



SIRALI VEKTÖR UZAYLARINDA YAKINSAKLIK

Büşra ÇELİK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Büşra ÇELİK

25/07/2024

SIRALI VEKTÖR UZAYLARINDA YAKINSAKLIK
(Yüksek Lisans Tezi)

Büşra ÇELİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2024

ÖZET

Sıralı vektör uzaylarında, sadece sıralamayı kullanarak yakınsamayı tanımlamanın birkaç doğal yolu vardır. Bunlar çoğunlukla sıra yakınsamalar olarak bilinir. İlgili çalışmalarda ağların sıra yakınsaması yaygın olarak kullanılmaktadır. Mesela, normlu Riesz uzayları çalışılırken, sıra sürekli normlar için sıra yakınsama kullanılır. Aynı zamanda sıra yakınsama, Riesz uzayları arasındaki operatörler için bu yakınsamaya göre sürekli olan operatörlerden olan sıra sürekli operatörleri tanımlarken kullanılır. Ağlar için yaygın olarak kullanılan yakınsaklık tanımları, diziler için verilen yakınsaklık tanımlarından kaynaklanır. Ancak, bu yakınsamanın bir sorunu, ağın sıra yakınsamasının sadece kuyruğuna değil, aynı zamanda başlangıcına da bağlı olmasıdır. 2005 yılında Abramovich ve Sirotkin, Riesz uzayı teorisinde ağların yakınsaması için yeni ve geliştirilmiş bir tanım önerdiler. Sonrasında bu tanım, Riesz uzaylarında yakınsama ile ilişkilendirilen çalışmalarda kullanıldı. Diğer yandan, sıralı vektör uzaylarında sıra birim norm gibi kullanışlı bir norm genellikle yoktur. Ancak, göreceli düzgün yakınsama diye adlandırılan benzer bir yakınsama kavramıyla böyle bir norm tanımlanabilir. Bu çalışmada, bu iki sıra yakınsama tanımının yanı sıra son zamanlarda yapılan çalışmalarda ele alınan ve uzayın yapısına göre sonuçları genişleten sıra yakınsamalar da incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20404
Anahtar Kelimeler : Riesz uzayı, sıralı vektör uzayı, yakınsaklık
Sayfa Adedi : 73
Danışman : Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

CONVERGENCE IN ORDERED VECTOR SPACES

(M. Sc. Thesis)

Büşra ÇELİK

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2024

ABSTRACT

In ordered vector spaces, there are several natural ways to describe convergence using only ordering. These are commonly known as order convergences. Order convergence of nets is widely used in related studies. For example, order convergence is used for order continuous norms when studying normed Riesz spaces. At the same time, order convergence is used to define order continuous operators, which are continuous concerning this convergence for operators between Riesz spaces. Commonly used convergence definitions for nets derive from the convergence descriptions given for sequences. However, one problem with this convergence is that it depends on the tail and the beginning of the net's row convergence. In 2005, Abramovich and Sirotkin proposed a new and improved definition for the convergence of nets in Riesz space theory. Subsequently, this definition has been used in studies related to convergence in Riesz spaces. On the other hand, in ordered vector spaces, there is usually no norm that is as proper as the order unit norm. However, such a norm can be defined by a similar concept called relative uniform convergence. In this study, in addition to these two order convergence definitions, order convergences, which have been discussed in recent studies and which expand the results according to the structure of the space, are also examined.

Science Code : 20404
Keywords : Riesz space, ordered vector space, convergence
Number of pages : 73
Supervisor : Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında ilgi ve desteği ile beni yönlendiren, bilgi ve birikimlerinden yararlanma fırsatı veren ve bu süreçte karşılaştığım her problemde yardımına başvurduğum değerli hocam Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her alanında olduğu gibi tez çalışmamı hazırlarken de yanımda olan, maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen eşim İlyas ÇELİK'e, çalışmama izin verdikleri için kızlarım Şeyma ve Erva'ya, daima yanımda olan ve beni cesaretlendiren sevgili annem, babam, kardeşim ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Topolojik Uzaylarda Dizilerin ve Ağların Yakınsaması	3
2.2. Sıralı Vektör Uzayları ve Sıra Yakınsaklık	18
2.3. Riesz Uzayları ve Sıra Yakınsaklık	27
3. SIRALI NORMLU UZAYLARDA YAKINSAKLIK	33
3.1. Kapalı Koniler ve Yarı Monoton Normlar	33
3.2. Sıra Birimli Uzaylarda Yakınsaklık	37
3.3. Göreceli Düzgün Yakınsaklık	45
4. SIRA YAKINSAKLIK VE SINIRSIZ SIRA YAKINSAKLIK.....	51
4.1. Sıra Yakınsama Çeşitleri	51
4.2. Sıra Yakınsamanın Genişlenmesi ve Kısıtlanması	58
4.3. Sınırsız Sıra Yakınsaklık	63
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	69
KAYNAKLAR.....	71
ÖZGEÇMİŞ	73

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

K	Bir vektör uzayı içinde bir koni
(X, K)	K konisi ile X sıralı vektör uzayı
X^δ	X sıralı kümesinin Dedekind kesitlerinin kümesi
$x \vee y$	x ve y elemanlarının supremumu
$x \wedge y$	x ve y elemanlarının infimumu
x^+	x elemanının pozitif kısmı
x^-	x elemanının negatif kısmı
$ x $	x elemanının modülü
$x_\lambda \uparrow x$	(x_λ) artan ağ ve $\sup_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x$
$x_\lambda \downarrow x$	(x_λ) azalan ağ ve $\inf_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x$
$x_\lambda \xrightarrow{o} x$	(x_λ) ağ x elemanına sıra yakınsar
$x_\lambda \xrightarrow{o_2} x$	(x_λ) ağ x elemanına sıra-2 yakınsar
$x_\lambda \xrightarrow{o_3} x$	(x_λ) ağ x elemanına sıra-3 yakınsar
$\ \cdot\ $	Bir vektör uzayı üstünde bir norm
$\ \cdot\ _u$	Bir vektör uzayı üstünde u sıra birimiyle bir yarı norm
$(X, K, \ \cdot\)$	K konisi ve $\ \cdot\ $ normu ile X sıralı normlu uzayı
$(X, K, \ \cdot\ _u)$	K konisi ve $\ \cdot\ _u$ yarı normu ile X sıra birimli uzayı
$L(X, Y)$	$\{T \mid T : X \rightarrow Y \text{ lineer operatör}\}$ uzayı
$L_b(X, Y)$	$\{T \mid T : X \rightarrow Y \text{ sıra sınırlı operatör}\}$ uzayı
$\mathcal{L}(X, Y)$	$\{T \mid X \rightarrow Y : T \text{ norm sınırlı operatör}\}$ uzayı
$\text{int}(K)$	K konisinin içi
A^u	A kümesinin üst sınırları kümesi
A^l	A kümesinin alt sınırları kümesi
uo -yakınsaklık	Sınırsız sıra yakınsaklık
uo_{DM} -yakınsaklık	DeMarr'ın sınırsız sıra yakınsaklığı

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, sıralı vektör uzayları ve sıralı normlu uzaylarda yakınsaklık kavramları incelenmiştir. Özellikle, norm yakınsama, sıra yakınsama ve sınırsız sıra yakınsama gibi temel kavramlar detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Çalışmanın amacı, bu kavramların matematiksel yapılarını ve özelliklerini inceleyerek sıralı vektör uzayları teorisine katkı sağlamaktır.

Matematiksel analiz ve fonksiyonel analiz gibi alanlarda, yakınsaklık kavramları büyük öneme sahiptir. Bu kavramlar, birçok matematiksel yapının temelini oluşturur ve çeşitli uygulamalarda kritik rol oynar. Sıralı vektör uzayları ve yakınsaklık türlerinin detaylı incelenmesi, hem teorik matematik hem de uygulamalı bilimler için değerli bilgiler sunmaktadır.

Sıralı vektör uzaylarında yakınsaklık kavramları üzerine yapılan çalışmalar, bu alandaki önemli gelişmeleri ve mevcut bilgi birikimini açığa çıkarır. Bu çalışmalar, konunun daha iyi anlaşılmasını sağlayan temel prensipleri ve teorileri ortaya koyar. Literatürde, özellikle norm yakınsama ve sıra yakınsama üzerine yapılan araştırmalar dikkat çekicidir. Bu çalışmalar, çeşitli matematiksel yapıların ve fonksiyonel analiz yöntemlerinin geliştirilmesine katkıda bulunmuştur.

Bu çalışmada, sıralı vektör uzaylarında yakınsaklık türlerinin analizi yapılmıştır. Tezde, kapalı koniler, yarı monoton normlar ve Arşimedyan sıralı vektör uzayları gibi kavramlar detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ayrıca, sıra yakınsama çeşitleri, genişleme ve kısıtlama süreçleri ile sınırsız sıra yakınsaklık konuları üzerinde durulmuştur. Çalışmanın temel yöntemi, bu kavramların teorik analizini yapmak ve elde edilen sonuçları matematiksel olarak ispatlamaktır.

Tez bu girişle birlikte beş ana bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, bir topolojik uzayın yapısını açıklamada dizilerin yakınsamasının yetersiz kaldığı, ancak bu yetersizliği ağların yakınsamasının tamamladığı açıklanmıştır. Bu sebeple, sıralı vektör uzaylarında yakınsaklık kavramı ağlar üzerinden hem genel hem de uzayın latis yapısı varken, yani uzay Riesz uzayı iken verilmiştir. Üçüncü bölümde, önce sıralı normlu uzaylarda kapalı koniler

ve yarı monoton normlar incelenip sıra birimli uzaylarda yakınsaklık verilmiş, sonra normun olmadığı durumda Arşimedyan sıralı vektör uzaylarında benzer bir yakınsama kavramı olarak göreceli düzgün yakınsama üzerine yoğunlaşmıştır. Dördüncü bölümde, sıra yakınsama çeşitleri ve sınırsız sıra yakınsaklık detaylı bir şekilde analiz edilmiştir. Son bölümde ise, derlenen bulgular özetlenmiş ve gelecekte yapılabilecek çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Bu çalışma, sıralı vektör uzaylarında yakınsaklık kavramları üzerine yapılan teorik araştırmalara katkı sağlamayı hedeflemektedir. Sonuçlar, hem matematiksel teori hem de uygulamalı bilimler için değerli bilgiler sunmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde ihtiyaç duyulan bilgiler ve teoremler verilecektir.

2.1. Topolojik Uzaylarda Dizilerin ve Ağların Yakınsaması

Burada verilen topolojik altyapı için [1–9] kaynaklarına bakılabilir.

Bir topolojik uzayda bir x noktasının komşuluğu, $x \in U$ şartını sağlayan herhangi bir U açık kümesidir. Bu tanımdan da anlaşılacağı üzere, tezimizde komşuluklar her zaman açık olarak alınacaktır. Bir x noktasının her komşuluğu yeterince büyük n indisleri için x_n elemanlarını içeriyorsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsar. Bu yakınsama $x_n \rightarrow x$ biçiminde gösterilir ve x noktasının (x_n) dizisinin bir limiti olduğu söylenir. Bir (x_n) dizisi x noktasına yakınsarsa (x_n) dizisinin her alt dizisi de x noktasına yakınsar.

Herhangi bir (X, d) metrik uzayı, tüm $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için ‘temel açıkları’ $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ açık yuvarları olan bir topolojiye sahiptir. Metrik uzaylar arasındaki bir $f : X \rightarrow Y$ sürekli fonksiyonu için X içinde $x_n \rightarrow x$ iken Y içinde $f(x_n) \rightarrow f(x)$ sağlanır. Yani metrik uzaylar arasında tanımlı sürekli fonksiyonlar dizilerin yakınsamasını korur, başka bir deyişle dizisel süreklidirler.

Bir topolojik uzayda herhangi iki farklı x ve y noktalarının ayrık olan birer komşuluğu bulunabiliyorsa bu topolojik uzaya ‘Hausdorff uzay’ denir. Diziler genelde birden fazla limite sahip olabilir. Ancak bir Hausdorff uzayda dizilerin limiti varsa tektir. Yani, bir Hausdorff uzayda yakınsak bir dizinin belli bir yerden sonra terimleri iki ayrık komşulukta olamaz.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ doğal sayılar kümesinden X kümesine örten fonksiyon varsa X sayılabilir kümedir. Sayılabilir kümelerin sayılabilir bir birleşimi de sayılabilirdir.

Bir topolojik uzayda bir kümenin her bir elemanının, bu küme tarafından kapsanan en az bir komşuluğu varsa bu küme ‘açık küme’dir. Bir kümenin tümleyenindeki herhangi bir dizinin bu kümenin içinde bir limiti yoksa bu küme ‘dizisel açık küme’dir.

2.1.1. Önerme

Metrik uzay içinde bir kümenin açık olması için gerek ve yeter şart o kümenin dizisel açık olmasıdır.

İspat

X metrik uzayının A alt kümesi açık küme olmak üzere $X \setminus A$ içinde bir dizi (x_n) olsun. Her bir $x \in A$ noktasının A tarafından kapsanan bir U komşuluğu vardır ve (x_n) dizisinin hiçbir terimi U içinde değildir. Dolayısıyla (x_n) dizisinin A içinde bir limiti olamayacağından A kümesi dizisel açıktır. Tersine A açık küme olmadığında, her bir komşuluğu $X \setminus A$ ile kesişen bir $x \in A$ vardır. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus A)$$

olacak biçimde $X \setminus A$ içinde oluşturulan (x_n) dizisi x noktasına yakınsadığından A dizisel açık değildir.

2.1.2. Önerme

Topolojik uzaydaki herhangi bir açık küme dizisel açıktır.

İspat

Önerme 2.1.1'in ispatının ilk kısmına benzerdir.

Yukarıdaki önermenin tersi doğru değildir. Her bir dizisel açık kümesi açık küme olan topolojik uzaya 'dizisel (topolojik) uzay' denir. Şimdi, dizisel olmayan bir topolojik uzay örneği verelim.

Örnek

X sayılamaz kümesini τ sayılabilir tümleyenler topolojisi ile birlikte ele alalım. X içindeki herhangi bir kümenin kapalı olması için gerek ve yeter şart bu kümenin X 'e eşit veya sayılabilir küme olmasıdır. X içinde $x_n \rightarrow x$ olacak biçimde bir (x_n) dizisi alındığında x elemanının $\{x\} \cup (X \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\})$ komşuluğu, yakınsama tanımından dolayı yeterince büyük n 'ler için x_n elemanlarını içerir. Bu durumda yeterince büyük n 'ler için $x_n = x$ olmak zorundadır. Sonuç olarak, X 'in herhangi bir A alt kümesindeki bir dizi yakınsaksa, yalnızca A 'nın bir elemanına yakınsayabildiğinden X 'in her alt kümesi dizisel açıktır. Ancak, X 'in açık olmayan alt kümeleri de var olduğundan (X, τ) dizisel uzay değildir.

Örnek

X sayılamayan kümesinin $\mathcal{P}(X)$ kuvvet kümesi ayrık topolojiyle verilsin. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, X kümesinin sayılamayan tüm alt kümelerinin ailesi olsun. $\mathcal{A}$ açık değildir. Gerçekten, her temel açık sonlu kümeleri içerir. Ancak $\mathcal{A}$ ailesinin dizisel olarak açık olduğunu iddia ediyoruz. (X_n) , X 'in sayılabilir alt kümelerinin bir dizisi olsun. $X_n \rightarrow Y$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir $x \in X$ alındığında $x \in Y$ olması için gerek ve yeter şart yeterince büyük n için $x \in X_n$ olmasıdır. Bu durumda $Y \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ sağlanır. Ancak $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ sayılabilir kümelerin sayılabilir bir birleşimidir. Dolayısıyla, bir sayılabilir kümeler dizisi yalnızca sayılabilir kümelere yakınsayabildiğinden $\mathcal{A}$ dizisel olarak açıktır.

Dizisel uzaylar aynı zamanda bir topolojik uzaydan başka bir topolojik uzaya tanımlanan herhangi bir fonksiyonun sürekliliğinin dizilerle doğru bir biçimde tanımlanabildiği uzaylardır.

2.1.3. Lemma

X topolojik uzayının bir A alt kümesinin dizisel açık olması için gerek ve yeter şart A içinde limiti olan her dizinin sonlu sayıda terimi hariç diğer terimleri A içindedir.

İspat

$A \subseteq X$ alt kümesinin dizisel açık olmadığı, $X \setminus A$ içinde sonsuz terimli ve limiti A içinde olan bir dizi varsa ispatlanabilir. A alt kümesi dizisel açık değilse, o zaman tanımı gereği terimleri $X \setminus A$ içinde olan ve limiti A içinde olan bir dizi vardır.

Tersine (x_n) dizisinin $X \setminus A$ içinde bir dizi ve $x \in A$ noktasına yakınsayan sonsuz sayıda terim içeren bir dizi olduğu varsayalım. O zaman (x_n) dizisi $X \setminus A$ içinde $x \in A$ noktasına yakınsayan bir alt diziye sahiptir. Yani A alt kümesi dizisel açık değildir.

2.1.4. Önerme

X topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) X diziseldir,
- 2) Y herhangi bir topolojik uzay iken bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f 'nin dizilerde yakınsaklığı korumasıdır.

İspat

(1 $\Rightarrow$ 2) X dizisel olsun. Herhangi bir sürekli fonksiyon dizilerin yakınsamasını korur. Bu nedenle $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu yakınsamayı koruyorsa f fonksiyonunun sürekli olduğunu ispatlamak yeterlidir. f fonksiyonunun sürekli olmadığını kabul edelim. En az bir $U \subseteq Y$ açık kümesinin $f^{-1}(U)$ ters görüntüsü X içinde açık değildir. X dizisel uzay olduğundan $f^{-1}(U)$ dizisel açık değildir. Dolayısıyla $X \setminus f^{-1}(U)$ içinde bir $x \in f^{-1}(U)$ noktasına yakınsayan (x_n) dizisi vardır. Ancak $(f(x_n))$ dizisi $Y \setminus U$ kapalı kümesinde bir dizidir. $f(x)$ 'i limit olarak alamaz. Bu durum f fonksiyonunun yakınsamayı korumasıyla çelişir. O halde f sürekli olmak zorundadır.

(2 $\Rightarrow$ 1) (X, τ) topolojik uzayı dizisel olmasın. $\tau_{diz} = \{A \subseteq X : A \text{ } \tau' \text{ ya göre dizisel açık}\}$ olsun. $\emptyset$ ve X dizisel açıktır ve dizisel açık kümelerin herhangi bir birleşimi de dizisel

açıktır. τ_{diz} kümeler ailesinin X üstünde topoloji olduğunu görmek için geriye iki dizisel açık küme olan A ve B kümelerinin kesişiminin de dizisel açık olduğunu ispatlamak kalır. Bunun için bir (x_n) dizisinin limiti $x \in A \cap B$ noktası olsun. Lemma 2.1.3'den (x_n) dizisinin belli bir yerden sonraki terimleri A içinde ve başka belli bir yerden sonraki terimleri B içinde olduğundan (x_n) dizisinin sonlu sayıda terimi dışında kalan tüm terimleri $A \cap B$ içindedir. Lemma 2.1.3'den $A \cap B$ dizisel açıktır.

$$I : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_{diz})$$

özdeşlik dönüşümü sürekli değildir. Ancak bu dönüşüm yakınsamayı korur. Gerçekten, (X, τ) içinde $x_n \rightarrow x$ olduğunu varsayalım. (X, τ_{diz}) içinde x noktasının herhangi bir açık komşuluğu (X, τ) içinde dizisel açık olduğundan Lemma 2.1.3'den (x_n) dizisinin sonlu sayıda terimi hariç tüm terimleri bu açık komşuluktadır. Dolayısıyla (X, τ_{diz}) içinde $x_n \rightarrow x$ sağlanır.

Örnek

$\tau = \{\emptyset, A \subseteq \mathbb{R} \mid X \setminus A \text{ sayılabilir küme}\}$ topolojisi ve $\tau_{|\cdot|}$ alışılmış topolojisiyle donatılan $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinden kendisine $I : (\mathbb{R}, \tau) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{|\cdot|})$; $I(x) = x$ özdeşlik dönüşümünü ele alalım ve $x_n \xrightarrow{\tau} x_0$ olsun. $A = (\mathbb{R} \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}) \cup \{x_0\}$ kümesi için

$$X \setminus A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap (\mathbb{R} \setminus \{x_0\}) \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

olduğundan $X \setminus A$ sayılabilir ve böylece $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x_0$ olur. Yani, I özdeşlik dönüşümü verilen topolojilerle dizisel süreklidir, yani dizilerde yakınsaklığı korur. Ancak $(0, 1) \in \tau_{|\cdot|}$ olmasına rağmen $I^{-1}(0, 1) = (0, 1) \notin \tau$ olduğundan I özdeşlik dönüşümü verilen topolojilerle sürekli değildir. Önerme 2.1.4'den sayılabilir tümleyenler topolojisiyle donatılan $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi dizisel uzay değildir.

2.1.5. Tanım

$\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ topolojik uzayda bir x elemanının komşuluklarının bir sayılabilir ailesi olmak üzere, x elemanının her V komşuluğu için $U_n \subseteq V$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ varsa

$\mathcal{U}$ 'ya ' x 'in bir sayılabilir tabanı' denir. Her noktasının sayılabilir bir tabana sahip olduğu topolojik uzay 'birinci sayılabilir uzay' diye adlandırılır.

Örnek

Metrik uzayın herhangi bir x elemanının bir sayılabilir tabanı $\{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ olduğundan metrik uzay birinci sayılabilirdir.

2.1.6. Önerme

Her birinci sayılabilir uzay dizisel uzaydır.

İspat

Önerme 2.1.2'den dolayı sadece dizisel açık olan her A kümesinin açık olduğunun ispatlanması yeterlidir. A kümesinin açık olmadığını kabul edelim. Bu durumda her komşuluğu $X \setminus A$ ile kesişen bir $x \in A$ vardır. $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi x 'in bir sayılabilir tabanı olsun. Bu durumda x 'in herhangi bir V komşuluğu için $U_{n_0} \subseteq V$ olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için terimleri

$$x_n \in (X \setminus A) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right)$$

olacak biçimde alınan (x_n) dizisi için $n_0 \leq n$ iken $x_n \in V$ olur. Yani (x_n) dizisi X içinde $x \in A$ noktasına yakınsayan bir dizidir. Bu nedenle A kümesi dizisel açık değildir.

Şimdi metrik uzayların bölümleri olarak dizisel uzayları ele alalım. Önce bölüm uzayının tanımını hatırlatalım. (X, τ) bir topolojik uzay ve X üstünde bir denklik bağıntısı $\sim$ olsun. X topolojik uzayının denklik sınıfları kümesi $X/\sim$ ve $\pi : X \rightarrow X/\sim$ izdüşüm dönüşümü göz önünde bulundursun. $\tau_{\sim} = \{A \subseteq X/\sim : \pi^{-1}(A) \text{ } \tau \text{ 'ya göre açık}\}$ ailesi $X/\sim$ üstünde topolojidir. Bu topolojiye 'bölüm topolojisi' denir.

Herhangi iki topolojik uzay arasında verilen bir $f : X \rightarrow Y$ örten fonksiyonu için A

kümesinin Y içinde açık olması için $f^{-1}(A)$ kümesinin X içinde açık olması gerekip yetiyorsa, Y topolojik uzayı X topolojik uzayının bir bölüm uzayı olarak düşünülebilir. Gerçekten, X üstünde $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ ile tanımlanan $\sim$ denklik bağıntısı göz önüne alındığında herhangi bir $x \in X$ elemanının denklik sınıfını $f(x)$ 'e eşleyen $X/\sim \rightarrow Y$ dönüşümü bir homeomorfizmdir.

2.1.7. Önerme

Bir dizisel uzayın herhangi bir bölüm uzayı da dizisel uzaydır.

İspat

X dizisel uzayı üstünde herhangi bir denklik bağıntısı $\sim$ olmak üzere, $X/\sim$ içindeki bir A kümesi açık olmasın. Bölüm uzayının tanım gereği $\pi^{-1}(A)$, X içinde açık değildir. X dizisel uzay olduğundan $X \setminus \pi^{-1}(A)$ içindeki bir (x_n) dizisi bir $x \in \pi^{-1}(A)$ elemanına yakınsar. π sürekli olduğundan dizilerin yakınsamasını korur. Dolayısıyla $(\pi(x_n))$, $(X/\sim) \setminus A$ içinde bir dizi ve limiti $\pi(x) \in A$ olduğundan A kümesi dizisel açık değildir.

2.1.8. Önerme

Her X dizisel uzayı en az bir metrik uzayın bir bölümüdür.

İspat

X içinde ilk terimlerine yakınsayan yani $x_n \rightarrow x_0$ olan tüm (x_n) dizilerinin kümesi $\mathcal{C}$ olsun. Standart metrik ile $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin $V = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ alt uzayını ele alalım. Böylece $A \subseteq V$ alt kümesi açıktır gerek ve yeter şart $0 \notin A$ veya A alt kümesi V alt uzayının sonlu elemanı hariç tüm elemanlarını içerir. V , bir metrik uzayın alt uzayı olduğundan metrik uzaydır. Şimdi aşağıdaki ayrık toplamı (yani kategori teorisindeki eş çarpımı) ele alalım:

$$W = \bigoplus_{(x_n) \in \mathcal{C}} \{(x_n)\} \times V.$$

W uzayının temel kümesi

$$\bigcup_{(x_n) \in \mathcal{C}} \{(x_n)\} \times V$$

olur. Herhangi bir $A \subseteq W$ alt kümesi açık olması için gerek ve yeter şart her $(x_n) \in \mathcal{C}$ için

$$\{v \in V : ((x_n), v) \in A\}$$

kümesinin V içinde açık olmasıdır. W uzayı metrik uzayların ayrık toplamı olarak metriklenebilir.

$$f : W \rightarrow X; f((x_n), 0) = x_0 \text{ ve her } m \in \mathbb{N} \text{ için } f\left((x_n), \frac{1}{m}\right) = x_m$$

biçiminde tanımlanan f dönüşümüyle X uzayı, W uzayının bir bölümü olur. Gerçekten f örtendir ve tüm $x \in X$ için X içindeki sabit dizi x noktasına yakınsar. Yani $x = f((x), 0)$ olur. Geriye $A \subseteq X$ alt kümesi açık olduğunda $f^{-1}(A)$ 'nın, W içinde açık olduğunu göstermek kalır. $A \subseteq X$ alt kümesinin açık olduğunu varsayalım. X dizisel olduğundan Lemma 2.1.3'den X içindeki bir $a \in A$ noktasına yakınsayan her (x_n) dizisinin A alt kümesinde sonlu sayıda terim hariç tümü var olmalıdır. Yani $((x_n), 0) \in f^{-1}(A)$ ise (bu (x_n) dizisinin $x_0 \in A$ noktasına yakınsadığı anlamına gelir), bu durumda $f^{-1}(A)$, $\{(x_n)\} \times V$ 'nin sonlu sayıda elemanı hariç tüm elemanlarını içerecektir. Yani, her bir $(x_n) \in \mathcal{C}$ için

$$\{v \in V : ((x_n), v) \in f^{-1}(A)\}$$

kümesi V içinde açıktır. Dolayısıyla $f^{-1}(A)$, W içinde açıktır.

Tersine, A alt kümesi X içinde açık değilse, $X \setminus A$ içinde bir $a \in A$ noktasına yakınsayan bir (x_n) dizisi vardır. O halde

$$\{v \in V : ((x_n), v) \in f^{-1}(A)\} = \{0\}$$

kümesi V içinde açık değildir, yani $f^{-1}(A)$, W içinde açık değildir.

2.1.9. Sonuç

Bir topolojik uzayın dizisel uzay olması için gerek ve yeter şart bu topolojik uzayın bir metrik uzayın bir bölümü olmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$ Önerme 2.1.8'den aşikârdır.

$(\Leftarrow)$ Her metrik uzay diziseldir ve dizisel uzayın herhangi bir bölüm uzayı da dizisel olduğundan (Önerme 2.1.7) aşikârdır.

Artık diziselliğin birinci sayılabilirlikten daha zayıf bir kavram olduğunu ispatlayabiliriz.

2.1.10. Önerme

Birinci sayılabilir olmayan dizisel uzay vardır.

İspat

Standart topoloji ile $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini ve $\mathbb{R}$ üstündeki $\sim$ denklik bağıntısını doğal sayılarla tanımlayalım. Yani denklik sınıfları $\mathbb{N}$ ve her $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ için $\{x\}$ olarak alalım.

$\mathbb{R} \setminus \sim$ bölüm uzayı bir metrik uzayın bölümü olarak dizisel uzaydır.

$\mathbb{R} \setminus \sim$ bölüm uzayının birinci sayılabilir olmadığını, özellikle $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde sayılabilir taban olmadığını iddia ediyoruz. Bir $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ ailesinin $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir sayılabilir komşuluklar ailesi olduğunu varsayalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\pi^{-1}(U_n)$, $\mathbb{R}$ içinde standart topolojiyle n noktasının bir komşuluğudur. Başka bir deyişle, bir $\varepsilon_n > 0$ için $B(n, \varepsilon_n) \subseteq \pi^{-1}(U_n)$ sağlanır. Bu durumda $\pi(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B(n, \varepsilon_n/2))$, $X \setminus \sim$ içinde $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir komşuluğudur. Ancak bu komşuluk, herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için U_n

kümesini kapsamaz. Yani $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde sayılabilir bir taban değildir.

Buraya kadar yapılan açıklamalarda, açık ve dizisel açık kümelerle ilgili kısımda dizilerin yakınsamasının bize topoloji hakkında tam bilgi vermediğini görüyoruz. Mesela, sayılamaz bir X kümesindeki ayrık topoloji ve sayılabilir tümleyenler topolojisi aynı yakınsak dizilere sahiptir, yani $x_n \rightarrow x$ olması için gerek ve yeter şart yeterince büyük n 'ler için $x_n = x$ olmasıdır. Halbuki, ayrık topoloji sayılabilir tümleyenler topolojisinden kesinlikle daha incedir. Ayrık topoloji diziseldir, ancak sayılabilir tümleyenler topolojisi açık olmayan dizisel açık kümeleri içerir.

Dizilerin yakınsamaları birinci sayılabilir uzaylarda iyi çalışır. Çünkü bir noktadaki sayılabilir taban o noktaya bir dizi ile güzel bir biçimde yaklaşmamızı sağlar. Ancak bir x noktasının sayılabilir bir tabanı yoksa, o zaman diziler x noktasına yaklaşmayı başaramayabilir.

Ağlar dizilerin yetersizliklerini giderebilmek için tanımlanır. Ağ kavramı dizi kavramını sadece genelleştirmez, aynı zamanda dizilerden daha derin ve daha geniş alanda kullanılabilir. Diziler her doğal sayıyı bir nokta ile ilişkilendirir. Ağlar ise, yönlü bir kümenin her elemanına bir nokta bağlayabildiklerinden daha geneldir.

2.1.11. Tanım

Yansıma ve geçişme özelliklerine sahip bir bağıntıyla ele alınan Λ kümesindeki herhangi iki elemanın bir üst sınırı yine Λ 'da oluyorsa, Λ 'ya yönlü küme denir.

Her tamamen sıralı küme (mesela, $\leq$ alışılmış sıralamasıyla $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi) bir yönlü kümedir.

Yönlü küme tanımında dikkat edilmesi gereken durum, bir eleman çiftinin en küçük bir üst sınıra sahip olmasının istenilmediğidir. Sadece en az bir üst sınırın var olması yeterli olacaktır.

Örnek

İkili kesişimler altında kapalı olan herhangi bir küme ailesi

$$X \leq Y \Leftrightarrow Y \subseteq X$$

ile tanımlanan ters kapsama bağıntısıyla yönlü bir kümedir.

Özellikle bir topolojik uzayın herhangi bir x noktası verildiğinde, x noktasının tüm komşuluklarının ailesi $\mathcal{N}(x)$, ters kapsama bağıntısıyla yönlü bir kümedir.

Örnek

Λ ve Γ yönlü kümeler olsun. $\Lambda \times \Gamma$ kümesi

$$(\lambda_1, \gamma_1) \leq (\lambda_2, \gamma_2) \Leftrightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2 \text{ ve } \gamma_1 \leq \gamma_2$$

ile tanımlanan bağıntıyla yönlü bir kümedir.

2.1.12. Tanım

1) Yönlü bir Λ kümesinden herhangi bir X kümesine tanımlanan herhangi bir f fonksiyonuna X içinde bir ağ denir. Genellikle tüm $\lambda \in \Lambda$ için $f(\lambda) = x_\lambda$ yazılır ve f fonksiyonu $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ veya kısaca (x_λ) ile gösterilir.

2) X topolojik uzayı içinde bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olmak üzere, x noktasının her U komşuluğu için $\lambda \leq \gamma$ iken $x_\gamma \in U$ olacak biçimde bir $\lambda \in \Lambda$ varsa $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına yakınsar denir ve bu durum $x_\lambda \rightarrow x$ ile gösterilir.

Şimdi ağların yakınsamasının (dizilerin yakınsamasından farklı olarak) uzayın topolojisini tamamen belirleyebildiğini ispatlayalım.

2.1.13. Önerme

Herhangi bir topolojik uzayda bir kümenin açık olması için gerek ve yeter şart bu kümenin tümleyenindeki herhangi bir ağın bu küme içinde bir limitinin olmamasıdır.

İspat

X bir topolojik uzay ve A kümesi X 'in bir açık alt kümesi olsun. $X \setminus A$ içinde bir $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı ve herhangi bir $x \in A$ noktası alınsın. A kümesi açık olduğundan x 'in bir komşuluğunu A içerir. Bu komşuluk ağın hiçbir terimini içermez. Dolayısıyla x noktası (x_λ) ağının bir limiti değildir.

Tersine A kümesinin açık olmasın. Bu durumda her komşuluğu $X \setminus A$ kümesi ile kesişen bir $x \in A$ noktası vardır. Böylece x noktasının her bir U komşuluğu için $x_U \in U \cap (X \setminus A)$ olacak biçimde $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)}$ ağı vardır. x noktasının her U komşuluğu için $U \leq V$ (yani $V \subseteq U$) iken $x_V \in U$ sağlanır. Dolayısıyla (x_U) ağı $X \setminus A$ kümesinin içinde olan ve $x \in A$ noktasına yakınsayan bir ağdır.

Diziler için olduğu gibi ağların yakınsaması da sürekli fonksiyonlar tarafından korunur. Ancak ağlar için bunun tersi de geçerlidir.

2.1.14. Önerme

X ve Y topolojik uzayları arasındaki bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart X içinde $x_\lambda \rightarrow x$ iken Y içinde $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ olmasıdır.

İspat

f fonksiyonunun sürekli olduğunu ve $x_\lambda \rightarrow x$ olduğunu varsayalım. Y içinde $f(x)$ noktasının bir U komşuluğunu alalım. $f^{-1}(U)$, X içinde x noktasının bir komşuluğudur. Ağların

yakınsaması tanımından her $\gamma \geq \lambda$ için $x_\gamma \in f^{-1}(U)$ olacak biçimde bir $\lambda \in \Lambda$ vardır. Buradan her $\gamma \geq \lambda$ için $f(x_\gamma) \in U$ olur. Bu $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ anlamına gelir.

Tersine f fonksiyonu sürekli olmasın. Yani, Y içinde bir U kümesi açık iken X içinde $f^{-1}(U)$ kümesi açık olmasın. Önerme 2.1.13'den $X \setminus f^{-1}(U)$ kümesinde $x \in f^{-1}(U)$ noktasına yakınsayan bir $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı vardır. Ancak $Y \setminus U$ kapalı kümesindeki $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ ağı $f(x) \in U$ noktasına yakınsamaz. Bu nedenle f fonksiyonu ağların yakınsamasını korumaz.

Bir dizi gibi bir ağın da birden fazla limiti olabilir. Ancak Hausdorff uzaylarda her yakınsak dizinin tek limiti vardır. Diziler Hausdorff olmayan uzaylarda da tek limite sahip olabilirler. Oysa ağlar Hausdorff uzayları tam olarak karakterize etmeyi başarır.

2.1.15. Önerme

Bir topolojik uzayın Hausdorff uzay olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki ağların farklı iki limitinin olmamasıdır.

İspat

X Hausdorff uzayındaki bir $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının farklı iki limitinin x ve y olduğunu kabul edelim. x noktasının U ve y noktasının V komşulukları ayrık alınırsa $\lambda_x \leq \gamma$ iken $x_\gamma \in U$ ve $\lambda_y \leq \gamma$ iken $x_\gamma \in V$ olacak biçimde λ_x ve λ_y vardır. Λ kümesi yönlü küme ve γ elemanının λ_x ile λ_y elemanlarının üst sınırı olmasından dolayı $x_\gamma \in U \cap V$ elde edilir. Ancak bu durum U ve V komşuluklarının ayrık olmasıyla çelişir. Bu nedenle (x_λ) ağının iki farklı limiti olamaz.

Tersine X uzayının Hausdorff uzay olmadığını kabul edelim. Bu durumda farklı iki x ve y noktalarının kesişimleri boş olmayan sırasıyla birer U ve V komşulukları vardır. Böyle komşuluklar için $x_{(U,V)} \in U \cap V$ alınarak bir $(x_{(U,V)})_{(U,V) \in \mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y)}$ ağı oluşturulabilir. Bir $U_0 \in \mathcal{N}(x)$ ve $(U_0, X) \leq (U, V)$ olacak biçimde bir $(U, V) \in \mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y)$ için $U \subseteq U_0$ ve dolayısıyla $x_{(U,V)} \in U \cap V \subseteq U_0$ olduğundan $x_{(U,V)} \rightarrow x$ olur. Benzer biçimde $x_{(U,V)} \rightarrow y$ olduğu gösterilebilir. Yani $(x_{(U,V)})_{(U,V) \in \mathcal{N}(x) \times \mathcal{N}(y)}$ ağı iki limite sahiptir.

Şimdi topolojik uzayların kompaktlığını inceleyelim. Öncelikle bir topolojik uzayın kompakt olabilmesi için her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsünün olması gerektiğini hatırlayalım. Bunun için temel açıklaın örtülerini ele almak yeterli olacaktır.

Denk olarak, bir uzayın kompakt olması için gerek ve yeter şart sonlu kesişim özelliğine sahip (yani her bir sonlu kesişimi boş olmayan) her kapalı küme ailesinin boş olmayan bir kesişiminin var olmasıdır.

Tychonoff'un önemli bir teoremi, kompakt uzayların herhangi bir çarpımının kompakt olduğunu ifade eder [10, 11].

Bir topolojik uzaydaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi varsa bu uzaya dizisel kompakt uzay denir. Bir metrik uzayın kompakt olması için gerek ve yeter şart dizisel kompakt olmasıdır. Ancak, açık küme ve dizisel açık küme arasındaki farkı düşünerek, genel olarak bu denklıkların her iki yönünün sağlanması konusunda çok şüphe duyulur. Aslında denkleğin her iki yönü her topolojik uzayda geçerli değildir.

2.1.16. Önerme

Kompakt olan, ancak dizisel kompakt olmayan bir topolojik uzay vardır.

İspat

$\{0, 1\}$ ayrık topolojiye sahip olmak üzere $\{0, 1\}^{[0,1]}$ uzayını çarpım topolojisi ile ele alalım. Tychonoff's Teoremi'ne göre $\{0, 1\}^{[0,1]}$, kompakt uzayların çarpımı olarak kompakt olmasına rağmen dizisel kompakt değildir [9].

2.1.17. Önerme

Dizisel kompakt olan, ancak kompakt olmayan bir topolojik uzay vardır [9].

Bununla birlikte ağıları kullanarak kompakt uzayları karakterize edebiliriz.

2.1.18. Tanım

$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ bir ağ ve Γ yönlü bir küme olmak üzere $f : \Gamma \rightarrow \Lambda$ fonksiyonu tanımlansın.

$(x_{f(\Gamma)})_{\gamma \in \Gamma}$ ağı aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının bir alt ağı diye adlandırılır:

1) $\gamma_1 \leq \gamma_2$ ise $f(\gamma_1) \leq f(\gamma_2)$ olur. Yani f fonksiyonu sırayı korur.

2) Her $\lambda \in \Lambda$ için $\lambda \leq f(\gamma)$ olacak biçimde $\gamma \in \Gamma$ vardır. Yani $f(\Gamma)$, Λ kümesinde eşsonludur.

2.1.19. Önerme

Bir topolojik uzayın kompakt olması için gerek ve yeter şart o uzaydaki her ağın yakınsak bir alt ağa sahip olmasıdır.

İspat

X kompakt uzay ve $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ bir ağ olsun.

$$X_{\lambda \in \Lambda} = \{x_\gamma : \lambda \leq \gamma\}$$

kümeleri sonlu kesişim özelliğine sahiptir. Kompaktlıktan dolayı bu kümelerin kapanışlarının kesişimi boş olmayan bir kümedir. Bu sebepten $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{X_\lambda}$ alınırsa, x noktasının her U komşuluğu her bir $\lambda \in \Lambda$ için X_λ ile kesişir. Diğer bir ifadeyle, her bir $\lambda \in \Lambda$ için $x_\gamma \in U$ olacak biçimde bir $\gamma \geq \lambda$ vardır. (Böyle bir x noktası (x_λ) ağının bir yığılma noktası olarak adlandırılır.)

$$\Gamma = \{(\lambda, U) \in \Lambda \times \mathcal{N}(x) : x_\lambda \in U\},$$

kümesini ele alalım. Γ kümesi $(\lambda_1, U_1) \leq (\lambda_2, U_2) \iff \lambda_1 \leq \lambda_2$ ve $U_2 \subseteq U_1$ ile tanımlanan bağıntıyla yansıyan ve geçişkendir. Bu bağıntıyla Γ yönlü kümedir. Gerçekten, Γ kümesinin iki eleman çifti (λ_1, U_1) ve (λ_2, U_2) için Λ kümesinde λ_1 ve λ_2 elemanlarının bir üst sınırı vardır ve x noktası (x_λ) ağının bir yığılma noktası olduğundan $x_{\gamma'} \in U_1 \cap U_2$ olacak biçimde $\gamma' \geq \gamma$ vardır. Bu durumda $(\gamma', U_1 \cap U_2)$, Γ kümesindeki (λ_1, U_1) ve (λ_2, U_2) elemanlarının

bir üst sınırdır. Dolayısıyla Γ yönlü bir kümedir.

$$\begin{aligned} f: \Gamma &\rightarrow \Lambda \\ (\lambda, U) &\rightarrow \lambda \end{aligned}$$

izdüşümü bir sıra koruyan fonksiyondur. Aynı zamanda her $\lambda \in \Lambda$ için $\lambda = f(\lambda, X)$ olduğundan örtendir. Yani, $(x_{f(\lambda, U)})_{(\lambda, U) \in \Gamma}$ ağı $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının bir alt ağıdır. Ayrıca, x noktasının herhangi bir U komşuluğu için bu noktanın seçiminden dolayı $x_\lambda \in U$ olacak biçimde $\lambda \in \Lambda$ vardır. Γ kümesinin tanımı gereği her $(\gamma, V) \geq (\lambda, U)$ için $x_{f(\gamma, V)} \in U$ sağlanır. Buradan $x_{f(\lambda, U)} \rightarrow x$ elde edilir.

Tersine, X uzayının kompakt olmadığını varsayalım. Bu durumda sonlu kesişim özelliğine sahip, ancak arakesiti boş olan kapalı kümelerden oluşan bir $\mathcal{A}$ ailesi vardır. $\mathbb{D}$ kümesi $\mathcal{A}$ ailesinin sonlu alt ailelerinden oluşsun ve kapsama bağıntısıyla ele alınsın. $\mathbb{D}$ bir yönlü kümedir. Her sonlu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ için $x_{\mathcal{B}} \in \bigcap_{A \in \mathcal{B}} A$ olacak biçimde $(x_{\mathcal{B}})_{\mathcal{B} \in \mathbb{D}}$ ağını seçebiliriz. $(x_{\mathcal{B}})_{\mathcal{B} \in \mathbb{D}}$ ağının bir $x \in X$ noktasına yakınsayan bir alt ağı $(x_{f(x)})_{\gamma \in \Gamma}$ olsun. Bu varsayımdan $x \notin A$ olacak biçimde bir $A \in \mathcal{A}$ vardır. A kapalı olduğundan $U \cap A = \emptyset$ olacak biçimde x noktasının bir U komşuluğu vardır. Dolayısıyla her $\mathcal{B} \geq \{A\}$ için $x_{\mathcal{B}} \notin U$ olur. Λ kümesi içinde $f(\Gamma)$ eşsonlu olduğundan $\{A\} \leq f(\gamma_1)$ olacak biçimde bir $\gamma_1 \in \Gamma$ vardır. Ancak her $\gamma \geq \gamma_2$ için $x_{f(\gamma)} \in U$ olacak biçimde bir $\gamma_2 \in \Gamma$ de vardır. Diğer yandan γ, γ_1 ve γ_2 elemanlarının bir üst sınırı ise $x_{f(\gamma)} \in U$ olur ve $\{A\} \leq f(\gamma_1) \leq f(\gamma)$ sağlanır. Yani $x_{f(\gamma)} \notin U$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $(x_{\mathcal{B}})_{\mathcal{B} \in \mathbb{D}}$ ağının yakınsak bir alt ağı yoktur.

Kompakt bir uzayda her ağın yakınsak bir alt ağı vardır. Dolayısıyla kompakt bir uzayda her dizinin yakınsak bir alt dizisi var olacağı, yani her kompakt uzayın dizisel kompakt olacağı beklenir. Ancak, Önerme 2.1.16'dan bunun doğru olmadığını biliyoruz. Bunun sebebi, bir dizinin her alt ağının bir alt dizi olmasının gerekmemesidir. Bu da, alt ağ tanımındaki f fonksiyonunun birebir olmasının gerekmemesinden kaynaklanır.

2.2. Sıralı Vektör Uzayları ve Sıra Yakınsaklık

Burada verilen sıralama altyapısı için [12, 13] kaynaklarına bakılabilir.

2.2.1. Tanım

X bir vektör uzayı olsun.

1) X üstündeki kısmi sıralama bağıntısı $\leq$ olmak üzere

(a) Her $x, y, z \in X$ için $x \leq y$ iken $x + z \leq y + z$

(b) Her $x \in X$ ve her $a \in [0, \infty)$ için $x \leq y$ iken $ax \leq ay$

şartları sağlanıyorsa bu sıralamaya ‘vektör uzay sıralaması’ denir.

Herhangi iki $x, y \in X$ için $x \leq y$ ve $x \neq y$ sağlanıyorsa $x < y$ yazılır. $0 \leq x$ ise x ’e ‘pozitif eleman’ denir. $x, y \in X, x \leq y$ için

$$[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$$

kümesi ‘sıralı aralık’ diye adlandırılır. Herhangi bir $A \subseteq X$ kümesinin üst sınırlarının ve alt sınırlarının kümesi sırasıyla aşağıdaki gibi gösterilir:

$$A^u = \{u \in X : \text{her } x \in A \text{ için } x \leq u\}$$

$$A^l = \{l \in X : \text{her } x \in A \text{ için } l \leq x\}$$

Tez boyunca $(A^u)^l$ kümesi yerine kısaca A^{ul} kısaltması kullanılacaktır. $A \subseteq [l, u]$ olacak biçimde $l, u \in X$ varsa A kümesine ‘sıra sınırlı’ küme denir. Her $x, y \in A, x < y$ için $[x, y] \subseteq A$ varsa A kümesine ‘dolu küme’ denir.

2) X içinde boş olmayan bir küme K olmak üzere her $x, y \in K$ ve her $a, b \in [0, \infty)$ için $ax + by \in K$ oluyorsa K kümesine X üstünde bir ‘kama’ denir.

3) K kümesi $K \cap (-K) = \{0\}$ özelliğiyle X üstünde bir kama ise o zaman K kümesine X üstünde bir ‘koni’ denir.

4) K, X üstünde bir kama olmak üzere $X = K - K$ ise K kümesine ‘üreten kama’ denir.

Bir $A \subseteq X$ kümesini içeren en küçük kama

$$\text{pozarf}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i : n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, n\}, \alpha_i \in [0, \infty), a_i \in A \right\}$$

kümesi olur. Vektör uzayından alınan bir koni yardımıyla uzay üstünde vektör uzay sıralaması tanımlanabildiği gibi vektör uzay sıralaması yardımıyla da koni elde edilebilir.

2.2.2. Önerme

X bir vektör uzayı olsun.

1) K, X içinde bir koni olsun. X üstünde

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan $\leq$ sıralama bağıntısı bir vektör uzay sıralamasıdır.

2) X üstünde $\leq$ bir vektör uzay sıralaması olsun. X içindeki tüm pozitif elemanların kümesi

$$K_0 = \{x \in X : 0 \leq x\} \quad (2.2)$$

X üstünde bir konidir.

3) K, X üstünde herhangi bir koni olsun. Eş. 2.1’de verilen sıralama $\leq$ ve Eş. 2.2’de verilen koni K_0 ise $K = K_0$ sağlanır.

Not

X vektör uzayında bir kama K ve Eş. 2.1’de tanımlanan sıralama bağıntısı $\leq$ ise, $\leq$ bağıntısı yansıma, geçişme özelliklerini ve Tanım 1.1’in (a) ve (b) özelliklerini sağlar. Öte yandan $\leq$ Tanım 2.2.1’in (a) ve (b) özelliklerini sağlayan, X üstünde yansıma ve geçişme özelliklerini sağlayan bir bağıntı ise Eş. 2.2 ile tanımlanan K_0 kümesi de X içinde bir kamadır.

X vektör uzayında bir K konisi verilmişse X uzayını (2.1)'de tanımlanan $\leq$ vektör uzayı sırası ile donatılır ve (X, K) 'ya '(kısmi) sıralı vektör uzayı' denir. K kümesinin önceden sabit olması koşuluyla bazen (X, K) yerine X yazılır.

Sonraki önerme kısmi sıralı vektör uzayları ile basit yapılar sağlar.

2.2.3. Önerme

1) (X, K) sıralı vektör uzayı ve Z , X uzayının alt uzayı olsun. O zaman $(Z, Z \cap K)$ sıralı vektör uzayıdır.

2) I boştan farklı bir küme ve her $i \in I$ için (X_i, K_i) sıralı vektör uzayı olmak üzere, $(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} K_i)$ kartezyen çarpımı da sıralı vektör uzayıdır.

(1)'de $Z \cap K$ konisi ile belirlenen Z üstündeki sıralamaya 'indirgenmiş sıralama' denir.

Örnek

1) Her X vektör uzayı için $(X, \{0\})$ bir sıralı vektör uzayıdır. $\{0\}$ konisi ile belirlenen sıralamaya X üstünde 'aşikâr sıralama' denir. Bu sıralama X içindeki her bir vektörü sadece kendisiyle karşılaştırır.

2) $[0, \infty)$ konisi ile reel sayıların $\mathbb{R}$ uzayı sıralı vektör uzayıdır. Bu koni ile belirlenen sıralama herkes tarafından bilinen $\leq$ küçük eşit sıralamasıdır ve bu sıralama $\mathbb{R}$ üstünde 'alışılmış sıralama' diye adlandırılır.

3) A boş olmayan bir küme olsun. $\mathbb{R}^A = \prod_{i \in A} \mathbb{R} = \{f \mid f : A \rightarrow \mathbb{R}\}$ vektör uzayını ve $\mathbb{R}_+^A = \{f \in \mathbb{R}^A : \text{her } a \in A \text{ için } f(a) \geq 0\}$ alt kümesini ele alalım. $(\mathbb{R}^A, \mathbb{R}_+^A)$ kısmi sıralı vektör uzayıdır. $\mathbb{R}_+^A$ konisine 'standart koni' ve bu koni ile belirlenen sıralamaya 'standart sıralama' veya 'noktasal sıralama' denir.

4) (3)'ün özel bir durumu olarak $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) : \text{her } i \in \{1, \dots, n\} \text{ için } x_i \geq 0\}$ konisi ile $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\{1, \dots, n\}}$ kısmi sıralı vektör uzayıdır.

5) (3)'de verilen $\mathbb{R}^A$ uzayının

$$\ell^p(A) = \{f \in \mathbb{R}^A : \sum_{a \in A} |f(a)|^p < \infty\} \quad (p > 0)$$

$$c_{00}(A) = \{f \in \mathbb{R}^A : \{a \in A : f(a) \neq 0\} \text{ sonlu}\}$$

alt uzayları kendi üzerlerine indirgenmiş sıralamalarla kısmi sıralı vektör uzaylarıdır.

Çalışmalarda genellikle bu uzayların $A = \mathbb{N}$ için olan $\ell^p(\mathbb{N})$ ve $c_{00}(\mathbb{N})$ özel durumları, yani ℓ^p ve c_{00} dizi uzayları ele alınır.

2.2.4. Tanım

(X, K) sıralı vektör uzayı olsun.

1) $A \subseteq X$ olmak üzere her $x, y \in A$ için $x \leq z$ ve $y \leq z$ olacak biçimde $z \in A$ varsa A kümesine $\leq$ bağıntısı ile ‘(yukarı) yönlü küme’ denir.

2) Bir $u > 0$ ve her $x \in X$ için $x \in [-au, au]$ olacak biçimde $a \in (0, \infty)$ varsa u 'ya ‘sıra birim’ denir.

X sıralı vektör uzayının yönlü bir A alt uzayı aynı zamanda aşağı yönlüdür. Yani her $x, y \in A$ için $x \geq z$ ve $y \geq z$ olacak biçimde $z \in A$ vardır. X içindeki bir u elemanının sıra birim olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $x \leq au$ olacak biçimde bir $a \in (0, \infty)$ var olmasıdır.

Tezin bundan sonraki kısımda, yönlü kısmi sıralı vektör uzayları ile ilgili aşağıdaki önerme sıklıkla kullanılacaktır.

2.2.5. Önerme

(X, K) sıralı vektör uzayı olsun.

1) K konisi üretendir gerek ve yeter şart X yönlüdür.

2) X uzayında bir $u > 0$ sıra birimi varsa K üretendir.

Sayfa 21'deki örneğin (1) maddesinde $X \neq \{0\}$ için X uzayı yönlü değildir, ancak (3) maddesinde standart sıralamayla $\mathbb{R}^A$ yönlüdür.

Örnek

1) A boş olmayan bir küme ve $B(A)$ tüm sınırlı fonksiyonlardan oluşan $\mathbb{R}^A$ uzayının alt uzayı olsun. $B(A)$ uzayının $\mathbf{1} : A \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{1}(a) = 1$ sabit fonksiyonunu içeren her X alt uzayında $\mathbf{1}$ fonksiyonu bir sıra birimdir. A sayılabilirse $B(A)$ yerine $\ell^\infty(A)$ yazılır. $A = \mathbb{N}$ özel durumunda ise $B(\mathbb{N})$ yerine sadece ℓ^∞ yazılır.

2) Boş olmayan bir A kompakt Hausdorff uzayı için $C(A)$ ile A üstündeki tüm reel sürekli fonksiyonların vektör uzayı gösterilir. $C(A)$ uzayı noktasal sıralama ile donatıldığında, yani $C(A)$ uzayı, $\mathbb{R}^A$ uzayından indirgenmiş sıralama ile ele alındığında her $a \in A$ için $f(a) > 0$ şartını sağlayan her bir $f \in C(A)$, $C(A)$ uzayında bir sıra birimdir.

3) ℓ^p ($p > 0$ sonlu) ve c_{00} uzaylarında sıra birim yoktur.

2.2.6. Tanım

X sıralı vektör uzayı ve $x, y \in X$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $nx \leq y$ iken $x \leq 0$ oluyorsa X 'e 'Arşimedyan'dır denir.

2.2.7. Önerme

(X, K) sıralı vektör uzayının bir alt uzayı Z olsun. (X, K) Arşimedyan ise $(Z, Z \cap K)$ da Arşimedyan'dır.

Örnek

Sayfa 21'de verilen $\mathbb{R}^A$ uzayı standart sıralama ile Arşimedyan'dır. Bu durumda $\mathbb{R}^n$ uzayı ve ayrıca Sayfa 23'de verilen $B(A)$ ve $C(A)$ uzayları da Arşimedyan'dır.

Örnek

$n \geq 2$ iken $\mathbb{R}^n$ üstünde sözlüksel sıralama, her $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ için

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < y_1 \text{ ya da} \\ \text{bir } k = 2, \dots, n \text{ ve her } i = 1, \dots, k-1 \text{ için } x_i = y_i \text{ ve } x_k < y_k \text{ ya da} \\ u = v \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Bu sıralamayla $\mathbb{R}^n$ uzayı Arşimedyen değildir. Gerçekten, her $m \in \mathbb{N}$ için $m(0, 1, 0, \dots, 0) \leq (1, 0, 0, \dots, 0)$ olmasına rağmen $(0, 1, 0, \dots, 0) \not\leq (0, 0, 0, \dots, 0)$ olur.

Şimdi sıralı vektör uzaylarında bölüm uzayını ele alalım. (X, K) sıralı vektör uzayı ve Y, X uzayının alt uzayı olsun. Her $x \in X$ için $[x] = \{y \in X : y - x \in Y\}$ kümeleri (başka bir deyişle denklik sınıfları) ele alındığında vektör uzayları teorisinden, kanonik işlemlerle donatılmış $\hat{X} = X/Y = \{[x] : x \in X\}$ ‘bölüm uzayı’ bir vektör uzayıdır ve $q = X \rightarrow \hat{X}, x \rightarrow [x]$ ‘bölüm dönüşümü’ lineer ve örtendir. $\hat{K} = \{[x] : x \in K\}$, $\hat{X}$ bölüm uzayında bir kamadır. q dönüşümü K ’yı $\hat{K}$ ’ya eşler. Ayrıca Y dolu (yani her $x, y \in Y$ için $[x, y] \subseteq Y$) ise $\hat{K}, \hat{X}$ bölüm uzayında bir konidir.

2.2.8. Önerme

(X, K) sıralı vektör uzayı ve Y, X uzayının dolu alt uzayı olsun. $(\hat{X}, \hat{K})$ bölüm uzayı sıralı vektör uzayıdır. K üretense $\hat{K}$ da üretendir.

İspat

$[x] \in \hat{K} \cap (-\hat{K})$ olsun. Bu durumda $u, -v \in K$ olacak biçimde $u, v \in [x]$ vardır ve böylece $0 \leq u \leq u - v \in Y$ sağlanır. Y dolu olduğu için $u \in Y$ ve buradan $x \in Y$ olur. Bu ise $[x] = Y = [0]$ olduğu anlamına gelir. K üreten ve $y \in \hat{X}$ olsun. $y = q(x)$ olacak biçimde $x \in X$ vardır. $x = u - v$ olacak biçimde $u, v \in K$ var olduğundan $y = q(u) - q(v)$ bulunur. Yani, $\hat{K}$ üretendir.

Önerme 2.2.8'deki hipotezler altında $\hat{K}$ 'ya 'bölüm konisi' ve $\hat{X}$ uzayı üstünde $[x] \leq [y] \Leftrightarrow y - x \in K$ ile verilen sıralamaya 'bölüm sıralaması' denir.

2.2.9. Önerme

(X, K) sıralı vektör uzayı ve $A \subseteq X$ için $\sup A$ var olsun.

- 1) $\{-a : a \in A\}$ kümesinin infimumu vardır ve $\inf\{-a : a \in A\} = -\sup A$,
- 2) Her $x \in X$ için $\sup\{x + a : a \in A\} = x + \sup A$,
- 3) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\sup\{\lambda a : a \in A\} = \lambda \sup A$ sağlanır.

Burada, sıralı vektör uzaylarında sıra yakınsama ağlar için tanımlanacaktır. Λ kümesi üstünde tanımlı $\preceq$ bağıntısı yansıma, geçişme ve yönlendirme özelliklerine sahip olsun. X sıralı vektör uzayındaki bir ağ $x : \Lambda \rightarrow X$ dönüşümüdür. Bu dönüşüm genellikle $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ veya (x_λ) şeklinde gösterilir.

2.2.10. Tanım

(X, K) sıralı vektör uzayı olsun.

- 1) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ X içinde bir ağ olmak üzere, her $\lambda, \gamma \in \Lambda$ için $\lambda \preceq \gamma$ iken $x_\lambda \leq x_\gamma$ oluyorsa bu ağa 'artan ağ' denir ve bu durum $x_\lambda \uparrow$ ile gösterilir. Benzer biçimde, her $\lambda, \gamma \in \Lambda$ için $\lambda \preceq \gamma$ iken $x_\gamma \leq x_\lambda$ oluyorsa bu ağa 'azalan ağ' denir ve bu durum $x_\lambda \downarrow$ ile gösterilir. $x_\lambda \uparrow$ ve $\sup_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x$ ise kısaca $x_\lambda \uparrow x$; $x_\lambda \downarrow$ ve $\inf_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x$ ise kısaca $x_\lambda \downarrow x$ yazılır.
- 2) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ X 'de bir ağ olsun. X 'de $y_\lambda \downarrow 0$ olacak biçimde bir $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı varsa ve her $\lambda \in \Lambda$ için $\pm(x_\lambda - x) \leq y_\lambda$ eşitsizliği sağlanıyorsa $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağına x noktasına 'sıra yakınsar' veya 'sıra yakınsaktır' denir ve bu yakınsama $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ ile gösterilir.
- 3) $A \subseteq X$ olsun. Herhangi bir $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A$ için $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına sıra yakınsak iken $x \in A$ oluyor ise A kümesine 'sıra kapalı küme' denir.

Sıra kapalı kümelerin kesişimi de sıra kapalıdır. Sıra yakınsamanın temel özelliklerini verelim.

2.2.11. Önerme

(X, K) sıralı vektör uzayı olsun.

- 1) (x_λ) ağı X 'de hem u noktasına hem de v noktasına sıra yakınsak ise $u = v$ olur.
- 2) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $(y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ X içinde iki ağ olsun. $x, y \in X$, $a \in \mathbb{R}$ için $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ ve $y_\gamma \xrightarrow{o} y$ ise $(x_\lambda + y_\gamma)_{(\lambda, \gamma) \in \Lambda \times \Gamma} \xrightarrow{o} x + y$ ve $ax_\lambda \xrightarrow{o} ax$ sağlanır.

İspat

- 1) $\pm(x_\lambda - u) \leq y_\lambda \downarrow 0$ ve $\pm(x_\lambda - v) \leq z_\lambda \downarrow 0$ eşitsizliklerinden

$$\pm(u - v) = \pm(u - x_\lambda + x_\lambda - v) \leq y_\lambda + z_\lambda \downarrow 0$$

olur. Buradan $u = v$ elde edilir.

- 2) Bu ifade Önerme 2.2.9'in doğrudan sonucudur.

Sıra yakınsama kavramı, aynı zamanda sıra süreklilik kavramının varlığına yol açar.

2.2.12. Tanım

(X_1, K_1) ve (X_2, K_2) sıralı vektör uzayları olmak üzere X_1 içindeki herhangi bir $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı ve $x \in X_1$ için $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ iken $f(x_\lambda) \xrightarrow{o} f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna 'sıra sürekli fonksiyon' denir.

2.2.13. Önerme

(X_1, K_1) ve (X_2, K_2) sıralı vektör uzayları olmak üzere, $f : X_1 \rightarrow X_2$ lineer dönüşümünün sıra

süreklili olması için gerek ve yeter şart X_1 içindeki her $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı için $x_\lambda \xrightarrow{o} 0$ iken $f(x_\lambda) \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

2.3. Riesz Uzayları ve Sıra Yakınsaklık

(X, K) sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin sırasıyla $x \vee y$ ve $x \wedge y$ ile gösterilen bir en küçük üst sınırı (supremum) ve en büyük alt sınırı (infimum) varsa (X, K) sıralı vektör uzayına ‘Riesz uzayı’ veya ‘vektör latis’ denir. Bu kesimde Riesz uzaylarının temel özellikleri çoğunlukla ispatsız olarak verilecektir.

2.3.1. Önerme

(X, K) sıralı vektör uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) Her $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu vardır.
- 2) (X, K) Riesz uzayıdır.
- 3) X vektör uzayının boş olmayan her sonlu alt kümesinin bir supremumu ve bir infimumu vardır.

Riesz uzaylarında reel sayılardan aşına olduğumuz bir çok özellik geçerlidir. Her $x, y, z \in X$ için

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

ve $x + y = x \wedge y + x \vee y$ sağlanır.

2.3.2. Önerme

(X, K) Riesz uzayı ve $A \subseteq X$ olsun.

1) $\sup A$ varsa her $x \in X$ için $\sup\{x \wedge a : a \in A\}$ da vardır ve $\sup\{x \wedge a : a \in A\} = x \wedge \sup A$ sağlanır.

2) $\inf A$ varsa her $x \in X$ için $\inf\{x \vee a : a \in A\}$ da vardır ve $\inf\{x \vee a : a \in A\} = x \vee \inf A$ sağlanır.

X Riesz uzayı olsun. $x \in X$ için ‘ x ’in pozitif kısmı’ $x^+ = x \vee 0$, ‘ x ’in negatif kısmı’ $x^- = -x \vee 0$ ve ‘ x ’in modülü’ $|x| = x \vee (-x)$ ile tanımlanır.

2.3.3. Önerme

(X, K) Riesz uzayı ve $x, y, z \in X$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1) $|x| = x^+ + x^-$, $x^+ \wedge x^- = 0$ ve $x = x^+ - x^-$

2) $y, z \in K$ olmak üzere $x = y - z$ ise $x^+ \leq y$ ve $x^- \leq z$

3) (2)’de $y, z \in K$ için $x = y - z$ ve $y \wedge z = 0$ ise $y = x^+$ ve $z = x^-$

4) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x+y| - |x-y|)$ ve $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x+y| + |x-y|)$

5) $||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$

6) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ ve $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$

7) $x, y, z \in K$ için $x \wedge (y + z) \leq x \wedge y + x \wedge z$

$(x, y) \rightarrow x \wedge y$, $(x, y) \rightarrow x \vee y$, $x \rightarrow x^+$, $x \rightarrow x^-$ ve $x \rightarrow |x|$ dönüşümlerine ‘latis işlemleri’ denir.

Bu işlemler arasındaki ilişki $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$, $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$, $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$ ve Önerme 2.2.9’dan dolayı

$$(x - y)^+ = (-y + x) \vee (-y + y) = -y + (x \vee y)$$

$$(x - y)^- = (-x + y) \vee (-x + x) = -x + (y \vee x)$$

eşitlikleriyle verilir. X Riesz uzayı ve A, X 'in lineer alt uzayı olsun. Her $x, y \in A$ için $x \vee y \in A$ varsa A 'ya 'Riesz alt uzayı' denir. Riesz uzayı üstündeki sıralamanın Riesz alt uzayına kısıtlanması ile Riesz alt uzayı da bir Riesz uzayıdır.

Örnek

Bir A kümesinden $\mathbb{R}$ 'ye fonksiyonların $\mathbb{R}^A$ kümesi noktasal olarak tanımlanan latis işlemleriyle (mesela $f, g \in \mathbb{R}^A$ için $a \in A$ iken $(f \vee g)(a) = \max\{f(a), g(a)\}$) Riesz uzayıdır. Özel olarak $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\{1, \dots, n\}}$ Riesz uzayıdır. Benzer olarak $B(A), C(A), \ell^p$ ve c_{00} uzayları birer Riesz uzayıdır. $[0, 1]$ üstünde tanımlı sürekli türevlenebilen fonksiyonların $C^1[0, 1]$ vektör uzayı noktasal sıralama ile sıralı vektör uzayıdır, ancak Riesz uzayı değildir. Aynı şekilde herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ için k -kez sürekli türevlenebilir fonksiyonların $C^k[0, 1]$ vektör uzayı Riesz uzayı değildir.

Arşimedyanlık sıralı vektör uzayları ve Riesz uzayları için şu şekilde karakterize edilebilir:

2.3.4. Önerme

1) (X, K) sıralı vektör uzayının Arşimedyan olması için gerek ve yeter şart her $x \in K$ için $\inf\{\frac{1}{n}x : n \in \mathbb{N}\}$ infimumu vardır ve sıfıra eşittir.

2) X Riesz uzayının Arşimedyan olması için gerek ve yeter şart herhangi iki $x, y \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq nx \leq y$ iken $x = 0$ olmasıdır.

2.3.5. Tanım

X Riesz uzayının her boş olmayan üstten sınırlı kümesinin bir supremumu varsa X 'e 'Dedekind tam' denir.

Her Dedekind tam Riesz uzayı Arşimedyanıdır. Üstelik, Bir Dedekind tam Riesz uzayının her alt uzayı Arşimedyan sıralı vektör uzayıdır.

Örnek

$\mathbb{R}^A$ ve $B(A)$ Dedekind tam, ancak $C[0, 1]$ Dedekind tam değildir.

Latis işlemlerinin sıra sürekli olduğunu aşağıdaki önerme ile verelim.

2.3.6. Önerme

(X, K) Riesz uzayı, X içinde iki $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ağı ve $x, y \in X$ için $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ ve $y_\gamma \xrightarrow{o} y$ olsun. Bu durumda $x_\lambda \vee y_\gamma \xrightarrow{o} x \vee y$, $x_\lambda \wedge y_\gamma \xrightarrow{o} x \wedge y$, $x_\lambda^+ \xrightarrow{o} x^+$, $x_\lambda^- \xrightarrow{o} x^-$ ve $|x_\lambda| \xrightarrow{o} |x|$ sağlanır.

İspat

$$|x_\lambda - x| \leq v_\lambda \downarrow 0 \text{ ve } |y_\gamma - y| \leq w_\gamma \downarrow 0 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned} |x_\lambda \vee y_\gamma - x \vee y| &= |x_\lambda \vee y_\gamma - x_\lambda \vee y + x_\lambda \vee y - x \vee y| \\ &\leq |x_\lambda \vee y_\gamma - x_\lambda \vee y| + |x_\lambda \vee y - x \vee y| \\ &\leq |y_\gamma - y| + |x_\lambda - x| \\ &\leq w_\gamma + v_\lambda \downarrow 0 \end{aligned}$$

sağlanır. Diğer ifadeler Önerme 2.2.11 yardımıyla elde edilebilir.

Lineer dönüşümlerin sıra sürekliliği için 0 noktasında sıra sürekliliği dikkate almak yeterli olacaktır.

Şimdi Riesz uzayları arasındaki pozitif operatörlerle ilgili bir kaç hatırlatma yapalım ve ardından bu operatörlerin ağların yakınsaklıkları korumasıyla ilgili ifadeleri verelim.

2.3.7. Tanım

X, Y sıralı vektör uzayları ve $T : X \rightarrow Y$ lineer operatör olmak üzere her $x \in X^+$ için $T(x) \in Y^+$ ise T 'ye 'pozitif operatör' denir.

2.3.8. Tanım

X ve Y sıralı vektör uzayı olmak üzere, $T : X \rightarrow Y$ operatörü her $x, y \in X$ için $x \leq y$ iken $T(x) \leq T(y)$ önermesini sağlıyorsa T operatörüne ‘sıra koruyan operatör’ denir.

2.3.9. Tanım

X, Y sıralı vektör uzayları ve $T : X \rightarrow Y$ operatör olmak üzere her $x, y \in X$ için $T(x + y) = T(x) + T(y)$ eşitliği sağlanıyorsa T operatörüne ‘toplamsal operatör’ denir.

2.3.10. Teorem

X, Y sıralı vektör uzayları ve $T : X \rightarrow Y$ lineer operatörünün pozitif olması için gerek ve yeter şart sıra koruyan olmasıdır.

2.3.11. Teorem

X ve Y Riesz uzayı olmak üzere $T : X^+ \rightarrow Y^+$ toplamsal operatörünün X uzayından Y uzayına pozitif lineer genişlemesi vardır ve bu genişleme tektir (Riesz-Kantarovich Teoremi).

2.3.12. Teorem

X, Y sıralı vektör uzayları ve $L(X, Y) = \{T \mid T : X \rightarrow Y \text{ lineer operatör}\}$ olmak üzere her $S, T \in L(X, Y)$ için $S \leq T \Leftrightarrow$ her $x \in X^+$ için $S(x) \leq T(x)$ sıralaması ile $L(X, Y)$ sıralı vektör uzayıdır.

2.3.13. Teorem

X ve Y Riesz uzayı ve $T : X \rightarrow Y$ operatör olmak üzere $T \vee (-T) \in L(X, Y)$ oluyorsa, $T \vee (-T) \in L(X, Y)$ operatörüne ‘ T operatörünün modülü’ denir ve $|T|$ ile gösterilir.

Not

X, Y Riesz uzayları ve $T : X \rightarrow Y$ pozitif operatör olmak üzere, her $x \in X$ için $|T(x)| \leq T(|x|)$ sağlanır.

2.3.14. Teorem

X, Y Riesz uzayları ve $T : X \rightarrow Y$ operatör olmak üzere, her $x \in X^+$ için $\sup \{|T(y)| : |y| \leq x\}$ supremumu varsa $|T|$ operatörü vardır ve $|T|(x) = \sup \{|T(y)| : |y| \leq x\}$ eşitliği sağlanır.

2.3.15. Tanım

X ve Y Riesz uzayı olmak üzere $T : X \rightarrow Y$ lineer operatörü X uzayının sıra sınırlı alt kümelerini Y uzayının sıra sınırlı alt kümelerine dönüştürüyorsa bu operatöre ‘sıra sınırlı operatör’ denir. Sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_b(X, Y)$ ile gösterilir.

2.3.16. Tanım

X ve Y Riesz uzayı ve $T : X \rightarrow Y$ operatör olmak üzere her $(x_\lambda) \subseteq X$ ağı için $x_\lambda \xrightarrow{o} 0$ iken $Tx_\lambda \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa T operatörüne ‘sıra sürekli operatör’ denir. Sıra sürekli operatörlerin kümesi $L_n(X, Y)$ ile gösterilir.

2.3.17. Teorem

X ve Y Riesz uzayı olmak üzere $T : X \rightarrow Y$ lineer operatörü için $|T|$ mevcut ise T operatörü sıra sınırlıdır.

3. SIRALI NORMLU UZAYLARDA YAKINSAKLIK

Bu bölümde (X, K) sıralı vektör uzayı $\|\cdot\|$ normu ile ele alınacaktır. $(X, K, \|\cdot\|)$ uzayına ‘sıralı normlu uzay’ denir. Sıralama ve norm arasında doğrudan bir ilişki yoktur. Ancak bazı örneklerde birkaç şekilde bağlantılı oldukları görülebilir. Burada ilgili kavramlar ve sonuçlar incelenecektir. Daha fazla ayrıntı için [12, 13] kaynaklarına bakılabilir.

3.1. Kapalı Koniler ve Yarı Monoton Normlar

Sıralı normlu uzayların yapısını anlamak için kapalı konilerden faydalanılır.

3.1.1. Önerme

$(X, K, \|\cdot\|)$ sıralı normlu uzayı olmak üzere, K konisinin kapalı olması için gerek ve yeter şart X içindeki herhangi iki $(x_n), (y_n)$ dizisi ve $x, y \in X$ için $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x, y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq y_n$ ise $x \leq y$ olmasıdır.

Yukarıdaki önermede diziler yerine ağlar alındığında önermenin ifadesi değişmez.

3.1.2. Önerme

$(X, K, \|\cdot\|)$ sıralı normlu uzayında K kapalı ise X Arşimedyandır.

İspat

$x, y \in X$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $nx \leq y$ olsun. Bu durumda $x \leq \frac{1}{n}y$ ve ayrıca $(\frac{1}{n}y)$ dizisi $\|\cdot\|$ normuna göre sıfıra yakınsak olduğundan $x \leq 0$ elde edilir.

Sırasıyla K ve L konileriyle sıralı normlu uzaylar X ve Y olmak üzere

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y \mid T \text{ lineer ve norm sınırlı}\}$$

biçiminde tanımlanan $\mathcal{L}(X, Y)$ kümesi operatör normuyla normlu uzaydır. $\mathcal{L}_+(X, Y) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : T \text{ pozitif}\}$ kümesi $\mathcal{L}(X, Y)$ için bir kamadır. $X = Y$ olduğunda $\mathcal{L}(X) =$

$\mathcal{L}(X, X)$ ve $\mathcal{L}_+(X) = \mathcal{L}_+(X, X)$ yazılır. $Y = \mathbb{R}$ ise X uzayının $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ norm duali için bir kama $K' = X' \cap K^*$ ‘dual kama’dır.

3.1.3. Önerme

- 1) $K - K'$ ’nin norm kapanışı X' ’e eşit ise $\mathcal{L}_+(X, Y)$ bir konidir.
- 2) $Y \neq \{0\}$ olmak üzere $\mathcal{L}_+(X, Y)$ koni ise $K - K'$ ’in norm kapanışı X' ’e eşittir.
- 3) L kapalı ise $\mathcal{L}_+(X, Y)$ kapalıdır.

İspat

1) $K - K'$ ’nin norm kapanışı X' ’e eşit ve $\pm T \in \mathcal{L}_+(X, Y)$ olsun. Her $x \in K$ için $T(x) = 0$ olduğundan $K - K$ üstünde $T = 0$ elde edilir. T sürekli olduğundan X üstünde $T = 0$ olur. Buradan $\mathcal{L}_+(X, Y)$ ’in bir koni olduğu sonucu elde edilir.

2) $K - K'$ ’nin norm kapanışı X_0 ve $X_0 \neq X$ olsun. Hahn-Banach teoreminden X_0 üstünde $f = 0$ olacak biçimde bir $f \in X' \setminus \{0\}$ operatörü vardır. Sonuç olarak $\pm f \in K'$ olur. $z \in Y \setminus \{0\}$ sabit olmak üzere $T(x) = f(x)z$ biçiminde tanımlanan $T : X \rightarrow Y$ operatörü için , $\pm T \in \mathcal{L}_+(X, Y) \setminus \{0\}$ olduğundan $\mathcal{L}_+(X, Y)$ koni değildir.

3) L kapalı iken operatör normuna yakınsama noktasal yakınsamayı gerektirdiğinden kapanış teoremi yardımıyla $\mathcal{L}_+(X, Y)$ kapalı olur.

$K - K'$ ’nin norm kapanışı X' ’e eşit ise $(\mathcal{L}(X, Y), \mathcal{L}_+(X, Y), \|\cdot\|)$ uzayı sıralı normlu uzaydır.

3.1.4. Sonuç

$(X, K, \|\cdot\|)$ sıralı normlu uzay olsun.

1) K' dual kamasının koni olması için gerek ve yeter şart $K - K'$ 'nin norm kapanışı X' 'e eşit olmasıdır.

2) X' içinde K' dual kaması kapalıdır.

Sonuç 3.1.4 (1)'in koşulu ile K' dual kamasına 'dual koni' denir. Bu durumda $(X', K', \|\cdot\|)$ kapalı konili sıralı normlu uzaydır.

3.1.5. Önerme

$(X, K, \|\cdot\|)$ sıralı normlu uzay ve K kapalı koni olsun.

1) Her $x \in X \setminus K$ için $f(x) < 0$ olacak biçimde bir $f \in K'$ fonksiyoneli vardır.

2) $x \in X$ olmak üzere $x \in K$ olması için gerek ve yeter şart her $f \in K'$ için $f(x) \geq 0$ olmasıdır.

3) Her $x \in K \setminus \{0\}$ için $f(x) > 0$ olacak biçimde $f \in K'$ fonksiyoneli vardır.

İspat

1) $x \in X \setminus K$ olsun. K boş olmayan kapalı konveks küme ve $x \notin K$ olduğundan Hahn-Banach teoreminden bir $f \in X'$ ve bir $c \in \mathbb{R}$ için $f(x) < c$ ve K üstünde $f \geq c$ sağlanır. $0 \in K$ olduğundan $0 = f(0) \geq c$ ve böylece $f(x) < 0$ elde edilir. Geriye $f \in K'$ olduğunu göstermek kalır. $n \in \mathbb{N}$ ve $v \in K$ iken $f(v) = \frac{1}{n}f(nv) \geq \frac{c}{n}$ sağlanır. X Arşimedyan olduğundan $f(v) \geq 0$ ve buradan $f \in K'$ olur.

2) (1)'deki ifadenin doğrudan bir sonucudur.

3) Her $x \in K \setminus \{0\}$ için $-x \notin K$ olduğundan (1)'in ifadesinden dolayı $f(-x) < 0$ ve böylece $f(x) > 0$ olacak biçimde bir $f \in K'$ fonksiyoneli vardır.

Sıralama ve norm arasında önemli bir uyumluluk koşulu yarı normlar aracılığıyla verilir.

3.1.6. Tanım

(X, K) sıralı vektör uzayı ve p yarı norm olmak üzere, her $x, y \in X$ için $0 \leq x \leq y$ iken $p(x) \leq Np(y)$ olacak biçimde bir $N > 0$ sabiti varsa p 'ye 'yarı monoton', $p(x) \leq p(y)$ oluyorsa p 'ye 'monoton'dur denir.

X sıralı vektör uzayı üstünde p bir yarı norm ve $A \subseteq X$ olmak üzere bir M sabiti ve her $x \in A$ için $p(x) \leq M$ oluyorsa A kümesine ' p -sınırlı küme' denir.

3.1.7. Lemma

(X, K) sıralı vektör uzayı ve p, X üstünde yarı monoton yarı norm olsun. X içindeki her sıra sınırlı küme p -sınırlıdır.

İspat

p yarı monoton olduğundan tanım gereği bir $N \in (0, \infty)$ sabiti ve her $x, y \in X$ için $0 \leq x \leq y$ iken $p(x) \leq Np(y)$ olur. $A \subseteq X$ kümesi sıra sınırlı, yani $A \subseteq [a, b]$ olacak biçimde $a, b \in X$ var olsun. Herhangi bir $x \in A$ için $0 \leq x - a \leq b - a$ olduğundan $p(x - a) \leq Np(b - a)$ sağlanır. Böylece $p(x) = p(x - a + a) \leq p(x - a) + p(a) \leq Np(b - a) + p(a)$ elde edilir.

Monoton normlu sıralı normlu uzayın konisinin kapalı olması gerekmez. Koninin kapanışı ile ilgili aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

3.1.8. Önerme

$(X, K, \|\cdot\|)$ monoton normlu sıralı vektör uzayı olsun. K 'nın kapanışı $\bar{K}$ bir konidir ve norm $(X, \bar{K})$ üstünde de monotondur.

İspat

K konisinin kapanışı $\bar{K}$ 'nın bir kama olduğu aşikârdır. $x \in \bar{K} \cap (-\bar{K})$ olsun. Bu durumda

$x_n \rightarrow x$ ve $y_n \rightarrow -x$ olacak biçimde K konisinde (x_n) ve (y_n) dizileri vardır. (X, K) sıralı vektör uzayında $0 \leq x_n \leq x_n + y_n$ olup buradan $\|x_n\| \leq \|x_n + y_n\|$ elde edilir. $\|x_n + y_n\| \rightarrow 0$ olduğundan $x_n \rightarrow 0$ olur. Dolayısıyla $x = 0$ elde edilir. Böylece $\bar{K}$ bir konidir. Normun $(X, \bar{K})$ üstünde monoton olduğunu gösterelim. $x, y \in \bar{K}$ için $x_n \rightarrow x$ ve $y_n \rightarrow y$ olacak biçimde K konisinde (x_n) ve (y_n) dizileri var olduğundan her n için $\|x_n\| \leq \|x_n + y_n\|$ ve böylece $\|x\| \leq \|x + y\|$ sağlanır. Buradan normun monoton olduğu sonucuna ulaşılır.

3.2. Sıra Birimli Uzaylarda Yakınsaklık

(X, K) sıralı vektör uzayının sıra birimi u olsun. Her $x \in X$ için

$$\|x\|_u = \inf\{a \in (0, \infty) : -au \leq x \leq au\} \quad (3.1)$$

ile tanımlanan $\|\cdot\|_u$ dönüşümü X üstünde bir yarı normdur. X Arşimedyan ise $\|\cdot\|_u$ X üstünde bir normdur. Her $x \in X$ için $\pm x \leq au$ olacak biçimde en küçük $a \in (0, \infty)$ elemanı var olduğundan bu norma ‘sıra birim normu’ ya da ‘ u -norm’ denir. $(X, K, \|\cdot\|_u)$ sıralı normlu uzayına da ‘sıra birimli uzay’ denir. $\|u\|_u = 1$ ve u -norm monotondur. $u, v \in K \setminus \{0\}$ sıra birimlerine karşılık gelen $\|\cdot\|_u$ ve $\|\cdot\|_v$ normları denktir.

3.2.1. Lemma

$(X, K, \|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzay olsun.

1) (x_n) X içinde bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_u} x$ olması için gerek ve yeter şart $a_n \rightarrow 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\pm(x_n - x) \leq a_n u$ olacak biçimde $(a_n) \in (0, \infty)$ dizisinin var olmasıdır.

2) K konisi $\|\cdot\|_u$ normuna göre kapalıdır.

İspat

1) ifadesi aşikârdır.

2) K konisinde bir dizi (x_n) ve $x \in X$ olmak üzere $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_u} x$ olsun. (1)'den dolayı $a_n \rightarrow 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\pm(x_n - x) \leq a_n u$ olacak biçimde $(a_n) \in (0, \infty)$ dizisi vardır. Buradan $-x \leq a_n u$ olur. X Arşimedyen olduğundan $-x \leq 0$, yani $x \geq 0$ elde edilir.

Örnek

A boş olmayan kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere $C(A)$ uzayı Arşimedyandır ve $u = \mathbf{1}$ sabit fonksiyonu bir sıra birimdir. $\|\cdot\|_u$ sıra birim normu düzgün norma eşittir.

$(X, K, \|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzayında K konisinin içi $\text{int}(K)$ olmak üzere $u \in \text{int}(K)$ sağlanır. u merkezli $1/2$ yarıçaplı kapalı yuvar K konisinin içerdiği $[\frac{1}{2}u, \frac{3}{2}u]$ kümesidir. Tersine konisinin içi boş olmayan her sıralı normlu uzay, bir sonraki önermede gösterileceği gibi bir sıra birime sahiptir. Bunun ispatı için aşağıdaki temel özellikler kullanılacaktır. $(X, K, \|\cdot\|_u)$ sıralı normlu uzayında $\text{int}(K) \neq \emptyset$ iken her $x \in \text{int}(K)$ ve $a \in (0, \infty)$ için $ax \in \text{int}(K)$ olur. Ayrıca $x \in \text{int}(K)$ ve $x \leq y$ ise $y \in \text{int}(K)$ sağlanır.

3.2.2. Önerme

$(X, K, \|\cdot\|)$ sıralı normlu uzay ve $\text{int}(K) \neq \emptyset$ olsun.

1) $u \in K \setminus \{0\}$ sıra birimdir ancak ve ancak $u \in \text{int}(K)$ olur.

2) $u \in \text{int}(K)$ için $\|\cdot\|_u$ yarı normu $\|\cdot\|$ normundan daha zayıftır.

3) X Arşimedyen ise K kapalıdır.

İspat

1) u sıra birim ve $u > 0$ olsun. $\text{int}(K) \neq \emptyset$ iken bir $v \in \text{int}(K)$ ve bir $a \in (0, \infty)$ için $-au \leq v \leq au$ sağlanır. Buradan $\frac{1}{a}v \leq u$ ve böylece $u \in \text{int}(K)$ elde edilir. Tersine $u \in \text{int}(K)$ olsun. Bu durumda bir $r \in (0, \infty)$ için K konisi içinde u merkezli r yarıçaplı $B(u, r)$ açık yuvarı vardır.

Herhangi bir $x \in X \setminus \{0\}$ için. $u \pm \frac{r}{2\|x\|}x \in B(u, r) \subseteq K$ yani

$$u \pm \frac{r}{2\|x\|}x \geq 0 \quad (3.2)$$

sağlanır. $a = \frac{2\|x\|}{r}$ seçilirse $-au \leq x \leq au$ elde edilir. Dolayısıyla u sıra birimdir.

2) (1)'de her $x \in X$ için $\|x\|_u \leq \frac{2}{r} \|x\|$ olduğu gösterilmiştir.

3) K konisinde bir dizi (x_n) ve $x \in X$ için $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ ise (2)'den $\|x_n - x\|_u \rightarrow 0$ elde edilir. X Arşimedyan olduğundan Lemma 3.2.1'den K konisi $\|\cdot\|_u$ normuna göre kapalıdır.

Bir sonraki örnekte gösterileceği gibi X Arşimedyan olsa bile Önerme 3.2.2 (2)'deki normlar genel olarak denk değildir. Bunun anlamı, konisinin iç noktalarının kümesi boş olmayan herhangi bir Arşimedyan sıralı normlu uzay sıra birimli olmak zorunda değildir.

Örnek

Sayfa 38'deki örnekte olduğu gibi standart koni K ve sabit fonksiyon $u = \mathbf{1}$ sıra birimi ile $C[0, 1]$ uzayını ele alalım. $\|\cdot\|_u$ sıra birim normu düzgün norma eşit olduğundan $\|\cdot\|_u$ normuna göre koninin içi $U = \{x \in C[0, 1] : \text{her } s \in [0, 1] \text{ için } x(s) > 0\}$ kümesidir. $C[0, 1]$ uzayı üstünde tanımlı sürekli olmayan bir f fonksiyoneli ele alındığında her $x \in C[0, 1]$ için $\|x\| = \|x\|_u + |f(x)|$ biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|$ normu ile $\|\cdot\|_u$ sıra birim normu eşit değildir. Ancak bu iki norma göre koninin içlerinin eşit olduğunu gösterelim. $\|\cdot\|$ normuna göre koninin içi V ise $\|\cdot\|$ normunun topolojisi $\|\cdot\|_u$ normunun topolojisinden daha güçlü olduğundan $U \subseteq V$ olur. $x \in V \setminus U$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in K$ ve bir $t \in [0, 1]$ için $x(t) = 0$ sağlanır. $g : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|); g(a) = x + a\mathbf{1}$ dönüşümü sürekli olduğundan $g^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}$ açık kümedir ve $0 \in g^{-1}(V)$ sağlanır. Öyleyse $a_0 < 0$ olacak biçimde $a_0 \in g^{-1}(V)$ vardır ve $(x + a_0\mathbf{1}) < 0$ sağlanır. Bu durum $x + a_0\mathbf{1} \in V \subseteq K$ olması ile çelişir.

Şimdi sonlu boyutlu uzaylar için geçerli olan bir önerme verelim:

3.2.3. Önerme

$(X, K, \|\cdot\|_u)$ sonlu boyutlu sıralı normlu uzay olsun. K konisinin üreten olması için gerek ve yeter şart $\text{int}(K) \neq \emptyset$ olmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$ X , n boyutlu uzay ve K konisi üreten olsun. Bu durumda bir $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq K$ lineer bağımsız kümesi vardır. $u = \sum_{i=1}^n x_i$ alınırsa $u \in K$ olur. $u \in \text{int}(K)$ olduğunu gösterelim. X sonlu boyutlu olduğundan norm yakınsama ile X vektör uzayının $\{x_1, \dots, x_n\}$ tabanına göre noktasal yakınsama aynıdır. u 'nun

$$U = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i : \text{her } i \in \{1, \dots, n\} \text{ için } |a_i - 1| < 1 \right\}$$

komşuluğundaki her bir a_i katsayısı pozitif olduğundan $U \subseteq K$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ Önerme 3.2.2 ve Önerme 2.2.5'den elde edilir.

Önerme 3.2.2 ve Önerme 3.2.3'den aşağıdaki sonuç elde edilir:

3.2.4. Sonuç

Her sonlu boyutlu yönlü Arşimedyen sıralı vektör uzayın konisi kapalıdır.

Sonuç 3.2.4 Arşimedyen sıralı vektör uzaylarını karakterize etmek için kullanılır.

3.2.5. Önerme

(X, K) sıralı vektör uzayı Arşimedyen olması için gerek ve yeter şart X 'in boyutu 2 olan her Y alt uzayı için $Y \cap K$ kümesi Y uzayının standart topolojisine göre kapalıdır.

İspat

(X, K) Arşimedyan sıralı vektör uzayının boyutu 2 olan bir Y alt uzayı için $Y_0 = Y \cap K - Y \cap K$ ya 0 ya da 1 boyutlu ise $Y \cap K$ kapalıdır. Y_0 , 2 boyutlu ise $(Y, Y \cap K)$ yönlüdür. Y Arşimedyan olduğundan Sonuç 3.2.4'den $Y \cap K$ kapalıdır.

Herhangi iki $x, y \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $nx \leq y$ olsun ve $Y = \text{geren}\{x, y\}$ alalım. $Y \cap K$ kapalı olduğundan Önerme 3.1.2'den Y uzayı Arşimedyan ve $x \leq 0$ olur. Sonuç olarak X Arşimedyanıdır.

3.2.6. Önerme

$(X, K, \|\cdot\|)$ sonlu boyutlu sıralı normlu uzay olmak üzere, K üreten ve kapalı ise $\|\cdot\|$ normu yarı monotondur.

İspat

K konisi üreten olduğundan Önerme 3.2.3'den $u \in \text{int}(K)$ ve Önerme 3.2.2'den u sıra birimdir. Ayrıca, K kapalı olduğundan Önerme 3.1.2'den X Arşimedyanıdır ve böylece u -yarı normu bir normdur. X sonlu boyutlu olduğu için $\|\cdot\|$ normu monoton olan u -normuna denktir. Dolayısıyla $\|\cdot\|$ normu yarı monotondur.

Şimdi, konisinin içi boş olmayan sıralı normlu uzayların özelliklerini verelim.

3.2.7. Önerme

$(X, K, \|\cdot\|)$ sıralı normlu uzay ve $\text{int}(K) \neq \emptyset$ olsun.

1) X üstündeki her pozitif lineer fonksiyonel sürekli.

2) Her $u \in \text{int}(K)$ ve $f \in K' \setminus \{0\}$ için $f(u) > 0$ sağlanır.

İspat

1) $u \in \text{int}(K)$ ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif lineer fonksiyonel olsun. $\|x\|_u \leq 1$ şartını sağlayan her $x \in X$ için $|f(x)| \leq f(u)$ olur. Dolayısıyla f fonksiyoneli u -yarı normuna göre süreklidir. Önerme 3.2.2 (2)'den f fonksiyoneli $\|\cdot\|$ normuna göre süreklidir.

2) $f \in K' \setminus \{0\}$ olsun. $\|x\|_u \leq 1$ ve $f(x) \neq 0$ olacak biçimde $x \in X$ vardır. Buradan $0 < |f(x)| \leq f(u)$ elde edilir.

Şimdi hangi koşullar altında sürekli operatör uzayları ile sıra sınırlı operatör uzaylarının çakıştığı incelenecektir.

3.2.8. Lemma

$(X, K, \|\cdot\|)$ sıralı normlu uzay olmak üzere K konisinin içi boştan farklı ve $\|\cdot\|$ normu yarı monoton olsun. Bir $A \subseteq X$ kümesinin norm sınırlı olması için gerek ve yeter şart A 'nın sıra sınırlı olmasıdır.

İspat

Lemma 3.1.7'den dolayı her sıra sınırlı küme norm sınırlıdır. Tersini göstermek için $u \in \text{int}(K)$ sabit ve $A \subseteq X$ norm sınırlı olsun. Önerme 3.2.2'den u sıra birimdir ve $\|\cdot\|_u$ sıra birim normu $\|\cdot\|$ normundan daha zayıftır. Bu durumda A kümesi $\|\cdot\|_u$ normuna göre sınırlıdır. $\|\cdot\|_u$ normu için kapalı yuvarlar sıra aralıkları olduğundan A sıra sınırlıdır.

Sonraki önerme yukarıdaki Lemma 3.2.8'nin doğrudan sonucudur.

3.2.9. Önerme

$(X, K_X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, K_Y, \|\cdot\|_Y)$ sıralı normlu uzaylar olmak üzere K_X ve K_Y konilerinin içleri boş olmayan kümeler ve her iki norm yarı monoton olsun. $\mathcal{L}(X, Y) = L_b(X, Y)$ eşitliği sağlanır.

3.2.10. Sonuç

X ve Y sonlu boyutlu Arşimedyen yönlü sıralı uzaylar olmak üzere $L(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y) = L_b(X, Y)$ sağlanır.

İspat

X ve Y uzayları sonlu boyutlu olduğundan $L(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$ sağlanır. Önerme 3.2.9'un hipotezlerinin sağlandığını görelim. Önerme 3.2.3'ten X ve Y uzaylarındaki konilerin içleri boş olmayan kümelerdir. Sonuç 3.2.4'den her iki koni kapalı ve böylece Önerme 3.2.6'dan X ve Y uzayları üstündeki normlar yarı monotondur.

Bu bölümün geri kalan kısmında sıra birim uzaylarının düzgün tamlaması ele alınacaktır. Sıra birimli uzay üstündeki $\|\cdot\|_u$ normunun monoton olduğu verilmişti. Bu özellikten daha güçlü olan bir özellik aşağıda verilmiştir.

3.2.11. Lemma

$(X, K, \|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzay olmak üzere her $x, y \in K$ için $\|y - x\|_u \leq \|x + y\|_u$ eşitsizliği sağlanır.

İspat

$\|x + y\|_u < a$ ise $-au \leq x + y \leq au$ olduğundan $y - x \leq y \leq x + y \leq au$ sağlanır. Diğer yandan $-au \leq -(x + y) \leq -x \leq y - x$ olduğundan $\|y - x\|_u \leq a$ elde edilir. Böylece $\|y - x\|_u \leq \|x + y\|_u$ sağlanmış olur.

3.2.12. Tanım

$(X, K, \|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzay olsun. X uzayının $\|\cdot\|_u$ normuna ve K konisinin kapanışı $\bar{K}$ yardımıyla oluşturulan sıralamaya göre Z tamlaması X uzayının düzgün tamlaması diye adlandırılır.

3.2.13. Önerme

$(X, K, \|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzay ise X uzayının düzgün tamlaması $(Z, \overline{K})$ da sıra birimli uzaydır ve kapsama dönüşümü $i : X \rightarrow Z$ bipozitiftir.

İspat

Z uzayı üstünde $\|\cdot\|$ normuna göre (Z, K) da monoton olduğundan Önerme 3.1.8'den $\overline{K}$, Z uzayında bir konidir. $\overline{K}$ kapalı olduğundan $(Z, \overline{K})$ sıralı vektör uzayı Arşimedyandır. Lemma 3.2.1'den dolayı $i : X \rightarrow Z$ kapsama dönüşümü bipozitiftir.

u 'nun Z uzayında bir sıra birim olduğunu ve Z uzayındaki normun u -norm olduğunu gösterelim. $z \in Z$ ve $\|z\| < a$ olsun. $\|x_n - z\| \rightarrow 0$ olacak biçimde X uzayında bir (x_n) dizisi vardır. $\|x_n\|_u = \|x_n\| \rightarrow \|z\|$ olduğundan bir $n_1 \in \mathbb{N}$ için $n_1 \leq n$ iken $\|x_n\|_u < a$ sağlanır. (x_n) dizisi $\|\cdot\|$ -Cauchy dizisi olduğundan aynı zamanda $\|\cdot\|_u$ -Cauchy dizisidir. Dolayısıyla $\varepsilon > 0$ verildiğinde $n_2 \leq n, m$ iken $-\varepsilon u \leq x_n - x_m \leq \varepsilon u$ olacak biçimde $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınırsa, $n_0 \leq n$ iken $x_n \leq x_{n_0} + \varepsilon u$, ayrıca $\|x_{n_0}\|_u < a$ ve böylece $-au \leq x_{n_0} \leq au$ olduğundan $x_n \leq (a + \varepsilon)u$ elde edilir. $v_n = (a + \varepsilon)u - x_n$ tanımlansın. $v_n \in K$ ve $v_n = (a + \varepsilon)u - z - (x_n - z)$ olduğundan $(v_{n_0}, v_{n_0+1}, \dots)$ dizisi $(a + \varepsilon)u - z$ noktasına yakınsar. Buradan $(a + \varepsilon)u - z \in \overline{K}$, yani $(Z, \overline{K})$ içinde $z \leq (a + \varepsilon)u$ olur. Sonuç olarak u , $(Z, \overline{K})$ içinde bir sıra birimdir. Benzer biçimde $-z \leq (a + \varepsilon)u$ elde edildiğinden $\|z\|_u \leq a + \varepsilon$ sonucuna ulaşılır ve $\|z\|_u \leq \|z\|$ sağlanmış olur.

$\|z\| \leq \|z\|_u$ olduğunu göstermek için $\|z\|_u < a$ olsun. $-au \leq z \leq au$ ve böylece $au - z, au + z \in \overline{K}$ olur. Ayrıca $x_n \rightarrow au - z$ ve $y_n \rightarrow au + z$ olacak biçimde K konisinde (x_n) ve (y_n) dizileri vardır. Lemma 3.2.11'den her $n \in \mathbb{N}$ için $\|y_n - x_n\| = \|y_n - x_n\|_u \leq \|y_n + x_n\|_u = \|y_n + x_n\|$ olduğundan limitler alınarak $\|2z\| \leq \|2au\|$ sonucuna ulaşılır. $\|u\|_u = 1$ olduğundan $\|z\| \leq a$ ve dolayısıyla $\|z\| \leq \|z\|_u$ elde edilir. Böylece $(Z, \overline{K})$ üstündeki norm u -normudur.

3.3. Göreceli Düzgün Yakınsaklık

Sıralı vektör uzaylarında genel olarak Eş. 3.1’de verilen sıra birim normu gibi uygun bir norm yoktur. Ancak benzer bir yakınsama kavramı tanımlanabilir.

3.3.1. Tanım

(X, K) sıralı vektör uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olsun.

1) Bir $u \in K$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ ve $[0, \infty)$ aralığında azalan bir $(a_\lambda)_{\lambda_0 \preceq \lambda \in \Lambda}$ ağı için $\inf\{a_\lambda : \lambda_0 \preceq \lambda \in \Lambda\} = 0$ ve ayrıca $\lambda_0 \preceq \lambda$ olacak biçimde her $\lambda \in \Lambda$ için $-a_\lambda u \leq x_\lambda - x \leq a_\lambda u$ oluyorsa ‘ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x ’e göreceli düzgün yakınsak’ denir.

2) Bir $u \in K$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ ve $[0, \infty)$ aralığında azalan bir $(a_\lambda)_{\lambda_0 \preceq \lambda \in \Lambda}$ ağı için $\inf\{a_\lambda : \lambda_0 \preceq \lambda \in \Lambda\} = 0$ ve $\lambda_0 \preceq \lambda, \gamma, \zeta$ olacak biçimde her $\lambda, \gamma, \zeta \in \Lambda$ için $\lambda \preceq \gamma, \zeta$ iken $-a_\lambda u \leq x_\gamma - x_\zeta \leq a_\lambda u$ oluyorsa $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağına ‘göreceli düzgün Cauchy ağı’ denir.

3) X içindeki her göreceli düzgün Cauchy ağı X içinde göreceli düzgün yakınsak ise (X, K) sıralı vektör uzayına ‘düzgün tam uzay’ denir.

4) Bir $A \subseteq X$ kümesi içinde $x \in X$ elemanına göreceli düzgün yakınsayan herhangi bir ağ var iken $x \in A$ oluyorsa A kümesine ‘göreceli düzgün kapalı küme’ denir.

Bir sonraki önermede görüleceği üzere sıralı vektör uzayı Arşimedyan ise göreceli düzgün limit tektir.

3.3.2. Önerme

(X, K) Arşimedyan sıralı vektör uzayı içinde bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ olsun.

1) (x_λ) ağı bir $x \in X$ elemanına göreceli düzgün yakınsak ise bu noktaya sıra yakınsaktır.

2) (x_λ) ağı $x, y \in X$ elemanlarına göreceli düzgün yakınsak ise $x = y$ olur.

İspat

1) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına göreceli düzgün yakınsak olsun. Tanımdan bir $u \in K$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ ve $[0, \infty)$ aralığında azalan bir $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı için $\inf \{a_\lambda : \lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda\} = 0$ ve $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ olacak biçimde her $\lambda \in \Lambda$ için $-a_\lambda u \leq x_\lambda - x \leq a_\lambda u$ sağlanır. X Arşimedyan olduğundan Önerme 2.3.4'den $\inf \{a_\lambda u : \lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda\} = 0$ elde edilir. Böylece $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına sıra yakınsak olur.

2) (1) ve Önerme 2.2.11'den limit tektir.

Yukarıdaki önermede Arşimedyan olma şartının kaldırılamayacağına dair bir örnek verelim.

Örnek

$K = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0 \text{ ya da } (x_1 = 0 \text{ ve } x_2 \geq 0)\}$ konisi ile $X = \mathbb{R}^2$ uzayı üstünde sözlüksel sıralama verilir. Bu sıralamayla $\mathbb{R}^2$ Arşimedyan değildir. $u = (1, 0)$, $x = (0, 1)$, $y = (0, 0)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = (0, 0)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $-\frac{1}{n}u \leq x_n - x \leq \frac{1}{n}u$ olduğundan $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ağı (dizisi) x noktasına göreceli düzgün yakınsar. Ayrıca $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ağı x 'den farklı olan y noktasına da göreceli düzgün yakınsar.

Arşimedyanlık şartı Tanım 3.3.1'deki göreceli düzgün yakınsama ve göreceli düzgün Cauchy ağı tanımlarını yeniden ele almamızı sağlar.

3.3.3. Önerme

(X, K) Arşimedyan sıralı vektör uzayı içinde bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ olsun.

1) (x_λ) ağının $x \in X$ noktasına göreceli düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir $u \in K$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ iken $-\varepsilon u \leq x_\lambda - x \leq \varepsilon u$ olacak biçimde $\lambda_0 \in \Lambda$ vardır.

2) (x_λ) ağının göreceli düzgün Cauchy ağı olması için gerek ve yeter şart bir $u \in K$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda, \gamma$ iken $-\varepsilon u \leq x_\lambda - x_\gamma \leq \varepsilon u$ olacak biçimde $\lambda_0 \in \Lambda$ vardır.

İspat

1) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına göreceli düzgün yakınsak, $u \in K$ ve $\lambda_0 \in \Lambda$ olsun. Her $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ için $-a_\lambda u \leq x_\lambda - x \leq a_\lambda u$ yazılabilir. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve bir $\lambda_1 \in \Lambda$ için $\lambda_1 \preccurlyeq \lambda$ iken $a_\lambda < \varepsilon$ ve böylece $x_\lambda - x \leq a_\lambda u \leq \varepsilon u$ sağlanır. Benzer biçimde $x_\lambda - x \geq -\varepsilon u$ bulunur.

Tersini göstermek için $\varepsilon > 0$ olsun. Bir $u \in K$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ iken $-\varepsilon u \leq x_\lambda - x \leq \varepsilon u$ olacak biçimde $\lambda_0 \in \Lambda$ vardır. Özel olarak $\varepsilon = 1$ alınırsa, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ iken $-u \leq x_\lambda - x \leq u$ sağlanır. $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ iken genel terimi

$$a_\lambda = \inf\{a \in [0, 1] : \lambda \preccurlyeq \gamma \in \Lambda \text{ için } -au \leq x_\gamma - x \leq au\}$$

ile tanımlanan $(a_\lambda)_{\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda}$ ağı azalandır. Bu durumda $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ olacak biçimdeki her $\lambda \in \Lambda$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $-(a_\lambda + \frac{1}{n})u < x_\lambda - x < (a_\lambda + \frac{1}{n})u$ sağlanır. X Arşimedyan olduğundan $-a_\lambda u \leq x_\lambda - x \leq a_\lambda u$ elde edilir. Şimdi a_λ 'nin infimumunun 0 olduğunu gösterelim. Tekrar hipotezden herhangi bir $\varepsilon \in (0, 1]$ için $\lambda_1 \preccurlyeq \lambda$ iken $-\varepsilon u \leq x_\lambda - x \leq \varepsilon u$ olacak biçimde $\lambda_1 \in \Lambda$ var olduğundan $\lambda_1 \preccurlyeq \lambda$ iken $a_\lambda \leq a_{\lambda_1} \leq \varepsilon$ sağlanır. Buradan $\inf\{a_\lambda : \lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda\} = 0$ olur. Böylece $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına göreceli düzgün yakınsar.

2) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı göreceli düzgün Cauchy ağı olsun. Bir $u \in K$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ ve $[0, \infty)$ aralığında azalan bir $(a_\lambda)_{\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda}$ ağı için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ ve $\lambda \preccurlyeq \gamma, \zeta$ iken $-a_\lambda u \leq x_\gamma - x_\zeta \leq a_\lambda u$ sağlanır. $\varepsilon > 0$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda_1$ olacak biçimdeki bir $\lambda_1 \in \Lambda$ için $\lambda_1 \preccurlyeq \lambda$ iken $a_\lambda < \varepsilon$ ve böylece $\lambda_1 \preccurlyeq \gamma, \zeta$ iken $x_\gamma - x_\zeta \leq a_{\lambda_1} u \leq \varepsilon u$ sağlanır. Benzer biçimde $x_\gamma - x_\zeta \geq -\varepsilon u$ elde edilir.

Tersini göstermek için $\varepsilon > 0$ olsun. Bir $u \in K$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda, \gamma \in \Lambda$ iken $-\varepsilon u \leq x_\lambda - x_\gamma \leq \varepsilon u$ olacak biçimde $\lambda_0 \in \Lambda$ vardır. Özel olarak $\varepsilon = 1$ alınırsa, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda, \gamma$ iken $-u \leq x_\lambda - x_\gamma \leq u$ sağlanır. $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ iken genel terimi

$$a_\lambda = \inf\{a \in [0, 1] : \lambda \preccurlyeq \gamma, \zeta \in \Lambda \text{ için } -au \leq x_\gamma - x_\zeta \leq au\}$$

ile tanımlanan $(a_\lambda)_{\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda}$ ağı azalandır. Bu durumda $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ olacak biçimdeki her $\lambda \in \Lambda$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda \preccurlyeq \gamma, \zeta$ iken $-(a_\lambda + \frac{1}{n})u < x_\gamma - x_\zeta < (a_\lambda + \frac{1}{n})u$ sağlanır. X Arşimedyan

olduğundan $-a_\lambda u \leq x_\gamma - x_\zeta \leq a_\lambda u$ elde edilir. (1)'dekine benzer biçimde $\inf\{a_\lambda : \lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda\} = 0$ olduğu görülür. Böylece $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı göreceli düzgün Cauchy ağıdır.

(X, K) sıralı vektör uzayını 3.1'deki gibi u sıra birimiyle ve bu sıra birime karşılık gelen $\|\cdot\|_u$ sıra birim normuyla ele alalım. Önerme 3.3.3 yardımıyla Lemma 3.2.1'deki ifade ağlara kadar genişletilebilir.

3.3.4. Önerme

(X, K) , u sıra birimli Arşimedyen sıralı vektör uzayı olmak üzere X içinde bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olsun.

1) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının x noktasına göreceli düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $(X, \|\cdot\|_u)$ normlu uzayında $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının x noktasına yakınsak olmasıdır.

2) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının göreceli düzgün Cauchy ağı olması için gerek ve yeter şart $(X, \|\cdot\|_u)$ normlu uzayında $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının Cauchy ağı olmasıdır.

3) (X, K) uzayının düzgün tam olması için gerek ve yeter şart $(X, \|\cdot\|_u)$ normlu uzayının tam olmasıdır.

İspat

Her $\varepsilon > 0$ ve $\lambda, \gamma \in \Lambda$ için

$$\|x_\lambda - x\|_u \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon u \leq x_\lambda - x \leq \varepsilon u \text{ ve}$$

$$\|x_\lambda - x_\gamma\|_u \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon u \leq x_\lambda - x_\gamma \leq \varepsilon u$$

olduğundan Önerme 3.3.3'den (1), (2) ifadeleri ve (3) ifadesinin $(\Leftarrow)$ yönü sağlanır. (3) ifadesinin $(\Rightarrow)$ yönünü göstermek için $(X, K, \|\cdot\|_u)$ uzayı düzgün tam uzayı içinde $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı Cauchy ağı olsun. Önerme 3.3.3'den $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı bir $x \in X$ noktasına göreceli düzgün yakınsar. Bu durumda bir $v \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma_n \preccurlyeq \gamma \in \Lambda$ iken $-\frac{1}{n}v \leq x_\gamma - x \leq \frac{1}{n}v$

olacak biçimde $\gamma_n \in \Lambda$ vardır. Diğer yandan herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\lambda_\varepsilon \preccurlyeq \lambda, \gamma \in \Lambda$ iken $-\varepsilon u \leq x_\lambda - x_\gamma \leq \varepsilon u$ olacak biçimde $\lambda_\varepsilon \in \Lambda$ var olduğundan $\lambda_\varepsilon \preccurlyeq \lambda, \gamma$ ve $\gamma_n \preccurlyeq \gamma$ iken

$$x_\lambda - x = x_\lambda - x_\gamma + x_\gamma - x \leq \varepsilon u + \frac{1}{n}v$$

sağlanır. Ayrıca X Arşimedyan olduğundan $x_\lambda - x \leq \varepsilon u$ elde edilir. Benzer biçimde $-\varepsilon u \leq x_\lambda - x$ olduğundan $x_\lambda \xrightarrow{\|\cdot\|_u} x$ olur.

Örnek

Sayfa 38 de verilen örnekteki $C(A)$ uzayı supremum normuyla bir Banach uzayıdır. Önerme 3.3.4 (3)'den dolayı $C(A)$ uzayı düzgün tam olur.

3.3.5. Önerme

(X, K) Riesz uzayı Dedekind tam ise düzgün tamdır.

İspat

$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı X uzayında göreceli düzgün Cauchy ağı olsun. Bu durumda bir $u \in K$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ ve $[0, \infty)$ aralığında azalan bir $(a_\lambda)_{\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda}$ ağı için $\inf\{a_\lambda : \lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda\} = 0$ ve $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ için $\lambda \preccurlyeq \gamma, \zeta \in \Lambda$ iken $-a_\lambda u \leq x_\gamma - x_\zeta \leq a_\lambda u$ sağlanır. $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının göreceli düzgün yakınsak olduğunu limsup kavramını kullanarak gösterelim. $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ için $\{x_\gamma; \lambda \preccurlyeq \gamma\}$ kümesi boş olmayan ve üstten $x_\lambda + a_\lambda u$ ile sınırlı bir kümedir. X Dedekind tam olduğundan

$$y_\lambda = \sup\{x_\gamma : \lambda \preccurlyeq \gamma \in \Lambda\}$$

alınırsa $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ olacak biçimdeki her $\lambda \in \Lambda$ için $y_\lambda \leq x_\lambda + a_\lambda u$ ve ayrıca $x_{\lambda_0} - a_{\lambda_0} u \leq x_\lambda \leq y_\lambda$ sağlanır. $x = \inf\{y_\lambda : \lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda\}$ olsun. $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının x noktasına göreceli düzgün yakınsaktır. Gerçekten, $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda$ olacak biçimdeki her $\lambda \in \Lambda$ için $y_\lambda \leq x_\lambda + a_\lambda u$ olduğundan $x \leq x_\lambda + a_\lambda u$ ve $-a_\lambda u \leq x_\lambda - x$ olur. Ayrıca $\lambda \preccurlyeq \gamma$ olacak biçimdeki her $\gamma \in \Lambda$ için $x_\lambda - a_\lambda u \leq x_\gamma \leq y_\gamma$ olduğundan $x_\lambda - x \leq a_\lambda u$ elde edilir. $(y_\gamma)_{\lambda_0 \preccurlyeq \gamma \in \Lambda}$ ağı azalan olduğundan

$x_\lambda - a_\lambda u \leq x$ ve buradan $x_\lambda - x \leq a_\lambda u$ olur. Böylece $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına göreceli düzgün yakınsaktır.

4. SIRA YAKINSAKLIK VE SINIRSIZ SIRA YAKINSAKLIK

Sıra yakınsaklık iyi topolojik özelliklere sahip değildir. Bu bölümde Tanım 2.2.10 ile verilen sıra yakınsaklık yeniden ele alınacak ve topolojik eksiklikleri incelenecektir. Daha fazla ayrıntı için [12, 13] kaynaklarına bakılabilir.

4.1. Sıra Yakınsama Çeşitleri

Bir ağın sıra yakınsak olduğu yer sadece o ağın kuyruklarına bağlı değildir.

Örnek

$X \neq \{0\}$ Arşimedyan Riesz uzayı ve $a \in X \setminus \{0\}$ pozitif sabit olsun. $\Lambda = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ indis kümesi standart sıralama ile donatılsın. X içinde $x_0 = a$ ve $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ için genel terimi $x_\lambda = \frac{1}{\lambda}a$ olan $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağını tanımlayalım. Bu ağ X içinde sıra yakınsak değildir. Gerçekten, bir $x \in X$ için $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ olduğu kabul edilirse, X içinde $y_\lambda \downarrow 0$ ve her $\lambda \in \Lambda$ için $-y_\lambda \leq x_\lambda - x \leq y_\lambda$ olacak biçimde $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $na - x = x_{\frac{1}{n}} - x \leq y_{\frac{1}{n}} \leq y_0$ ve X Arşimedyan olduğundan $a = 0$ olur. Bu durum hipotezle çeliştiğinden kabul yanlıştır, yani $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı X içinde sıra yakınsak değildir. Ancak, $(x_\lambda)_{1 \leq \lambda \in \Lambda} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ağı için $x_n \xrightarrow{o} 0$ sağlanır. Dolayısıyla $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının kuyruğu sıra yakınsak olup kendisi sıra yakınsak değildir.

Diziler için yukarıdaki örnekteki gibi bir durum oluşamayacağına dikkat edilmelidir. Bir dizinin her kuyruğundan önce yalnızca sonlu sayıda eleman gelir. Bu nedenle dizinin sıra yakınsak olması için gerek ve yeter şart dizinin kuyruklarından herhangi birinin sıra yakınsak olmasıdır. Dolayısıyla dizilerin yakınsaklığında bu örnekteki gibi bir durum karşımıza çıkmaz.

Yukarıdaki örnek ile değinilen sorunu çözmenin bir kaç yolu vardır. Abramovich ve Sirotkin [14]'de sıra yakınsaklığın aşağıdaki biçimini önermektedir:

4.1.1. Tanım

X sıralı vektör uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olsun. Bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ iken $y_\lambda \downarrow 0$

ve $\pm(x_\lambda - x) \leq y_\lambda$ olacak biçimde X içinde $(y_\lambda)_{\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda}$ ağı varsa $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına sıra-2 yakınsaktır denir ve bu yakınsama $x_\lambda \xrightarrow{o_2} x$ ile gösterilir.

[15]'deki çalışmasında Wulich, ağ seçiminde daha fazla özgürlük sağlayarak yakınsama tanımını aşağıdaki biçimde geliştirmiştir.

4.1.2. Tanım

X sıralı vektör uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olsun. $y_\gamma \downarrow 0$, $z_\psi \downarrow 0$ ve her $\gamma \in \Gamma$, $\psi \in \Psi$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ iken $-y_\gamma \leq x_\lambda - x \leq z_\psi$ olacak biçimde X içinde $(y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ve $(z_\psi)_{\psi \in \Psi}$ ağları varsa $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına sıra-3 yakınsaktır denir ve bu yakınsama $x_\lambda \xrightarrow{o_3} x$ ile gösterilir.

Bir ağın sıra yakınsaklığı sıra-2 yakınsaklığını, sıra-2 yakınsaklığı sıra-3 yakınsaklığını gerektirir. Sıra-3 yakınsaklık için bir baskın ağın var olmasının gerekip yeteceği aşağıdaki önermeyle ifade edilir.

4.1.3. Önerme

X sıralı vektör uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olsun. $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının x noktasına sıra-3 yakınsak olması için gerek ve yeter şart $y_\gamma \downarrow 0$ ve her $\gamma \in \Gamma$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ iken $-y_\gamma \leq x_\lambda - x \leq y_\gamma$ olacak biçimde bir $(y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ağı var olmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına sıra-3 yakınsak olsun. $w_\sigma \downarrow 0$, $z_\psi \downarrow 0$ ve her $\sigma \in \Sigma$, $\psi \in \Psi$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ iken $-w_\sigma \leq x_\lambda - x \leq z_\psi$ olacak biçimde $(w_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ ve $(z_\psi)_{\psi \in \Psi}$ ağlarını var olduğundan $\Sigma \times \Psi$ indis kümesini ve $(w_\sigma + z_\psi)_{(\sigma, \psi) \in \Sigma \times \Psi}$ ağını ele aldığımızda $w_\sigma + z_\psi \downarrow$ ve 0 bu ağın bir alt sınırıdır. $(w_\sigma + z_\psi)_{(\sigma, \psi) \in \Sigma \times \Psi}$ ağının herhangi bir alt sınırı v olsun. Her $\sigma \in \Sigma$ ve her $\psi \in \Psi$ için $v \leq w_\sigma + z_\psi$ olduğundan $v \leq w_\sigma + \inf z_\psi = w_\sigma$ ve buradan $v \leq \inf w_\sigma = 0$, yani $w_\sigma + z_\psi \downarrow 0$ bulunur. Her $\gamma = (\sigma, \psi) \in \Sigma \times \Psi = \Gamma$ için $y_\gamma = w_\sigma + z_\psi$

alınırsa $y_\gamma \downarrow 0$ ve her $\gamma \in \Gamma$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ iken

$$-y_\gamma = -(w_\sigma + z_\psi) \leq -w_\sigma \leq x_\lambda - x \leq z_\psi \leq w_\sigma + z_\psi = y_\gamma$$

sağlanır.

($\Leftarrow$) $\Psi = \Gamma$ ve $(z_\psi)_{\psi \in \Psi} = (y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ alındığında $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına sıra-3 yakınsak olur.

Bir ağın sıra-2 yakınsak olması sıra yakınsak olması anlamına gelmemektedir. Sayfa 51'deki örnek bize bunu göstermektedir. Aşağıdaki örnekte görüleceği gibi bir ağın sıra-3 yakınsak olması da sıra-2 yakınsak olması anlamına gelmemektedir.

Örnek

A sayılamayan ayrık bir uzayın tek-nokta kompaktlaştırması olmak üzere X üstünde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı $C(A)$ olsun. A içindeki ayrık tek nokta kümelerinden oluşan bir $(\{x_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine karşılık $C(A)$ içinde karakteristik fonksiyonlardan oluşan $(\chi_{\{x_n\}})_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi 0 fonksiyonuna sıra-2 yakınsaktır, ancak sıra yakınsak değildir ([14], Example 1.4).

Herhangi bir Riesz uzayında sıra yakınsaklık ve sıra-3 yakınsaklık arasında yakın bir ilişki vardır.

4.1.4. Önerme

X Riesz uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $x \in X$ ve X uzayının Dedekind tamlaması X^δ olsun. X uzayında $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının x noktasına sıra-3 yakınsak olması için gerek ve yeter şart X^δ uzayında $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının x noktasına sıra yakınsak olmasıdır ([14], Proposition 1.5).

İspat

$(\Rightarrow) X^\delta$ Dedekind tam olduğundan sağlanır.

$(\Leftarrow) X^\delta$ uzayında $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının x noktasına sıra yakınsak olsun. X^δ uzayında $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının x noktasına sıra-2 yakınsak olduğundan bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ iken $y_\lambda \downarrow 0$ ve $|x_\lambda - x| \leq y_\lambda$ olacak biçimde $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset X^\delta$ vardır. $\Gamma = \{\gamma \in X : \lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda \text{ iken } y_\lambda \leq \gamma\}$ olsun. Her $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ için

$$\gamma_1 \lesssim \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_2 \leq \gamma_1$$

biçiminde tanımlanan $\lesssim$ bağıntısıyla Γ sıralı kümedir. $y_\lambda \downarrow 0$ olduğundan Γ kümesi (aşağı) yönlü kümedir. X, X^δ içinde sıra yoğun olduğundan her $\gamma \in \Gamma$ için $z_\gamma = \gamma$ biçiminde tanımlanan $(z_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ağının X içinde $z_\gamma \downarrow 0$ sağlanır. Ayrıca her $\gamma \in \Gamma$ için $y_{\lambda_1} \leq \gamma = z_\gamma$ olacak biçimde $\lambda_1 \in \Lambda$ vardır. Öyleyse $\lambda_1 \preccurlyeq \lambda$ iken $|x_\lambda - x| \leq y_\lambda \leq y_{\lambda_1} \leq z_\gamma$ bulunur.

4.1.5. Önerme

X ve Y Riesz uzayları arasındaki herhangi bir $T : X \rightarrow Y$ operatörü sıra yakınsamayı koruyorsa sıra-3 yakınsamayı da korur ([14], Proposition 1.6).

İspat

$T : X \rightarrow Y$ sıra yakınsamayı koruyan operatör, başka bir deyişle T sıra sürekli operatör olsun. Bu durumda T sıra sınırlıdır ([14], Theorem 2.1). T operatörünü X uzayından Y^δ Dedekind tamlamasına bir operatör olarak ele aldığımızda $|T| : X \rightarrow Y^\delta$ modül operatörü mevcuttur ve sıra yakınsaklığı korur ([13], Theorem 4.3). Dolayısıyla $|T|$ 'nin sıra yakınsaklığı koruyan $|T|^\delta : X^\delta \rightarrow Y^\delta$ genişlemesi vardır ([13], Theorem 4.12).

X içinde (x_λ) ağının $x \in X$ için $x_\lambda \xrightarrow{o_3} x$ ise Önerme 4.1.4'den X^δ içinde $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ sağlanır. $|T|^\delta$ sıra yakınsaklığı koruduğundan Y^δ içinde $|T|^\delta |x_\lambda - x| \xrightarrow{o} 0$ sağlanır. Dolayısıyla

$|Tx_\lambda - Tx| \leq |T||x_\lambda - x| = |T|^\delta |x_\lambda - x|$ olduğundan Y^δ içinde $Tx_\lambda \xrightarrow{o} Tx$ olur. Önerme 4.1.4'den Y içinde $Tx_\lambda \xrightarrow{o_3} Tx$ elde edilir.

4.1.6. Teorem

X ve Y Riesz uzayları olmak üzere herhangi bir $T : X \rightarrow Y$ pozitif operatörünün sıra yakınsaklığı koruması için gerek ve yeter şart sıra-3 yakınsaklığı korumasıdır ([14], Theorem 1.7).

İspat

X ve Y Riesz uzayları olmak üzere $T : X \rightarrow Y$ pozitif operatör olsun.

($\Rightarrow$) Önerme 4.1.5'den sağlanır.

($\Leftarrow$) T pozitif operatörünün sıra-2 yakınsamayı koruduğunu varsayalım ve $x_\lambda \rightarrow 0$ sıra yakınsak olsun. Tüm $\lambda_0 \preceq \lambda$ için $|x_\lambda| \leq y_\lambda$ olacak biçimde $y_\lambda \downarrow 0$ ve λ_0 vardır. T pozitif olduğundan Ty_λ aşağı yönlüdür ve pozitif elemanlardan oluşur. y_λ sıfıra sıra-2 yakınsak olduğu için Ty_λ sıfıra sıra-2 yakınsaktır ve bu nedenle $Ty_\lambda \downarrow 0$ olur. T pozitif olduğundan tüm $\lambda_0 \preceq \lambda$ için $|Tx_\lambda| \leq Ty_\lambda$ olur. Dolayısıyla Tx_λ sıfıra sıra yakınsaktır.

Dedekind tam Riesz uzaylarında pozitif sınırlı bir ağın 0 noktasına sıra yakınsamasını aşağıdaki önerme ile karakterize edebiliriz.

4.1.7. Önerme

X Dedekind tam Riesz uzayı içinde her $\lambda \in \Lambda$ için $0 \leq x_\lambda$ ve $\sup_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \in X$ olacak biçimdeki $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı için aşağıdaki ifadeler denktir.

- 1) $x_\lambda \xrightarrow{o} 0$
- 2) $x_\lambda \xrightarrow{o_3} 0$
- 3) $\inf_{\lambda \in \Lambda} \sup_{\lambda \preceq \gamma \in \Lambda} x_\gamma = 0$

İspat

Her $\lambda \in \Lambda$ için $\{x_\gamma : \lambda \preceq \gamma \in \Lambda\} \subset \{x_\gamma : \gamma \in \Lambda\}$ olduğundan $\sup_{\lambda \preceq \gamma \in \Lambda} x_\gamma \in X$ sağlanır. X Dedekind tam ve her $\lambda \in \Lambda$ için $0 \leq \sup_{\lambda \preceq \gamma \in \Lambda} x_\gamma$ olduğundan $\inf_{\lambda \in \Lambda} \sup_{\lambda \preceq \gamma \in \Lambda} x_\gamma \in X$ olur.

(1) $\Rightarrow$ (2) Aşikârdır.

(2) $\Rightarrow$ (3) $x_\lambda \xrightarrow{o_3} 0$ olsun ve $\inf_{\lambda \in \Lambda} \sup_{\lambda \preceq \gamma \in \Lambda} x_\gamma \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x = \inf_{\lambda \in \Lambda} \sup_{\lambda \preceq \gamma \in \Lambda} x_\gamma$ alınır ve $z_\psi \downarrow 0$ ve her $\psi \in \Psi$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preceq \lambda \in \Lambda$ iken $x_\lambda \leq z_\psi$ olacak biçimde X içinde $(z_\psi)_{\psi \in \Psi}$ ağı var olduğundan $0 < x \leq \sup_{\lambda_0 \preceq \lambda \in \Lambda} x_\lambda \leq z_\psi$ olur ki bu durum $z_\psi \downarrow 0$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır, yani $\inf_{\lambda \in \Lambda} \sup_{\lambda \preceq \gamma \in \Lambda} x_\gamma = 0$ olmak zorundadır.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\inf_{\lambda \in \Lambda} \sup_{\lambda \preceq \gamma \in \Lambda} x_\gamma = 0$ olsun. Her $\lambda \in \Lambda$ için $y_\lambda = \sup_{\lambda \preceq \gamma \in \Lambda} x_\gamma$ alınır ve $y_\lambda \downarrow 0$ ve her $\lambda \in \Lambda$ için $0 \leq x_\lambda \leq y_\lambda$ sağlanır. Dolayısıyla $x_\lambda \xrightarrow{o} 0$ elde edilir.

4.1.8. Teorem

X ve Y Arşimedyan Riesz uzayı olmak üzere herhangi bir $T : X \rightarrow Y$ pozitif operatörünün sıra-2 yakınsaklığı koruması için gerek ve yeter şart sıra-3 yakınsaklığı korumasıdır ([12], Theorem 3.7.4).

Sıra yakınsamanın tanımındaki bir başka sorun, bu yakınsamaya karşılık gelen bir topolojinin doğrudan kurulamamasıdır. Bu durumu aşmak için aşağıdaki biçimde bir tanımlama yapılır.

Boş olmayan bir X kümesindeki yakınsaklık kavramını

$$\{((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, x) : (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \text{ } X \text{ kümesinde bir ağ ve } x \in X\}$$

kümesi üstünde tanımlı bir c Boole fonksiyonu yardımıyla ele alalım. Yani, $c((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, x)$ doğru ise X kümesindeki $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı $x \in X$ noktasına c -yakınsak olsun.

4.1.9. Tanım

X kümesi içinde bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olsun. $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının x noktasına c -yakınsak olması, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının x noktasına τ -yakınsak olacak biçimde X üstünde bir τ topolojisinin varlığını gerektirip yetiriyorsa X içindeki c -yakınsaklık ‘topolojik’ tir diye adlandırılır.

4.1.10. Tanım

$A \subseteq X$ kümesi içinde bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olmak üzere, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına c -yakınsak iken $x \in A$ oluyorsa A kümesine ‘ c -kapalıdır’ denir.

X üstünde

$$\tau = \{X \setminus A : A \text{ } c\text{-kapalı}\} \quad (4.1)$$

ile verilen τ ailesi bir topolojidir. Diğer yandan, X uzayındaki ağların τ -yakınsaklığı ile c -yakınsaklığının denk olması için gerek ve yeter şart c -yakınsaklığın topolojik olmasıdır. c -yakınsaklık topolojik değilse yakınsaklık kavramının topolojiden bilinen özellikleri c -yakınsaklık için sağlanmayabilir [12].

Sıra yakınsaklık, sıra-2 yakınsaklık ve sıra-3 yakınsaklık kavramları genelde topolojik yakınsaklık değildir. Ancak aşağıdaki sonuç doğrudur. Burada, τ_0 topolojisi Eş. 4.1’de tanımlanan topolojidir ve c -yakınsaklık, sıra yakınsaklık kavramıdır.

4.1.11. Teorem

X sıralı vektör uzayı ve $A \subseteq X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

- 1) A τ_0 -kapalıdır.
- 2) A sıra kapalıdır.
- 3) A sıra-2 kapalıdır.
- 4) A sıra-3 kapalıdır.

4.1.12. Teorem

X, Y sıralı vektör uzayı ve $T : X \rightarrow Y$ pozitif operatör olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir ([16], Theorem 4.4).

- 1) T τ_0 -süreklidir.
- 2) T sıra süreklidir.
- 3) T sıra-2 yakınsaklığı korur.
- 4) T sıra-3 yakınsaklığı korur.

Teorem 4.1.11 ve Teorem 4.1.12 sıra kapalı kümeleri veya pozitif operatörlerin sıra sürekliliğini içeren sonuçların sıra yakınsaklık yerine sıra-2 yakınsaklık veya sıra-3 yakınsaklık ile eşit derecede olduğunu verir.

4.2. Sıra Yakınsamanın Genişlenmesi ve Kısıtlanması

Bu kesimde pre-Riesz uzaylarında sıra yakınsaklık incelenecektir. Pre-Riesz uzayı kavramı van Haandel [17] tarafından verilmiştir.

4.2.1. Tanım

(X, K) sıralı vektör uzayı olmak üzere her $x, y, z \in X$ için $\{x + z, y + z\}^u \subseteq \{x, y\}^u$ iken $z \in K$ oluyorsa X 'e 'pre-Riesz uzayı' denir.

Tanım 4.2.1'deki önerme herhangi bir Riesz uzayında, $x \vee y \leq (x + z) \vee (y + z) = (x \vee y) + z$ iken $0 \leq z$ önermesine indirgenir. Dolayısıyla her Riesz uzayı pre-Riesz uzayıdır. Pre-Riesz uzayının tanımını aşağıdaki biçimde yeniden şekillendirebiliriz.

4.2.2. Lemma

X sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in X$ için $\{x + y, y\}^u \subseteq \{x, 0\}^u$ olacak biçimde $0 \leq y$ varsa X pre-Riesz uzayıdır.

İspat

$v, y, z \in X$ için $\{v + y, z + y\}^u \subseteq \{v, z\}^u$ olsun. $x = v - z$ alalım. $w \in \{x + y, y\}^u$ ise $w + z \in \{x + y + z, y + z\}^u = \{v + y, z + y\}^u \subseteq \{v, z\}^u$ sağlanır, yani $w \in \{v - z, z - z\}^u = \{x, 0\}^u$ elde edilir. Buradan $\{x + y, y\}^u \subseteq \{x, 0\}^u$ sonucu ortaya çıkar. Özel olarak $v = z$ (yani $x = 0$) alınırsa $0 \leq y$ sağlanır. Böylece X pre-Riesz uzayıdır.

Pre-Riesz uzayları, sıralı vektör uzaylarının geniş bir sınıfını oluşturduğunu aşağıdaki önerme ile verelim.

4.2.3. Önerme

Her pre-Riesz uzayı yönlüdür ve her yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayı pre-Riesz uzayıdır ([17], Teorem 1.7(ii)) .

İspat

(X, K) pre-Riesz uzayının yönlü olmadığını, yani herhangi iki $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin üst sınırı olmadığını kabul edelim. Bu durumda her $z \in X$ için $\{x + z, y + z\}$ kümesinin üst sınırı mevcut değildir. Özel olarak $z = y - x$ alınırsa, $\{x, y\}$ kümesinin bir üst sınırı y değilse (yani $x \leq y$ sağlanmıyorsa), $z \notin K$ olur. Bu durum X 'in pre-Riesz uzayı olmasıyla çeliştiğinden dolayı X yönlü olmak zorundadır.

X yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayı ve $x, y, z \in X$ için $\{x + z, y + z\}^u \subseteq \{x, y\}^u$ olsun. X yönlü olduğundan bir $v \in X$ için $v \in \{x, y\}^u$, dolayısıyla $v + z \in \{x + z, y + z\}^u$ ve böylece $v + z \in \{x, y\}^u$ sağlanır. Tümevarımla, her $n \in \mathbb{N}$ için $v + nz \in \{x, y\}^u$ ve buradan $x \leq v + nz$ olduğundan $-nz \leq v - x$ elde edilir. X Arşimedyan olduğundan $-z \leq 0$ sonucu elde edilir ki, bu da X 'in pre-Riesz uzayı olduğunu gösterir.

Pre-Riesz uzaylarda sıra yakınsaklık Riesz uzay örtülerindeki sıra yakınsaklık ile ilgilidir.

4.2.4. Önerme

Z sıralı vektör uzayı ve Y uzayı, Z uzayının sıra yoğun alt uzayı olsun. o_i , sıra-2 yakınsaklığı ya da sıra-3 yakınsaklığı göstermek üzere

- 1) Z uzayında bir ağ (x_λ) ve $x \in Z$ olmak üzere Z uzayında $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ ise Y uzayında $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ olur.
- 2) Z uzayında bir ağ (x_λ) ve $x \in Z$ olmak üzere Z uzayında $x_\lambda \xrightarrow{o_i} x$ ise Y uzayında $x_\lambda \xrightarrow{o_i} x$ olur.
- 3) Y uzayında $J \subseteq Y$ o -kapalı (o_i -kapalı) ise, Z uzayında $J \cap Z$ o -kapalıdır (o_i -kapalıdır).

İspat

- 1) Z uzayında $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ olsun. Z uzayında $y_\lambda \downarrow 0$ olacak biçimde bir (y_λ) ağı vardır ve her λ için $y_\lambda \geq 0$ olur. Önerme 1.6.2'den Y uzayında $\inf(y_\lambda) = 0$ yani Y uzayında $y_\lambda \downarrow 0$ olur. Dolayısıyla Y uzayında $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ elde edilir.
- 2) (1) ile benzer biçimde gösterilir.
- 3) (1) ve (2) ifadelerinin doğrudan sonucudur.

Önerme 4.2.4'in bir sonucu olarak sıra kapalı kümelerin kısıtlaması aşağıdaki teoremlerle verilir.

4.2.5. Teorem

X pre-Riesz uzayının bir Riesz uzay örtüsü (Y, i) olsun. J , Y uzayının sıra kapalı bir alt kümesi ise $\{x \in X : i(x) \in J\}$ kümesi X uzayında sıra kapalıdır.

Yukarıdaki teorem [12]'nin Kesim 2.8'inde verilen sıra kapalı kümeler için (R) kısıtlama özelliğini sağlar. Yani

$$L = \{I \subseteq X : I \text{ sıra kapalı}\} \text{ ve } M = \{J \subseteq Y : J \text{ sıra kapalı}\}$$

olmak üzere, (R) kısıtlama özelliği (L, M) küme çifti için sağlanır. Önerme 4.2.4 (1)'deki ifadenin karşıtı genel olarak doğru değildir. Yani bir sonraki örnekte verileceği gibi dizinin limiti Z uzayında olsa bile Y uzayındaki sıra yakınsama, Z uzayındaki sıra yakınsama anlamına gelmez.

Örnek

$Y = \{y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) : \lim_{i \rightarrow \infty} y_i \text{ var} \}$ Riesz uzayının

$$Z = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in Y : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{-k}}{2^k} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \right\}$$

alt uzayını ele alalım. $i \in \mathbb{Z}$ için $e^{(i)} = (e_j^{(i)})_{j \in \mathbb{Z}}$ olmak üzere $i = j$ ise $e_j^{(i)} = 1$ ve $i \neq j$ ise $e_j^{(i)} = 0$ olsun. Z alt uzayının Y içinde sıra yoğun olduğunu gösterelim. $y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in Y$ ve

$$\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_{-k}}{2^k}$$

alındığında $\alpha \geq 0$ iken

$$x^{(1)} = y + 2\alpha e^{(-1)} \text{ ve } x^{(2)} = y + 4\alpha e^{(-2)}$$

olsun. $x^{(1)}, x^{(2)} \in Z$ ve $y = x^{(1)} \wedge x^{(2)}$ sağlanır. $\alpha < 0$ iken her $m \in \mathbb{N}$ için

$$x^{(m)} = y - \alpha \sum_{i=m}^{\infty} e^{(i)}$$

olsun. $x^{(m)} \in Z$ ve $y = \inf \{x^{(m)} : m \in \mathbb{N}\}$ sağlanır.

Z içindeki $(e^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ dizisinin Y içinde sıra yakınsak olduğunu, ancak Z içinde sıra yakınsak olmadığını gösterelim. Öncelikle, $(e^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ dizisinin Y Riesz uzayında sıra yakınsak olduğunu gösterelim. Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ için $y^{(m)} = \sum_{i=m}^{\infty} e^{(i)}$ olsun. Her $m \in \mathbb{N}$ için $y^{(m)} \in Y$ olur ve Y içinde $y^{(m)} \downarrow_m 0$ sağlanır. Her $m \in \mathbb{N}$ için $\pm e^{(m)} \leq y^{(m)}$ olduğundan Y Riesz uzayında $e^{(m)} \xrightarrow{o} 0$ elde edilir.

Şimdi $(e^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ dizisinin Z alt uzayında sıra yakınsak olmadığını gösterelim. Z içinde

$e^{(m)} \xrightarrow{o} v$ olacak biçimde $v \in Z$ olduğunu kabul edelim. Y içinde $e^{(m)} \xrightarrow{o} v$ olduğundan $v = 0$ olur. O halde Z alt uzayında $v^{(m)} \downarrow_m 0$ olacak biçimde bir $(v^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır ve her $m \in \mathbb{N}$ için $e^{(m)} \leq v^{(m)}$ sağlanır. $i \geq m$ ise $v^{(m)} \geq v^{(i)} \geq e^{(i)}$ elde edilir. Dolayısıyla her $i \geq m$ için $v_i^{(m)} \geq 1$ olduğundan $\lim_{i \rightarrow \infty} v_i^{(m)} \geq 1$ bulunur. Her $m \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{-k}^{(m)}}{2^k} \geq 1$ elde edilir. Bu durumda her $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $v_{-k}^{(m)} \downarrow_m 0$ olamaz. Aksi takdirde $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{-k}^{(m)}}{2^k} \downarrow_m 0$ olurdu. Dolayısıyla her $m \in \mathbb{N}$ için $v_{-k}^{(m)} \geq \delta$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ve bir $\delta > 0$ vardır. $w = \delta e^{(-k)} - 2\delta e^{(-k-1)}$ alınırsa, $w \in Z$ olur ve her $m \in \mathbb{N}$ için $w \leq \delta e^{(-k)} \leq v^{(m)}$. $w \not\leq 0$ sağlanır. Bu durum $\inf \{v^{(m)} : m \in \mathbb{N}\} = 0$ olması ile çeliştiğinden kabul yanlıştır.

4.2.6. Tanım

(X, K) sıralı vektör uzayının bir alt uzayı Y olmak üzere, her $x \in K \setminus \{0\}$ için $y \leq x$ olacak biçimde $y \in (K \cap Y) \setminus \{0\}$ varsa Y 'ye 'yayılmış alt uzay' denir.

4.2.7. Önerme

X Riesz uzayının Y sıra yoğun Riesz alt uzayı X içinde yayılmıştır. ([12], Önerme 2.8.3)

4.2.8. Önerme

X Arşimedyan Riesz uzayının Y büyüyen yayılmış alt uzayı X içinde sıra yoğundur. ([12], Önerme 2.8.5)

Pre-Riesz uzayı, Arşimedyan ve yayılmış uzay olursa Önerme 4.2.4 (2)'nin tersinin de sağlanacağı aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

4.2.9. Önerme

X yayılmış Arşimedyan pre-Riesz uzayı ve (Y, i) , X uzayının Riesz uzay örtüsü olmak üzere, X uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olsun. $x_\lambda \xrightarrow{o_3} x$ olması için gerek ve yeter şart $i(x_\lambda) \xrightarrow{o_3} i(x)$ olmasıdır.

İspat

Gerek şart Önerme 4.2.4'nin bir sonucudur. Yeter şart için X uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $x \in X$ ve $i(x_\lambda) \xrightarrow{o_3} i(x)$ olsun. $y_\gamma \downarrow 0$, $z_\psi \downarrow 0$ ve her $\gamma \in \Gamma$, $\psi \in \Psi$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ iken $-y_\gamma \leq i(x_\lambda) - i(x) \leq z_\psi$ olacak biçimde $(y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ve $(z_\psi)_{\psi \in \Psi}$ ağları vardır.

[12]'deki Lemma 3.7.11'den X içinde $u_\mu \downarrow 0$, $v_\eta \downarrow 0$; bir $\gamma \in \Gamma$, her $\mu \in M$ için $i(u_\mu) \geq y_\gamma$, bir $\psi \in \Psi$, her $\eta \in N$ için $i(v_\eta) \geq z_\psi$ olacak biçimde $(u_\mu)_{\mu \in M}$ ve $(v_\eta)_{\eta \in N}$ ağları vardır. Dolayısıyla her $\mu \in M$, $\eta \in N$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ iken $-i(u_\mu) \leq i(x_\lambda) - i(x) \leq i(v_\eta)$ olduğundan $u_\mu \leq x_\lambda - x \leq v_\eta$ sağlanır, yani $x_\lambda \xrightarrow{o_3} x$ elde edilir.

4.3. Sınırsız Sıra Yakınsaklık

Sayfa 51'deki örnekte gösterilen sıra yakınsama eksikliği sadece sınırlı ağlar ele alındığında açıkça ortaya çıkmaz. Sınırlı ağların sıra yakınsamasına dayanan bir başka yakınsama kavramı sınırsız sıra yakınsaklık veya kısaca *uo*-yakınsaklık diye adlandırılır. *uo*-yakınsaklık DeMarr tarafından sıralı vektör uzaylarında tanıtıldı [18]. Son zamanlarda Riesz uzayları teorisinde bir araştırma konusu haline geldi [19, 20]. *uo*-yakınsaklığın en yaygın olan fonksiyon uzaylarında noktasal veya hemen hemen her yerde yakınsaklık ile çakıştığı ortaya çıkmıştır. *uo*-yakınsaklık sıra yakınsamadan genellikle daha iyi özelliklere sahiptir.

Şimdi DeMarr'ın *uo*_{DM}-yakınsaklık tanımını verelim.

4.3.1. Tanım

(X, K) sıralı vektör uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olsun. K konisinde bir $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x 'e '*uo*_{DM}-yakınsar' denir:

- 1) Her $\lambda \in \Lambda$ için $-z_\lambda \leq x_\lambda - x \leq z_\lambda$ sağlanır,
- 2) Her $\lambda \in \Lambda$ için $0 \leq y_\lambda \leq z_\lambda$ olacak biçimdeki her bir sınırlı $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı 0 'a sıra-3 yakınsar.

Aslında DeMarr Önerme 4.1.3’de verilen sıra-3 yakınsaklık özelliğini kullanır. Riesz uzaylarında aşağıda verilen önerme, uo_{DM} -yakınsaklığa denk olan güncel tanımını verir.

4.3.2. Önerme

X Riesz uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olsun. $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının x ’e uo_{DM} -yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $u \in X_+$ için $(|x_\lambda - x| \wedge u)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının 0’a sıra-3 yakınsak olmasıdır.

İspat

$(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına uo_{DM} -yakınsak olsun. Tanım 4.3.1’den dolayı X_+ içinde her $\lambda \in \Lambda$ için $-z_\lambda \leq x_\lambda - x \leq z_\lambda$ olacak biçimde $(z_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı vardır ve her $\lambda \in \Lambda$ için $0 \leq y_\lambda \leq z_\lambda$ olacak biçimdeki her bir sınırlı $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı 0’a sıra-3 yakınsar. Bu durumda $w_\gamma \downarrow 0$ ve her $\gamma \in \Gamma$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ iken $y_\lambda \leq w_\gamma$ olacak biçimde bir $(w_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ağı vardır. $u \in X_+$ olsun ve herhangi bir $\lambda \in \Lambda$ için $y_\lambda = |x_\lambda - x| \wedge u$ alalım. $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı sınırlı bir ağdır ve her $\lambda \in \Lambda$ için $0 \leq y_\lambda \leq z_\lambda$ sağlanır. Böylece $w_\gamma \downarrow 0$ ve her $\gamma \in \Gamma$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ iken $y_\lambda \leq w_\gamma$ olacak biçimde bir $(w_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ağı var olduğundan her $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ için $0 \leq |x_\lambda - x| \wedge u \leq w_\gamma$ sağlanır. Yani, $(|x_\lambda - x| \wedge u)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı 0’a sıra-3 yakınsar.

Tersine her $u \in X_+$ için $(|x_\lambda - x| \wedge u)_\lambda$ ağı 0’a sıra-3 yakınsak olsun. Herhangi bir $\lambda \in \Lambda$ için $z_\lambda = |x_\lambda - x|$ alalım. $z_\lambda \geq 0$ ve $-z_\lambda \leq x_\lambda - x \leq z_\lambda$ olduğu aşikârdır. Her $\lambda \in \Lambda$ için $0 \leq y_\lambda \leq z_\lambda$ olacak biçimde bir sınırlı ağ $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ olsun. Bir $u \in X_+$ için $\lambda \in \Lambda$ iken $y_\lambda \leq u$ alınırsa, $(|x_\lambda - x| \wedge u)_\lambda$ ağı 0’a sıra-3 yakınsak olduğundan $w_\gamma \downarrow 0$ ve her $\gamma \in \Gamma$, bir $\lambda_0 \in \Lambda$ için $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ iken $|x_\lambda - x| \wedge u \leq w_\gamma$ olacak biçimde bir $(w_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ağı vardır. Her $\lambda_0 \preccurlyeq \lambda \in \Lambda$ için $0 \leq y_\lambda \leq |x_\lambda - x| \wedge u \leq w_\gamma$ olduğundan $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı 0’a sıra-3 yakınsar. Yani, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x ’e uo_{DM} -yakınsar.

Pre-Riesz uzaylarının Riesz uzay örtülerine gömülmesi göz önüne alındığında, pre-Riesz uzayındaki uo -yakınsamanın Riesz uzay örtüsündeki uo -yakınsamaya denk olması arzu edilmiştir. Önerme 4.3.2’e bağlı olarak aşağıdaki tanım verilmiş ve pre-Riesz uzayın

yayılmış ve Arşimedyan olması koşulu ile bu tanımın gömülmeye göre uyumluluğu gösterilmiştir.

4.3.3. Tanım

(X, K) sıralı vektör uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olsun. Her $u \in K$ ve K konisinde $\lambda \in \Lambda$ iken $y_\lambda \in \left(\bigcup_{\delta \in \Lambda, \lambda \preceq \delta} \{x_\delta - x, x - x_\delta\}^{ul} \cap \{u\}^l \right)^{ul}$ olacak biçimdeki her $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı için, $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı 0'a sıra-3 yakınsıyorsa $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x 'e uo -yakınsar denir.

4.3.4. Lemma

X Riesz uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olsun. X içinde $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x 'e uo -yakınsıyorsa, X içinde $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x 'e uo_{DM} -yakınsar.

İspat

X uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $x \in X$ ve $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x noktasına uo -yakınsak olsun. Her bir $\lambda \in \Lambda$ için $z_\lambda = |x_\lambda - x|$ alalım. Her $\lambda \in \Lambda$ için $0 \leq y_\lambda \leq z_\lambda$ olacak biçimde bir sınırlı ağ $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ olsun. $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının 0'a sıra-3 yakınsak olduğunu gösterelim. Her $\lambda \in \Lambda$ için $y_\lambda \leq u$ olacak biçimde bir $u \in X_+$ seçelim. Her $\lambda \in \Lambda$ ve $z \in \left(\bigcup_{\delta \in \Lambda, \lambda \preceq \delta} \{x_\delta - x, x - x_\delta\}^{ul} \cap \{u\}^l \right)^{ul}$ için $z \in (\{x_\lambda - x, x - x_\lambda\}^{ul} \cap \{u\}^l)^u$ olur. $|x_\lambda - x| \wedge u \in \{x_\lambda - x, x - x_\lambda\}^{ul} \cap \{u\}^l$ olduğundan $z \geq |x_\lambda - x| \wedge u \geq y_\lambda$ elde ederiz. Bu da $y_\lambda \in \left(\bigcup_{\delta \in \Lambda, \lambda \preceq \delta} \{x_\delta - x, x - x_\delta\}^{ul} \cap \{u\}^l \right)^{ul}$ anlamına gelir. Böylece $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı 0'a sıra-3 yakınsar.

4.3.5. Teorem

(X, K) yayılmış Arşimedyan pre-Riesz uzayı ve (Y, i) bir Riesz uzay örtüsü olsun. X içinde bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olmak üzere, X içinde $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının x 'e uo -yakınsak olması için gerek ve yeter şart Y içinde $(i(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ ağının $i(x)$ 'e uo_{DM} -yakınsak olmasıdır.

İspat

Y içinde $(i(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ ağı $i(x)$ noktasına uo_{DM} -yakınsak olsun. Herhangi bir $u \in K$ ve K konisinde $\lambda \in \Lambda$ iken $y_\lambda \in \left(\bigcup_{\delta \in \Lambda, \lambda \preceq \delta} \{x_\delta - x, x - x_\delta\}^{ul} \cap \{u\}^1 \right)^{ul}$ olacak biçimdeki herhangi bir $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı için Önerme 4.3.2'den $(|i(x_\lambda) - i(x)| \wedge i(u))_{\lambda \in \Lambda}$ ağı 0'a sıra-3 yakınsar. Dolayısıyla Y içinde $v_\mu \downarrow 0$ ve her $\mu \in M$, bir $\lambda_\mu \in \Lambda$ için $\lambda_\mu \preceq \lambda \in \Lambda$ iken $|i(x_\lambda) - i(x)| \wedge i(u) \leq v_\mu$ olacak biçimde bir $(v_\mu)_{\mu \in M}$ ağı vardır. X Arşimedyan ve yayılmış olduğundan [12]'deki Lemma 3.7.11'den X içinde $u_\gamma \downarrow 0$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $\mu_\gamma \preceq \mu \in M$ iken $v_\mu \leq i(u_\gamma)$ olacak biçimde $(u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ağı vardır. $\gamma \in \Gamma$ olsun. Her bir $\lambda_{\mu_\gamma} \preceq \lambda \in \Lambda$ için $\lambda \preceq \delta \in \Lambda$ iken $|i(x_\delta) - i(x)| \wedge i(u) \leq i(u_\gamma)$ olduğundan bunun sonucu olarak $u_\gamma \in \left(\bigcup_{\delta \in \Lambda, \lambda \preceq \delta} \{x_\delta - x, x - x_\delta\}^{ul} \cap \{u\}^1 \right)^u$ sağlanır. Dolayısıyla $y_\lambda \leq u_\gamma$ olduğundan $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı 0'a sıra-3 yakınsar. Böylece X içinde $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x 'e uo -yakınsar.

Tersini doğrulamak için öncelikle Y 'nin Dedekind tam olmasını göz önüne alalım. X içinde $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x 'e uo -yakınsak olsun ve Önerme 4.3.2'yi kullanalım. Bir $u \in Y_+$ alalım. $(|i(x_\lambda) - i(x)| \wedge u)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının 0'a sıra-3 yakınsak olduğunu göstelim. $(|i(x_\lambda) - i(x)| \wedge u)_{\lambda \in \Lambda}$ ağının 0'a sıra-3 yakınsak olmadığını kabul edelim. $z_\lambda = |i(x_\lambda) - i(x)| \wedge u$ alalım. Önerme 4.1.7'den $z = \inf_{\lambda \in \Lambda} \sup \{z_\lambda : \lambda \preceq \delta \in \Lambda\} > 0$ olur. X yayılmış olduğundan $0 < i(a) \leq z$ olacak biçimde $a \in X$ vardır. Her $\lambda \in \Lambda$ için $y_\lambda = a$ olacak biçimde seçilen $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı K konisindedir. Burada $i(b) \geq u$ olacak biçimde bir $b \in K$ seçelim. Her bir $\lambda \in \Lambda$ ve $y \in \left(\bigcup_{\delta \in \Lambda, \lambda \preceq \delta} \{x_\delta - x, x - x_\delta\}^{ul} \cap \{w\}^1 \right)^u$ için $\lambda \preceq \delta \in \Lambda$ iken $i(y) \geq |i(x_\delta) - i(x)| \wedge i(b) \geq z_\delta$ olduğundan $i(y) \geq \sup \{z_\lambda : \lambda \preceq \delta \in \Lambda\} \geq z \geq i(a)$ olur. Buradan $y \geq a = y_\lambda$ ve dolayısıyla $y_\lambda = \left(\bigcup_{\delta \in \Lambda, \lambda \preceq \delta} \{x_\delta - x, x - x_\delta\}^{ul} \cap \{w\}^1 \right)^{ul}$ elde edilir. O halde $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı 0'a sıra-3 yakınsar. Dolayısıyla X içinde $v_\gamma \downarrow 0$ ve her $\gamma \in \Gamma$, bir $\lambda_\gamma \in \Lambda$ için $\lambda_\gamma \preceq \lambda \in \Lambda$ iken $y_\lambda \leq v_\gamma$ olacak biçimde bir $(v_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ağı vardır. Her $\gamma \in \Gamma$ için $a = y_{\lambda_\gamma} \leq v_\gamma$ olup bu $v_\gamma \downarrow 0$ olmasıyla çelişir. Kabul yanlıştır, yani Y içinde $(i(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ ağı $i(x)$ 'e uo_{DM} -yakınsar.

Son olarak, X 'in bir (Y, i) Riesz uzay örtüsünü göz önüne alalım. X içinde $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x 'e uo -yakınsak olsun. X Arşimedyan olduğundan [12]'deki Önerme 2.4.12'den Y Riesz uzayı Arşimedyanıdır. Dolayısıyla Y 'nin Dedekind tamlaması (Y^δ, j) , Y 'nin bir Riesz uzay

örtüsüdür. [12]'deki Lemma 1.6.3'den $(Y^\delta, j \circ i)$ 'nin X 'in Riesz uzay örtüsü olur. Yeter şartın ispatının ilk kısmından dolayı Y içinde $(j(i(x_\lambda)))_{\lambda \in \Lambda}$ ağı $j(i(x))$ noktasına uo_{DM} -yakınsar. Gerek şartın ispatının ilk kısmından dolayı Y içinde $(i(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ ağı $i(x)$ 'e uo -yakınsar. Lemma 4.3.4'den Y içinde $(i(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ ağı $i(x)$ 'e uo_{DM} -yakınsar.

4.3.6. Sonuç

X Arşimedyen Riesz uzayında bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ve $x \in X$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- 1) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x 'e uo -yakınsar.
- 2) $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı x 'e uo_{DM} -yakınsar.
- 3) Her $u \in X_+$ için $(|x_\lambda - x| \wedge u)_{\lambda \in \Lambda}$ ağı 0 noktasına sıra-3 yakınsaktır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, sıralı vektör uzayları ve bu uzaylarda yakınsaklık kavramları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Özellikle, sıralı normlu uzaylarda norm yakınsama ve sıra yakınsama kavramlarının matematiksel yapıları ve özellikleri hakkında önemli sonuçlar verilmiştir.

Sıralı normlu uzaylarda, norm yakınsama ve sıra yakınsama kavramlarının birbirleriyle ilişkili olduğu ve bu ilişkilerin matematiksel yapılar üzerinde önemli etkileri olduğu görülmüştür.

Kapalı koniler ve yarı monoton normlar üzerine yapılan analizler, Arşimedyen sıralı vektör uzaylarının karakterizasyonu için yeni yöntemler sunmuştur.

Sınırsız sıra yakınsaklık kavramının, sıralı vektör uzaylarında yeni ve önemli bir yakınsaklık türü olarak tanımlandığı ve bu kavramın çeşitli uygulamalar için kritik olduğu ortaya konulmuştur.

Bu çalışma, sıralı vektör uzayları ve sıralı normlu uzaylarda yakınsaklık kavramları üzerine yapılan teorik araştırmalara katkılar sağlayacaktır. Gelecekte yapılacak çalışmalar için şu önerilerde bulunulabilir:

- Sıralı normlu uzaylar teorisinin, daha geniş matematiksel yapılar ve fonksiyonel analiz yöntemleri ile ilişkilendirilmesi.
- Yakınsaklık kavramlarının, farklı matematiksel ve uygulamalı bilim alanlarındaki problemler için kullanılabilirliğinin araştırılması.
- Sınırsız sıra yakınsaklık kavramının yeni matematiksel yapıların ve teorilerin geliştirilmesinde kullanılması.

Sonuç olarak, bu tez çalışması sıralı vektör uzayları ve sıralı normlu uzaylarda yakınsaklık kavramları üzerine yapılan bir araştırmadır ve derlenen bulgular, bu alandaki bilgi birikimine değerli katkılar sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

1. Moore, E. H. and Smith, H. L. (1922). A general theory of limits. *American Journal of Mathematics*, 44, 102-121.
2. Birkhoff, G. (1937). Moore-smith convergence in general topology. *Annals of Mathematics*, 38, 39-56.
3. Franklin, S. P. (1965). Spaces in which sequences suffice. *Fundamenta Mathematicae*, 57, 107-115.
4. Franklin, S. P. (1967). Spaces in which sequences suffice ii. *Fundamenta Mathematicae*, 61, 51-56.
5. Kelley, J. L. (1950). Convergence in topology. *Duke Mathematical Journal*, 17, 277-283.
6. Bartle, R. G. (1955). Nets and filters in topology. *American Mathematical Monthly*, 62, 551-557.
7. Engelking, R. (1989). *General Topology*. Heldermann Verlag Berlin, revised and completed edition, 49-56.
8. Munkres, James R. (2000). *Topology*. Prentice Hall, 179-181.
9. Vermeeren, S. (2010). Sequences and nets in topology. *arXiv:1006.4472 [math.GN]*, 1-17.
10. Tychonoff, A. N. (1930). Über die topologische erweiterung von rumen. *Mathematische Annalen*, 102, 544-561.
11. Chernoff, P. R. (1992). A simple proof of tychonoff's theorem via nets. *American Mathematical Monthly*, 99, 932-934.
12. Kalauch, A. and van Gaans, O. (2019). *Pre-Riesz Spaces*. De Gruyter Expositions in Mathematics, 66, Berlin. 2-8, 11-12, 27-35, 37-40, 183-192.
13. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. (2006). *Positive Operators*. Dordrecht, Springer, 1-15, 45-56, 182-183, 187-189.
14. Abramovich, Y. A. and Sirotkin, G. (2005). On order convergence of nets. *Positivity*, 9(3), 287-292.
15. Wulich, B. Z. (2017). *Geometrie Der Kegel: In Normierten Räumen*. Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston (Russian original from 1977/1978, translated by M. R. Weber), 158-163.
16. Hauser, T. and Kalauch, A. (2017). Order continuity from a topological perspective. arxiv.org/abs/1711.02929, 16.

17. van Haandel, M. (1993). *Completions in Riesz Space Theory*. PhD thesis, University of Nijmegen, 1-35.
18. DeMarr, R. (1964). Partially ordered linear spaces and locally convex linear topological spaces. *Illinois Journal of Mathematics*, 8, 601–606.
19. Gao, N. (2014). Unbounded order convergence in dual spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 419, 347-354.
20. Taylor, M. A. (2018). Unbounded topologies and uo-convergence in locally solid vector lattices. Preprint, 981-986.
21. van der Walt, J. H. (2018). The universal completion of $C(X)$ and unbounded order convergence. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 460(1), 76-97.



Gazili olmak ayrıcalıktır