cup_{\mathfrak{p}\in M^r} T_{\mathfrak{p}}M^r$, $M^r$ düzgün manifoldunun teğet demeti, $\pi_{M^r}$ izdüşüm olsun. $\pi_{M^r*}$ lineer dönüşümünün çekirdeği $VTM^r = \ker \pi_{M^r*}$ ile gösterilir ve $M^r$ manifoldunun dikey dağılımı denir. $\left(U, x^i\right)$, $M^r$ üzerinde lokal koordinat komşuluğu olmak üzere $\left(TM^r, x^i, y^i\right)$ de $TM^r$ üzerinde bir lokal koordinat komşuluğudur, yani tüm $u \in \pi_{M^r}^{-1}(U)$ için $x^i(u) = x^i(\pi_{M^r}(u))$ ve $y^i(u) = dx^i(u)$ dir. Bu lokal koordinatlara sahip $TM^r$ üzerindeki bir atlas için, $TM^r$ nin hemen hemen tanjant yapısı $T = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i$ tensörü ile tanımlanabilir, yani $T^2 = 0$ dır.

5.2.1. Tanım

$T$, $TM^r$ için hemen hemen tanjant yapı olsun. $\nu$, $M^r$ üzerinde afinor alanı

$$\nu \circ T = T, \;\; T \circ \nu = 0 \tag{5.5}$$

şartlarını sağlıyor ise $\nu$ dikey projektör olarak isimlendirilir [3].

5.2.2. Tanım

$VTM^r$ dikey dağılımının tümleyen (complementary) dağılımı olan, yani

$\mathfrak{X}(M^r) = VTM^r \oplus N$

eşitliğini sağlayan, $N$ ye horizontal dağılım veya lineer olmayan konneksiyon denir [3].

5.2.3. Önerme

Bir $\nu$ vertical projektör çek$\nu = N(\nu)$ bağıntısı sayesinde bir $N(\nu)$ lineer olmayan konneksiyon üretir [1].

5.2.4. Önerme

$v_N$, $N(v_N) = N$ olacak şekilde bir vertical projektördür [1].

5.2.5. Tanım

$M^r$ düzgün manifoldu üzerinde $\Gamma$ afinor alanı

$$\Gamma \circ T = -T, \tag{5.6}$$

$$\tag{5.7}$$

$$T \circ \Gamma = T \tag{5.8}$$

şartlarını sağlıyorsa $\Gamma$ tensör alanına hemen hemen çarpım tipinde lineer olmayan konneksiyon denir [1].

5.2.6. Önerme

Eğer $\Gamma$, hemen hemen çarpım tipinde bir lineer olmayan konneksiyon ise,

i) $v_\Gamma = \frac{1}{2}(I_d - \Gamma)$ bir vertical projektördür [1].
ii) $N(v_\Gamma)$, $\Gamma$ tensör alanının $(+1)$ öz değerine karşılık gelen öz uzayı olduğunda $VTM^r$ de $\Gamma$ tensör alanının $(-1)$ öz değerine karşılık gelen öz uzayıdır [1].

Sonuç olarak her vertical projektör $\Gamma = I_d - 2v$ şeklinde hemen hemen çarpım tipinde bir lineer olmayan konneksiyon belirler [3].

Bu sonuçtan yola çıkarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

5.2.7. Önerme

$M^r$ düzgün manifoldu üzerinde $v$ vertical projektörü ile verilen bir $N$ lineer olmayan

konneksiyonu bir

$$\varphi = \rho_m I_d - \sqrt{m^2-4}\nu$$

hemen hemen bronz yapısıyla da tanımlanabilir. Böylece $N$, $\varphi$ nin $\rho_m$ öz değerine karşılık gelen öz uzay, $VTM^r$ de $\varphi$ nin $m-\rho_m$ öz değerine karşılık gelen öz uzaydır.

*İspat*

$\Gamma$ bir hemen hemen çarpım yapısı olduğundan ve Eş. 3.13 den $\varphi = \frac{1}{2}\left(mI_d + \sqrt{m^2-4}\Gamma\right)$ elde edilir. Buradan

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2-4}}(2\varphi - mI_d)$$

bulunur. Bu eşitlikte $\Gamma = I_d - 2\nu$ de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{m^2-4}}(2\varphi - mI_d) = I_d - 2\nu \Rightarrow 2\varphi &= mI_d + \sqrt{m^2-4}I_d - 2\sqrt{m^2-4}\nu \\ &= \left(m+\sqrt{m^2-4}\right)I_d - 2\sqrt{m^2-4}\nu \\ \Rightarrow \varphi &= \left(\frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}\right)I_d - \sqrt{m^2-4}\nu \\ &= \rho_m I_d - \sqrt{m^2-4}\nu\end{aligned}$$

elde edilir.

$N = \text{çekv} = \{X_1 \in \mathfrak{X}(M^r) : \varphi(X_1) = \rho_m X_1\}$ olduğunu gösterelim. $\varphi = \rho_m I_d - \sqrt{m^2-4}\nu$ olduğundan $\nu = \frac{1}{\sqrt{m^2-4}}(\rho_m I_d - \varphi)$ dir. $N = \text{çekv} = \{X \in \mathfrak{X}(M^r) : \nu(X_1) = 0\}$. O halde

$$\begin{aligned}\nu(X_1) = \frac{1}{\sqrt{m^2-4}}(\rho_m I_d(X_1) - \varphi(X_1)) \Rightarrow 0 &= \frac{1}{\sqrt{m^2-4}}(\rho_m X_1 - \varphi(X_1)) \\ \Rightarrow \varphi(X_1) &= \rho_m X_1\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $N = \text{çekv} = \{X_1 \in \mathfrak{X}(M^r) : \rho_m X_1 = \varphi(X_1)\}$ dir.

$VTM^r = im\nu = \{X_1 \in \mathfrak{X}(M^r) : \varphi(X_1) = (m-\rho_m)X_1\}$ olduğunu gösterelim.

$\varphi = \rho_m I_d - \sqrt{m^2-4}\nu$ olduğundan $\nu = \dfrac{1}{\sqrt{m^2-4}}(\rho_m I_d - \varphi)$ dir.

$VTM^r = \{X_1 \in \mathfrak{X}(M^r) : \nu(X_1) = X_1\}$. O halde

$$\nu(X_1) = \frac{1}{\sqrt{m^2-4}}(\rho_m I_d(X_1) - \varphi(X_1)) \Rightarrow X_1 = \frac{1}{\sqrt{m^2-4}}(\rho_m(X_1) - \varphi(X_1))$$
$$\Rightarrow \varphi(X_1) = (m - \rho_m)X_1$$

dir. Sonuç olarak $VTM^r = im\nu = \{X_1 \in \mathfrak{X}(M^r) : \varphi(X_1) = (m-\rho_m)X_1\}$ dir.

# 6. HEMEN HEMEN BRONZ YAPILARDA İNTEGRALLENEBİLİRLİK VE PARALELLİK

Bu bölümde, hemen hemen bronz yapının integrallenebilirlik şartları ve paralelliği çalışılmıştır.

$(M^r, \varphi)$ bir hemen hemen bronz manifold olsun. $D_n$ ve $D_t$, $M^r$ üzerinde tümleyen dağılımlarına karşılık gelen $n$ ve $t$ projeksiyonları,

$$n+t=I_d,\ n^2=n,\ t^2=t,\ nt=tn=0 \tag{6.1}$$

eşitliklerini sağlar. $n-t=P$ hemen hemen çarpım yapıdır.

$$\begin{cases} n+t=I_d, \\ n-t=P \end{cases}$$

eşitlikleri ile,

$$\begin{cases} n=\dfrac{1}{2}\left(I_d+P\right), \\ t=\dfrac{1}{2}\left(I_d-P\right) \end{cases} \tag{6.2}$$

elde edilir. Eş.3.12, Eş. 6.2 eşitliklerinde yerine yazılırsa,

$$n=\tfrac{1}{2\rho_m-m}\varphi-\tfrac{m-\rho_m}{2\rho_m-m}I_d \quad , \quad t=-\tfrac{1}{2\rho_m-m}\varphi+\tfrac{\rho_m}{2\rho_m-m}I_d \tag{6.3}$$

elde edilir.

## 6.1. İntegrallenebilirlik

Bu kesimde, hemen hemen bronz yapının ve bu yapı üzerindeki dağılımların integrallenebilirlik şartları araştırıldı.

6.1.1. Önerme

$\varphi$ hemen hemen bronz yapısının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $P$ hemen hemen çarpım yapısının integrallenebilir olmasıdır.

*İspat*

Eş. 5.2 dayanarak $N_P(X_1,Y_1) = \frac{4}{(2\rho_m - m)^2} N_\varphi(X_1,Y_1)$ olduğunu biliyoruz. Buradan ispat açıktır.

Eş. 3.8 ve Eş. 6.3 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\varphi n = n\varphi &= \frac{1}{2\rho_m - m}\varphi^2 - \frac{m-\rho_m}{2\rho_m - p}\varphi \\ &= \frac{m}{2\rho_m - m}\varphi - \frac{1}{2\rho_m - m} I_d - \frac{m-\rho_m}{2\rho_m - m}\varphi \\ &= \frac{\rho_m}{2\rho_m - m}\varphi - \frac{1}{2\rho_m - m} I_d\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi n = n\varphi = \rho_m n \tag{6.4}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\varphi t = t\varphi &= \frac{1}{2\rho_m - m}\varphi^2 + \frac{\rho_m}{2\rho_m - m}\varphi \\ &= \frac{m}{2\rho_m - m}\varphi - \frac{q}{2\rho_m - m} I_d + \frac{\rho_m}{2\rho_m - m}\varphi \\ &= \frac{(m-\rho_m)}{2\rho_m - m}\varphi - \frac{q}{2\rho_m - m} I_d\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi t = t\varphi = (m-\rho_m)\, t \tag{6.5}$$

olduğu görülür. Eş. 5.1, Eş. 6.4 ve Eş. 6.5 dikkate alındığında

$$\begin{aligned} N_\varphi(nX_1,nY_1) &= \varphi^2[nX_1,nY_1]+[\varphi nX_1,\varphi nY_1]-\varphi[\varphi nX_1,nY_1]-\varphi[nX_1,\varphi nY_1] \\ &= \varphi^2[nX_1,nY_1]+[\rho_m nX_1,\rho_m nY_1]-\varphi[\rho_m nX_1,nY_1]-\varphi[nX_1,\rho_m nY_1] \\ &= (m\varphi-I)[nX_1,nY_1]+\rho_m^2[nX_1,nY_1]-\rho_m\varphi[nX_1,nY_1]-\rho_m\varphi[nX_1,nY_1] \\ &= (2m-\rho_m)\varphi[nX_1,nY_1]+(m\rho_m-2)[nX_1,nY_1] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını $\frac{1}{(2\rho_m-m)^2}t$ ile işleme tabi tutarsak

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\rho_m-m)^2}tN_\varphi(nX_1,nY_1) &= \frac{(m-2\rho_m)}{(2\rho_m-m)^2}t\varphi[nX_1,nY_1]+\frac{(m\rho_m-2)}{(2\rho_m-m)^2}t[nX_1,nY_1] \\ &= \frac{m-2\rho_m}{(2\rho_m-m)^2}(m-\rho_m)t[nX_1,nY_1]+\frac{(m\rho_m-2)}{(2\rho_m-m)^2}t[nX_1,nY_1] \\ &= \frac{m^2-m\rho_m-2m\rho_m+2\rho_m^2-2+m\rho_m}{(2\rho_m-m)^2}t[nX_1,nY_1] \\ &= t[nX_1,nY_1] \end{aligned}$$

buluruz.

Dolayısıyla

$$\frac{1}{(2\rho_m-m)^2}tN_\varphi(nX_1,nY_1)=t[nX_1,nY_1]$$

sonucuna varılır. Benzer şekilde,

$$\Rightarrow \frac{1}{(2\rho_m-m)^2}nN_\varphi(tX_1,tY_1)=n[tX_1,tY_1]$$

bulunur. Yani,

$$\begin{cases} t[nX_1,nY_1]=\dfrac{1}{(2\rho_m-m)^2}tN_\varphi(nX_1,nY_1) \\ n[tX_1,tY_1]=\dfrac{1}{(2\rho_m-m)^2}nN_\varphi(tX_1,tY_1) \end{cases} \tag{6.6}$$

eşitliklerinin elde edildiğini söyleyebiliriz.

6.1.2. Teorem

[40,41] kaynaklarda da belirtildiği gibi,

i) $\varphi$ polinomial yapının integrallenebilmesi için ancak ve ancak $N_\varphi = 0$ ya da $\nabla\varphi = 0$ olmalıdır, burada $\nabla$ burulmasız bir lineer konneksiyondur.
ii) $\mathfrak{X}(M^r)$ de alınan $X_1, Y_1$ vektör alanları için, $t[nX_1, nY_1] = 0$ ise $D_t$ dağılımı integrallenebilirdir. Benzer şekilde $n[tX_1, tY_1] = 0$ ise $D_n$ dağılımı integrallenebilirdir.

6.1.3. Önerme

*i*) $D_n$ dağılımı integrallenebilirdir $\Leftrightarrow tN_\varphi(nX_1, nY_1) = 0$.
*ii*) $D_t$ dağılımı integrallenebilirdir $\Leftrightarrow nN_\varphi(tX_1, tY_1) = 0$.
*iii*) $\varphi$ hemen hemen bronz yapısı integrallenebilir ise $D_n$ ve $D_t$ dağılımları integrallenebilirdir.

*İspat*

Teorem 6.1.2. ve Eş.6.6 ifadelerinden ispat açıktır.

## 6.2. Paralellik, Yarı Paralellik ve Anti-Yarı Paralellik

Bu kesimde, hemen hemen bronz yapı, bu yapı üzerindeki dağılımlar, bu dağılımlara karşılık gelen projeksiyon dönüşümlerinin paralellik, yarı paralellik ve anti-yarı paralellik durumları çalışılmıştır.

6.2.1. Önerme

i) $n$ ve $t$ prejoksiyonları $\nabla^{Sc}$ve $\nabla^{Vr}$ konneksiyonlarına göre paraleldir.
ii) $\varphi$ hemen hemen bronz yapı, $\nabla^{Sc}$ve $\nabla^{Vr}$ konneksiyonlarına göre paraleldir.

*İspat*

i) Eş. 6.1 yardımıyla $\forall X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ için,

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{Sc}_{X_1} n\right) Y_1 &= \nabla^{Sc}_{X_1} nY_1 - n\left(\nabla^{Sc}_{X_1} Y_1\right) \\ &= n\left(\nabla_{X_1} nY_1\right) - n\left(\nabla_{X_1} nY_1\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{Vr}_{X_1} n\right) Y_1 &= \nabla^{Vr}_{X_1} nY_1 - n\left(\nabla^{Vr}_{X_1} Y_1\right) \\ &= n\left(\nabla_{nX_1} nY_1\right) + n\left[tX_1, nY_1\right] - n\left(\nabla_{nX_1} nY_1\right) - n\left[tX_1, nY_1\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu nedenle $n$ projektörü, $\nabla^{Sc}$ve $\nabla^{Vr}$ bağıntılarına göre paraleldir. Aynı şekilde $t$ projektörü, $\nabla^{Sc}$ve $\nabla^{Vr}$ bağıntılarına göre paralel olduğu gösterilebilir.

ii) Tanım 2.4.7., Eş. 6.4 ve Eş. 6.5 eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{Sc}_{X_1} \varphi\right) Y_1 &= \nabla^{Sc}_{X_1} \varphi Y_1 - \varphi\left(\nabla^{Sc}_{X_1} Y_1\right) \\ &= n\left(\nabla_{X_1} n\left(\varphi Y_1\right)\right) + t\left(\nabla_{X_1} t\left(\varphi Y_1\right)\right) - \varphi\left[n\left(\nabla_{X_1} nY_1\right) + t\left(\nabla_{X_1} tY_1\right)\right] \\ &= n\left(\nabla_{X_1} \rho_m\left(\varphi Y_1\right)\right) + t\left(\nabla_{X_1}\left(m-\rho_m\right) tY_1\right) - \rho_m n\left(\nabla_{X_1} nY_1\right) - \left(m-\rho_m\right) t\left(\nabla_{X_1} tY_1\right) \\ &= \rho_m n\left(\nabla_{X_1}\left(nY_1\right)\right) + \left(m-\rho_m\right) t\left(\nabla_{X_1} tY_1\right) - \rho_m n\left(\nabla_{X_1} nY_1\right) - \left(m-\rho_m\right) t\left(\nabla_{X_1} tY_1\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{Vr}_{X_1} \varphi\right) Y_1 &= \nabla^{Vr}_{X_1} \varphi Y_1 - \varphi\left(\nabla^{Vr}_{X_1} Y_1\right) \\ &= n\left(\nabla_{nX_1} n\left(\varphi Y_1\right)\right) + t\left(\nabla_{tX_1} t\left(\varphi Y_1\right)\right) + n\left[tX_1, n\left(\varphi Y_1\right)\right] + t\left[nX_1, t\left(\varphi Y_1\right)\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -\varphi n\left(\nabla_{nX_1} nY_1\right) - \varphi t\left(\nabla_{tX_1} tY_1\right) - \varphi n\left[tX_1, nY_1\right] - \varphi n\left[nX_1, tY_1\right] \\
&= n\left(\nabla_{nX_1} \rho_m\left(nY_1\right)\right) + t\left(\nabla_{tX_1}\left(m-\rho_m\right) tY_1\right) \\
&\quad + n\left[tX_1, \rho_m\left(nY_1\right)\right] + t\left[nX_1, \left(m-\rho_m\right) tY_1\right] \\
&\quad - \rho_m n\left(\nabla_{nX_1}\left(nY_1\right)\right) - \left(m-\rho_m\right) t\left(\nabla_{tX_1} tY_1\right) - \rho_m n\left[tX_1, nY_1\right] \\
&\quad - \left(m-\rho_m\right) t\left[nX_1, tY_1\right] - \rho_m n\left[tX_1, nY_1\right] - \left(m-\rho_m\right) t\left[nX_1, tY_1\right] \\
&= \rho_m n\left(\nabla_{nX_1}\left(nY_1\right)\right) + \left(m-\rho_m\right) t\left(\nabla_{tX_1} tY_1\right) \\
&\quad + \rho_m n\left[tX_1, nY_1\right] + \left(m-\rho_m\right) t\left[nX_1, tY_1\right] \\
&\quad - \rho_m n\left(\nabla_{nX_1}\left(nY_1\right)\right) - \left(m-\rho_m\right) t\left(\nabla_{tX_1} tY_1\right) \\
&\quad - \rho_m n\left[tX_1, nY_1\right] - \left(m-\rho_m\right) t\left[nX_1, tY_1\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

6.2.2. Önerme

Tanım 2.4.3. göz önüne alınarak $D_n$ ve $D_t$ dağılımları $M^r$ manifoldu üzerindeki $\nabla^{Sc}$ve $\nabla^{Vr}$ konneksiyonlarına göre paraleldir.

*İspat*

$X_1 \in \mathfrak{X}\left(M^r\right)$ ve $Y_1 \in D_n$ olsun. $Y_1 \in D_n \Rightarrow t\left(Y_1\right) = 0$ ve $n\left(Y_1\right) = Y_1$ dir. Böylece,

$$
\begin{aligned}
\nabla^{Sc}_{X_1} Y_1 &= n\left(\nabla_{X_1} nY_1\right) + t\left(\nabla_{X_1} tY_1\right) \\
&= n\left(\nabla_{X_1} Y_1\right) \in D_n
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\nabla^{Vr}_{X_1} Y_1 &= n\left(\nabla_{nX_1} nY_1\right) + t\left(\nabla_{tX_1} tY_1\right) + n\left[tX_1, nY_1\right] + t\left[nX_1, tY_1\right] \\
&= \left(n\left(\nabla_{nX_1} Y_1\right) + n\left[tX_1, Y_1\right]\right) \in D_n
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Benzer şekilde paralellik $D_t$ dağılımı için de gösterilebilir.

6.2.3. Teorem

$D_n$ ve $D_t$ dağılımlarının $M^r$ manifoldu üzerindeki $\nabla$ lineer konneksiyonuna göre paraleldir gerek ve yeter şart $\nabla = \nabla^{Sc}$ olmalıdır.

*İspat*

$X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ olmak üzere $D_n$ ve $D_t$, $\nabla$ ya göre paralel ise $\nabla_{X_1} nY_1 \in D_n, \nabla_{X_1} tY_1 \in D_t$ dir. Bu durumda

$$\nabla_{X_1} nY_1 \in D_n \Rightarrow t(\nabla_{X_1} nY_1) = 0 \quad ; \quad \nabla_{X_1} tY_1 \in D_t \Rightarrow n(\nabla_{X_1} tY_1) = 0$$

eşitlikleri vardır.

$$\begin{aligned} n+t = I_d &\Rightarrow (n+t)(\nabla_{X_1} nY_1) = I_d(\nabla_{X_1} nY_1) \\ &\Rightarrow n(\nabla_{X_1} nY_1) + t(\nabla_{X_1} nY_1) = \nabla_{X_1} nY_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n+t = I_d &\Rightarrow (n+t)(\nabla_{X_1} tY_1) = I_d(\nabla_{X_1} tY_1) \\ &\Rightarrow n(\nabla_{X_1} tY_1) + t(\nabla_{X_1} tY_1) = \nabla_{X_1} tY_1 \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımı ile

$$\begin{aligned} \nabla_{X_1} Y_1 &= \nabla_{X_1} I_d Y_1 \\ &= \nabla_{X_1}(n+t) Y_1 \\ &= \nabla_{X_1}(nY_1 + tY_1) \\ &= \nabla_{X_1} nY_1 + \nabla_{X_1} tY_1 \\ &= n(\nabla_{X_1} nY_1) + t(\nabla_{X_1} tY_1) \\ &= \nabla^{Sc}_{X_1} Y_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Tersinin ispatı ise açıktır.

6.2.4. Önerme

$X_1 \in D_n, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ olmak üzere $[nX_1, tY_1] \in D_n$ ise $D_n$ dağılımı Vrănceanu konneksiyonuna göre yarı paraleldir.

*İspat*

Eş. 2.1 yardımıyla $\nabla^{Vr}$ için, $X_1 \in D_n, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ olmak üzere,

$$t(\nabla\varphi)(X_1,Y_1) = t\varphi\nabla^{Vr}_{X_1}Y_1 - t\varphi\nabla^{Vr}_{Y_1}X_1 - t\nabla^{Vr}_{\varphi X_1}Y_1 + t\nabla^{Vr}_{Y_1}(\varphi X_1)$$

eşitliği yazılabilir. Tanım 2.4.5., Eş. 6.4 ve Eş. 6.5 dayanarak,

$$\begin{aligned}
t(\nabla\varphi)(X_1,Y_1) &= t\varphi\nabla^{Vr}_{X_1}Y_1 - t\varphi\nabla^{Vr}_{Y_1}X_1 - t\nabla^{Vr}_{\varphi X_1}Y_1 + t\nabla^{Vr}_{Y_1}(\varphi X_1) \\
&= t\varphi\left(n(\nabla_{nX_1}nY_1) + t(\nabla_{tX_1}tY_1) + n[tX_1,nY_1] + t[nX_1,tY_1]\right) \\
&\quad - t\varphi\left(n(\nabla_{nY_1}nX_1) + t(\nabla_{tY_1}tX_1) + n[tY_1,nX_1] + t[nY_1,tX_1]\right) \\
&\quad - t\left(n(\nabla_{n\varphi X_1}nY_1) + t(\nabla_{t\varphi X_1}tY_1) + n[t\varphi X_1,nY_1] + t[n\varphi X_1,tY_1]\right) \\
&\quad + t\left(n(\nabla_{nY_1}n\varphi X_1) + t(\nabla_{tY_1}t\varphi X_1) + n[tY_1,n\varphi X_1] + t[nY_1,t\varphi X_1]\right) \\
&= (m-\rho_m)tn(\nabla_{nX_1}nY_1) + (m-\rho_m)t^2(\nabla_{tX_1}tY_1) + (m-\rho_m)tn[tX_1,nY_1] \\
&\quad + (m-\rho_m)t^2[nX_1,tY_1] - (m-\rho_m)tn(\nabla_{nY_1}nX_1) - (m-\rho_m)t^2(\nabla_{tY_1}tX_1) \\
&\quad - (m-\rho_m)tn[tY_1,nX_1] - (m-\rho_m)t^2[nY_1,tX_1] \\
&\quad - tn(\nabla_{nY_1}n\varphi X_1) - t^2\left(\nabla_{t\varphi X_1}tY_1\right) - tn[t\varphi X_1,nY_1] - t^2[n\varphi X_1,tY_1] \\
&\quad + tn(\nabla_{nY_1}n\varphi X_1) + t^2(\nabla_{tY_1}t\varphi X_1) + tn[tY_1,n\varphi X_1] + t^2[nY_1,t\varphi X_1]
\end{aligned}$$

elde edilir ve Eş. 6.1 dikkate alındığında,

$$t(\Delta\varphi)(X_1,Y_1) = (m-2\rho_m)t[nX_1,tY_1] = 0$$

bulunur. O halde $(\Delta\varphi)(X_1,Y_1) \in D_n$ dir. Dolayısıyla $D_n$ dağılımı Vrănceanu konneksiyonuna göre yarı paraleldir. Benzer şekilde $D_t$ dağılımı için aşağıdaki önerme verilebilir.

6.2.5. Önerme

$X_1 \in D, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ olmak üzere, $[tX_1, nY_1] \in D_t$ ise $D_t$ dağılımı Vrănceanu konneksiyonuna göre yarı paraleldir.

6.2.6. Önerme

$D_n$ ve $D_t$ dağılımları $\nabla^{Vr}$ konneksiyonuna göre anti-yarı paraleldir.

*İspat*

Eş. 2.1 dayanarak $\nabla^{Vr}$ için, $X_1 \in D_n$, $Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ olmak üzere,

$$n(\Delta\varphi)(X_1, Y_1) = n\varphi\left(\nabla^{Vr}_{X_1} Y_1\right) - n\varphi\left(\nabla^{Vr}_{Y_1} X_1\right) - n\left(\nabla^{Vr}_{\varphi X_1} Y_1\right) + n\left(\nabla^{Vr}_{Y_1} \varphi X_1\right)$$

yazılabilir. Eş. 6.4, Eş. 6.5 ve Eş. 2.3 göz önüne alınırsa

$$n(\Delta\varphi)(X_1, Y_1) = (2\rho_m - m)\, n[tX_1, nY_1]$$

elde edilir. $tX_1 = 0$ olduğundan $n(\Delta\varphi)(X_1, Y_1) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $(\Delta\varphi)(X_1, Y_1) \in D_t$ olduğu söylenebilir ki böylece $D_n$ dağılımı Vrănceanu konneksiyonuna göre anti-yarı paraleldir.

Benzer şekilde, $D_t$ dağılımının $\nabla^{Vr}$ konneksiyonuna göre anti-yarı paralel olduğu gösterilebilir.

# 7. HEMEN HEMEN BRONZ RİEMANN METRİKLERİ

## 7.1. Hemen Hemen Bronz Riemann Manifoldlar

$P$, $M^r$ düzgün manifoldu üzerinde hemen hemen çarpım yapı olsun. $\forall X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ için

$$g(P(X_1), P(Y_1)) = g(X_1, Y_1)$$

veya buna denk olarak

$$g(P(X_1), Y_1) = g(X_1, P(Y_1))$$

olacak biçimde $M^r$ manifoldu üzerinde bir $g$ Riemann metriği varsa $(g, P)$ ikilisine Riemann hemen hemen çarpım yapı denir.

7.1.1. Tanım

$M^r$ düzgün manifoldu üzerinde bir Riemann metriği $g$ ve $\varphi$, $M^r$ ürerinde bir hemen hmen bronz yapı olsun. $\forall X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^r)$ için

$$g(\varphi(X_1), Y_1) = g(X_1, \varphi(Y_1))$$

veya

$$g(\varphi X_1, \varphi Y_1) = mg(X_1, \varphi Y_1) - g(X_1, Y_1)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $(\varphi, g)$ ikilisine hemen hemen bronz Riemann yapı, $(M^r, \varphi, g)$ üçlüsüne ise hemen hemen bronz Riemann manifold denir.

Teorem 3.2.4. ve Tanım 7.1.1. göz önünde bulundurulduğunda aşağıdaki önerme elde edilir.

7.1.2. Önerme

$P$ hemen hemen çarpım yapının bir $g$-simetrik endomorfizm olması için gerek ve yeter koşul $\varphi$ hemen hemen bronz yapının bir $g$-simetrik endomorfizm olmasıdır.

*İspat*

$g(P(X_1),Y_1) = g(X_1,P(Y_1))$ olsun. Eş. 3.12 dikkate alınırsa,

$$\frac{2}{2\rho_{m-m}} g(\varphi(X_1),Y_1) - \frac{m}{2\rho_{m-m}} g(X_1,Y_1) = \frac{2}{2\rho_{m-m}} g(X_1,\varphi(Y_1)) - \frac{m}{2\rho_{m-m}} g(X_1,Y_1)$$

elde edilir. Dolayısyla, $g(\varphi(X_1),Y_1) = g(X_1,\varphi(Y_1))$ dir

Tersine $g(\varphi(X_1),Y_1) = g(X_1,\varphi(Y_1))$ olsun. Eş. 3.13 dikkate alınırsa,

$$\frac{1}{2}(mg(X_1,Y_1) + (2\rho_m - m)\, g(P(X_1),Y_1)) = \frac{1}{2}(mg(X_1,Y_1) + (2\rho_m - m)\, g(X_1,P(Y_1)))$$

elde edilir. Dolayısıyla, $g(P(X_1),Y_1) = g(X_1,P(Y_1))$ bulunur.

7.1.3. Önerme

Hemen hemen bronz Riemmann manifoldu üzerinde,

i) $n,t$ prejoksiyonları $g$-simetriktir. Yani,

$$\begin{cases} g(n(X_1),Y_1) = g(X_1,n(Y_1)), \\ g(t(X_1),Y_1) = g(X_1,t(Y_1)) \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

ii) $D_n$ ve $D_t$ dağılımları $g$-ortogonaldir. Yani,

$$g(n(X_1),t(Y_1)) = 0$$

şeklinde ifade edilir.

iii) Hemen hemen bronz yapı, $N_\varphi$ simetriktir. Yani,

$$N_\varphi(\varphi(X_1),Y_1) = N_\varphi(X_1,\varphi(Y_1))$$

şeklinde ifade edilebilir.

*İspat*

i) Eş. 6.3 ve $g(\varphi(X_1),Y_1) = g(X_1,\varphi(Y_1))$ eşitlikleri göz önünde bulundurarak,

$$\begin{aligned} g\left(\left(\frac{1}{2\rho_m - m}\varphi - \frac{m-\rho_m}{2\rho_m - m}I_d\right)X_1, Y_1\right) &= \frac{1}{2\rho_m - m}g(\varphi(X_1),Y_1) - \frac{m-\rho_m}{2\rho_m - m}g(X_1,Y_1) \\ &= \frac{1}{2\rho_m - m}g(X_1,\varphi(Y_1)) - \frac{m-\rho_m}{2\rho_m - m}g(X_1,Y_1) \\ &= g\left(X_1, \left(\frac{1}{2\rho_m - m}\varphi - \frac{m-\rho_m}{2\rho_m - m}\right)Y_1\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısyla $g(n(X_1),Y_1) = g(X_1,n(Y_1))$ olduğu görülür. Benzer şekilde $g(t(X_1),Y_1) = g(X_1,t(Y_1))$ olduğu görülür.

ii) Eş. 3.8, Eş. 6.3 ve Tanım 7.1.1. dayanarak,

$$\begin{aligned} g(n(X_1),t(Y_1)) &= g\left(\left(\frac{1}{2\rho_m - m}\varphi - \frac{m-\rho_m}{2\rho_m - m}I_d\right)X_1, \left(-\frac{1}{2\rho_m - m}\varphi + \frac{\rho_m}{2\rho_m - m}I_d\right)Y_1\right) \\ &= -\frac{1}{(2\rho_m - m)^2}g(\varphi(X_1),\varphi(Y_1)) + \frac{\rho_m}{(2\rho_m - m)^2}g(\varphi(X_1),Y_1) \\ &\quad + \frac{m-\rho_m}{(2\rho_m - m)^2}g(X_1,\varphi(Y_1)) - \frac{(m-\rho_m)\rho_m}{(2\rho_m - m)^2}g(X_1,Y_1) \\ &= -\frac{1}{(2\rho_m - m)^2}\left(g\left(X_1,\varphi^2(Y_1)\right)\right) + \frac{\rho_m}{(2\rho_m - m)^2}g(X_1,\varphi(Y_1)) \\ &\quad + \frac{m-\rho_m}{(2\rho_m - m)^2}g(X_1,\varphi(Y_1)) - \frac{(m-\rho_m)\rho_m}{(2\rho_m - m)^2}g(X_1,Y_1) \\ &= \frac{-m}{(2\rho_m - m)^2}g(X_1,\varphi(Y_1)) + \frac{1}{(2\rho_m - m)^2}g(X_1,Y_1) \\ &\quad + \frac{\rho_m}{(2\rho_m - m)^2}g(X_1,\varphi(Y_1)) + \frac{m-\rho_m}{(2\rho_m - m)^2}g(X_1,\varphi(Y_1)) \\ &\quad - \frac{(m-\rho_m)\rho_m}{(2\rho_m - m)^2}g(X_1,Y_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

iii) $\varphi$ hemen hemen bronz yapısının Nijenhuis tensörü,

$$N_{\varphi}(X_1,Y_1)=\varphi^2[X_1,Y_1]+[\varphi(X_1),\varphi(Y_1)]-\varphi[\varphi(X_1),Y_1]-\varphi[X_1,\varphi(Y_1)]$$

dir. O halde

$$\begin{aligned}N_{\varphi}(\varphi(X_1),Y_1)&=\varphi^2[\varphi(X_1),Y_1]+\left[\varphi^2(X_1),\varphi(Y_1)\right]-\varphi\left[\varphi^2(X_1),Y_1\right]-\varphi[\varphi(X_1),\varphi(Y_1)]\\&=(m\varphi-I_d)[\varphi(X_1),Y_1]+m[\varphi(X_1),\varphi(Y_1)]-[X_1,\varphi(Y_1)]-m\varphi[\varphi(X_1),Y_1]\\&\quad+\varphi[X_1,Y_1]-\varphi[\varphi(X_1),\varphi(Y_1)]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}N_{\varphi}(X_1,\varphi(Y_1))&=\varphi^2[X_1,\varphi(Y_1)]+\left[\varphi(X_1),\varphi^2(Y_1)\right]-\varphi[\varphi(X_1),\varphi(Y_1)]-\varphi\left[X_1,\varphi^2(Y_1)\right]\\&=(m\varphi-I_d)[X_1,\varphi(Y_1)]+m[\varphi(X_1),\varphi(Y_1)]-[\varphi(X_1),Y_1]-\varphi[\varphi(X_1),\varphi(Y_1)]\\&\quad-m\varphi[X_1,\varphi(Y_1)]+\varphi[X_1,Y_1]\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $N_{\varphi}(\varphi(X_1),Y_1)=N_{\varphi}(X_1,\varphi(Y_1))$ elde edilir.

## 7.2. İntegrallenabilirlik

7.2.1. Önerme

$(M^r,g)$ bir Riemann manifold ve $P$, $M^r$ üzerinde hemen hemen çarpım Riemann yapı olsun. Eğer $P$, $\nabla^g$ Levi- Civita konneksiyonuna göre paralel (yani, $\nabla^g P=0$) ise hemen hemen çarpım Riemann yapıya bir lokal çarpım yapıdır [3].

7.2.2. Önerme

$P$ hemen hemen çarpım yapı olmak üzere $\nabla$ bir simetrik lineer konneksiyon ise $P$ nin

Nijenhuis tensörü,

$$N_P(X_1,Y_1) = (\nabla_{PX_1}P)Y_1 - (\nabla_{PY_1}P)X_1 - P(\nabla_{X_1}P)Y_1 + P(\nabla_{Y_1}P)X_1$$

eşitliğini sağlar [1].

7.2.3. Önerme

$(M^r, \varphi, g)$ lokal çarpım Riemann manifold ise $\varphi$ hemen hemen bronz yapısı integrallenebilirdir.

*İspat*

$\nabla$, $M^r$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Önerme 7.2.2.

$$N_\varphi(X_1,Y_1) = \left(\nabla_{\varphi X_1}\varphi\right)Y_1 - \left(\nabla_{\varphi Y_1}\varphi\right)X_1 - \varphi(\nabla_{X_1}\varphi)Y_1 + \varphi(\nabla_{Y_1}\varphi)X_1$$

elde edilir.

Ayrıca $M^r$ hemen hemen bronz Riemann manifoldu lokal çarpım olduğundan, Önerme 7.2.1. göz önünde bulundurulduğunda

$$\nabla\varphi = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikler dikkate alındığında $N_\varphi = 0$ ve dolayısıyla $M^r$ üzerindeki $\varphi$ hemen hemen bronz yapısı integrallenebilirdir.

7.2.4. Teorem

$\widetilde{\nabla}$ herhangi bir lineer konneksiyon ve $Q$, $(1,2)$ tipinden tensör alanı olmak üzere $O_PQ$,

$$O_PQ(X_1,Y_1) = \frac{1}{2}[Q(X_1,Y_1) + PQ(X_1,PY_1)] \tag{7.1}$$

şeklinde tanımlı hemen hemen çarpım yapıya karşılık gelen bir Obata operatörü olsun.

$\nabla\varphi = 0$ olacak şekildeki $\nabla$ lineer konneksiyonların cümlesi

$$\nabla_{X_1}Y_1 = \frac{1}{m^2-4}\left[\left(m^2-2\right)\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1 + 2\varphi\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}JY_1\right) - m\varphi\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1\right) - m\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right)\right] + O_PQ\left(X_1,Y_1\right) \tag{7.2}$$

dir.

*İspat*

$\nabla_{X_1}Y_1 = \frac{1}{2}\left[\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1 + P\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}PY_1\right)\right]$ olduğundan, Eş. 3.3 den faydalanırsak,

$$\begin{aligned}
\nabla_{X_1}Y_1 &= \frac{1}{2}\left[\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1 + \frac{1}{\sqrt{m^2-4}}\left(2\varphi - mI\right)\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}PY_1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1 + \frac{1}{\sqrt{m^2-4}}2\varphi\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}\left(\frac{1}{\sqrt{m^2-4}}\left(2\varphi - mI\right)\right)Y_1\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{m}{\sqrt{m^2-4}}I\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}\left(\frac{1}{\sqrt{m^2-4}}\left(2\varphi - mI\right)\right)Y_1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1 + \frac{4\varphi}{m^2-4}\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) - \frac{2m\varphi}{m^2-4}I\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{2m}{m^2-4}I\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) + \frac{m^2I^2}{m^2-4}\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2m^2-4}{m^2-4}\right)\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1 + \frac{4\varphi}{m^2-4}\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{2m\varphi}{m^2-4}I\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1\right) - \frac{2m}{m^2-4}I\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right)\right] \\
&= \frac{1}{m^2-4}\left[\left(m^2-2\right)\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1 + 2\varphi\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) - m\varphi\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1\right) - m\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi

$$\nabla_{X_1}Y_1 = \frac{1}{m^2-4}\left[\left(m^2-2\right)\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1 + 2\varphi\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) - m\varphi\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}Y_1\right) - m\left(\overset{\smile}{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right)\right] + O_PQ\left(X_1,Y_1\right)$$

eşitliği yardımı ile $\nabla\varphi = 0$ olduğunu gösterelim. Buna göre Tanım 2.4.4. den

$$(\nabla_{X_1}\varphi)Y_1 = \underbrace{\nabla_{X_1}\varphi Y_1}_{(I)} - \underbrace{\varphi(\nabla_{X_1}Y_1)}_{(II)} = 0$$

olmalıdır.

$(I)$ ifadesi açılırsa, Eş. 7.2 den

$$\begin{aligned}\nabla_{X_1}\varphi Y_1 = \frac{1}{m^2-4}\Big[&\left(m^2-2\right)\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1 + 2\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi^2 Y_1\right) - m\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) - m\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi^2 Y_1\right)\Big] \\ &+ O_P Q(X_1,\varphi Y_1)\end{aligned}$$

olur. $\varphi^2 = m\varphi - I_d$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\nabla_{X_1}\varphi Y_1 &= \frac{1}{m^2-4}\Big[m^2\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) - 2\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) + 2m\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) - 2\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}Y_1\right) \\ &\quad -m\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) - m^2\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) + m\left(\breve{\nabla}_{X_1}Y_1\right)\Big] + O_P Q(X_1,\varphi Y_1) \\ &= \frac{1}{m^2-4}\Big[-2\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) + m\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) - 2\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}Y_1\right) + m\left(\breve{\nabla}_{X_1}Y_1\right)\Big] \\ &\quad + O_P Q(X_1,\varphi Y_1)\end{aligned}$$

bulunur.

$(II)$ ifadesini açarsak, Eş. 7.2 den

$$\begin{aligned}\varphi(\nabla_{X_1}Y_1) = \frac{1}{m^2-4}\Big[&\left(m^2-2\right)\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}Y_1\right) + 2\varphi^2\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) \\ &-m\varphi^2\left(\breve{\nabla}_{X_1}Y_1\right) - m\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right)\Big] + \varphi\left(O_P Q(X_1,Y_1)\right)\end{aligned}$$

bulunur. $\varphi^2 = m\varphi - I_d$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\varphi(\nabla_{X_1}Y_1) &= \frac{1}{m^2-4}\Big[m^2\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}Y_1\right) - 2\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}Y_1\right) - 2\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) - 2\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) \\ &\quad -m^2\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}Y_1\right) + m\left(\breve{\nabla}_{X_1}Y_1\right) - m\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right)\Big] + \varphi\left(O_P Q(X_1,Y_1)\right) \\ &= \frac{1}{m^2-4}\Big[-2\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}Y_1\right) + m\varphi\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) - 2\left(\breve{\nabla}_{X_1}\varphi Y_1\right) + m\left(\breve{\nabla}_{X_1}Y_1\right)\Big] \\ &\quad + \varphi\left(O_P Q(X_1,Y_1)\right)\end{aligned}$$

$O_PQ(X_1,\varphi Y_1)$ ifadesinin $\varphi(O_PQ(X_1,Y_1))$ ifadesine eşit olduğunu gösterelim. Eş. 7.1 den

$$O_PQ(X_1,\varphi Y_1)=\frac{1}{2}\left[Q(X_1,\varphi Y_1)+PQ(X_1,P\varphi Y_1)\right]$$

olur.

$P\varphi=\frac{1}{2}\left(mPI_d+\sqrt{m^2-4}\right)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}O_PQ(X_1,\varphi Y_1)&=\frac{1}{2}\left[Q(X_1,\varphi Y_1)+PQ(X_1,m\frac{P}{2}Y_1+\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}Y_1)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[Q(X_1,\varphi Y_1)+\frac{m}{2}PQ(X_1,PY_1)+\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}PQ(X_1,Y_1)\right]\end{aligned}$$

bulunur.

Eş. 3.13 den

$$\begin{aligned}O_PQ(X_1,\varphi Y_1)&=\frac{1}{2}\left[Q(X_1,\varphi Y_1)+\frac{m}{2}PQ(X_1,PY_1)+\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}PQ(X_1,Y_1)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[Q\left(X_1,\frac{m}{2}Y_1+\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}PY_1\right)\right.\\&\quad\left.+\frac{m}{2}PQ(X_1,PY_1)+\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}PQ(X_1,Y_1)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{m}{2}Q(X_1,Y_1)+\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}Q(X_1,PY_1)\right.\\&\quad\left.+\frac{m}{2}PQ(X_1,PY_1)+\frac{\sqrt{m^2-4}}{2}PQ(X_1,Y_1)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(m+\sqrt{m^2-4}P\right)Q(X_1,Y_1)\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2-4}+mP\right)Q(X_1,PY_1)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\varphi Q(X_1,Y_1)+P\varphi Q(X_1,PY_1)\right]\end{aligned}$$

olur.

$\varphi(O_PQ(X_1,Y_1))$ Eş. 7.1 den

$$\varphi\left(O_P Q\left(X_1, Y_1\right)\right) = \frac{1}{2}\left[\varphi Q(X_1, Y_1) + P\varphi Q(X_1, PY_1)\right]$$

olup $O_P Q\left(X_1, \varphi Y_1\right) = \left(O_P Q\left(X_1, Y_1\right)\right)$ dir.

Sonuç olarak,

$$\left(\nabla_{X_1}\varphi\right) Y_1 = \nabla_{X_1}\varphi Y_1 - \varphi\left(\nabla_{X_1} Y_1\right) = 0$$

bulunur. Böylece $\nabla\varphi = 0$ dır.

Son olarak elde ettiğimiz hemen hemen bronz yapının reel düzlemde bir örneğini verelim.

*Örnek*

$\mathbb{R}^2$ de projeksiyon operatörleri olan $n$ ve $t$ yi aşağıdaki gibi seçelim.

$$n = \frac{f^2}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial x}\otimes dx + \frac{fg}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial x}\otimes dy + \frac{fg}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial y}\otimes dx + \frac{g^2}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial y}\otimes dy,$$

$$t = \frac{g^2}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial x}\otimes dx - \frac{fg}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial x}\otimes dy - \frac{fg}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial y}\otimes dx + \frac{f^2}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial y}\otimes dy.$$

Bu operatörlere karşılık gelen dağılımlar ise;

$$D_n = Sp\left\{f\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y}\right\},$$

$$D_t = Sp\left\{g\frac{\partial}{\partial x} - f\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

dir.

Gerçekten $D_n + D_t = T\mathbb{R}^2$ ve $D_n \cap D_t = \emptyset$ dir. $n$ ve $t$ projeksiyon tensörleri $n^2 = n$, $t^2 = t$, $tn = nt = 0$ ve $n + t = I_d$ şartlarını sağlar.

Eş. 6.3 dan $D_n$ ve $D_t$ dağılımları

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\rho_m f^2+(m-\rho_m)g^2}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{(2\rho_m-m)\,fg}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{(2\rho_m-m)\,fg}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{(m-\rho_m)f^2+\rho_m g^2}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial y}$$

şeklinde tanımlı hemen hemen bronz yapı ile ilişkilendirilebilir.

$$\begin{aligned}
N_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) &= \varphi^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]+\left[\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\\
&\quad-\varphi\left[\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),\frac{\partial}{\partial y}\right]-\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x},\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\\
&=\varphi^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]+\left[\frac{\rho_m f^2+(m-\rho_m)g^2}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{(2\rho_m-m)\,fg}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial y},\right.\\
&\quad\left.\frac{(2\rho_m-m)\,fg}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{(m-\rho_m)f^2+\rho_m g^2}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&\quad-\varphi\left[\frac{\rho_m f^2+(m-\rho_m)g^2}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{(2\rho_m-m)\,fg}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&\quad-\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{(2\rho_m-m)\,fg}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{(m-\rho_m)f^2+\rho_m g^2}{f^2+g^2}\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&=\varphi^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]+\frac{\rho_m f^2+(m-\rho_m)g^2}{(f^2+g^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial x},\right.\\
&\quad\left.(2\rho_m-m)\,fg\frac{\partial}{\partial x}+(m-\rho_m)f^2+\rho_m g^2\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&\quad+\frac{(2\rho_m-m)\,fg}{(f^2+g^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial g},(2\rho_m-m)\,fg\frac{\partial}{\partial x}+(m-\rho_m)f^2+\rho_m g^2\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&\quad-\frac{\rho_m f^2+(m-\rho_m)g^2}{f^2+g^2}\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]-\frac{(2\rho_m-m)\,fg}{f^2+g^2}\varphi\left[\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&\quad-\frac{(2\rho_m-m)\,fg}{f^2+g^2}\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right]-\frac{(m-\rho_m)f^2+\rho_m g^2}{f^2+g^2}\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&=\varphi^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]+\frac{\left(\rho_m f^2+(m-\rho_m)g^2\right)(2\rho_m-m)\,fg}{(f^2+g^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right]\\
&\quad+\frac{\left(\rho_m f^2+(m-\rho_m)g^2\right)\left((m-\rho_m)f^2+\rho_m g^2\right)}{(f^2+g^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&\quad+\frac{(2\rho_m-m)^2 f^2 g^2}{(f^2+g^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x}\right]\\
&\quad+\frac{(2\rho_m-m)\,fg\left((m-\rho_m)f^2+\rho_m g^2\right)}{(f^2+g^2)^2}\left[\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\rho_m f^2+(m-\rho_m)g^2}{f^2+g^2}\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]-\frac{(2\rho_m-m)fg}{f^2+g^2}\varphi\left[\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&-\frac{(2\rho_m-m)fg}{f^2+g^2}\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}\right]-\frac{(m-\rho_m)f^2+\rho_m g^2}{f^2+g^2}\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&=\varphi^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]+\frac{\left(\rho_m f^2+(m-\rho_m)g^2\right)\left((m-\rho_m)f^2+\rho_m g^2\right)}{\left(f^2+g^2\right)^2}\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&-\frac{(2\rho_m-m)^2 f^2g^2}{\left(f^2+g^2\right)^2}\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]-\frac{(m-\rho_m)f^2+\rho_m g^2}{f^2+g^2}\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&-\frac{\rho_m f^2+(m-\rho_m)g^2}{f^2+g^2}\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&=\varphi^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]-m\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]+\left(\frac{\rho_m(m-\rho_m)\left(f^4+g^4\right)}{\left(f^2+g^2\right)^2}\right.\\
&\left.+\frac{f^2g^2\left(\rho_m^2+(m-\rho_m)^2-\left(4\rho_m^2-4\rho_m+m^2\right)\right)}{\left(f^2+g^2\right)^2}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&=\varphi^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]-m\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]+I\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&=\varphi^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]-\varphi^2\left[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right]\\
&=0
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde, $N_\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=0$ olduğundan elde edilen reel düzlemdeki hemen hemen bronz yapı integrallenebilirdir.

# 8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu yükseklisans tezinde yeni hemen hemen bronz ortalamasını kullanarak yeni hemen hemen bronz yapıları araştırdık. Diferansiyellenebilir manifoldlarda, $m \in \mathbb{R} \setminus [-2,2]$ için

$$Q(\varphi) = \varphi^2 - m\varphi + Id$$

yapı polinomuna sahip yeni hemen hemen bronz yapı tanımlanmış ve diferansiyellenebilir manifold üzerinde bu hemen hemen bronz yapının geometrisini incelemek için bir hemen hemen çarpım yapısı kullanılmıştır.

# KAYNAKLAR


1. Hreţcanu, C.E. and Crasmareanu,M. (2013). Metallic Structures on Riemannian Manifolds. *Revista Union Math Argentina*, 54(2), 15-27.

2. Şahin, B. (2018). Almost poly-norden manifolds. *International Journal of Maps in Mathematics*, 1(1), 68-79.

3. Crasmareanu, M. and Hreţcanu, C.E. (2008). Golden differential geometry. *Chaos, Solitons and Fractals*, 38(5), 1229–1238

4. Goel, D .S. (1975). Almost tangent structures. *Kodai Mathematical Seminar Reports*, 26, 187-193.

5. Özkan, M. and Yılmaz, F. (2018). Metallic structures on differential manifolds. *Journal of Science and Arts*, 3(44), 645-660.

6. De Spinadel, V. W. (1999). The family of metallic means. *Visual Mathematics*, 1(3), 1–6.

7. İnternet: Kalia, S. (December, 2011). The generalizations of the Golden ratio: their poers, continued fractions, and convergents. Web: http://math.mit.edu/research/highschool/primes/papers.php. 20-50.

8. Pandey and Sameer, P. K., (2018). Bronze differential geometry. *Journal of Science and Arts*, 4(45), 973–980.

9. Özkan, M. and Doğan, S. (2022). Almost bronze structure on differentiable manifolds. *Hindawi Journal of Mathematics*, ID 6940387, 11.

10. Brickell, F., Clark, R. S. (1970). Differentiable Manifolds. *VRN Company*, London, 14-25, 34-46, 53-63, 109-119, 152-159.

11. Okubo, T. (1987). *Differential Geometry*. New York: Marcel Dekker Incorporated, 19-28, 34-44.

12. do Carmo Valero, M. P. (1992). *Riemannian Geometry.* Boston: Birkhäuser, 1-35.

13. Tu, L. W. (2007). *An Introduction to Manifolds.* New York: Spinger, 129-140.

14. Civelek, Ş. (1988). *İkinci Mertebeden Genişletilmiş Manifoldlar Üzerinde Liftler*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 35-45.

15. Hacısalihoğlu, H. H., Ekmekçi, N. (2003). *Tensör Geometri.* Ankara: Hacısalihoğlu Yayınları, 79-80.

16. Hacısalihoğlu, H. H. (2006). *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*. Elazığ: Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 25-34, 40-60.

17. Leon, M., Rodrigues, P. R. (1989). *Methods of Di¤erential Geometry in Analytical Mechanics*. Netherlands: Elsevier Science Publishers, 93.

18. Yano, K., Kon, M. (1984). *Structures on Manifolds*. World Scientific, 170-180.

19. Goldberg, S. I. and Yano, K. (1970). Polynomial Structures on Manifolds. *Kodai Mathematical Seminar Reports,* 22, 199-218.

20. Cruceanu, V. (2006). On almost biproduct complex manifolds. *Analele Ştiintifice ale Universităţii "Alexandru loan Cuza" Iaşi. Matematică*, 52(1), 5-24.

21. Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R. (1972). *Connection, Curvature and Cohomology.* New York: Acedemic Press, (1-2), 38-41, 44-84, 87-99.

22. Bejancu, A, and Farran, H. R. (2006). *Foliations and Geometric Structures.* New York: Mathematics and its Applications, Springer, 580, 1-7.

23. Lee, J. M. (2009). *Manifolds and Differential Geometry*. United States of America: American Mathematical Society, 467-478.

24. Özdemir, F., Crasmareanu, M. (2010). Geometrical Objects Associated to a Substructure. *Turkish Journal of Mathematics,* 34, 1-12.

25. Das, L.S., Nikić, J., and Nivas, R. (2006). Parallelism of distributions and geodesics on F($a_1$, $a_2$, ...,$a_n$)-structure Lagrangian manifolds. *Differential Geometry-Dynamical System*, 8,82-89.

26. Lounesto, P. (2001). *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge University Press: United Kingdom, 20-50

27. Kantor, I.L., Lodovnikov, A.S. (1989). *Hypercomplex Numbers: An Elementary Introduction to Algebras*. New York: Springer-Verlag.

28. Hacısalihoğlu, H.H. (1983). *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Ankara: Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 78-90.

29. Özdemir, M., Ergin, A.A. (2006). Rotations with unit timelike quaternions in minkowski 3-space. *Journal of Geometry Physics*, 56, 322-336.

30. Cushman, R. H. and Bates, L. M. (2015). *Global Aspects of Classical Integrable Systems*. Switzeland: Birkhäuser, 20-50.

31. Etayo, F., Santamaria, R. and Upadhyay, A. (2017). On the geometry of almost golden Riemmannian manifolds, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(5),187.

32. Ianuş, S. (1971). Sur les structers presque produit de varietes a connection lineaire, *Comptes Rendus de I'Académie des Sciences*, 272, 734-735.

33. Gezer, A., Cengiz, N. and Salimov, A. (2013). On integrability of Golden Riemannian structures. *Turkish Journal of Mathematics*, 37(4),693-703.

34. Gezer, A. and Karaman, Ç. (2015) On metallic Riemannian structures. *Turkish Journal of Mathematics*, 39(6), 954-962.

35. Gök, M., Keleş, S., and Kılıç, E. (2019). Schouten and Vranceanu connections on golden manifolds. *International Electronic Journal of Geometry*, 12(2), 169-181.

36. Kacimi, B., Özkan, M., and Hathout, F. (2021). Bifoliated homotopy invariant and metallic submersions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 18(4), 163.

37. Miron, R. and Anastasiei, M. (1994). *The Geometry of Lagrange Spaces: Theory and Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 20-50.

38. Özkan, M.and Peltek, B. (2016). A new structure on manifolds: silver structure. *International Electronic Journal of Geometry*, 9(2), 59-69.

39. Procesi, C. (2007). *Lie Groups: An Approach through Invariants and Representations*. New York: Springer, 20-50.

40. Vanžura, J. (1976). Integrability conditions for polynomial structures. *Kodai Mathematical Seminar Reports*, 27(1-2), 42–50.

41. Yano, K. and Ishihara, S. (1973). Tangent and Cotangent Bundle. *Marcel Dekker, New York*. 20-50.

42. Yardımcı, E. H. and Yaylı, Y. (2014). Golden quaternionic structures. *International Electronic Journal of Pure and Applied Mathematics*, 7(3), 109-125.



*Gazili olmak ayrıcalıktır*