
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

KONVEKSİYON-DİFÜZYON-REAKSİYON TİPLİ DENKLEMLERİN SONLU ELEMAN ÇÖZÜMLERİ

Meral YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2016

Meral YILDIRIM tarafından hazırlanan "KONVEKSİYON-DİFÜZYON-REAKSİYON TİPLİ DENKLEMLERİN SONLU ELEMAN ÇÖZÜMLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ...……

Başkan : Prof. Dr. Fatma AYAZ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ……...

Üye : Doç. Dr. Rabia AKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ……...

Tez Savunma Tarihi: 09/12/2016

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……..…….

Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Meral YILDIRIM

09/12/2016

KONVEKSİYON-DİFÜZYON-REAKSİYON TİPLİ DENKLEMLERİN
SONLU ELEMAN ÇÖZÜMLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Meral YILDIRIM

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Aralık 2016

ÖZET

Bu çalışmada konveksiyon-difüzyon-reaksiyon tipli denklemlerin sonlu eleman çözümleri incelenmiştir. İlk önce ilgili uzaylar tanımlanarak denklem zayıf halde yazılmıştır. Ardından zayıf hali üzerinden denklemin koşullu kararlılığı ifade edilmiştir. Son olarak farklı ε katsayıları için denklemin nümerik çözümleri bir test problemi vasıtasıyla sunulmuştur.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Sonlu elemanlar yöntemi, şekil fonksiyonları, konveksiyon-difüzyon-reaksiyon denklemi
Sayfa Adedi : 53
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK

THE FINITE ELEMENT SOLUTION OF CONVECTION-DIFFUSION-REACTION TYPE EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Meral YILDIRIM

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2016

ABSTRACT

In this study, the finite element solution of convection-diffusion-reaction type equations are investigated. Firstly, the relevant spaces are defined and the equation is written in the weak form. Then, the conditional stability is given on the weak form. Finally, numerical solutions of the problem is presented for various ε through a test problem.

Science Code : 20406
Key Words : Finite element method, shape fuctions, convection-diffusion-reaction equation
Page Number : 53
Supervisor : Assist. Prof. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin her aşamasında kıymetli zamanını ayırarak görüş ve önerileri ile bana destek olan danışman hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Aytekin Bayram ÇIBIK'a ve maddi manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim aileme en içten dileklerimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ ix

ŞEKİLLERİN LİSTESİ x

SİMGELER VE KISALTMALAR xi

1. GİRİŞ 1

2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ 3

2.1. Sonlu Elemanlar Yönteminin Tarihi 3

2.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi Hakkında Genel Bilgiler 4

2.3. Elemanlara Ayırma 5

2.4. Numaralandırma Yöntemi 6

2.5. Sonlu Elemanlar Yönteminin Çözüm Adımları 7

2.6. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları 8

2.7. Sonlu Elemanlar Yönteminin Dezavantajları 8

2.8. Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulama Alanları 8

2.9. Diğer Yöntemlerle Karşılaştırılması 9

2.10. Şekil Fonksiyonları 10

3. BİR BOYUTLU SONLU ELEMANLAR 13

3.1. Lineer Sonlu Eleman Şekil Fonksiyonları 13

3.2. İkinci Dereceden Sonlu Eleman Şekil Fonksiyonları 15

3.3. Üçüncü Dereceden Sonlu Eleman Şekil Fonksiyonları 18

Sayfa

4. İKİ BOYUTLU SONLU ELEMANLAR 19

4.1. Lineer Üçgen Eleman Şekil Fonksiyonları 19

4.2. Lineer Dörtgen Eleman Şekil Fonksiyonları..... 28

5. KONVEKSİYON-DİFÜZYON-REAKSİYON PROBLEMLERİ 33

5.1. Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denklemleri..... 33

5.2. Fonksiyon Uzayları ve Temel Kavramlar 34

5.3. Sabit Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Probleminin Zayıf formu... 40

5.4. Sonlu Eleman Modeli..... 45

6. NÜMERİK TESTLER 47

7. SONUÇ VE ÖNERİLER 49

KAYNAKLAR 51

ÖZGEÇMİŞ 53

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 2.1. Bir, iki ve üç boyutlu sonlu elemanlar 6

Çizelge 3.1. Doğrusal şekil fonksiyonu 14

Çizelge 3.2. İkinci dereceden şekil fonksiyonu 17

Çizelge 3.3. Üçüncü dereceden şekil fonksiyonu 18

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. Bir sürekli ortam ve sonlu eleman ağı 5

Şekil 2.2. Sayısal metotlarla problemin modellenmesi..... 10

Şekil 4.1. Dikdörtgen levha için oluşturulmuş üçgen eleman ağı..... 19

Şekil 4.2. Lineer üçgen eleman..... 20

Şekil 4.3. Lineer üçgen eleman ve şekil fonksiyonları 22

Şekil 4.3. (a) Şekil fonksiyonu N_1 22

Şekil 4.3. (b) Şekil fonksiyonu N_2 22

Şekil 4.3. (c) Şekil fonksiyonu N_3 22

Şekil 4.4. Üçgen eleman doğal koordinat dönüşümü 28

Şekil 4.5. Lineer dörtgen eleman ağ yapısı..... 29

Şekil 4.6. Dikdörtgen eleman koordinat sistemi..... 29

Şekil 4.7. Dikdörtgen eleman ve doğal koordinat sistemi 30

Şekil 6.1. $\varepsilon = 0.01$ için elde edilen çözüm..... 48

Şekil 6.2. $\varepsilon = 0.001$ için elde edilen çözüm 48

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$	Doğal koordinatlar
$\boldsymbol{\Omega}$	Tanım bölgesi
$\boldsymbol{\partial\Omega}$	Ω bölgesinin sınırı
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Difüzyon katsayısı
$\boldsymbol{\nabla u}$	Gradient operatörü $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$
$\boldsymbol{\nabla^2 u}$	Laplace operatörü $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$
$(.,.)$	İç çarpım
$\|.\|$	Norm
$\left(\mathrm{X}, (.,.)\right)$	İç çarpım uzayı
$(\mathbf{X}, \|.\|)$	Normlu vektör uzayı
$\boldsymbol{\varphi(x)}$	Skaler değerli fonksiyon
$\boldsymbol{A_e}$	Üçgen elemanın alanı
$\boldsymbol{B}(.,.)$	Bilineer form
$\boldsymbol{d_e}$	Düğüm noktası yer değiştirme vektörü
$\{\boldsymbol{f^e}\}$	Eleman vektör
$\boldsymbol{H^1}(\Omega)$	$L^2(\Omega)$ uzayının sobolev alt uzayı
$\boldsymbol{H_0^1}(\Omega)$	Ω sınırlarında sıfır değerini alan $H^1(\Omega)$ uzayının alt uzayı
$\boldsymbol{I}(.)$	Lineer form
$[\boldsymbol{K^e}]$	Eleman matris
$\boldsymbol{L^2}(\Omega)$	Karesi integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{L_0^2}(\Omega)$	Ω sınırlarında sıfır değerini alan $\mathrm{L}^2(\Omega)$ uzayının alt uzayı
n	Normal vektör

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{N_i}$	Şekil fonksiyonu
$\{\boldsymbol{Q^e}\}$	Eleman vektör
$\boldsymbol{P}$	Moment matrisi
s	Reaksiyon katsayısı
$\boldsymbol{u^e}$	Herhangi bir noktadaki yer değiştirme
w	Ağırlık fonksiyonu
$\boldsymbol{W_p^m(\Omega)}$	Sobolev uzayı

1. GİRİŞ

Bu tezde, konveksiyon-difüzyon-reaksiyon tipli denklemlerin sonlu eleman çözümleri incelenmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi ile ilgili ayrıntılı bilgiler izleyen alt kısımlarda başlıklar halinde sunulmuştur.

2. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

2.1. Sonlu Elemanlar Yönteminin Tarihi

Sonlu elemanlar metodu ilk olarak yapı analizinde kullanılmaya başlandı. İlk çalışmalar 1941'de Hrennikoff ve 1943'te Mc Henry tarafından geliştirilen yarı analitik analiz metotlarıdır. 1960'da Argyis ve Kelsey virtuel iş prensibini kullanarak bir direkt yaklaşım metodu geliştirmiştir. 1956'da Turner, Clough, Martin ve Topp bir üçgen eleman için rijidlik matrisini oluşturmuştur. "Sonlu Elemanlar" terimi ilk defa 1960 yılında Clough tarafından kullanılmıştır. İki boyutlu teoriden sonra metodun üç boyutlu problemlere uygulanması 1964'te Argyis tarafından kolayca gerçekleştirilmiştir. Bilim adamları 1960'li yılların başlarında lineer olmayan problemlerle ilgilenmeye başladılar. 1960'da Turner, Dill, Martin ve Melosh geometrik olarak lineer olmayan problemler için bir çözüm tekniği geliştirdi. Sonlu elemanlar metoduyla stabilite analizi ise ilk kez Martin tarafından 1965'te tartışılmıştır. 1966'da Zienkiewicz, Irons ve Nath ile 1969'da Koening ve Davids, statik problemlerin yanı sıra dinamik problemleri de sonlu elemanlar metoduyla incelemeye başlamışlardır. 1943 yılında Courant bölgesel sürekli lineer yaklaşım kullanarak bir burulma problemi için çözüm üretmiştir.

Yapı alanı dışındaki problemlerin sonlu elemanlar metoduyla çözümü 1960 'li yıllarda başlamıştır. Örneğin 1965'te Zienkiewicz ve Cheung sonlu elemanlar metodu ile Poisson denklemini çözmüştür. 1970'de ise Doctors metodu potansiyel akışa uygulamıştır. Sonlu elemanlar metodu geliştirilerek ısı transferi, yeraltı sularının akışı, manyetik alan ve diğer birçok alana uygulanmaktadır [1].

Günümüzde sonlu elemanlar yönteminin çeşitli yönleri, matematiksel analizin yaklaşımlar teorisi dalında, uygulamalı matematiğin sayısal yöntemler dalında, mühendislik bilimlerinin hemen hemen bütün dallarında ve bilgisayar bilimlerinin paket programlar dalında hızla gelişmektedir. Bu açıdan, bu kadar çok yönlü gelişen benzeri bir yöntemin olmadığı söylenebilir [2].

2.2. Sonlu Elemanlar Yöntemi Hakkında Genel Bilgiler

Klasik sayısal analizi de içeren bu yöntem, özellikle son otuz yılda bilgisayarların teknolojik ve bilimsel araştırmalarda çok yaygın kullanılması sonucu, yeni sayısal yöntem ve algoritmalarla zenginleşerek her bilim dalında kullanılan önemli bir araç haline gelmiştir. Bu kapsamda, yeni oluşan yöntemlerin başında, hem matematik hem de mühendislik bilimleri açısından, kuşkusuz "Sonlu Elemanlar Yöntemi " gelmektedir [2].

Sonlu elemanlar yöntemi "parçadan bütüne gitme" genel prensibine dayanmaktadır. Karmaşık olan problemlerin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesiyle tam çözümün bulunduğu bir çözüm şeklidir. Karmaşık bir problem, kavranması daha kolay alt problemlere ayrılarak daha anlaşılır bir hale getirilir. Oluşturulan alt problemler çözülüp birleştirilerek esas problemin çözümü yapılır. Basitleştirilmeye gidilmesi sonucu doğru sonuç yerine yaklaşık bir sonuç bulunmaktadır. Öyle problemler vardır ki, tam çözüm imkânsız kabul edilerek yaklaşık çözüm tek yol olarak benimsenir [3,4].

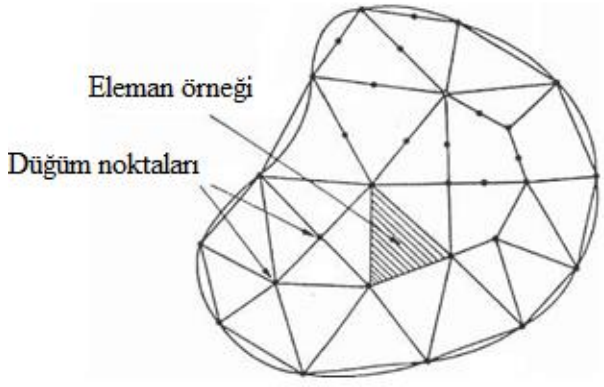
Sonlu elemanlar yönteminde, çözüm bölgesi çok sayıda sonlu ve birbirine bağlı elemanlardan oluşmaktadır [3]. Metodun üç temel niteliği vardır: İlk olarak, geometrik olarak karmaşık olan çözüm bölgesi *sonlu eleman* olarak adlandırılan geometrik olarak basit alt bölgelere ayrılır. İkincisi her elemandaki sürekli fonksiyonlar, cebirsel polinomların lineer kombinasyonu olarak tanımlanabileceği kabul edilir. Üçüncü kabul ise, aranan değerlerin her eleman içinde sürekli olan tanım denklemlerinin belirli noktalardaki (düğüm noktaları) değerleri elde edilmesinin problemin çözümünde yeterli olmasıdır. Kullanılan yaklaşım fonksiyonları interpolasyon teorisinin genel kavramları kullanılarak polinomlardan seçilir. Seçilen polinomların derecesi ise çözülecek problemin tanım denkleminin derecesine ve çözüm yapılacak elemandaki düğüm sayısına bağlıdır.

Sonlu elemanlar metodunun temel prensibi, öncelikle bir elemana ait sistem özelliklerini içeren denklemlerin çıkartılıp tüm sistemi temsil edecek şekilde eleman denklemlerini birleştirerek sisteme ait lineer denklem takımının elde edilmesidir [4].

2.3. Elemanlara Ayırma

Sonlu eleman probleminin çözümünde ilk adım eleman tipinin belirlenmesi ve çözüm bölgesinin elemanlara ayrılmasıdır [4]. Bütün cismin elemanlara bölünebilmesi için bir ağ yapısına ihtiyaç duyulmaktadır. Cismin boyutuna ve geometrisine uygun olarak seçilmiş elemanlara bölünmüş haline sayısal model denilmektedir. Mümkün olduğunca çok eleman kullanmak, kuvvet dağılımının daha duyarlı ölçülebilmesi açısından önemlidir [3].

Sonlu elemanlar yöntemi ile bir büyüklüğün ifade edilmesinde, problemin doğru biçimde tanımlanıp, değişkenlerin seçilmesinin ardından yapılacak ilk iş, büyüklüğü elemanlara ayırmaktır. Elemanlara ayırma işleminin doğru biçimde yapılması, çözümün doğruluğu açısından oldukça önemlidir. Elemanlar uygun şekilde seçilmeli ve problemin yapısına uygun olarak yerleştirilmelidir. Eleman seçiminde, elemanların boyutları ve sayıları sistemi en iyi temsil edecek, hesapları da en aza indirgeyecek biçimde olmalıdır. Genel olarak değişkenin ani değişim gösterdiği yerlerde elemanlar küçük seçilir. Uygun elemanlar seçmek kadar bu elemanları ve onların düğüm noktalarını, yani elemanların köşe noktalarını uygun numaralandırmak da, yöntemin doğru çalışması için önemlidir. Elemanların köşe noktaları sistem içerisinde elemanların birleşme noktalarını oluşturur ve düğüm noktaları olarak adlandırılır [5].



Şekil 2.1. Bir sürekli ortam ve sonlu eleman ağı [6]

Bu metotta Şekil 2.1 de görüldüğü gibi analizi yapılacak bir cisim, yapı veya sürekli ortam her birine eleman adı verilen sonlu (belirli) sayıda parçalara bölünür. Bu elemanlar birbirine düğüm noktaları olarak adlandırılan sonlu sayıda noktalarla bağlıdırlar. Her elemanın düğüm noktalarında bazı serbestlik dereceleri tanınır. Eleman davranışı bu

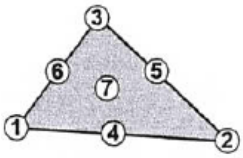
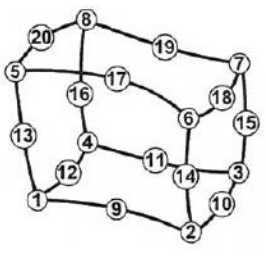
bilinmeyen serbestlik derecelerini içeren denklemlerle ifade edilmektedir. Gerek düğüm noktalarında gerekse eleman sınır yüzeylerinde bazı süreklilik şartları sağlandığında cismin veya yapının matematiksel bir modeli elde edilir. Böylece sonsuz serbestlik derecesi olan bir sürekli ortam sonlu serbestlik derecesi olan bir modele dönüştürülmektedir. Bu elde edilen modele yapının sonlu eleman ağı adı verilir.

Yapının sonlu elemanlara bölünmesinde değişik yollar kullanılır ki bu daha ziyade problemin türüne, çözümde istenilen hassasiyet derecesine ve yapılabilecek masraflara bağlıdır. Yapı az sayıda ve büyük elemanlara bölünecek olursa bilgisayar çözümü az zaman alır, fakat sonuçlar yaklaşıktır. Çok sayıda küçük elemanlar kullanılacak olursa daha doğru sonuçlar alınır [6].

2.4. Numaralandırma Yöntemi

Problemin ihtiyacına göre sonlu elemanlar, bir, iki ya da üç boyutlu olabilirler [7]. Düğüm numaraları sıralanırken belirli bir düzene uyulması (saat ibresi yönü gibi) hesaplamalarda kolaylık sağlar [4].

Çizelge 2.1. Bir, iki ve üç boyutlu sonlu elemanlar [7]

Bir Boyutlu Çubuk Eleman	 ①, ② : Kenar düğüm noktaları ③, ④ : Ara düğüm noktaları
İki Boyutlu Üçgen Eleman	 ①,②,③ : Köşe düğüm noktaları ④,⑤,⑥ : Kenar ortası düğüm noktaları ⑦ : İç düğüm noktası
Üç Boyutlu Tuğla Eleman	 ①,②,③,④ : Köşe düğüm noktaları ⑤,⑥,⑦,⑧ ⑨,⑩,⑪,⑫, : Kenar ortası düğüm noktaları ⑬,⑭,⑮,⑯ ⑰,⑱,⑲,⑳

2.5. Sonlu Elemanlar Yönteminin Çözüm Adımları

Bir problemin sonlu elemanlar analizindeki gerekli adımlar şunlardır:

1. Önceden seçilmiş sonlu elemanlar, verilen alan içinde yeniden ayrıklaştırılır.

(a) Önceden seçilmiş elemanların, sonlu eleman ağ yapısı oluşturulur.

(b) Elemanların, düğüm noktaları numaralandırılır.

(c) Problemin çözümü için gerekli olan geometrik özellikler oluşturulur.

2. Ağ yapısında tüm tipik elemanlar için eleman denklemleri türetilir.

(a) Tipik bir eleman üzerinde verilen diferansiyel denklemin varyasyonel formülasyonu oluşturulur.

(b) Tipik bir bağımlı değişken "u"

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i N_i$$

şeklinde varsayılarak, bu değişken adım 2a' da yerine yazılırsa,

$$[K^e]\{u^e\} = \{F^e\}$$

formunda eleman denklemleri elde edilir.

(c) Eleman interpolasyon fonksiyonu N_i türetilir ve eleman matrisleri hesaplanır.

3. Eleman denklemleri birleştirilir.

(a) Global düğümleri, eleman düğümleri ile ilişkilendirerek, birincil değişkenlerin elemanlar arası süreklilik koşulu belirlenir.

(b) İkincil değişkenler arasında denge koşulları sağlanır.

(c) Adım 3a ve 3b kullanılarak eleman denklemleri birleştirilir.

4. Problemin sınır koşulları ortaya konulur.

(a) Global birincil serbestlik derecesi belirlenir.

(b) Global ikincil serbestlik derecesi belirlenir.

5. Birleştirilmiş denklemler çözülür.

6. Sonuçlar değerlendirilir.

(a) Adım 5 de hesaplanan birincil serbestlik derecesinden elde edilen sonuçların sapmaları hesaplanır.

(b) Sonuçlar grafik ve (veya) tablo şeklinde sunulur [8].

2.6. Sonlu Elemanlar Yönteminin Avantajları

1. Düzensiz şekilli yapıları oldukça kolay bir biçimde modelleyebilmesi,
2. Genel yük durumlarının herhangi bir zorlukla karşılaşmadan belirlenebilmesi,
3. Eleman denklemleri ayrı ayrı sınıflandırıldığından farklı materyallerden oluşan yapıları modelleyebilmesi,
4. Çeşitli sınır koşullarının ele alınabilmesi,
5. Gerekli görüldüğü yerlerde küçük elemanların kullanımını mümkün hale getirmek için elemanların büyüklüklerinin değiştirilebilmesi,
6. Sonlu eleman modelini nispeten kolay ve ucuza değiştirilebilmesi,
7. Dinamik etkileri içermesi,
8. Geniş deformasyonlarla var olan lineer olmayan davranışların ele alınması [9].

2.7. Sonlu Elemanlar Yönteminin Dezavantajları

1. Bazı problemlere uygulanmasında bazı zorluklar (sınır koşulları, ayrıklaştırılma vs.) vardır,
2. Elde edilen sonucun doğruluğu verilerin doğruluğuna bağlıdır,
3. Bir bilgisayara ihtiyaç duyar,
4. Kabul edilebilir doğru sonucun elde edilmesi için bölgenin ayrıklaştırılması deneyim gerektirir,
5. Diğer yaklaşık yöntemlerde olduğu gibi, Sonlu Elemanlar Yöntemi ile elde edilen sonucun doğruluğu üzerinde dikkat edilmeli ve fiziksel problem iyi incelenmelidir. Çıkabilecek sonuç önceden kestirilmeli ve sonuç ona göre test edilmelidir [10].

2.8. Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulama Alanları

1. Makine, Uzay, İnşaat, Otomobil Mühendisliği,
2. Yapı analizi (Statik/dinamik),
3. Isı iletimi,
4. Akışkanlar mekaniği,
5. Elektromanyetik,
6. Jeomekanik,
7. Biyomekanik,
8. Ortopedik araştırma [11].

2.9. Sonlu Elemanlar Yönteminin Diğer Yöntemlerle Karşılaştırılması

Fen ve mühendislik bilimleri problemlerinde karşılaşılan kompleks diferansiyel denklemler sayısal yöntemler kullanılarak çözülebilmektedirler. Sonlu elemanlar, sonlu farklar, sınır elemanlar, sonlu hacimler gibi birkaç sayısal yöntem mevcuttur. Bu metotlarda problem bölgesi ağlara bölünmektedir. Ağ, önceden tanımlı düğümlerin birbirleriyle bağlantısı olarak ifade edilmektedir. Sonlu farklar yönteminde ağlar ızgara, sonlu hacimler yönteminde, hacim ve hücre, sonlu elemanlar yönteminde ise eleman olarak tanımlanmaktadır. Izgaralar, hacimler, hücreler ve elemanlar ağ olarak isimlendirilir. Ağ için önemli olan birbirleriyle etkileşimli olarak çözüm öncesinden tanımlanmış olmasıdır [12,13].

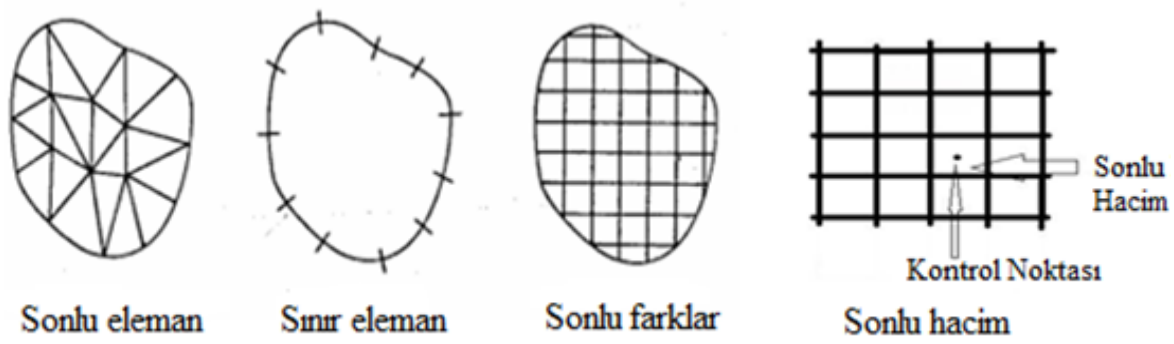
Bu metotları ayrıntılı bir biçimde inceleyelim:

Nümerik yöntemler içinde en çok kullanılan sonlu elemanlar ve sonlu farklar metotlarıdır. Gerek sonlu elemanlar ve gerekse sonlu farklar metodunda düğüm noktası sayısı arttıkça elde edilen çözümlerin hassasiyeti artmaktadır [13]. İki yöntem de bir bölgenin küçük parçalara ayrılıp türevlerinin alınması ve daha sonra parçaların birleştirilerek, bir bütün halinde çözülmesi için gerekli eşitliklerin oluşturulmasına dayanmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde bölgesel yaklaşımı kullanırken, sonlu farklar yönteminde noktasal yaklaşım tekniği kullanılmaktadır [14].

Sonlu hacimler yöntemi, ticari hesaplamalı akışkanlar dinamiği programlarının temel aldığı yöntemdir. Sonlu sayıda hacimlere bölünen bütünün her bir parçasına korunum denklemleri uygulanır ve hesaplanacak değişkenler sonlu hacmin merkezindeki kontrol noktasındaki değer ile ifade edilirler [15].

Sonlu elemanlar yönteminin yetersiz kaldığı veya bilgisayar destekli mühendislik sistemlerinin çözmekte zorlandığı uygulamalarda yeni bir metoda gereksinim duyulduğundan ve incelenen parça ile alandaki ağlarının tanımlanmasında göreceli olarak yavaş işlem yaptığından sınır elemanlar metodu, güçlü bir alternatif olarak ortaya çıkmıştır. Sınır elemanlar metodunun en önemli üstünlükleri ise, tüm hacim yerine sadece yüzeyin göz önüne alınmasının yeterliliği ve daha basit ağ yapıları kullanılması, tasarım değişiklikleri sonucu, ağın yeniden yapılandırılmasını gerektirmemesidir. Sonlu elemanlar

yönteminde tüm alanın ağ ile ayrıştırılması gerekirken, sınır elemanlar yönteminde ağ ile ayrıştırılması gereken sadece yüzeydir. Böylece ağ sayısındaki azalmadan dolayı, problemin derecesi bir derece azalmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde genel çözümün bir parçası olarak tüm alanın çözümü hesaplanmakta, ancak sınır elemanlar yönteminde öncelikle sınırın çözümü yapılmakta, gerekiyorsa alan içindeki noktaların çözümü bağımsız bir adım olarak gerçekleştirilmektedir. Böylece, analiz yapılacak detaylar sınırda veya alan içerisinde belli bir bölgede olduğundan tüm alanın analizine gerek kalmamaktadır [16].



Şekil 2.2. Sayısal metotlarla problemin modellenmesi [15,16]

2.10. Şekil Fonksiyonları

Sonlu elemanlara ayırma işleminden sonra, ifade edilmek istenen büyüklüğün bölge içerisinde değişimini gösteren bir enterpolasyon fonksiyonu belirlenir. Fonksiyon, değişkenin yaklaşık değişimini verir ve gerçeğe ne kadar yakın seçilirse çözümdeki yaklaşıklık da o kadar fazla olur. Bu fonksiyon, "şekil", "deneme" veya "baz fonksiyonu" olarak adlandırılmaktadır. Derecesi ve katsayıları problemin yapısına ve çözüm bölgesine göre belirlenecek polinomlar kullanılır.

Sonlu elemanlar yönteminin özelliği, tüm alan için tek bir fonksiyonun değil, birden fazla şekil fonksiyonunun belirlenmesidir. Bu şekil fonksiyonlarının birlikte genel ifadesi çözüm olarak yazılır. Bu şekilde tüm alan iyi bir yaklaşımla temsil edilmiş olur [5].

Eleman içinde herhangi bir noktadaki eksenel yer değiştirme u^e, şekil fonksiyonları kullanılarak düğüm noktalarına ait u_i ve u_j değerleri eleman boyunca uygun bir biçimde dağıtılarak bulunur. Birer koordinat fonksiyonu olan şekil fonksiyonlarının sayısı ile

elemandaki düğüm noktası sayısı birbirlerine eşittir. Her şekil fonksiyonu tanımlı olduğu düğüm noktasında 1 değerini, diğer tüm noktalarda 0 değerini alır. Şekil fonksiyonları N_i ile gösterilir ve Eş. 1.1 de gösterildiği gibi ifade edilir [7].

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{2.1}$$

3. BİR BOYUTLU SONLU ELEMANLAR

3.1. Lineer Sonlu Eleman Şekil Fonksiyonları

Eleman serbestliği u^enin noktadan noktaya doğrusal değiştiği durumu ifade edecek şekil fonksiyonlarını elde edelim. u serbestliğinin "e" elemanı boyunca değişimi,

$$u^e = c_1 + c_2 x \tag{3.1}$$

şeklinde polinom olarak ifade edilebilir. Eş. 3.1 deki c_1 ve c_2 sabitlerini bulmak için elemanda u^e şiddetinin bilindiği iki noktaya ihtiyaç vardır. İki düğüm *i.* düğüm noktasında $u^e(x_i) = u_i$ ve *j.* düğüm noktasında $u^e(x_j) = u_j$ uç koşulları aşağıdaki biçimde,

$$\left.\begin{aligned} u_i &= c_1 + c_2 x_i \\ u_j &= c_1 + c_2 x_j \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

ifade edilebilir. c_1 ve c_2 sabitleri çözüldüğünde,

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{u_i x_j - u_j x_i}{x_J - x_\text{i}} = \frac{u_i x_j - u_j x_i}{\Delta x^e} \\ c_2 &= \frac{u_j - u_i}{x_J - x_\text{i}} = \frac{u_j - u_i}{\Delta x^e} \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

olarak bulunur. Bulunan c_1 ve c_2 değerleri Eş. 3.1 denkleminde yerine yazılır ve ifade düzenlenirse,

$$u^e = \left(\frac{x_j - x}{x_J - x_\text{i}}\right) u_i + \left(\frac{x - x_i}{x_J - x_\text{i}}\right) u_j \tag{3.4}$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$u^e = N_i(x) u_i + N_j(x) u_j \tag{3.5}$$

sonlu eleman formülasyonu elde edilir. Burada N_i ve N_j , i ve j düğüm noktalarındaki serbestliklere ait şekil fonksiyonlarıdır. Doğrusal şekil fonksiyonları,

$$\left.\begin{aligned} N_i(x) &= \frac{x_j - x}{x_J - x_\mathrm{i}} \\ N_j(x) &= \frac{x - x_i}{x_J - x_\mathrm{i}} \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

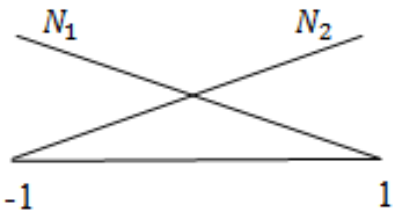
eşitlikleridir. Her şekil fonksiyonu kendi düğüm noktası üstünde birim şiddetinde iken, diğer düğüm noktalarında sıfır olur. Şekil fonksiyonlarının her bir nokta için değerleri birimdir ($N_i + N_j = 1$).

$-1 \leq \xi \leq 1$ aralığında N_1 ve N_2 şekil fonksiyonları,

$$\left.\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1-\xi}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(1-\xi) \\ N_2(\xi) &= \frac{\xi-(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{2}(1+\xi) \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

değerlerini alır [7].

Çizelge 3.1. Doğrusal şekil fonksiyonu

Şekil fonksiyonu	Şekil fonksiyonu çizimi
Doğrusal $N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)$ $N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$	

3.2. İkinci Dereceden Sonlu Eleman Şekil Fonksiyonları

İkinci dereceden (kuadratik) şekil fonksiyonlarını belirlemek için üç düğüm noktalı bir eleman seçilmelidir. c_1, c_2 ve c_3 üç sabit olmak üzere, eleman içinde herhangi bir noktadaki eksenel yer değiştirme u^e

$$u^e = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \tag{3.8}$$

şeklinde ifade edildiğinde, şekil fonksiyonları da ikinci dereceden olur. c_1, c_2 ve c_3 sabitlerini çözmek için Eş. 3.8 denklemi

$$u^e = [1 \quad x \quad x^2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

matris formunda yazılabilir.

i. düğüm noktasında $u^e(x_i) = u_i$ *j* düğüm noktasında, $u^e(x_j) = u_j$, $u^e(x_k) = u_k$ uç koşulları aşağıdaki biçimde,

$$\left.\begin{aligned} u_i &= c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \\ u_j &= c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \\ u_k &= c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

yazılabilir. İfade matris formuna dönüştürüldüğünde,

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_j & x_j^2 \\ 1 & x_k & x_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

olarak elde edilir.

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_j & x_j^2 \\ 1 & x_k & x_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Sabitler vektörü çekilerek Eş. 3.9 da yerine yazılırsa

$$u^e = [1 \quad x \quad x^2] \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \\ 1 & x_j & x_j^2 \\ 1 & x_k & x_k^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

olarak elde edilir. Matris tersi alınarak, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$u = \left(\frac{x_j x_k - (x_j + x_k)x + x^2}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)}\right) u_i + \left(\frac{x_i x_k - (x_i + x_k)x + x^2}{(x_i - x_j)(x_k - x_j)}\right) u_j + \left(\frac{x_i x_j - (x_i + x_j)x + x^2}{(x_i - x_k)(x_j - x_k)}\right) u_k \tag{3.14}$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$u = N_i(x)u_i + N_j(x)u_j + N_k(x)u_k \tag{3.15}$$

Sonlu eleman formülasyonu elde edilir. Burada N_i ve N_j , i ve j düğüm noktalarındaki serbestliklere ait şekil fonksiyonlarıdır. Doğrusal şekil fonksiyonları,

$$\left.\begin{aligned} N_i(x) &= \frac{x_j x_k - (x_j + x_k)x + x^2}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} \\ N_j(x) &= \frac{x_i x_k - (x_i + x_k)x + x^2}{(x_i - x_j)(x_k - x_j)} \\ N_k(x) &= \frac{x_i x_j - (x_i + x_j)x + x^2}{(x_i - x_k)(x_j - x_k)} \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

olarak bulunur. Burada i, 1 ile 2 aralığında olup, j ve k değerleri ise i, j, k halkalı permüstasyonuna göre değişken değerler alır. Örneğin, i=1 iken j=2, k=3, i=2 iken j=3, k=1 olur.

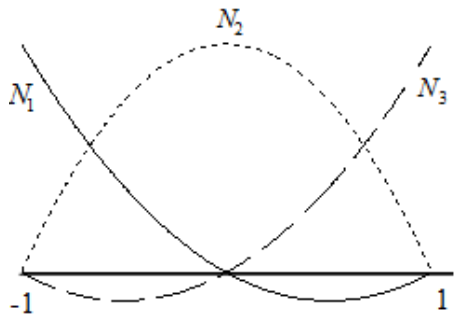
$$\left.\begin{aligned} N_1(x) &= \left(\frac{x_2x_3-(x_2+x_3)x+x^2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\right) \\ N_2(x) &= \left(\frac{x_1x_3-(x_1+x_3)x+x^2}{(x_1-x_2)(x_3-x_2)}\right) \\ N_3(x) &= \left(\frac{x_1x_2-(x_1+x_2)x+x^2}{(x_1-x_3)(x_2-x_3)}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3.17)$$

denklemleri elde edilir. $-1 \leq \xi \leq 1$ aralığında N_1, N_2 ve N_3 şekil fonksiyonları,

$$\left.\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi-1) \\ N_2(\xi) &= 1-\xi^2 \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{2}\xi(\xi+1) \end{aligned}\right\} \quad (3.18)$$

değerlerini alır [7,27].

Çizelge 3.2. İkinci dereceden şekil fonksiyonu

Şekil fonksiyonu	Şekil fonksiyonu çizimi
İkinci dereceden $N_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)$ $N_2(\xi) = 1-\xi^2$ $N_3(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)$	

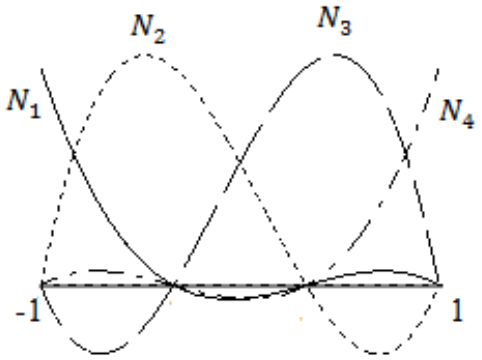
3.3. Üçüncü Dereceden Sonlu Eleman Şekil Fonksiyonları

Üçüncü dereceden (kuadratik) şekil fonksiyonlarını belirlemek için dört düğüm noktalı eleman seçilmelidir. Üç boyutlu sonlu eleman c_1, c_2, c_3 ve c_4 sabit olmak üzere

$$u^e = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \tag{3.19}$$

şeklinde seçilmelidir. İkinci dereceden şekil fonksiyonlarındaki gibi benzer işlemler yapıldığında, şekil fonksiyonları aşağıdaki biçimde elde edilir [7].

Çizelge 3.3. Üçüncü dereceden şekil fonksiyonu

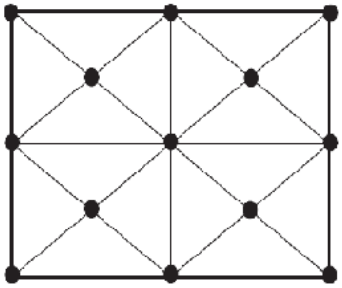
Şekil fonksiyonu	Şekil fonksiyonu çizimi
Üçüncü dereceden $N_1(\xi) = -\frac{1}{16}(1-\xi)(1-3\xi)(1+3\xi)$ $N_2(\xi) = \frac{9}{16}(1-3\xi)(1-\xi)(1+\xi)$ $N_3(\xi) = \frac{9}{16}(1-\xi)(1+\xi)(1+3\xi)$ $N_4(\xi) = -\frac{1}{16}(1+\xi)(1-3\xi)(1+3\xi)$	

4. İKİ BOYUTLU SONLU ELEMANLAR

İki boyutlu (düzlem) problemlerinin çözümünde kullanılırlar. Bu grubun temel elemanı üç düğümlü üçgen elemandır. Üçgen elemanın altı, dokuz ve daha fazla düğüm ihtiva eden çeşitleri de vardır. Düğüm sayısı seçilecek interpolasyon fonksiyonunun derecesine göre belirlenir. Üçgen eleman, çözüm bölgesini aslına uygun olarak temsil etmesi bakımından kullanışlı bir eleman tipidir. İki üçgen elemanın birleşmesiyle meydana gelen dörtgen eleman, problemin geometrisine uyum sağladığı ölçüde kullanışlılığı olan bir elemandır. Dört veya daha fazla düğümlü olabilir. Dörtgen eleman çoğu zaman özel hal olan dikdörtgen eleman şeklinde kullanılır [4].

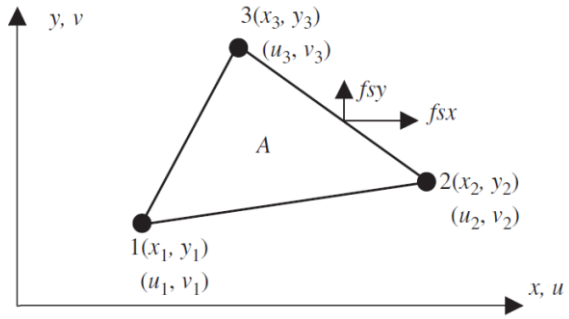
4.1. Lineer Üçgen Eleman Şekil Fonksiyonları

Lineer üçgen elemanlar, iki boyutlu katı cisimler için geliştirilmiş elemanların ilk çeşididir. Ayrıca iki boyutlu eleman tipleri arasında en basit olanıdır. Lineer üçgen elemanlar genellikle, dörtgen elemanlara göre hassaslığı daha azdır. Bu yüzden dörtgen elemanların daha ideal olduğu düşünülür. Fakat üçgen eleman karmaşık geometrik yapılara uyarlanmasında oldukça elverişlidir.



Şekil 4.1. Dikdörtgen levha için oluşturulmuş üçgen eleman ağı

İki boyutlu katı cisim (Bkz Şekil 4.1) lineer ağ yapısını oluşturan her bir üçgen, üç köşe ve üç kenara sahiptir. Üçgenlerin köşelerinin birleştiği noktalar düğümleri oluşturmaktadır.



Şekil 4.2. Lineer üçgen eleman

Kalınlığı h olan üçgen elemanın, eleman düğüm noktaları 1, 2 ve 3 olacak şekilde saatin tersi yönünde numaralandırılmıştır. Her bir düğümün x ve y doğrultusundaki yer değiştirme bileşenleri u ve v koordinatlarında iki bileşen olarak verilmiştir. (Bkz Şekil 4.2) Her bir üçgen eleman 3 düğüm noktasından oluştuğu için toplam 6 serbestlik derecesi vardır.

Üçgen elemanın nasıl formüle edilebileceğini inceleyelim:

(x,y) koordinatlarında sahip yer değiştirme vektörü U, düğüm ve şekil fonksiyonları kullanılarak elemanın herhangi bir noktasındaki yer değiştirmesini ifade eder.

$$U^h(x,y) = N(x,y)d_e \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilir. Sırasına göre düzenlenmiş düğüm noktası yer değiştirmeleri d_e,

$$d_e = \begin{cases} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} \text{ 1 numaralı yer değiştirme} \\ \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \text{ 2 numaralı yer değiştirme} \\ \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \text{ 3 numaralı yer değiştirme} \end{cases} \tag{4.2}$$

ve şekil fonksiyonları matrisi N,

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

olarak yazılır. N_i (i=1,2,3) için üç düğüme karşılık gelen üç şekil fonksiyonu vardır. Eş. 4.1 denklemi aşağıdaki biçimde açık olarak ifade edilebilir:

$$\left.\begin{aligned} u^h &= N_1(x,y)u_1 + N_2(x,y)u_2 + N_3(x,y)u_3 \\ v^h &= N_1(x,y)v_1 + N_2(x,y)v_2 + N_3(x,y)v_3 \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Herhangi bir noktasındaki yer değiştirmesi, düğüm noktası ve şekil fonksiyonları kullanılarak bir enterpolasyonla yaklaşılmıştır. İki yer değiştirme bileşeni birbirinden bağımsızdır.

Her ne tip eleman olursa olsun, sonlu eleman denklemini geliştirmenin ilk ve en önemli adımı şekil fonksiyonlarını belirlemektir. Temel polinom özelliğini kullanarak, lineer üçgen elemanın x ve y koordinatlardaki şekil fonksiyonları, aşağıdaki biçimde formüle edilebilir:

$$\left.\begin{aligned} N_1(x,y) &= a_1 + b_1x + c_1y \\ N_2(x,y) &= a_2 + b_2x + c_2y \\ N_3(x,y) &= a_3 + b_3x + c_3y \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Burada a_i, b_i ve c_i $(i = 1,2,3)$ belirlenecek sabitlerdir. Eş. 4.5 denklemi aşağıdaki genel formunda yazılabilir:

$$N_i(x,y) = a_i + b_ix + c_iy, \quad i = 1.2,3 \tag{4.6}$$

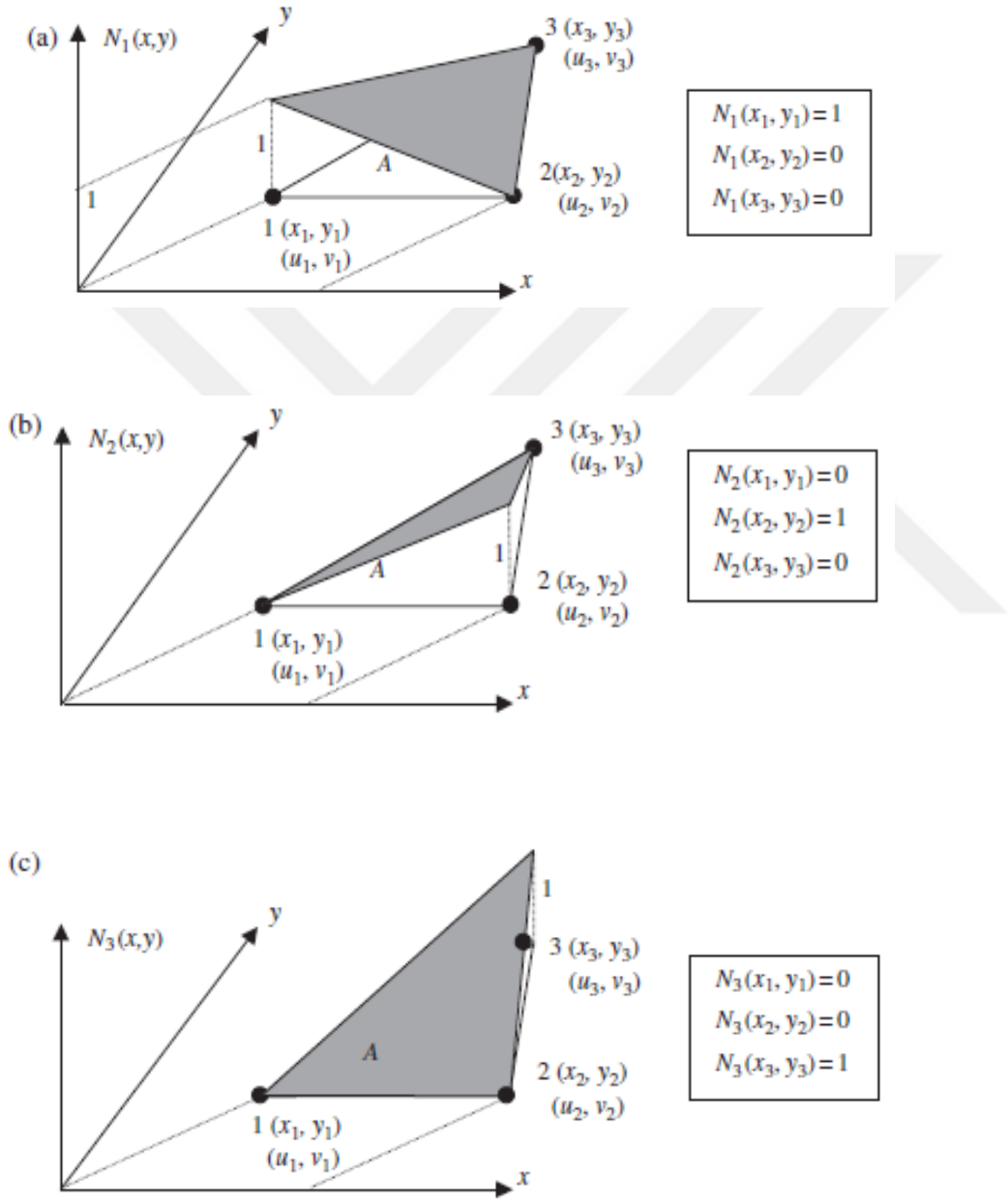
Şekil fonksiyonlarını aşağıdaki matris formunda yazarsak,

$$N_i = \underbrace{\{1 \quad x \quad y\}}_{P^T}\underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{Bmatrix}}_{a} = P^T\alpha \tag{4.7}$$

Burada a bilinmeyen sabit vektörü ve p polinom fonksiyonu olmak üzere, moment matrisi P,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 4.3. Lineer üçgen eleman ve şekil fonksiyonları (a) Şekil fonksiyonu N_1
(b) Şekil fonksiyonu N_2 (c) Şekil fonksiyonu N_3

Eş. 2.1 de bahsedildiği gibi iki boyutlu problem için de, şekil fonksiyonları, tanımlı olduğu düğüm üzerinde 1, diğer düğüm noktalarında sıfırdır (Bkz. Şekil 4.3).

Birinci düğüm noktası için N_1 şekil fonksiyonu,

$$\left.\begin{aligned} N_1(x_1, y_1) &= 1 \\ N_1(x_2, y_2) &= 0 \\ N_1(x_3, y_3) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

şeklindedir. Eş. 4.5 ve 4.9 eşitliklerinin birlikte kullanılmasıyla

$$\left.\begin{aligned} N_1(x_1, y_1) &= a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 = 1 \\ N_1(x_2, y_2) &= a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 = 0 \\ N_1(x_3, y_3) &= a_1 + b_1 x_3 + c_1 y_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

olarak elde edilir. Matris formu ise,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

biçimindedir.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

matrisinin tersi kullanılarak üçgen elemanın alanı A_e,

$$A_e = \frac{1}{2}|P| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$A_e = \frac{1}{2}[(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1] \tag{4.13}$$

şeklinde elde edilir. Burada A_e sıfırdan farklı olup, Cramer yöntemi uygulanırsa

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{|P|} = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{2A_e} \tag{4.14}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 0 & y_3 \end{vmatrix}}{|P|} = \frac{y_2 - y_3}{2A_e} \tag{4.15}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 1 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & 0 \end{vmatrix}}{|P|} = \frac{x_3 - x_2}{2A_e} \tag{4.16}$$

olarak bulunur. a_1, b_1, c_1 katsayıları Eş. 4.5 de yerine yazılırsa,

$$N_1 = \frac{1}{2A_e}[(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$N_1 = \frac{1}{2A_e}[(y_2 - y_3) + (x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)] \tag{4.17}$$

denklemi elde edilir. Şekil fonksiyonu N_1, 2-3 çizgisi boyunca geçer (Bkz. Şekil 4.3 (a)).

İkinci düğüm noktası için N_2 şekil fonksiyonu,

$$\left.\begin{aligned} N_2(x_1, y_1) &= 0 \\ N_2(x_2, y_2) &= 1 \\ N_2(x_3, y_3) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

şeklindedir. Eş. 4.5 ve Eş. 4.18 eşitlikleri birlikte kullanılırsa,

$$\left.\begin{aligned} N_2(x_1, y_1) &= a_2 + b_2 x_1 + c_2 y_1 = 0 \\ N_2(x_2, y_2) &= a_2 + b_2 x_2 + c_2 y_2 = 1 \\ N_2(x_3, y_3) &= a_2 + b_2 x_3 + c_2 y_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

denklemleri elde edilir. Matris formu ise,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

biçimindedir. Benzer şekilde Cramer yöntemi uygulanırsa,

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{|P|} = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{2A_e} \tag{4.21}$$

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 1 & y_2 \\ 1 & 0 & y_3 \end{vmatrix}}{|P|} = \frac{y_3 - y_1}{2A_e} \tag{4.22}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 1 & x_2 & 1 \\ 1 & x_3 & 0 \end{vmatrix}}{|P|} = \frac{x_1 - x_3}{2A_e} \tag{4.23}$$

olarak elde edilir. Bulunan a_2, b_2, c_2 katsayıları yerine yazılırsa,

$$N_2 = \frac{1}{2A_e}[(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$N_2 = \frac{1}{2A_e}[(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3] \tag{4.24}$$

elde edilir. Şekil fonksiyonu N_2, 3-1 çizgisi boyuncadır (Bkz. Şekil 4.3 (b)).

Üçüncü düğüm noktası için N_3 şekil fonksiyonu,

$$\left.\begin{aligned} N_3(x_1, y_1) &= 0 \\ N_3(x_2, y_2) &= 0 \\ N_3(x_3, y_3) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

şeklindedir. Eş. 4.5 ve Eş. 4.25 eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$\left.\begin{aligned} N_3(x_1, y_1) &= a_3 + b_3 x_1 + c_3 y_1 = 0 \\ N_3(x_2, y_2) &= a_3 + b_3 x_2 + c_3 y_2 = 0 \\ N_3(x_3, y_3) &= a_3 + b_3 x_3 + c_3 y_3 = 1 \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

denklemi elde edilir. Matris formu ise,

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

biçimindedir. Cramer yöntemi uygulanırsa,

$$a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{|P|} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2A_e} \tag{4.28}$$

$$b_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 0 & y_2 \\ 1 & 1 & y_3 \end{vmatrix}}{|P|} = \frac{y_1 - y_2}{2A_e} \tag{4.29}$$

$$c_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & 1 \end{vmatrix}}{|P|} = \frac{x_2 - x_1}{2A_e} \tag{4.30}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan a_3, b_3, c_3 katsayıları yerine yazılırsa,

$$N_3 = \frac{1}{2A_e}[(x_1 y_2 - x_1 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

$$N_3 = \frac{1}{2A_e}[(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1] \tag{4.31}$$

denklemi elde edilir. Şekil fonksiyonu N_3, 1-2 çizgisi boyunca geçer (Bkz. Şekil 4.3 (c)).

Bulunan şekil fonksiyonları genel biçimde yazıldığında,

$$N_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y \tag{4.32}$$

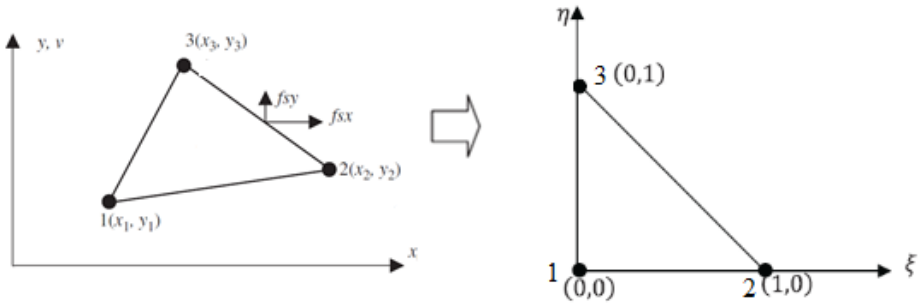
$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{2A_e}\left(x_j y_k - x_k y_j\right) \\ b_i &= \frac{1}{2A_e}\left(y_j - y_k\right) \\ c_i &= \frac{1}{2A_e}\left(x_k - x_j\right) \end{aligned} \tag{4.33}$$

formu elde edilir. Burada i, 1 ile 3 aralığında olup, j ve k değerleri ise i, j, k halkalı permüstasyonuna göre değişken değerler alır. Örneğin, i=1 iken j=2, k=3, i=2 iken j=3, k=1 olur [17].

Birinci düğümde N_1 şekil fonksiyonunun değeri 1 olup diğer düğümlerde sıfıra doğru lineer olarak azalır. Dolayısıyla N_1 şekil fonksiyonu bir düzlem yüzey belirtir. 2. ve 3. düğümde 1 değeri alarak benzer birer yüzey oluşturan ve N_2 ve N_3 şekil fonksiyonları da sırasıyla 1-3 ve 1-2 düğümlerinde 0 değerini alır. Bu şekil fonksiyonlarının bütün lineer kombinasyonları da birer düzlem yüzey belirtir. Örneğin, $N_1 + N_2 + N_3$ şeklindeki bir kombinasyon da düğüm noktalarındaki yüksekliği 1 olan bir yüzey oluşturur ki bu yüzey elemana paraleldir. Bunun sonucu olarak

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \tag{4.34}$$

yazılabilir. Bu yüzden N_1, N_2 ve N_3 lineer olarak bağımsız değildirler. Bunların sadece iki tanesi lineer bağımsızdır [4]. Lineer bağımsız olan şekil fonksiyonları ξ ve η çiftiyle, Şekil fonksiyonlarının (x,y) koordinat sisteminden, (ξ, η) doğal koordinatlardaki dönüşümü,



Şekil 4.4. Üçgen eleman doğal koordinat dönüşümü

$$N_1 = 1 - \xi - \eta$$
$$N_2 = \xi \qquad (4.35)$$
$$N_3 = \eta$$

olarak bulunur. Burada ξ ve η doğal koordinatlardır. Köşe noktaları (0,0), (1,0), (0,1) olan üçgen eleman Eş. 4.35 eşitliklerini sağlar. Örneğin 1. düğümdeki N_1 şekil fonksiyonu için,

$$N_1|_{1.\ düğümde} = 1 - \xi - \eta|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} = 1$$

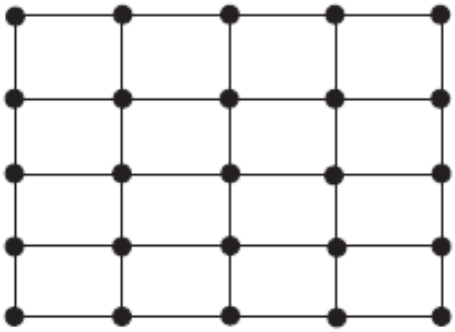
$$N_1|_{2.\ düğümde} = 1 - \xi - \eta|_{\substack{\xi=1 \\ \eta=0}} = 0$$

$$N_1|_{3.\ düğümde} = 1 - \xi - \eta|_{\substack{\xi=0 \\ \eta=1}} = 0$$

elde edilir. Aynı işlem N_2 ve N_3 şekil fonksiyonları içinde sağlanır [20].

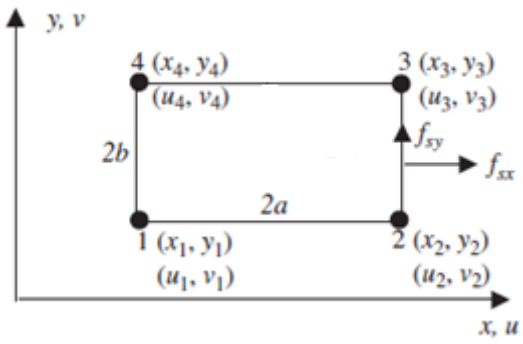
4.2. Lineer Dörtgen Eleman Şekil Fonksiyonları

Günümüzde birçok analizci tarafından üçgen elemanlar pek tercih edilmemektedir. Dörtgen elemanlar, üçgen elemanlara göre daha kesin sonuçlar verir. Keskin köşelere ve kavisli kenarlara sahip kompleks geometrik yapı, dörtgen unsurlar kullanılarak modellenebilir.



Şekil 4.5. Lineer dörtgen eleman ağ yapısı

İki boyutlu katı cisim, lineer ağ yapısını oluşturan her bir dörtgen, dört köşe ve dört kenara sahiptir (Bkz. Şekil 4.5).



Şekil 4.6. Dikdörtgen eleman koordinat sistemleri

Şekilde dört düğümlü dörtgen eleman gösterilmiştir. Üçgen elemandakine benzer olarak eleman düğüm noktaları 1, 2, 3 ve 4 olacak şekilde saatin tersi yönünde numaralandırılmıştır. Her bir düğümün x ve y doğrultusundaki yer değiştirme bileşenleri u ve v (serbestlik derecesi) olarak verilmiştir. Her bir dörtgen eleman 4 düğüm noktasından oluştuğu için toplam 8 serbestlik derecesi vardır. Yer değiştirme vektörü U,

$$U^h(x,y) = N(x,y)d_e \tag{4.36}$$

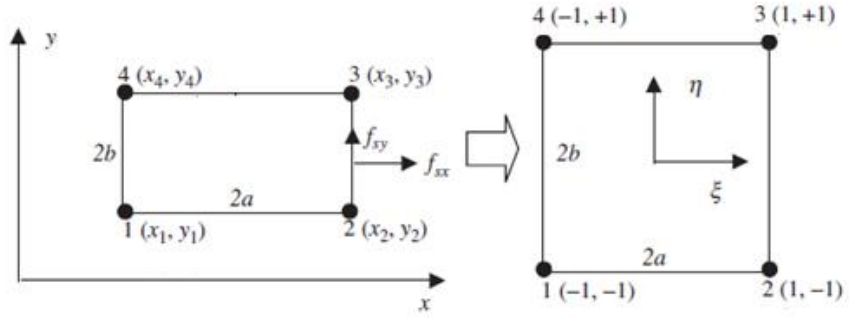
şeklinde yazılır. Sırasına göre düzenlenmiş düğüm noktası yer değiştirmeleri d_e,

$$d_e = \begin{cases} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix} 1 \text{ numaralı yer değiştirme} \\ \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} 2 \text{ numaralı yer değiştirme} \\ \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} 3 \text{ numaralı yer değiştirme} \\ \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} 4 \text{ numaralı yer değiştirme} \end{cases} \tag{4.37}$$

şeklinde ifade edilir. Burada şekil fonksiyonları matrisi N_i (i=1, 2, 3, 4)

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

biçimindedir.



Şekil 4.7. Dikdörtgen eleman ve doğal koordinat sistemi

Şekil fonksiyonlarının (x,y) koordinat sisteminden, (ξ, η) doğal koordinatlardaki dönüşümünü elde etmek için, temel eleman (ξ, η) doğal koordinatlarında düzgün bir kare olarak tanımlanabilir (Bkz Şekil 4.7) [17].

Her şekil fonksiyonu tanımlı olduğu düğümde 1 diğer düğümlerde ise sıfırdır. Köşe noktaları $(-1,-1), (1,-1), (1,1), (-1,1)$ olan dörtgen elemanın 1. düğüm noktası için,

1. düğümde $N_1 = 1$,
2. 3. ve 4. düğümde $N_1 = 0$

olarak kısaca görülebilir. Buna göre N_1, $\xi = 1$ ve $\eta = 1$ kenarları boyunca sıfır olmak zorundadır. Bu da

$$N_1 = c(1-\xi)(1-\eta) \tag{4.39}$$

formunda bir eşitlik verir. Buradaki sabit c katsayısı 1. düğümünde $N_1 = 1$ olması şartından,

$$N_1 = c(1-\xi)(1-\eta)\Big|_{\substack{\xi=-1\\ \eta=-1}} \tag{4.40}$$

$$1 = c(2)(2)$$

olur. Buradan $c = 1/4$ olarak elde edilir. Böylece 1. düğümdeki şekil fonksiyonu

$$N_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \tag{4.41}$$

olarak elde edilir. Diğer düğümler için de benzer işlemler yapıldığında

$$N_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \tag{4.42}$$

$$N_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \tag{4.43}$$

$$N_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{4.44}$$

denklemleri elde edilir [1].

Örnek olarak N_3 şekil fonksiyonu için,

$$N_3|_{1.\ d\text{üğü}mde} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\Big|_{\substack{\xi=-1\\ \eta=-1}} = 0$$

$$N_3|_{2.\ d\text{üğü}mde} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\Big|_{\substack{\xi=1\\ \eta=-1}} = 0$$

$$N_3|_{3.\ düğümde} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\Big|_{\substack{\xi=1\\ \eta=1}} = 1$$

$$N_3|_{4.\ düğümde} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\Big|_{\substack{\xi=-1\\ \eta=1}} = 0$$

olduğu ve Eş. 4.28 denklemini sağladığı açıkça görülür [17].

$$\sum_{i=1}^{4} N_i = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$$
$$= \frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta) + (1+\xi)(1+\eta) + (1+\xi)(1+\eta) + (1-\xi)(1+\eta)]$$
$$= \frac{1}{4}[2(1-\xi) + 2(1+\xi)]$$
$$= 1$$

Bilgisayar uygulamasında kolaylık sağlaması açısından şekil fonksiyonları ξ_i ve η_i ilgili düğümün doğal koordinatlardaki yerini vermek üzere, kısa gösterimde

$$N_j = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \qquad (4.45)$$

olarak yazılabilir [4].

5. KONVEKSİYON-DİFÜZYON-REAKSİYON PROBLEMLERİ

Bir ortamda ısı enerjisinin artması sonucunda sıcaklık yükselir ve sıcaklığın yükseldiği bölgelerde hacimce genleşme meydana gelir. Hacimce genleşme ise maddenin ortalama yoğunluğunun azalmasına neden olur. Ortalama yoğunluğu azalan madde ortam içinde yükselmeye başlar ve onun boşalttığı yeri göreceli olarak sıcaklığı düşük dolayısıyla ortalama yoğunluğu yüksek olan madde doldurur. Isınmış madde yükseldikçe soğur ve yoğunluğu artar. Artan yoğunluk çekim etkisinde artmasına sebep olur ve madde ortam içinde alçalmaya başlar. Bu arada yükselen maddenin yerini alan nispeten daha soğuk madde de ısınmaya başlar ve benzeri olaylar tekrarlanır. Isı enerjisinin ortam içinde neden olduğu bu yer değiştirme hareketine konveksiyon hareketi denir [18].

Difüzyon, moleküllerin rastgele hareketleri sonucu yer değiştirmeleri olarak tanımlanır. Katı, sıvı ve gazlarda meydana gelebilir. Difüzyonun temel prensibi, maddenin yüksek konsantrasyonlu bir bölgeden düşük konsantrasyonlu bir bölgeye transfer olması işlemidir. Akışkanlarda difüzyonun kütle transferine etkisi konveksiyonla büyük ölçüde artar [19]. Doğada konveksiyonun yanında daima difüzyon olayı gerçekleşir. Bu nedenle; konveksiyon ve difüzyonu birlikte ele alan sayısal çözümleme yöntemlerine ihtiyaç duyulur. Konveksiyon-difüzyon problemi; günlük hayatımızda, akışkanların incelenmesi, kuru toprakta nemin taşınması, demirin paslanması, bir kimyasal reaksiyonun adım adım duyarlılığının ölçülmesi, daha hassas sonuçlar üretebilmeleri ve bunlara bağlı uygulamaların gelişimi açısından önem kazanmıştır [20].

5.1. Konveksiyon-Difüzyon- Reaksiyon Denklemleri

Konveksiyon-difüzyon-reaksiyon problemi, $\varphi(x)$ skaler değerli fonksiyon, Dirichlet sınır koşulları ve Ω tanım bölgesinde, $\Gamma = \partial\Omega$ sınırında tanımlı ε difüzyon katsayısı, s reaksiyon katsayısı olmak üzere,

$$-\nabla.(\varepsilon\nabla u) + \mathrm{a}.\nabla u + s.u = f(x) \quad , \Omega \subset R^2 \text{ bölgesinde} \tag{5.1}$$

$$u(x) = 0 \quad , \quad \partial\Omega \text{ üzerinde} \tag{5.2}$$

Eş. 5.1 denklemi özel durumlarda aşağıdaki denklemlere dönüşür:

(i) Konveksiyon-difüzyon denklemi (s=0)

(ii) Helmholtz denklemi (a=0, s>0)

(iii) Konveksiyon-Reaksiyon denklemi (ε =o)

(iv) Difüzyon-Reaksiyon denklemi (a=0)

denklemlerine dönüşür [21].

Burada

$$\nabla u(x,y) = grad\, u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ve

$$\nabla^2 u(x,y) = \nabla.\nabla u = div\, grad\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

olur. ∇^2 kısmi diferensiyel operatörü Laplace operatörü olarak bilinir ve $\nabla^2 = \Delta$ yazılır.

$a = (a_1, a_2)$ olmak üzere $a.\nabla u = a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ biçimindedir [22].

5.2. Fonksiyon Uzayları ve Temel Kavramlar

5.2.1. Tanım

X bir *K* cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}_+,\ x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\|ax\| = |a|\|x\|$;

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa, bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir ve bu durumda $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı adı verilir.

5.2.2. Tanım

$(X, \|.\|)$ normlu bir uzay ve bunun içinde bir dizi (x_n) olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε' a bağlı bir n_ε doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

5.2.3. Tanım

$K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$

olmak üzere X bir vektör uzayı olsun.

$(.,.): X \times X \to K$

dönüşümü

(i) $\forall$ x∈X için $(x,x) \geq 0$ ve $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $\forall$ x,y∈X için $(x,y) = \overline{(y,x)}$ (kompleks eşlenik);
(iii) $\forall$ x,y∈X ve a∈K için $(ax,y) = a(x,y)$;
(iv) $\forall$ x,y,z∈X için $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

özelliklerini sağlıyorsa, $(.,.)$ fonksiyonuna, X üzerinde bir iç çarpım, $\big(X,(.,.)\big)$ ikilisine ise iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir.

5.2.4. Tanım

$\big(X,(.,.)\big)$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. x vektörünün normu

$$\|x\| = (x,x)^{1/2} \tag{5.3}$$

olarak tanımlanır.

5.2.5. Tanım

$(X,(.,.))$ iç çarpım uzayı $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ normuna göre tam ise, yani $(X,(.,.))$ içindeki her Cauchy dizisi yakınsarsa, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [23].

5.2.6. Tanım

$\mathbb{R}^n$ nin bir açık kümesi Ω olsun. Bu küme üzerindeki skaler değerli fonksiyonları $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n), x\epsilon\Omega$ şeklinde gösterelim. m bir pozitif tam sayı olmak üzere tüm $D^r u, 0 \le |r| \le m$ distribüsyonel türevleri $L_p(\Omega),\ 1 \le p \le \infty$ uzayı içinde olan fonksiyonları göz önüne alalım. Ω üzerindeki hemen hemen her yerde eşit fonksiyonları eşit kabul edildiği takdirde böyle fonksiyonların bir vektör uzayı oluşturacağı kolayca görülür. Normlandırabileceğimiz bu uzaya Sobolev uzayı adı verilir. Buna göre

$$W_p^m(\Omega) = \left\{u\epsilon\mathfrak{D}'(\Omega),\ D^r u\,\epsilon\, L_p(\Omega),\ 0 \le |r| \le m\,,\ 1 \le p \le \infty\ \right\} \qquad (5.4)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. $D^r u$ zayıf türevi göstermektedir. $W_p^m(\Omega)$ uzayını $L_p(\Omega)$ nın normundan yararlanarak bir normla donatabiliriz.

Gerçekten

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\le|r|\le m} \|D^r u\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p \le \infty$$

fonksiyonu bir normdur. Tanıma göre $0 \le |r| \le m$ alınırsa $\|D^r u\|_p < \infty$ olduğundan ve $\|.\|_{m,p}$ bir norm olur.

$p = \infty$ için normu

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0\le|r|\le m} \|D^r u\|_\infty$$

şeklinde tanımlamamızın gerektiği açıktır. Bildiğimiz gibi

$$\|D^r u\|_p = \left(\int_\Omega |D^r u(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|D^r u\|_\infty = {}^{ess\ sup}_{x\in\Omega} |D^r u(x)|$$

yazılabilir.

u yeteri kadar düzgün bir fonksiyon olduğu takdirde sürekli olan türevlerinin mertebesine kadar distribüsyonel ve klasik türevler aynı kalır. Dolayısıyla

$$\mathfrak{C}(\mathrm{x}) = \{\emptyset \in C^m(\Omega) : \|\emptyset\|_{m,p} < \infty\}$$

kümesi $W_p^m(\Omega)$ uzayının içindedir. Sobolev uzaylarının tam olduğu kolayca gösterilebilir

5.2.1. Teorem

$W_p^m(\Omega)$ Sobolev uzayı bir Banach uzayıdır [24,25].

5.2.7. Tanım

$u: \Omega \to \mathbb{R}$ olmak üzere, Ω üzerinde

$$\int_\Omega |u|^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan karesi integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan uzaya $L^2(\Omega)$ uzayı denir. $L^2(\Omega)$ uzayının normu,

$$\|u\| = \left[\int_\Omega |u|^2 dx \right]^{1/2}$$

biçiminde tanımlanır. Genel anlamda,

$$L^2(\Omega) = \left\{u: \Omega \to \mathbb{R}: \int_{\Omega} |u|^2 dx < \infty\right\} \tag{5.5}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

5.2.8. Tanım

$u, v \in L^2(\Omega)$ ve $u, v: \Omega \to \mathbb{R}$ için $L^2(\Omega)$ Hilbert uzayında iç çarpım $(.,.)$

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \tag{5.6}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\nabla u \in L^2(\Omega)$, $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ dır.

5.2.9. Tanım

$L_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ olmak üzere Ω sınırlarında sıfır değerini alan $L_0^2(\Omega)$ uzayı

$$L_0^2 = \left\{u: \Omega \to \mathbb{R}: \int_{\Omega} u dx = 0\,, u \in L^2(\Omega)\right\} \tag{5.7}$$

şeklinde tanımlanır.

5.2.10. Tanım

$L^2(\Omega)$ nın sobolev alt uzayı

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega): \nabla u \in L^2(\Omega)\} \tag{5.8}$$

şeklindedir.

5.2.11. Tanım ($H_0^1(\Omega)$ uzayı)

$H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ olmak üzere Ω sınırlarında sıfır değerini alan $H_0^1(\Omega)$ uzayı

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega):\ u(x) = 0, x \in \partial\Omega\} \tag{5.9}$$

biçiminde verilebilir [26,27].

5.2.12. Tanım (Young Eşitsizliği)

φ: [0,∞)→ $\mathbb{R}$, sürekli, kesin olarak artan, $\varphi(0) = 0$ ve $\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = +\infty$, özelliklerine sahip bir fonksiyon ve $\varphi^{-1} = \psi$ olsun. ∀ $x \in \mathbb{R}$ için

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(u)du, \qquad \psi(x) = \int_0^x \psi(u)du$$

denirse, ∀ a,b∈$[0,\infty)$ için

$$a.b \leq \Phi(a) + \psi(b)$$

dir. Eşitlik sadece $b = \varphi(a)$ olması halinde geçerlidir.

$\varphi(u) = u^{p-1}$ alındığında,

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{5.10}$$

eşitsizliği Young eşitsizliğidir.

5.2.13. Tanım (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği)

X bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in X$ olsun.

$$|(x,y)|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

veya

$$(x,y) \leq \|x\|.\|y\| \tag{5.11}$$

eşitsizlikleri sağlanır ancak ve ancak bazı $a \in F$ için $y - ax = 0$ dır [28].

5.2.2. Teorem

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ vektör diferensiyel "del" operatörü olmak üzere divergens teoremi,

$$\iiint_{\Omega} \nabla.V dv = \iint_{\partial\Omega} V.n d\sigma \tag{5.12}$$

biçiminde yazılır [22].

5.4. Sabit Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Probleminin Zayıf Formu

Problemin zayıf formunu geliştirmek için Ω nın bir tipik elemanı göz önünde bulundurularak, sonlu eleman modelini geliştirebiliriz. Öncelikle Eş. 5.1 de verilen Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon denklemi w ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak (İç çarpım anlamında) Eş. 5.6 aşağıdaki biçimde yazılabilir. Bu yönteme ağırlıklı rezidü yöntemi denilmektedir.

$$\int_{\Omega} (-\varepsilon\nabla^2 u + \mathrm{a}.\nabla u + s.u - f) w \, d\Omega = 0 \tag{5.13}$$

$$\int_{\Omega} w\varepsilon\nabla^2 u \; d\Omega - \int_{\Omega} w(\mathrm{a}.\nabla u)\, d\Omega - \int_{\Omega} s.uw\, d\Omega + \int_{\Omega} wf d\Omega \qquad (5.14)$$

biçiminde yazılır. Burada $w\nabla^2 u$ terimi için

$$w\nabla^2 u = \nabla.(u\nabla w) - (\nabla u).(\nabla w) \qquad (5.15)$$

yazılabilir. Eş. 5.15 denklemi Ω üzerinden integrallenirse

$$\int_{\Omega} w\varepsilon\nabla^2 u \; d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon\nabla.(w\nabla u)d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon(\nabla u).(\nabla w)d\Omega \qquad (5.16)$$

elde edilir. Son denklemde, ortadaki integrale divergens teoremi uygulanırsa

($V = w\nabla u$ vektör alanı ve $\nabla u.n = \frac{\partial u}{\partial n}$ doğrultu türevi ile)

$$\int_{\Omega} w\varepsilon\nabla^2 u \; d\Omega = -\int_{\Omega} \varepsilon\nabla w.\nabla u d\Omega + \int_{\Gamma} w\varepsilon.(n.\nabla u)d\boldsymbol{s} \qquad (5.17)$$

Green özdeşliği elde edilir.

Eş. 5.17 denklemi, Eş. 5.13 de yerine yazılırsa,

$$\int_{\Omega} (\varepsilon.\nabla u.\nabla w + w(\mathrm{a}.\nabla u) + suw - wf)d\Omega - \oint_{\Gamma} w\varepsilon(\mathrm{n}.\nabla u)ds = 0 \qquad (5.18)$$

eşitliğine ulaşılır.

Burada $n = n(x, y)$ $\boldsymbol{\Gamma}$ sınırı üzerindeki birim normal vektörüdür.

$$q_n = \varepsilon.(n\nabla u) = n_x\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right) + n_y\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (5.19)$$

q_n nin özelleştirilmesi doğal sınır koşulunu oluşturur. Bu nedenle q_n ikincil değişkendir.

$$\int_{\Omega} (\varepsilon.\nabla u.\nabla w + w(\mathrm{a}.\nabla u) + suw - wf)d\Omega - \oint_{\Gamma} wq_n ds = 0 \tag{5.20}$$

denklemine dönüşür. Bu ise problemin zayıf halidir.

$B(.,.)$ bilineer form ve $I(.)$ lineer formunu kullanarak Eş. 5.20 denklemini aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$B(w,u) = \int_{\Omega} (\varepsilon.\nabla u.\nabla w + w(\mathrm{a}.\nabla u) + suw)d\Omega \tag{5.21}$$

ve

$$I(w) = \int_{\Omega} wfd\Omega + \oint_{\Gamma} wq_n ds \tag{5.22}$$

olarak ifade edilirse Eş 5.20 denklemi,

$$B(w,u) = I(w) \tag{5.23}$$

biçiminde daha sade yazılmış olur [22,27].

5.4.1. Teorem

Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denklemi, $s - \frac{1}{2}\nabla.a \geq \beta \geq 0$ koşulu altında kararlıdır.

İspat

Sonlu eleman uzayı olarak, $X = \{u \in L^2(\Omega): \nabla u \in L^2(\Omega)\ ve\ u = 0\ , \partial\Omega$ üzerinde $\}$ alınır ve Eş 5.1 denklemi w ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak Ω bölgesinde integrali alınırsa

$$\int_{\Omega} (-\varepsilon \nabla^2 u + \mathrm{a}.\nabla u + s.u - f) w \, d\Omega = 0 \tag{5.24}$$

biçiminde yazılabilir. Eş. 5.6 da verilen iç çarpım tanımından

$$-\varepsilon(\nabla^2 u, w) + (a.\nabla u, w) + (su, w) = (f, w) \tag{5.25}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada w=u seçilir ve Divergence teoremi uygulanırsa,

$$-\varepsilon(\nabla^2 u, u) + (a.\nabla u, u) + (su, u) = (f, u) \tag{5.26}$$

$$\varepsilon(\nabla u, \nabla u) + (a.\nabla u + su, u) = (f, u) \tag{5.27}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$(a.\nabla u + su, u) = \int_{\Omega} (a.\nabla u + su) u dx \tag{5.28}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\mathrm{I} = \int_{\Omega} (a.\nabla u + su) u dx \tag{5.29}$$

Eş. 5.29 da verilen integral denkleminin çözümünü bulalım:

$\nabla u^2 = 2u.\nabla u$ olarak yazılabilir. Buradan

$$u.\nabla u = \frac{1}{2}\nabla u^2$$

eşitliği elde edilir.

$$(a.\nabla u)u = a.(u.\nabla u) = \frac{1}{2}\nabla u^2 \tag{5.30}$$

yazılabilir. Eş. 5.30 eşitliği Eş. 5.29 da yerine yazılırsa

$$\mathrm{I} = \int_{\Omega} \left(a.\frac{1}{2}\nabla u^2 + su^2 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\Omega} (\nabla . a)u^2 dx + \int_{\Omega} su^2 dx \quad (Green\ Teoreminden)$$

$$= \int_{\Omega} \left[s - \frac{1}{2}(\nabla . a) \right] u^2 dx \tag{5.31}$$

olarak elde edilir.

$s - \frac{1}{2}\nabla . a \geq \beta$ olduğundan

$$\int_{\Omega} \left[s - \frac{1}{2}(\nabla . a) \right] u^2 dx \geq \beta \int_{\Omega} u^2 dx = \beta(u,u) \tag{5.32}$$

yazılabilir. Buradan

$$\mathrm{I} = \int_{\Omega} \left[s - \frac{1}{2}(\nabla . a) \right] u^2 dx \geq \beta(u,u)$$

eşitsizliği elde edilir. Yani

$$(a.\nabla u + su, u) \geq \beta(u,u) \tag{5.33}$$

biçimindedir. Eş. 5.33 eşitsizliği Eş. 5.27 de kullanılırsa

$$\varepsilon(\nabla u, \nabla u) + \beta(u,u) \leq (f,u)$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 5.3 deki norm özelliği kullanılarak

$$\varepsilon\|\nabla u\|^2 + \beta\|u\|^2 \leq \|f\|.\|u\|$$

$$\varepsilon\|\nabla u\|^2+\beta\|u\|^2 \le \|f\|.\|u\| \le \frac{\beta}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2\beta}\|f\|^2 \quad , o<\epsilon<\infty$$

eşitsizliğine Eş. 5.10 (Young eşitsizliği) ve Eş. 5.11 (Cauchy-Schwarz eşitsizliği) kullanılarak ulaşılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\varepsilon\|\nabla u\|^2+\beta\|u\|^2 \le \frac{\beta}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2\beta}\|f\|^2$$

$$\varepsilon\|\nabla u\|^2+\frac{\beta}{2}\|u\|^2 \le \frac{1}{2\beta}\|f\|^2$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu ise uygulanan yöntemin kararlı olduğunun ispatıdır. Çünkü sol taraftaki değişkenlere bağlı normlu ifadeler, problem verisi olan f ile sağdan sınırlandırılmıştır.

5.5. Sonlu Eleman Modeli

Ω üzerinde yaklaşık sonlu eleman u fonksiyonu

$$u(x,y) \approx u_h^e(x,y)=\sum_{i=1}^{n} u_i^e N_i^e(x,y) \tag{5.34}$$

biçiminde tanımlansın. Elemanın i düğümündeki (x_i,y_i), u_h nin u_i olduğu durumda N_i Eş. 5.20 de zayıf formda u yerine Eş. 5.34 deki yaklaşım yazılır ise,

$$\int_{\Omega_e}\left\{k\frac{\partial w}{\partial x}\sum_{i=1}^{n}u_i^e\frac{\partial N_i^e}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\sum_{i=1}^{n}u_i^e\frac{\partial N_i^e}{\partial y}+\mathrm{a}_1 w\sum_{i=1}^{n}u_i^e\frac{\partial N_i^e}{\partial x}+\mathrm{a}_2 w\sum_{i=1}^{n}u_i^e\frac{\partial N_i^e}{\partial y}+sw\sum_{i=1}^{n}u_i^e N_i^e-wf\right\}dxdy - \oint_{\Gamma_e} wq_n dr=0 \tag{5.35}$$

denklemi elde edilir. Burada n tane bilinmeyen $u_1^e,u_2^e,\dots,u_n^e$ fonksiyonlarına karşılık, n tane lineer bağımsız denklem sistemi elde etmek için ağırlıklı rezidü yöntemlerinden biri

olan Galerkin yöntemi kullanılır. w ağırlık fonksiyonunun $N_1^e, N_2^e, \dots, N_n^e$ şekil fonksiyonlarının lineer kombinasyonu türünden yazılmasına Galerkin metodu denir.

$w = N_i^e$ oluşturarak i nci cebirsel denklemi elde edilir. Eş. 5.35 denklemi

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\int_{\Omega_e}\left(k\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_J^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\right)+\mathrm{a}_1 N_i^e\frac{\partial N_J^e}{\partial x}+\mathrm{a}_2 N_i^e\frac{\partial N_J^e}{\partial y}+bN_i^e N_J^e\right)dxdy\right\}u_j$$
$$-\oint_{\Omega_e} fN_i^e dxdy-\oint_{\Gamma_e} N_i^e q_n ds=0 \qquad i=1,2,\dots,n \qquad (5.36)$$

halini alır. Eş. 5.36 denklemi aşağıdaki forma dönüştürülürse,

$$K_{ij}^e=\int_{\Omega_e}\left(k\left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_J^e}{\partial x}+\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}\right)+\mathrm{a}_1 N_i^e\frac{\partial N_J^e}{\partial x}+\mathrm{a}_2 N_i^e\frac{\partial N_J^e}{\partial y}+bN_i^e N_J^e\right)dxdy \qquad (4.27)$$

$$f_i^e=\oint_{\Omega_e} fN_i^e dxdy \qquad (4.28)$$

$$Q_i^e=\oint_{\Gamma_e} N_i^e q_n ds \qquad (4.29)$$

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij}^e u_j^e=f_i^e+Q_i^e \qquad i=1,2,\dots,n \qquad (4.30)$$

formunu alır. Bu form,

$$[K^e]\{u^e\}=\{f^e\}+\{Q^e\}$$

matris biçiminde de yazılabilir.

Bu denklem Eş. 4.1 denkleminin sonlu eleman modelini temsil etmektedir. $[K^e]$ nxn tipinde simetrik matris, $\{f^e\}$ ve $\{Q^e\}$ $nx1$ tipinde eleman vektörüdür [27,29].

6. NÜMERİK TESTLER

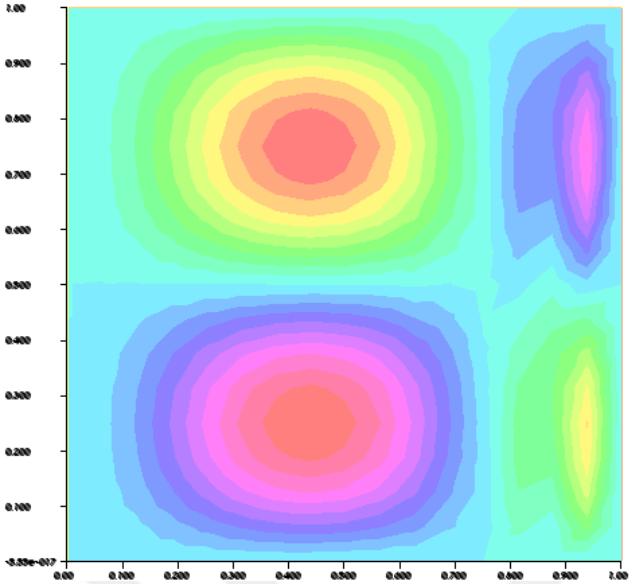
Bu kısımda, uygulanan metodun verimliliğini nümerik olarak teyit etmek ve metodun etkisini sayısal olarak gözlemleyebilmek için bir nümerik test uygulanmıştır. Uygulanan test için kullanılan yazılım, serbest lisanslı Freefem++ [30] sonlu eleman yazılım ve kodlama programıdır.

Uygulanan bu test için, problem birim kare üzerinde çözülmüştür. Birim kare yatay ve dikey olarak 16 parçaya ayrılmış, yani $h = 1/16$ olarak alınmıştır. Oluşturulan bu sonlu eleman ağ sisteminde üçgenleme işlemi yapılarak yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi sağlanmıştır. Bu üçgenleme işlemleri, üçgenler üzerinde yerel çözümlerin oluşturulması, yerel çözümlerin genel çözüm matrisi için bir araya getirilmesi ve en son aşama olan genel çözüm matrisini içeren lineer sistemin çözümlenmesi süreçlerinin hepsi yazılım tarafından otomatik olarak yapılmıştır. Kullanıcı olarak yazılıma çözüm yapılan bölge, sınır koşulları, denklemin zayıf hali ve parametreler girdi olarak sunulduktan sonra yukarıda bahsedilen süreçle program tarafından tamamlanarak çözümün bölge üzerindeki grafiksel görünümü kullanıcıya sunulmaktadır.

Uygulanan test için denklemin zayıf hali olan Eş. 5.20 denklemi

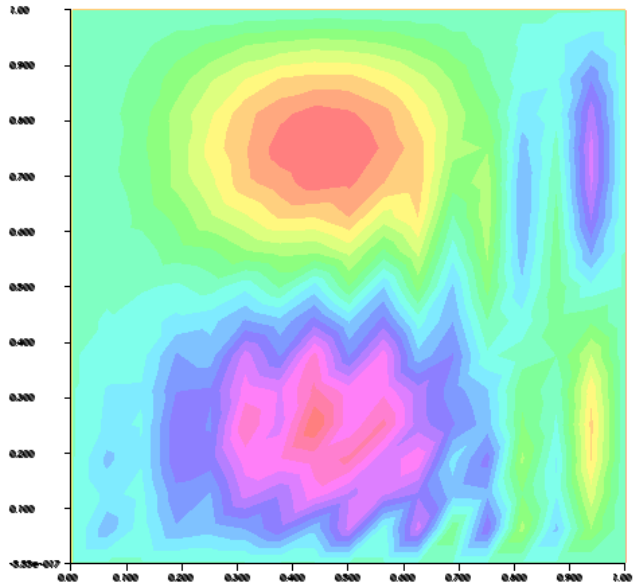
$$\int_{\Omega} (\varepsilon.\nabla u.\nabla w + w(\mathrm{a}.\nabla u) + suw - wf)d\Omega - \oint_{\Gamma} wq_n ds = 0 \qquad (5.20)$$

programa girilmiştir. Burada kullanılan sonlu eleman uzayı $H_0^1(\Omega)$ olduğundan denklemde görülen sınır integrali yok olmuştur. Sağ taraf fonksiyonu olan f, $f(x) = \sin(2\Pi x)\sin(2\Pi y)$ olarak alınmıştır. Reaksiyon katsayısı olan s, s=1 olarak kabul edilmiştir. Dirichlet sınır koşulu olarak tüm bölge sınırı boyunca u=0 olarak alınmıştır.
Yöntemin etkinliğini görebilmek için 2 farklı difüzyon katsayısı kullanılmıştır. İlk olarak küçük olarak kabul edilebilen bir değer, ε=0.01 alınmıştır. Elde edilen çözümün grafiği (Bkz Şekil 5.1) de gösterilmektedir. Görüldüğü gibi çözüm hafif bozulmalar gösterse de düzgün olarak seçilebilmektedir. Bunun sebebi difüzyon katsayının küçük olsa da çok küçük bir değer olmadığı için çözüm üzerinde konveksiyon baskınlığının az olmasıdır.



Şekil 6.1. $\varepsilon = 0.01$ için elde edilen çözüm

İkinci olarak nispeten daha küçük bir difüzyon katsayısı alınmıştır. Burada ε=0.001 seçilerek çözümde meydana gelen değişiklikleri gözlemlemek amaçlanmıştır. (Bkz Şekil 6.2) de görüldüğü gibi ε değerinin sadece 1 onluk basamak küçülmesi çözümde açıkça gözlemlenen bozulmalar ortaya koymuştur. Bunun sebebi ε küçüldükçe denklemin giderek konveksiyon baskın hale gelmesi ve çözümün bozulmasıdır. Bu durum zaten teorik olarak bahsedilen olayın nümerik olarak da gerçekleştiğini bize gösterir.



Şekil 6.2. $\varepsilon = 0.001$ için elde edilen çözüm

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denkleminin Sonlu Eleman çözümü için zayıf hali ilgili uzaylar tanımlanarak elde edildi. Bu denklemin zayıf hali üzerinde sistemin kararlı olduğu gösterildi. Nümerik bir test yapılarak, teorik belirtilerin gerçekliği doğrulanmış oldu. İleriye dönük olarak, bir takım nümerik kararlaştırma yöntemleri sisteme uygulanıp, bunların etkisi nümerik testlerle incelenebilir. Ayrıca incelenen bu problemin sonlu elemanlar hata analizi de bir başka çalışmanın konusu olabilir.

KAYNAKLAR

1. Ergin, A., Bayraktarkatal, E. ve Ünsan, Y. (2000). ***Sonlu Elemanlar Metodu ve Gemi İnşaatı Sektöründeki Uygulamaları***, İstanbul: Yapım Matbaacılık, 2-3.

2. Hasanoğlu (Hasanov), A. (2001). ***Varyasyonel Problemler ve Sonlu Elemanlar Yöntemi*** (Birinci Baskı). İstanbul: Literatür Yayınları, 1, 28.

3. Güler, M. S. ve Şen, S. (2015). Sonlu Elemanlar Yöntemi Hakkında Genel Bilgiler, ***Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi***, 5(1), 56-66.

4. Topçu, M. ve Taşgetiren, S. (1998). ***Mühendisler İçin Sonlu Elemanlar Metodu***, Denizli: Mühendislik Fakültesi Matbaası, 2-44.

5. Çepni, M.S. ve Deniz, R. (2005). Sonlu Elemanlar Yönteminin Dönüşümlerde Kullanılması, ***hkm Jeodezi, Jeoinformasyon ve Arazi Yöntemi Dergisi***, 2(93), 20-29.

6. İşçan, B., Adin, H. ve Turgut, A. (2008). Çatlak Bulunan İzotropik Bir Çelik Levhada Gerilme Analizinin İncelenmesi, ***Fırat Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi***, 20(2), 369-377.

7. Omurtag, M. H. (2010). ***Çubuk Sonlu Elemanlar*** (Birinci Baskı). İstanbul: Birsen Yayınevi, 46-53.

8. Reddy, J. N. (2006). ***An Introduction to the Finite Element Method*** (Third Edition). New York: Mc Graw-Hill, 104-105.

9. Logan, D. L. (2007). ***A First Course in the Finite Element Method*** (Fourth Edition). Canada: Thomson, 19-20.

10. Kibar, H. ve Öztürk, T. (2012). ANSYS Sonlu Eleman Yazılımının Tarımdaki Uygulamaları, ***Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi***, 2(2), 65-74.

11. Konda, P. ve Sarannum, SA. (2012). Basic Principles of Finite Element Method and its Applications in Orthodontics, ***Journal of Pharmaceutical and Biomedical Sciences***, 16(11), 1-8.

12. Pekedis, M. ve Yıldız, H. (2010). Ağsız Yöntemler ve Sınıflandırılması, ***Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi***, 16(1), 1-9.

13. Civalek, Ö. ve Çatal, H. H. (2002). Genelleştirilmiş Diferansiyel Quadrature Yöntemiyle Bir ve İki Boyutlu Düzlem Yapıların Dinamik Analizi, ***Türkiye Mühendislik Haberleri Dergisi***, 1(417), 39-46.

14. Serteller, N. F. (2001). Statik Elektik Problemlerinin İncelenmesinde Sonlu Elemanlar (FEM) ile Sonlu Farklar (FD) Methodlarının Kullanılması, ***Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi***, 1(1), 1-3.

15. Karkınlı, A. E., Kurban, T., Kesikoğlu, A. ve Beşdok, E. (2011, 31 Ekim-4 Kasım). ***CBS'de Hesaplamalı Akışkanlar Dinamiği Tabanlı Risk Simülasyonları ve Yönetimi***, TMMOB Coğrafi Bilgi Sistemleri Kongresinde sunuldu, Antalya.

16. Fetvacı, M. C., İmrak, C. E. ve Kesikçi, E. (2004). Kalın Cidarlı Borulara Sınır Eleman ve Sonlu Eleman Metodlarının Uygulanması, ***İstanbul Teknik Üniversitesi Mühendislik ve Fen Bilimleri Dergisi***, 74-81.

17. Liu, G. R. and Quek, S. S. (2003). ***The Finite Element Method***: ***A Practical Course***. Oxford: Butterworth-Heinemann, 129-160.

18. Göktürkler, G. (2002). Yerbilimlerinde Isı Transferi Modellemesi: Kararlı-Hal Kondüktif Isı İletimi, ***Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi***, 4(3), 67-80.

19. İnce, E. (2001). İkili Sıvı Sistemlerinin Difüzyon Katsayılarının Tayini, ***Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi***, 7(3), 409-413.

20. Bardak, M. (2011). ***Düzgün Ağlar Üzerinde Bir Sınır Değer Probleminin ε− Yakınsaklığı,*** Yüksek Lisans Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aydın.

21. Chaple, R. P. Bonet Chaple (2006). Numerical Stabilization of Convection-Diffusion-Reaction Problems. ***Delft Institute of Applied Mathematics***, 06(03), 1-19.

22. Anar, E. İ. (2005). ***Kısmi Diferensiyel Denklemler***, Ankara: Palme Yayınları, 214, 215.

23. Musayev, B. Alp, M. ve Balcı, M. (2000). ***Fonksiyonel Analiz***, Kütahya: Balcı Yayınları, 72, 99-100.

24. Çıbık, A. B. (2011). ***Numerıcal Analysıs of a Projectıon-Based Stabılızatıon Method For The Natural Convectıon Problems,*** Doktora Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

25. Adams, R. A. (1975). ***Sobolev spaces***. New York: Academic Press

26. Layton, W. (2008). ***Introduction to the Numerical Analysis of Incompressible Viscous Flows***, Philadelphia: SIAM publications, 3-11, 26-27, 3.

27. Çiftçi, C. (2012). ***Değişken Difüzyon Katsayılı Konveksiyon-Difüzyon Denklemlerinin Sonlu Elemanlar Yöntemi İle Çözümü***, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

28. Balcı, M. (2009). ***Reel Analiz*** (Üçüncü Baskı). Ankara: Balcı Yayınları, 141.

29. Türk, Ö. (2008). ***The Finite Element Method Sollution of Reaction-Diffusion-Advection Equations in Air Pollution***, Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.

30. Hecht, F. (2012). New development in FreeFem++. ***J. Numer. Math.*** 20(3-4), 251-265. 65Y15.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Soyadı, adı : YILDIRIM, Meral
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 13.10.1988, Ankara
Medeni hali : Bekâr
Telefon : 0 (553) 5801890
e-mail : meral0640@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik	Devam Ediyor
Lisans	Ahi Evran Üniversitesi/ Matematik	2011
Lise	Özel Nene Hatun Fen Lisesi	2005

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Yıldırım, M. ve Çıbık, A. (2016, 26-27 Mayıs). ***Konveksiyon-Difüzyon-Reaksiyon Denklemleri için Sonlu Elemanlar Yöntemi***, 11. Ankara Matematik Günleri, Ankara Üniversitesi, Ankara.

Hobiler

Yüzme, Sinema, Bowling



GAZİ GELECEKTİR..