
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

BİR HEMEN HEMEN KOMPLEKS METALİK RİEMANN MANİFOLDUN ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE

Ayşe TORUN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2023

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ayşe TORUN

27/07/2023

BİR HEMEN HEMEN KOMPLEKS METALİK RİEMANN MANİFOLDUN ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE

(Doktora Tezi)

Ayşe TORUN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2023

ÖZET

Bu tez çalışmasında hemen hemen kompleks metalik Riemann manifoldun altmanifoldları ele alınmıştır. Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde genel bir literatür özeti ve tezin konusu olan hemen hemen kompleks metalik Riemann manifoldların ortaya çıkışı hakkında bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde, bazı temel tanımlar ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde hemen hemen kompleks metalik Riemann manifoldu incelenmiş, bu manifoldun altmanifoldları ile ilgili temel özellikler verilmiş ve son olarak bu manifoldun invaryant, anti-invaryant ve slant altmanifoldlarının özellikleri araştırılmıştır. Dördüncü ve son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Bilim Kodu	:	20402
Anahtar Kelimeler	:	Kompleks-metalik oran, hemen hemen kompleks metalik yapı, hemen hemen kompleks metalik manifold, altmanifold
Sayfa Adedi	:	49
Danışman	:	Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN

ON SUBMANIFOLDS OF AN ALMOST COMPLEX METALLIC RIEMANNIAN MANIFOLD

(Ph. D. Thesis)

Ayşe TORUN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2023

ABSTRACT

In this thesis, submanifolds of an almost complex metallic Riemannian manifold are discussed. This study consists of four parts. In the first chapter, a general literature summary and information about the emergence of almost complex metallic Riemannian manifolds, the subject of this thesis, is presented. In this section, some basic definitions and theorems are given. In the third chapter, an almost complex metallic Riemann manifold is examined, the basic properties of the submanifolds of this manifold are given, and finally, the properties of the invariant, anti-invariant, and slant submanifolds of this manifold are examined. In the fourth and last chapter, results and suggestions are given.

Science Code	:	20402
Keywords	:	Complex metallic means, almost complex metallic structure, almost complex metallic manifold, submanifold
Number of pages	:	49
Supervisor	:	Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim boyunca bana değerli fikirleri ve bilgileriyle katkıda bulunan, benden tecrübelerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa ÖZKAN'a, tez çalışmam süresince değerli fikirleriyle beni yönlendiren Sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN ve Sayın Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKCİ'ye, bu süreçte her zaman yanımda olan ve beni destekleyen sevgili eşime ve kızıma en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Riemann Manifoldlar 3

2.2. Riemann Manifoldların Altmanifoldları 7

2.3. Manifoldlar Üzerinde Polinom Yapılar 9

3. HEMEN HEMEN KOMPLEKS METALİK MANİFOLD VE ALTMANİFOLDLARI 13

3.1. Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifold 13

3.2. Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifoldun Altmanifoldları 17

3.3. Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifoldun İnvaryant Altmanifoldları 28

3.4. Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifoldun Anti-İnvaryant Altmanifoldları 32

3.5. Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifoldun Slant Altmanifoldları 34

4. SONUÇ 41

KAYNAKLAR 43

ÖZGEÇMİŞ 47

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbf{M}$	Manifold
$\mathbf{T_qM}$	M manifoldunun q noktasındaki tanjant uzayı
$\mathbf{T_qM}^{\perp}$	M manifoldunun q noktasındaki normal uzayı
$\chi(\mathbf{M})$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi
∇	Afin lineer konneksiyon
f	M manifoldunun ikinci temel formu
$\mathbf{A}$	Şekil operatörü
$\Im$	Hemen hemen kompleks metalik yapı
$\mathbf{I}$	$\overline{M}$ üzerindeki birim $(1,1)$ tensör alanı
$(\overline{\mathbf{M}},\Im,\overline{\mathbf{g}})$	Hemen hemen kompleks metalik Riemann manifold
$\delta_{\mathbf{j}}$	M manifoldu üzerindeki vektör alanları
$\eta_{\mathbf{j}}$	Reel 1-formlar
$(\mu,\mathbf{g},\eta_{\mathbf{j}},\delta_{\mathbf{j}},(\theta_{\mathbf{jk}})_{\mathbf{t}\times\mathbf{t}})$	M manifoldu üzerindeki indirgenmiş yapı

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
o.ü.	Olmak üzere

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometri alanında çalışan araştırmacılar, hemen hemen kompleks yapı, hemen hemen çarpım yapı, hemen hemen kontakt yapı gibi çeşitli geometrik yapılarla donatılmış manifoldlar konusunda geniş çaplı araştırmalar yapmışlardır. Son yıllarda bu yapılara ek olarak manifodlar üzerinde farklı polinom yapıları tanımlanmıştır. Spidanel metalik oranlar ailesini tanıtmıştır [1]. Metalik oranlar ailesinden alınan ilhamla altın yapılar ve bu yapıyla donatılmış altın Riemann manifoldlar, metalik yapılar ve bu yapıyla donatılmış metalik Riemann manifoldlar yazarlar tarafından tanıtılmıştır [2–4]. Altın Riemann manifoldlar ve metalik Riemann manifoldlar ve bu manifoldların altmanifoldları ortaya çıktığı günden beri birçok araştırmacı tarafından incelenmektedir. Altın Riemann manifoldlar ve metalik Riemann manifoldların invaryant, anti-invaryant, slant, lightlike gibi pek çok çeşit altmanifoldları incelenmiş ve özellikleri tanıtılmıştır [5–15].

Yakın zamanlarda benzer bir çıkarımla bildiğimiz metalik oranlar ailesinden farklı olarak yeni bir bronz oran tanıtılmış ve bu orandan alınan ilhamla hemen hemen poly-Norden manifold olarak adlandırılan yeni bir tip manifold tanıtılmıştır [16]. Bu yeni tip manifoldlar hakkında da yapılan çeşitli çalışmalar bulunmaktadır [17–19]. Yine bu yeni orandan alınan ilhamla hemen hemen bronz Riemann manifoldlar tanıtılmıştır [20].

Bahsettiğimiz bu çalışmalarda metalik oranlar ailesinden yola çıkılarak manifoldlar üzerinde yeni yapılar tanımlanmış ve bu yapıyla donatılmış manifoldlar üzerine çalışmalar yapılmıştır.

Biz şimdi r ve s, $-\sqrt{6s} < r < \sqrt{6s}$ ve $s \geq 0$ şartlarını sağlayan reel sayılar olmak üzere $x^2 - rx + \frac{3}{2}s = 0$ denklemini göz önünde bulunduracağız. Bu denklem $C_{r,s} = \frac{r \pm \sqrt{r^2-6s}}{2}$ şeklinde kompleks köklere sahiptir. $C_{r,s} = \frac{r+\sqrt{r^2-6s}}{2}$ kompleks sayıları kompleks metalik oranlar ailesi olarak tanımlanmıştır [21]. Özel olarak $r = 1$ ve $s = 1$ alınırsa, bu takdirde $C_{r,s} = \frac{r+\sqrt{r^2-6s}}{2}$ komplek metalik oranlar ailesi, $C_{1,1} = \frac{1+\sqrt{5}i}{2}$, $i^2 = -1$ iyi bilinen kompleks altın orana indirgenir [2]. Kompleks metalik oran ailesinden alınan ilhamla hemen hemen kompleks metalik yapı ve hemen hemen kompleks metalik manifoldlar tanımlanmıştır [21].

Bu tez çalışmasında hemen hemen kompleks metalik manifoldun altmanifoldları üzerine bir çalışma hazırlanmıştır. Altmanifoldlar üzerine indirgenmiş yapının temel özellikleri

verilmiştir. Hemen hemen kompleks metalik manifodun invaryant, anti-invaryant ve slant altmanifoldlarının özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda ilerleyen bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Riemann Manifoldlar

2.1.1. Tanım

(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Herhangi iki farklı $a,b \in X$ için $a \in A$, $b \in B$ ve $A \cap B = \emptyset$ olacak şekilde A ve B açıkları var ise (X,τ) uzayına Hausdorff uzay denir [22].

2.1.2. Tanım

M bir topolojik uzay o.ü.

i) M bir Hausdorff uzay,
ii) M nin her bir açık alt kümesi n boyutlu Öklid uzayına veya onun bir açık alt cümlesine homeomorf,
iii) M sayılabilir çoklukta açık alt kümelerle örtülebilir

ise M ye n boyutlu bir topolojik manifolddur denir [23].

2.1.3. Tanım

M, n boyutlu bir topolojik manifold ve $V \subseteq M$ ve $\varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ kümeleri için $\varphi : V \longrightarrow \varphi(V)$ bir homeomorfizm ise (V,φ) ikilisine M üzerinde bir harita denir [22].

2.1.4. Tanım

M, n boyutlu bir topolojik manifoldu üzerinde, $\mathbb{I}$ bir indis kümesi o.ü., $\mathscr{A} = (V_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$ haritalarının bir koleksiyonu olsun. $M = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{I}} V_\alpha$ ise $\mathscr{A}$ ya bir atlas denir [24].

2.1.5. Tanım

M, n boyutlu bir topolojik manifold ve $\mathscr{A} = (V_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{I}}$, M nin bir atlası olsun. $\mathscr{A}$ atlası aşağıdaki özelliğe sahip ise C^k sınıfındandır denir. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{I}$ için $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ o.ü.

$$\phi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ {\varphi_\beta}^{-1} : \varphi_\beta(V_\alpha \cup V_\beta) \longrightarrow \varphi_\alpha(V_\alpha \cup V_\beta), \tag{2.1}$$

$$\phi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ {\varphi_\beta}^{-1} : \varphi_\alpha(V_\alpha \cup V_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(V_\alpha \cup V_\alpha) \tag{2.2}$$

dönüşümleri C^k sınıfındandır. $\mathscr{A}$ atlası M üzerinde C^k sınıfından ise $\mathscr{A}$ ya M üzerinde diferensiyellenebilir yapı denir [25].

2.1.6. Tanım

M, n boyutlu bir topolojik manifold ve $\mathscr{A}$ atlası M üzerinde C^k sınıfından ise M ye n boyutlu diferensiyellenebilir manifold denir [25].

2.1.7. Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold o.ü. bir $q \in M$ noktası için

$$X_q(gh) = X_q(g)h + gX_q(h) \tag{2.3}$$

$g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ sağlayan bir $X_q : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer dönüşümü M manifoldunun q noktasındaki tanjant vektörü olarak adlandırılır [24]. Bir M manifoldunun $q \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi T_qM ile temsil edilir.

2.1.8. Teorem

n-boyutlu bir M diferansiyellenebilir manifoldunun bir $q \in M$ noktasındaki T_qM tanjant vektörlerinin kümesi her $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$(X_q + Y_q)(g) = X_q(g) + Y_q(g)$$

ve

$(\lambda X_q)(g) = \lambda X_q(g), \lambda \in \mathbb{R}$

eşitliklerini sağlayan bir vektör uzayıdır ve M manifoldunun $q \in M$ noktasındaki tanjant uzayı olarak adlandırılır [26].

2.1.9. Tanım

M manifoldunun q noktasındaki tanjant uzayı T_qM olsun. Bu durumda her $q \in M$ noktasına T_qM uzayında bir tanjant vektör karşılık getiren X diferensiyellenebilir dönüşümüne vektör alanı denir [26].

2.1.10. Tanım

Diferansiyellenebilir bir M manifoldunun bir $q \in M$ noktasındaki T_qM tanjant uzayının dual uzayına kotanjant uzay denir ve T_q^*M ile gösterilir [27].

2.1.11. Tanım

Diferansiyellenebilir bir M manifoldunun bir $q \in M$ noktasındaki T_q^*M kotanjant uzayının her bir elemanına $q \in M$ noktasında bir tanjant kovektör veya bir kovektör denir [22].

2.1.12. Tanım

Diferansiyellenebilir bir M manifoldunun her $q \in M$ noktasına bir X_q kovektör karşılık getiren bir X diferansiyellenebilir dönüşümü bir kovektör vektör alanı veya bir 1-form olarak adlandırılır [27].

2.1.13. Tanım

V bir reel vektör uzayı ve V^* bu vektör uzayının dual uzayı olsun.

$$T : \underbrace{V \times ... \times V}_{a-tane} \times \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{b-tane} \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı $(a+b)$-lineer dönüşümüne V üzerinde $a.$ dereceden kovaryant ve $b.$ dereceden kontravaryant tensör veya kısaca (a,b) tipinde bir tensör denir [28].

2.1.14. Tanım

M, C^∞ sınıfından bir manifold olsun. M nin her bir noktsına (a,b) tipinde bir tensör karşılık getiren dönüşüme M üzerinde (a,b) tipinden bir tensör alanı denir [28].

2.1.15. Tanım

φ, M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde $(1,1)$ tipindeki bir tensör alanı olsun. Her $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$N_\varphi(\Upsilon_1, \Upsilon_2) = \varphi^2[\Upsilon_1, \Upsilon_2] + [\varphi\Upsilon_1, \varphi\Upsilon_2] - \varphi[\varphi\Upsilon_1, \Upsilon_2] - \varphi[\Upsilon_1, \varphi\Upsilon_2] \tag{2.4}$$

ile tanımlı tensör alanına φ nin Nijenhius tensörü denir [29].

2.1.16. Tanım

$\chi(M)$, M diferensiyellenebilir manifoldunun vektör alanlarının kümesi olsun.

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow C^\infty(M) \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlı bilineer formu pozitif tanımlı ve simetrik ise g ye Riemann metriği denir [30].

2.1.17. Tanım

M manifoldu üzerinde bir g Riemann metriği tanımlı ise (M,g) ikilisine Riemann manifoldu denir [25].

Riemann metriği M manifoldu üzerindeki her $q \in M$ noktasındaki T_qM tanjant uzayları üzerinde bir iç çarpım tanımlar. Bu da bize herhangi bir vektör alanının uzunluğu ve iki vektör arasında kalan açıyı elde etme imkanı verir. $(\overline{M},\overline{g})$ bir Riemann manifold olsun. Herhangi bir $q \in M$ için $X_q \in T_qM$ tanjant vektörünün normu

$$\|X_q\| = \sqrt{\overline{g}(X_q,X_q)} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu tanıma göre sıfırdan farklı $X_q, Y_q \in T_qM$ tanjant vektörleri arasındaki açı

$$\Omega = arccos\left(\frac{\overline{g}(X_q,Y_q)}{\|X_q\|\|Y_q\|}\right) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlıdır.

2.2. Riemann Manifoldların Altmanifoldları

2.2.1. Tanım

M, $(\overline{M},\overline{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. $i : M \longrightarrow \overline{M}$ birebir immersiyonu varsa M, $\overline{M}$ Riemann manifoldunun altmanifoldudur denir [31].

2.2.2. Tanım

M, $(\overline{M},\overline{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Her $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ için aşağıda tanımlanan g Riemann metriğine indirgenmiş metrik denir [32]

$$g(\Upsilon_1,\Upsilon_2) = \overline{g}(\Upsilon_1,\Upsilon_2). \tag{2.8}$$

2.2.3. Lemma

M, $(\overline{M},\overline{g})$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Her $\Upsilon_1,\Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla(\Upsilon_1,\Upsilon_2) = \nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2 = (\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Upsilon_2)^{\perp} \tag{2.9}$$

ile tanımlı ∇, M üzerinde tanımlı bir Levi-Civita konneksiyondur [31].

2.2.4. Tanım

M, $\overline{M}$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. ∇ ve $\overline{\nabla}$ sırasıyla bu manifoldların Levi-Civita konneksiyonları olsun. Her $\Upsilon_1,\Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$f : \chi(M)\times\chi(M) \longrightarrow \chi(M)^{\perp} \tag{2.10}$$

dönüşümü M nin ikinci temel formu,

$$\overline{\nabla}(\Upsilon_1,\Upsilon_2) = \nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2 + f(\Upsilon_1,\Upsilon_2) \tag{2.11}$$

denklemi de Gauss denklemi olarak adlandırılır [32].

2.2.5. Tanım

M, $\overline{M}$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Her $\Upsilon \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için

$$A(V,\Upsilon) = A_V\Upsilon = -(\overline{\nabla}_{\Upsilon},V)^{\perp} \tag{2.12}$$

ile tanımlı A dönüşümü M nin şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü olarak adlandırılır [24].

2.2.6. Lemma

M, $\overline{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(TM)^{\perp}$ için

$$g(A_V\Upsilon_1, \Upsilon_2) = g(f(\Upsilon_1, \Upsilon_2)V) \tag{2.13}$$

eşitliği geçerlidir [26].

2.2.7. Tanım

M, $\overline{M}$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. M manifoldunun ikinci temel formu f veya şekil operatörü A sıfır vektör alanıysa M total jeodezik altmanifolddur [33].

2.2.8. Tanım

M, $\overline{M}$ Riemann manifoldunun bir alt manifoldu olsun. Her $\Upsilon \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki şart sağlanıyorsa

$$\overline{\nabla}_{\Upsilon} f = 0 \tag{2.14}$$

f ikinci temel formu paraleldir denir [30].

2.3. Manifoldlar Üzerinde Polinom Yapılar

Bu kısımda manifoldlar üzerinde polinom yapının tanımını ve bu yapılara örnek tanımlar vereceğiz. Daha sonra metalik oranlardan ilham alınarak tanımlanmış polinom yapılara değineceğiz.

2.3.1. Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. φ, M üzerinde $(1,1)$ tipindeki bir tensör alanı olsun. Eğer φ

$$Q(X) = X^k + a_k X^{-1} + ... + a_2 X + a_1 I = 0 \tag{2.15}$$

denklemini sağlıyorsa bir polinom yapı olarak adlandırılır. Burada $q \in M$ için $\varphi^k(q),\ \varphi^{k-1}(q),\ \varphi^{k-2}(q),\ \ldots,\ \varphi(q),\ I$ lineer bağımsızdırlar [2].

2.3.2. Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. φ, M üzerinde $(1,1)$ tipindeki bir tensör alanı olsun. Eğer φ

$$\varphi^2 + I = 0 \tag{2.16}$$

denklemini sağlıyorsa φ ye bir hemen hemen kompleks yapı denir [2].

2.3.3. Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. φ, M üzerinde $(1,1)$ tipindeki bir tensör alanı olsun. Eğer φ

$$\varphi^2 - I = 0 \tag{2.17}$$

denklemini sağlıyorsa φ ye bir hemen hemen çarpım yapı denir [2].

Şimdi metalik oranlardan ilham alınarak tanımlanmış polinom yapılara birkaç örnek vereceğiz.

2.3.4. Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. φ, M üzerinde $(1,1)$ tipindeki bir tensör alanı olsun. Eğer φ

$$\varphi^2 = \varphi + I \tag{2.18}$$

denklemini sağlıyorsa φ ye bir hemen hemen altın yapı denir [2].

2.3.5. Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. φ, M üzerinde $(1,1)$ tipindeki bir tensör alanı olsun. p ve q pozitif tamsayılar o.ü. φ

$$\varphi^2 = p\varphi + qI \tag{2.19}$$

denklemini sağlıyorsa φ ye metalik yapı denir [3].

Şimdi vereceğimiz tanımlar, daha önce metalik oranlar ailesinin içinde tanımlanmış olan bronz orandan farklı olarak tanımlanmış yeni bir bronz orandan ilham alınarak tanımlanmıştır.

2.3.6. Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. φ, M üzerinde $(1,1)$ tipindeki bir tensör alanı olsun. Eğer φ

$$\varphi^2 = m\varphi - I \tag{2.20}$$

denklemini sağlıyorsa φ ye poly-Norden yapı denir [16].

2.3.7. Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. φ, M üzerinde $(1,1)$ tipindeki bir tensör alanı olsun. $m \in \mathbb{R} \setminus [-2,2]$ o.ü.

$$\varphi^2 = m\varphi - I \tag{2.21}$$

denklemini sağlıyorsa φ ye hemen hemen bronz yapı denir [20].

3. HEMEN HEMEN KOMPLEKS METALİK MANİFOLD VE ALTMANİFOLDLARI

Bu çalışmanın orijinal kısmı Mathematics [34] dergisinde yayımlanmıştır.

3.1. Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifold

$$x^2 - rx + \frac{3}{2}s = 0$$

denkleminin

$$C_{r,s} = \frac{r + \sqrt{r^2 - 6s}}{2} \tag{3.1}$$

ifadesiyle tanımlı, pozitif kökü kompleks metalik oran olarak adlandırılır. Burada r ve s, $s \geq 0$ ve $-\sqrt{6s} < r < \sqrt{6s}$ şartlarını sağlayan reel sayılardır [21].

3.1.1. Tanım

$\overline{M}$ bir Riemann manifold olsun. $\overline{M}$ üzerinde

$$\Im^2 - r\Im + \frac{3}{2}sI = 0 \tag{3.2}$$

bağıntısını sağlayan $(1,1)$ tipindeki tensör alanına bir hemen hemen kompleks metalik yapı denir. Burada I, $\overline{M}$ üzerindeki birim $(1,1)$ tensör alanıdır. Bu durumda $\overline{M}$ ye $\Im$ hemen hemen kompleks metalik yapısıyla donatılmış bir hemen hemen kompleks metalik manifold denir [21].

Burada Eş. 3.2 ifadesinde $r = m$ ve $s = \frac{2}{3}$ alınırsa poly-Norden yapı elde edilir [16].

Örnek

4 boyutlu $\mathbb{R}^4$ reel uzayını dikkate alalım ve

$$\Im : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

ifadesini tanımlayalım. $C_{r,s} = \frac{r+\sqrt{r^2-6s}}{2}$ o.ü.,

$$\Im(x_1,x_2,y_1,y_2) = (C_{r,s}x_1, C_{r,s}x_2, (r-C_{r,s})y_1, (r-C_{r,s})y_2).$$

$\Im$ nin Eş. 3.2 ifadesini sağladığını gösterelim:

$$\begin{aligned}\Im^2(\Upsilon) &= \Im^2(x_1,x_2,y_1,y_2)\\ &= \Im(\Im(x_1,x_2,y_1,y_2))\\ &= \Im(C_{r,s}x_1, C_{r,s}x_2, (r-C_{r,s})y_1, (r-C_{r,s})y_2)\\ &= (C_{r,s}^2x_1, C_{r,s}^2x_2, (r-C_{r,s})^2y_1, (r-C_{r,s})^2y_2)\end{aligned}$$

diğer taraftan

$$\begin{aligned}(r\Im - \frac{3}{2}sI)(\Upsilon) &= r\Im(\Upsilon) - \frac{3}{2}sI(\Upsilon)\\ &= r\Im(\Upsilon) - \frac{3}{2}s\Upsilon\\ &= r((C_{r,s}x_1, C_{r,s}x_2, (r-C_{r,s})y_1, (r-C_{r,s})y_2)) - \frac{3}{2}s(x_1,x_2,y_1,y_2)\\ &= ((rC_{r,s} - \frac{3}{2}s)x_1, (rC_{r,s} - \frac{3}{2}s)x_2, (r(r-C_{r,s}) - \frac{3}{2}s)y_1, (r(r-C_{r,s}) - \frac{3}{2}s)y_2)\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $C_{r,s} = \frac{r+\sqrt{r^2-6s}}{2}$ olduğundan $r - C_{r,s} = \frac{r-\sqrt{r^2-6s}}{2}$ olur ve

$$C_{r,s}^2 = \frac{r^2+2r\sqrt{r^2-6s}+r^2-6s}{4} = \frac{r^2+r\sqrt{r^2-6s}+r^2-3s}{2},$$

$$rC_{r,s} - \frac{3}{2}s = r(\frac{r+\sqrt{r^2-6s}}{2}) - \frac{3}{2}s = \frac{r^2+r\sqrt{r^2-6s}+r^2-3s}{2},$$

$$(r-C_{r,s})^2 = \frac{r^2-2r\sqrt{r^2-6s}+r^2-6s}{4} = \frac{r^2-r\sqrt{r^2-6s}+r^2-3s}{2},$$

$$r(r-C_{r,s}) - \frac{3}{2}s = r(\frac{r-\sqrt{r^2-6s}}{2}) - \frac{3}{2}s = \frac{r^2-r\sqrt{r^2-6s}+r^2-3s}{2}$$

elde edilir. Yani $C_{r,s}^2 = rC_{r,s} - \frac{3}{2}s$ ve $(r-C_{r,s})^2 = r(r-C_{r,s}) - \frac{3}{2}s$ eşitlikleri sağlanmaktadır. Bu da $\Im^2 - r\Im + \frac{3}{2}sI = 0$ ifadesinin sağlandığını ve $(\mathbb{R}^4, \Im)$ ikilisinin bir hemen hemen kompleks metalik manifold olduğunu gösterir.

3.1.2. Tanım

Eğer $(\overline{M},\overline{g})$ ikilisi bir hemen hemen kompleks metalik yapıyla verilmiş bir yarı-Riemann manifold ve $\overline{g}$ metriği $\Im$ ile uyumlu olacak şekilde ise, her $\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2}\in\Gamma(T\overline{M})$ için

$$\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\Im\overline{\Upsilon_2})=r\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}s\overline{g}(\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2}) \tag{3.3}$$

eş değer olarak

$$\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})=\overline{g}(\overline{\Upsilon_1},\Im\overline{\Upsilon_2}), \tag{3.4}$$

böylece $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ üçlüsüne bir hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifold denir.

Şimdi Eş. 3.3 ve Eş. 3.4 ifadelerinin eşdeğer olduğunu görelim. Eş. 3.3 ifadesinde $\overline{\Upsilon_1}$ yerine $\Im\overline{\Upsilon_1}$ yazalım.

$$\overline{g}(\Im(\Im\overline{\Upsilon_1}),\Im\overline{\Upsilon_2})=r\overline{g}(\Im(\Im\overline{\Upsilon_1}),\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}s\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})$$

$$\Rightarrow\overline{g}(\Im^2\overline{\Upsilon_1},\Im\overline{\Upsilon_2})=r\overline{g}(\Im^2\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}s\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})$$

$$\Rightarrow\overline{g}(r\Im\overline{\Upsilon_1}-\frac{3}{2}s\overline{\Upsilon_1},\Im\overline{\Upsilon_2})=r\overline{g}(r\Im\overline{\Upsilon_1}-\frac{3}{2}s\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}s\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})$$

$$\Rightarrow r\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\Im\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}s\overline{g}(\overline{\Upsilon_1},\Im\overline{\Upsilon_2})=r^2\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}rs\overline{g}(\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}s\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})$$

Eş. 3.3 ifadesini tekrar kullanırsak

$$r(r\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}s\overline{g}(\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2}))-\frac{3}{2}s\overline{g}(\overline{\Upsilon_1},\Im\overline{\Upsilon_2})=r^2\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}rs\overline{g}(\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}s\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})$$

$$\Rightarrow r^2\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}rs\overline{g}(\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}s\overline{g}(\overline{\Upsilon_1},\Im\overline{\Upsilon_2})=r^2\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}rs\overline{g}(\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})-\frac{3}{2}s\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})$$

$$\Rightarrow\overline{g}(\Im\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2})=\overline{g}(\overline{\Upsilon_1},\Im\overline{\Upsilon_2})$$

elde ederiz. Böylece Eş. 3.3 ve Eş. 3.4 ifadelerinin eşdeğer olduğunu göstermiş olduk.

3.1.3. Önerme

Eğer $\Im$, $\overline{M}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks metalik yapı ise, bu takdirde

$$J_{\pm} = \pm\left(\frac{2}{2C_{r,s}-r}\Im - \frac{2r}{2C_{r,s}-r}I\right)$$

ifadeleri $\overline{M}$ üzerinde iki hemen hemen kompleks yapıdır. Tersine olarak, J, $\overline{M}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı ise, $C_{r,s} = \frac{r+\sqrt{r^2-6s}}{2}$ o.ü.,

$$\Im = \frac{r}{2}I \pm \left(\frac{2C_{r,s}-r}{2}J\right)$$

ifadeleri $\overline{M}$ üzerinde iki hemen hemen kompleks metalik yapıdır [21].

İspat

$\Im$, $\overline{M}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks metalik yapı olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
J^2 &= \left(\pm\left(\frac{2}{2C_{r,s}-r}\Im - \frac{2r}{2C_{r,s}-r}I\right)\right)^2 \\
&= \frac{4}{|r^2-6s|}\Im^2 - \frac{4r}{|r^2-6s|}\Im + \frac{r^2}{|r^2-6s|}I \\
&= \frac{1}{|r^2-6s|}\left(4\left(r\Im - \frac{3}{2}sI\right) - 4r\Im + r^2I\right) \\
&= \frac{1}{|r^2-6s|}(4r\Im - 6sI - 4r\Im + r^2I) \\
&= \frac{r^2-6s}{|r^2-6s|}I \\
&= -I
\end{aligned}$$

elde edilir.

Karşıt olarak J, $\overline{M}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
\Im^2 - r\Im + \frac{3}{2}sI &= \left(\frac{r}{2}I \pm \left(\frac{2C_{r,s}-r}{2}\right)J\right)^2 - p\left(\frac{r}{2}I \pm \left(\frac{2C_{r,s}-r}{2}\right)J\right) + \frac{3}{2}sI \\
&= \frac{r^2}{4}I \pm \frac{p\sqrt{r^2+6s}}{2}J + \frac{|r^2-6s|}{4}J^2 - \frac{r^2}{2}I \pm \frac{p\sqrt{r^2+6s}}{2}J + \frac{3}{2}I
\end{aligned}$$

$$= \frac{r^2}{4}I + \frac{r^2}{4} - \frac{6s}{4} - \frac{r^2}{2}I + \frac{3}{2}I$$
$$= 0$$

elde edilir.

3.1.4. Tanım

Bir $\Im$ hemen hemen kompleks metalik yapısının her $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(T\overline{M})$ için

$$N_{\Im}(\Upsilon_1, \upsilon_2) = [\Im\Upsilon_1, \Im\Upsilon_2] - \Im[\Im\Upsilon_1, \Upsilon_2] - \Im[\Upsilon_1, \Im\Upsilon_2] + \Im^2[\Upsilon_1, \Upsilon_2]$$

şeklinde tanımlanan Nijenhuis tensör alanı sıfır ise $\Im$ hemen hemen kompleks metalik yapısına integrallenebilirdir denir [21].

3.2. Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifoldun Altmanifoldları

M,$(m+t)$ boyutlu $(\overline{M}, \Im, \overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun, m boyutlu bir alt manifoldu olsun. Buradan itibaren M üzerine indirgenmiş Riemann metriğini g ile göstereceğiz. Her $\Upsilon \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ için

$$\Im\Upsilon = \mu\Upsilon + \xi\Upsilon, \tag{3.5}$$

$$\Im V = PV + QV \tag{3.6}$$

yazabiliriz. Burada $\mu\Upsilon$, $\Im\Upsilon$ ifadesinin teğet kısmını, $\xi\Upsilon$, $\Im\Upsilon$ ifadesinin normal kısmını, ve PV, $\Im V$ ifadesinin teğet kısmını, QV, $\Im V$ ifadesinin normal kısmını temsil etmektedir.

Eş. 3.4, Eş. 3.5, ve Eş. 3.6 ifadeleri yardımıyla görebiliriz ki;

$$g(\mu\Upsilon_1, \Upsilon_2) = g(\Upsilon_1, \mu\Upsilon_2),\ \forall\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(TM), \tag{3.7}$$

$$g(QV_1, V_2) = g(V_1, QV_2),\ \forall V_1, V_2 \in \Gamma(TM^{\perp}).$$

Aynı zamanda ξ ve P ifadeleri arasında

$$g(\xi\Upsilon,V) = g(\Upsilon,PV)$$

bağıntısı vardır.

∇ ve $\overline{\nabla}$ sırasıyla M ve $\overline{M}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonlarını temsil etmek üzere, her $\Upsilon_1,\Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ ve $TM^{\perp}$ nin bir ortonormal $\{N_1,N_2,...,N_t\}$ bazı için, $j,k \in \{1,2,...,t\}$ o.ü. Gauss Weingarten formülleri aşağıdaki gibidir:

$$\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Upsilon_2 = \nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2 + \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)N_j, \tag{3.8}$$

$$\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}N_j = -A_{N_j}\Upsilon_1 + \sum_{k=1}^{t} \psi_{jk}(\Upsilon_1)N_k. \tag{3.9}$$

Burada A_{N_j} ifadesi, $g(A_{N_j}\Upsilon_1,\Upsilon_2) = f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)$ ifadesi ile verilen N_j yönündeki şekil operatörünü ve f_j ifadeleri ikinci temel tensörleri temsil etmektedir.

3.2.1. Lemma

$(\overline{M},\Im,\overline{g})$ bir hemen hemen kompleks metalik Riemann manifold olsun. Her $\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2},\overline{\Upsilon_3} \in \Gamma(T\overline{M})$ için

$$g((\overline{\nabla}_{\overline{\Upsilon_1}}\Im)\overline{\Upsilon_2},\overline{\Upsilon_3}) = g(\overline{\Upsilon_2},(\overline{\nabla}_{\overline{\Upsilon_1}}\Im)\overline{\Upsilon_3})$$

eşitliği vardır.

İspat

Her $\overline{\Upsilon_1},\overline{\Upsilon_2},\overline{\Upsilon_3} \in \Gamma(T\overline{M})$ için,

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Im)\Upsilon_2 &= \overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\mu\Upsilon_2 + \overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\xi\Upsilon_2 - \Im\left(\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2 + \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)N_j\right)\\ &= (\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2 - \sum_{j=1}^{t} g(\xi\Upsilon_2,N_j)A_{N_j}\Upsilon_1 - \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)PN_j\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2)N_j+\sum_{j=1}^{t}\Upsilon_1(g(\xi\Upsilon_2,N_j))N_j$$
$$+\sum_{1\le j,k\le t} g(\xi\Upsilon_2,N_k)\psi_k j(\Upsilon_1)N_j-\sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)QN_j-\xi(\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2).$$

$\xi\Upsilon_2=\sum_{j=1}^{t} g(\xi\Upsilon_2,N_j)N_j$ ve $g(\xi\Upsilon_2,N_j)=g(\Im\Upsilon_2,N_j)=g(\Upsilon_2,\Im N_j)$ olduğundan,

$$g((\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Im)\Upsilon_2,\Upsilon_3)=g((\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2,\Upsilon_3)-\sum_{j=1}^{t} g(\xi\Upsilon_2,N_j)g(A_{N_j}\Upsilon_1,\Upsilon_3)-\sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)g(PN_j,\Upsilon_3)$$
$$=g((\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2,\Upsilon_3)-\sum_{j=1}^{t}\left[g(\Upsilon_2,\Im N_j)f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_3)+g(\Im N_j,\Upsilon_3)f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)\right]$$

yazabiliriz. $g((\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Im)\Upsilon_2,\Upsilon_3)=g(\Upsilon_2,(\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Im)\Upsilon_3)$ olduğundan,

$$g((\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2,\Upsilon_3)-g(\Upsilon_2,(\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_3)=g((\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Im),\Upsilon_3)-g((\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Im)\Upsilon_2,\Upsilon_3)-g(\Upsilon_2,(\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Im)\Upsilon_3)$$
$$=0$$

elde ederiz.

3.2.2. Önerme

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu olsun. Her $\Upsilon_1,\Upsilon_2,\Upsilon_3\in\Gamma(T\overline{M})$ için

$$g((\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2,\Upsilon_3)=g(\Upsilon_2,(\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_3) \tag{3.10}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

Eş. 3.5 ve Eş. 3.6 ifadelerini kullanarak, Eş. 3.8 ve Eş. 3.9 ifadeleri dolayısıyla

$$(\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Im)\Upsilon_2=\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Im\Upsilon_2-\Im(\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Upsilon_2)$$
$$=\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\mu\Upsilon_2+\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\xi\Upsilon_2-\Im\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2-\sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)\Im N_j$$

$$= (\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2 - \sum_{j=1}^{t} g(\xi\Upsilon_2, N_j)A_{N_j}\Upsilon_1 - \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)\Im PN_j$$
$$+ \sum_{j=1}^{t}\Big[f_j(\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2) + \Upsilon_1(g(\xi\Upsilon_2,N_j)) - g(\xi\Upsilon_2,N_k)\psi_j k(\Upsilon_1)\Big]N_j$$
$$- \sum_{j=1}^{t}\Big[f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)QN_j\Big] - \xi\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2$$

yazabiliriz. Eğer $g(\xi\Upsilon_1, N_j) = g(\Upsilon_1, \Im N_j)$ eşitliğini kullanırsak, son denklemi

$$g((\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Im)\Upsilon_2,\Upsilon_3) = g((\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2,\Upsilon_3)$$
$$- \sum_{j=1}^{t}\Big[f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_3)g(\Upsilon_2,\Im N_j) + f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)g(\Upsilon_3,\Im N_j)\Big] \tag{3.11}$$

denklemine indirgemiş oluruz. Eş. 3.11 ifadesinde Υ_2 ve Υ_3 terimlerinin rollerini değiştirip Eş. 3.10 ifadesini kullanırsak ispatı tamamlamış oluruz.

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M}, \Im, \overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu olsun. Her $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(T\overline{M})$ için

$$\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\xi\Upsilon_2 = \sum_{j=1}^{t}\Big[\Upsilon_1(g(\xi\Upsilon_2,N_j))N_j - g(\xi\Upsilon_2,N_j)A_{N_j}\Upsilon_1 + \sum_{k=1}^{t}\psi_j k(\Upsilon_1)g(\xi\Upsilon_2,N_j)N_k\Big]$$

yazabiliriz. $\overline{\nabla}\Im = 0$ olduğundan, Eş. 3.5, Eş. 3.6, Eş. 3.8 ve Eş. 3.9 ifadelerini kullanarak,

$$(\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2 + \sum_{j=1}^{t}\Big[f_j(\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2)N_j - g(\xi\Upsilon_2,N_j)A_{N_j}\Upsilon_1\Big]$$
$$+ \sum_{j=1}^{t}\Big[\Upsilon_1(g(\xi\Upsilon_2,N_j))N_j - \sum_{j=1}^{t}\psi_j k(\Upsilon_1)g(\xi\Upsilon_2,N_k)N_j\Big] = \mu\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2 + \xi\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2$$
$$+ \sum_{j=1}^{t}\Big[f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)PN_j\Big]$$
$$+ \sum_{j=1}^{t}\Big[f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)QN_j\Big]$$

elde ederiz. Diğer taraftan $\forall\Upsilon \in \Gamma(TM)$ ve $\forall U \in \Gamma(TM^{\perp})$ için,

$$\overline{\nabla}_{\Upsilon}U = \sum_{j=1}^{t}\Big[\Upsilon(g(u,N_j))N_j - g(U,N_j)A_{N_j}\Upsilon + \sum_{k=1}^{t}\psi_j k(\Upsilon)g(U,N_j)N_k\Big]$$

yazabiliriz. Son denklemin her iki tarafına $\Im$ uygularsak,

$$\nabla_{\Upsilon}PU+\sum_{j=1}^{t}\Big[f_j(\Upsilon,PU)+\Upsilon(g(QU,N_j))\Big]N_j$$
$$+\sum_{j=1}^{t}\Big[-g(QU,N_j)A_{N_j}\Upsilon+\sum_{j=1}^{t}g(QU,N_j)\psi_j k(\Upsilon)N_k\Big]=\sum_{j=1}^{t}\Big[\Upsilon(g(U,N_j))PN_j+\Upsilon(g(U,N_j))QN_j\Big]$$
$$-\sum_{j=1}^{t}\Big[g(U,N_j)\mu A_{N_j}\Upsilon+g(U,N_j)\xi A_{N_j}\Upsilon\Big]$$
$$+\sum_{j,k=1}^{t}\Big[g(U,N_j)\psi_j k(\Upsilon)PN_k\Big]$$
$$+\sum_{j,k=1}^{t}\Big[g(U,N_j)\psi_j k(\Upsilon)QN_k\Big]$$

elde ederiz. Buradan aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

3.2.3. Önerme

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$(\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2=\sum_{j=1}^{t}[g(\xi\Upsilon_2,N_j)A_{N_j}\Upsilon_1+f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)PN_j],$$

$$\sum_{j=1}^{t}g(\xi\Upsilon_2,N_j)\nabla_{\Upsilon_1}{}^{\perp}N_j=\xi\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2+\sum_{j=1}^{t}N_j[f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)Q-f_j(\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2)-\Upsilon_1(g(\xi\Upsilon_2,N_j))],$$

$$\nabla_{\Upsilon_1}PU=\sum_{j=1}^{t}\Big[g(QU,N_j)A_{N_j}\Upsilon_1-g(U,N_j)\mu(A_{N_j}\Upsilon_1)+\Upsilon_1(g(U,N_j))PN_j$$
$$+\sum_{k=1}^{t}\psi_{jk}(\Upsilon_1)g(U,N_j)PN_k\Big],$$

$$\sum_{j=1}^{t}g(QU,N_j)\nabla_{\Upsilon_1}{}^{\perp}N_j=\sum_{j=1}^{t}\Big[-[\Upsilon_1(g(QU,N_j))+f_j(\Upsilon_1,PU)]N_j-g(U,N_j)\xi(A_{N_j}\Upsilon_1)$$
$$+\Upsilon_1(g(U,N_j))QN_j+\sum_{k=1}^{t}\psi_{jk}(\Upsilon_1)g(U,N_j)QN_k\Big].$$

İspat

$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ için,

$$\xi\Upsilon_2 = \sum_{j=1}^{t} g(\xi\Upsilon_2, N_j)N_j$$

$$\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\xi\Upsilon_2 = \sum_{j=1}^{t} \Upsilon_1(g(\xi\Upsilon_2, N_j))N_j - \sum_{j=1}^{t} g(\xi\Upsilon_2, N_j)A_{N_j}\Upsilon_1 + \sum_{1\leq j,k\leq t} g(\xi\Upsilon_2, N_j)\psi_{jk}(\Upsilon_1)N_k$$

$$\begin{aligned}\Im(\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}) &= \Im(\nabla_{\Upsilon_1})\Upsilon_2 + \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_2)(PN_j + QN_j) \\ &= \mu(\nabla_{\Upsilon_1})\Upsilon_2 + \xi(\nabla_{\Upsilon_1})\Upsilon_2 + \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_2)(PN_j + QN_j)\end{aligned}$$

olur. Daha sonra,

$$\begin{aligned}0 &= (\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Im)\Upsilon_2 \\ &= \overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\mu\Upsilon_2 + \overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\xi\Upsilon_2 - \Im(\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Upsilon_2) \\ &= \left[\nabla_{\Upsilon_1}\mu\Upsilon_2 - \sum_{j=1}^{t} g(\xi\Upsilon_2, N_j)A_{N_j}\Upsilon_1 - \mu(\nabla_{\Upsilon_1})\Upsilon_2 - \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_2)PN_j\right] \\ &\quad + \left[\sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1, \mu\Upsilon_2)N_j + \sum_{j=1}^{t} \Upsilon_1(g(\xi\Upsilon_2, N_j))N_j - \xi(\nabla_{\Upsilon_1})\Upsilon_2\right] \\ &\quad + \left[\sum_{1\leq j,k\leq t} g(\xi\Upsilon_2, N_j)\psi_{jk}(\Upsilon_1)N_k - \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_2)QN_j\right]\end{aligned}$$

elde ederiz.

$\Upsilon \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ için,

$$V = \sum_{j=1}^{t} g(V, N_j)N_j \ ,$$

$$QV = \sum_{j=1}^{t} g(QV, N_j)N_j \ ,$$

$$\overline{\nabla}_{\Upsilon}V=\sum_{j=1}^{t}\Upsilon(g(V,N_j))N_j-\sum_{j=1}^{t}g(V,N_j)A_{N_j}\Upsilon+\sum_{1\leq j,k\leq t}g(V,N_j)\psi_{jk}(\Upsilon)N_k\ ,$$

$$\overline{\nabla}_{\Upsilon}QV=\sum_{j=1}^{t}\Upsilon(g(QV,N_j))N_j-\sum_{j=1}^{t}g(QV,N_j)A_{N_j}\Upsilon+\sum_{1\leq j,k\leq t}g(QV,N_j)\psi_{jk}(\Upsilon)N_k\ ,$$

$$\begin{aligned}\Im(\overline{\nabla}_{\Upsilon}\Im)V&=\sum_{j=1}^{t}\Upsilon(g(V,N_j))(PN_j+QN_j)\\&\quad-\sum_{j=1}^{t}g(V,N_j)(\mu(A_{N_j}\Upsilon)+\xi(A_{N_j}\Upsilon))\\&\quad+\sum_{1\leq j,k\leq t}g(V,N_j)\psi_{jk}(\Upsilon)(PN_k+QN_k)\end{aligned}$$

olur. Daha sonra,

$$\begin{aligned}0&=(\overline{\nabla}_{\Upsilon}\Im)V\\&=\overline{\nabla}_{\Upsilon}PV+\overline{\nabla}_{\Upsilon}QV-\Im(\overline{\nabla}_{\Upsilon}V)\\&=\left[\nabla_{\Upsilon}PV-\sum_{j=1}^{t}g(QV,N_j)A_{N_j}\Upsilon-\sum_{j=1}^{t}\Upsilon(g(V,N_j))PN_j\right]\\&\quad+\left[\sum_{j=1}^{t}g(V,N_j)\mu(A_{N_j}\Upsilon)-\sum_{1\leq j,k\leq t}g(V,N_j)\psi_{jk}(\Upsilon)PN_k\right]\\&\quad+\left[\sum_{j=1}^{t}f_j(\Upsilon,PV)N_j+\sum_{j=1}^{t}\Upsilon(g(QV,N_j))N_j+\sum_{1\leq j,k\leq t}g(QV,N_j)\psi_{jk}(\Upsilon)N_k\right]\\&\quad-\left[\sum_{j=1}^{t}\Upsilon(g(V,N_j))QN_j-\sum_{j=1}^{t}g(V,N_j)\xi(A_{N_j}\Upsilon)+\sum_{1\leq j,k\leq t}g(V,N_j)\psi_{jk}(\Upsilon)QN_k\right]\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Son önermenin ispatını yaparken

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_{\Upsilon_1}\Im)\Upsilon_2&=\left[\nabla_{\Upsilon_1}\mu\Upsilon_2-\sum_{j=1}^{t}g(\xi\Upsilon_2,N_j)A_{N_j}\Upsilon_1-\mu(\nabla_{\Upsilon_1})\Upsilon_2-\sum_{j=1}^{t}f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)PN_j\right]\\&\quad+\left[\sum_{j=1}^{t}f_j(\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2)N_j+\sum_{j=1}^{t}\Upsilon_1(g(\xi\Upsilon_2,N_j))N_j-\xi(\nabla_{\Upsilon_1})\Upsilon_2\right]\\&\quad+\left[\sum_{1\leq j,k\leq t}g(\xi\Upsilon_2,N_j)\psi_{jk}(\Upsilon_1)N_k-\sum_{j=1}^{t}f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)QN_j\right]\end{aligned}\tag{3.12}$$

ifadesini elde ettik.

$(m+t)$ boyutlu $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu olan M'nin $TM^{\perp}$ normal uzayı $\{N_1,N_2,...,N_t\}$ şeklinde bir ortonormal baza sahip olsun. Bu takdirde, her $\forall\Upsilon\in\Gamma(TM)$, $\Im\Upsilon$ ve $\Im N_j$ $(1\leq j\leq t)$ için sırasıyla aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\Im\Upsilon=\mu\Upsilon+\sum_{j=1}^{t}\eta_j(\Upsilon)N_j, \tag{3.13}$$

$$\Im N_j=\delta_j+\sum_{k=1}^{t}\theta_{jk}N_k. \tag{3.14}$$

Burada μ, M üzerindeki Υ tanjant vektör alanını $\Im\Upsilon$ ifadesinin teğet kısmına dönüştüren $(1,1)$ tipindeki tensör alanını, η_j ler reel 1-formları ve δ_j ler M üzerindeki vektör alanlarını göstermektedir. θ_{jk} lar M üzerindeki $t\times t$ tipindeki $(\theta_{jk})_{1\leq j,k\leq t}$ matrisiyle donatılmış diferensiyellenebilir değerli fonksiyonları temsil etmektedir.

$g(\Im\Upsilon,N_j)=g(\Upsilon,\Im N_j)$ ve $g(\Im N_j,N_k)=g(N_j,\Im N_k)$ olduğundan, Eş. 3.3 ve Eş. 3.7 ifadelerini kullanarak aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

3.2.4. Lemma

M, bir $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun bir altmanifoldu o.ü. $\forall\Upsilon_1,\Upsilon_2\in\Gamma(TM)$ için

$$\eta_j(\Upsilon_1)=g(\Im\Upsilon_1,N_j)=g(\Upsilon_1,\delta_j), \tag{3.15}$$

$$g(\mu\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2)=rg(\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2)-\frac{3}{2}sg(\Upsilon_1,\Upsilon_2)-\sum_{j=1}^{t}\eta_j(\Upsilon_1)\eta_j(\Upsilon_2), \tag{3.16}$$

$$\theta_{jk}=\theta_{kj}, \tag{3.17}$$

burada $1\leq j,k\leq t$.

3.2.5. Önerme

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu takdirde, M üzerinde $\overline{M}$'nin hemen hemen kompleks metalik yapısıyla indirgenmiş $(\mu,g,\eta_j,\delta_j,(\theta_{jk})_{t\times t})$ yapısı mevcuttur. Bu yapı $\forall\Upsilon\in\Gamma(TM)$ için aşağıdaki bağıntıları sağlar;

$$\mu^2\Upsilon = r\mu\Upsilon - \frac{3}{2}s\Upsilon - \sum_{j=1}^{t}\eta_j(\Upsilon)\delta_j\ , \tag{3.18}$$

$$\eta_j(\mu\Upsilon) = r\eta_j(\Upsilon) - \sum_{k=1}^{t}\theta_{jk}\eta_k(\Upsilon)\ , \tag{3.19}$$

$$\eta_k(\delta_j) = r\theta_{jk} - \frac{3}{2}s\tau_{jk} - \sum_{\lambda=1}^{t}\theta_{j\lambda}\theta_{\lambda k}\ , \tag{3.20}$$

$$\mu\delta_j = r\delta_j - \sum_{k=1}^{t}\theta_{jk}\delta_k\ . \tag{3.21}$$

İspat

$\Im$ ifadesini Eş. 3.13 denkleminin her iki tarafına uygulayarak ve Eş. 3.2 ifadesini kullanarak

$$r\Im\Upsilon - \frac{3}{2}s\Upsilon = \Im(\mu\Upsilon) + \sum_{j=1}^{t}\eta_j(\Upsilon)\Im N_j\ ,$$

elde ederiz ki bu da

$$r\mu\Upsilon + r\sum_{j=1}^{t}\eta_j(\Upsilon)N_i - \frac{3}{2}sX = h^2X + \sum_{j=1}^{t}\eta_j(|mu\Upsilon)N_j + \sum_{j=1}^{t}\eta_j(\Upsilon)\left(\delta_j + \sum_{k=1}^{t}\theta_{jk}N_k\right)$$

demektir.

Eğer son denklemin teğet ve normal kısımlarını eşitlersek sırasıyla Eş. 3.18 ve Eş. 3.19 ifadelerini elde ederiz. Eş. 3.14 ifadesinin yardımıyla,

$$g(\Im N_j,\Im N_k) = g(\delta_j,\delta_k) + \sum_{\lambda=1}^{t}\theta_{j\lambda}\theta_{\lambda k} \tag{3.22}$$

yazabiliriz.

Aynı zamanda Eş. 3.3 ifadesi sayesinde

$$g(\Im N_j, \Im N_k) = r\theta_{jk} - \frac{3}{2}s\tau_{jk} \tag{3.23}$$

elde edilir.

Daha sonra, Eş. 3.17, Eş. 3.22 ve Eş. 3.23 ifadelerini kullanarak Eş. 3.20 ifadesini elde ederiz. Son olarak, Eş. 3.19 ifadesinde $\Upsilon = \delta_j$ almak Eş. 3.21 ifadesini elde etmemizi sağlar.

3.2.6. Önerme

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M}, \Im, \overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\mu A_{N_j}\Upsilon + \nabla_\Upsilon \delta_j - \sum_{k=1}^{t} \theta_{jk} A_{N_k}\Upsilon - \sum_{k=1}^{t} \psi_{jk}(\Upsilon)\delta_k = 0\,,$$

$$\Upsilon(\theta_{j\lambda}) + f_\lambda(\Upsilon, \delta_j) + f_k(\Upsilon, \delta_\lambda) + \sum_{k=1}^{t} (\theta_{jk}\psi_{k\lambda}(\Upsilon) - \theta_{k\lambda}\psi_{jk}(\Upsilon)) = 0.$$

İspat

Eş. 3.8, Eş. 3.9, Eş. 3.13, ve Eş. 3.14 yardımıyla

$$\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_\Upsilon \Im)N_j &= \overline{\nabla}_\Upsilon \Im N_j - \Im(\overline{\nabla}_\Upsilon N_j) \\
&= \overline{\nabla}_\Upsilon \left(\delta_j + \sum_{k=1}^{t} \theta_{jk} N_k \right) - \Im \left(-A_{N_j}\Upsilon + \sum_{k=1}^{t} \psi_{jk}(\Upsilon) N_k \right) \\
&= \nabla_\Upsilon \delta_j + \sum_{k=1}^{t} \Upsilon(\theta_{jk}) N_k + \sum_{k=1}^{t} \theta_{jk} \left(-A_{N_k}\Upsilon + \sum_{\lambda=1}^{t} \psi_{k\lambda}(\Upsilon) N_k \right) \\
&\quad + \mu A_{N_j}\Upsilon + \xi A_{N_j}\Upsilon - \sum_{k=1}^{t} \psi_{jk}(\Upsilon) \left(\delta_k + \sum_{k=1}^{t} \theta_{k\lambda} N_\lambda \right)
\end{aligned}$$

$$= \mu A_{N_j}\Upsilon + \nabla_\Upsilon \delta_j - \sum_{k=1}^{t} \theta_{jk} A_{N_k}\Upsilon - \sum_{=1}^{t} \psi_{jk}(\Upsilon)\delta_k$$
$$+ \sum_{k=1}^{t} \Upsilon(\theta_{jk})N_k + \sum_{k,\lambda=1}^{t} \theta_{jk}\psi_{k\lambda}(\Upsilon)N_\lambda + \xi A_{N_j}\Upsilon - \sum_{k,\lambda=1}^{t} \psi_{jk}(\Upsilon)\theta_{k\lambda}N_\lambda$$

yazabiliriz. $(\overline{\nabla}_\Upsilon \Im)N_j = 0$ olduğundan, denklemlerin teğet ve normal kısımlarını birbirine eşitlersek ispat tamamlanır.

3.2.7. Teorem

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M}, \Im, \overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu olsun. Eğer μ, M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel ve δ_j $(1 \leq j \leq t)$ ifadeleri lineer bağımsızsa bu takdirde M total jeodeziktir.

İspat

Her $\Upsilon_3 \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2 = \sum_{j=1}^{t} [g(\xi\Upsilon_2, N_j)A_{N_j}\Upsilon_1 + f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_2)PN_j]$$

olduğundan

$$\sum_{j=1}^{t} [g(\xi\Upsilon_2, N_j)g(A_{N_j}\Upsilon_1, \Upsilon_3) + f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_2)g(PN_j, \Upsilon_3)] = 0$$

yazabiliriz ki bu da Eş. 3.15 ifadesinin kullanımıyla

$$\sum_{j=1}^{t} \eta_j(\Upsilon_2) f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_3) = -\sum_{j=1}^{t} \eta_j(\Upsilon_3) f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_2)$$

olduğunu gösterir.

Yukarıdaki denklemde Υ_1 ve Υ_3 ifadelerini yer değiştirirsek,

$$\sum_{j=1}^{t} \eta_j(\Upsilon_2) f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_3) = -\sum_{j=1}^{t} \eta_j(\Upsilon_1) f_j(\Upsilon_2, \Upsilon_3)$$

elde ederiz.

Eğer $\sum_{j=1}^{t} \eta_j(\Upsilon_2) f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_3)$ ifadesinin Υ_1 ve Υ_2 için aynı zamanda hem simetrik hem ters simetrik olmasını göz önünde bulundurursak

$$\sum_{j=1}^{t} \eta_j(\Upsilon_2) f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_3) = 0,$$

olur. Yani,

$$\sum_{j=1}^{t} g(\Upsilon_2, f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_3) PN_j) = 0.$$

$PN_J = \delta_j$ $(1 \leq j \leq t)$ ler lineer bağımsızdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3. Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifoldun İnvaryant Altmanifoldları

3.3.1. Tanım

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M}, \Im, \overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu olsun. Eğer herhangi bir $q \in M$ noktası için $\Im(T_qM) \subset T_qM$ oluyorsa M'ye invaryant altmanifold denir.

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M}, \Im, \overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik Riemann manifoldunun m boyutlu bir invaryant altmanifoldu olsun. O zaman Eş. 3.13 ifadesinden, $(1 \leq j \leq t)$ için $\eta_j = 0$ dir. Son ifadenin tersi de doğrudur.

3.3.2. Önerme

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M}, \Im, \overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir invaryant altmanifoldu olsun. Bu takdirde $(\mu, g, \eta_j, \delta_j, (\theta_{jk})_{t\times t})$ indirgenmiş yapısının matrisi $B = (\theta_{jk})_{t\times t}$ bir hemen hemen kompleks metalik matristir. Bu da demek oluyor ki I_t, $t$yinci mertebeden matrislerin birim matrisi o.ü.

$$B^2 = rB - \frac{3}{2} sI_t.$$

İspat

M, m boyutlu bir invaryant altmanifold olduğundan, Eş. 3.20 yardımıyla, $1 \leq j, k \leq t$ için

$$\sum_{\lambda=1}^{t} \theta_{j\lambda}\theta_{\lambda k} = r\theta_{jk} - \frac{3}{2}s\tau_{jk}$$

elde ederiz. Eğer $(\theta_{jk})_{t\times t}$ matrisini B ile ifade edersek ispatı tamamlanır.

3.3.3. Önerme

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M}, \Im, \overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir invaryant altmanifoldu olsun. Bu takdirde $1 \leq j \leq t$ o.ü. her $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla\Im = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1, \Im\Upsilon_2)N_j = \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_2)\Im N_j = \sum_{j=1}^{t} f_j(\Im\Upsilon_1, \Upsilon_2)N_j,$$

$$f_j(\Im\Upsilon_1, \Im\Upsilon_2) = rf_j(\Upsilon_1, \Im\Upsilon_2) - \frac{3}{2}sf_j(\Upsilon_1, \Upsilon_2).$$

İspat

$\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ ise herhangi bir $1 \leq j \leq t$ için $\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2, \Im\Upsilon_1, \Im\Upsilon_1, \Im(\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2) \in \Gamma(TM)$ ve $\Im N_j \in \Gamma(TM^{\perp})$ olur. Eğer $\overline{\nabla}\Im = 0$ ise Önerme 3.2.3 kullanılarak

$$\begin{aligned}(\nabla_{\Upsilon_1}\Im)\Upsilon_2 &= \nabla_{\Upsilon_1}\Im\Upsilon_2 - \Im(\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2)\\ &= \nabla_{\Upsilon_1}\mu\Upsilon_2 - \mu(\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2)\\ &= (\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2\\ &= 0\end{aligned}$$

elde ederiz. Aynı zamanda

$$\sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)QN_j - \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2)N_j = 0$$

yazabiliriz ki bu da,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2)N_j &= \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)\Im N_j \\ &= \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_2,\Upsilon_1)\Im N_j \\ &= \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_2,\Im\Upsilon_1)N_j \\ &= \sum_{j=1}^{t} f_j(\Im\Upsilon_1,\Upsilon_2)N_j\end{aligned}$$

ve

$$f_j(\Im\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2) = f_j(\Upsilon_1,\Im^2\Upsilon_2) = rf_j(\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2) - \frac{3}{2}sf_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)$$

demektir.

3.3.4. Sonuç

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu ve M üzerine indirgenmiş yapı $(\mu,g,\eta_j,\delta_j,(\theta_{jk})_{t\times t})$ olsun. O zaman δ_j ler sıfır vektör alanıdır ve Eş. 3.13 ve Eş. 3.14 ifadeleri her $\Upsilon_1,\Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ ve herhangi bir $(1 \le j \le t)$ için

$$\Im\Upsilon_1 = \mu\Upsilon_1,$$

$$\Im N_j = \sum_{k=1}^{t} \theta_{jk}N_k,$$

halini alır. Aynı zamanda indirgenmiş yapı her $\Upsilon_1,\Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ ve herhangi bir $(1 \le j \le t)$

için aşağıdaki eşitlikleri sağlar

$$\mu^2 = r\mu - \frac{3}{2}sI,$$

$$\theta_{jk} = \theta_{kj},$$

$$g(\mu\Upsilon_1, \Upsilon_2) = g(\Upsilon_1, \mu\Upsilon_2),$$

$$g(\mu\Upsilon_1, \mu\Upsilon_2) = rg(\Upsilon_1, \mu\Upsilon_2) - \frac{3}{2}sg(\Upsilon_1, \Upsilon_2).$$

3.3.5. Önerme

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M}, \Im, \overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir invaryant altmanifoldu ve M üzerine indirgenmiş yapı $(\mu, g, \eta_j, \delta_j, (\theta_{jk})_{t\times t})$ olsun. Bu takdirde, M invaryant altmanifolddur ancak ve ancak M üzerine indirgenmiş (μ, g) yapısı hemen hemen kompleks metalik yapıdır.

İspat

M'nin invaryant altmanifold olduğunu varsayalım. $(1 \leq j \leq t)$ için $\eta_j = 0$ olduğundan, Eş. 3.16 ve Eş. 3.18 yardımıyla her $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$\mu^2\Upsilon_1 = r\mu\Upsilon_1 - \frac{3}{2}s\Upsilon_1,$$

$$g(\mu\Upsilon_1, \mu\Upsilon_2) = rg(\Upsilon_1, \mu\Upsilon_2) - \frac{3}{2}sg(\Upsilon_1, \Upsilon_2)$$

olduğunu görebiliriz. Bu da (μ, g), M üzerinde bir hemen hemen kompleks metalik yapıdır demektir.

Tersine olarak eğer (μ, g), M üzerinde bir hemen hemen kompleks metalik yapı ise denklem Eş. 3.18 yardımıyla her $\Upsilon \in \Gamma(TM)$ için

$$\sum_{j=1}^{t} \eta_j(\Upsilon)\delta_j = 0$$

yazabiliriz. Bu da her $\Upsilon \in \Gamma(TM)$ için

$$\eta_j(\Upsilon) = 0$$

olduğunu verir.

Böylece, M invaryant bir altmanifolddur.

3.4. Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifoldun Anti-İnvaryant Altmanifoldları

3.4.1. Tanım

M, $(\overline{M}, \Im, \overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer herhangi bir $q \in M$ noktası için $\Im(T_qM) \subset (T_qM)^{\perp}$ oluyorsa, M bir anti-invaryant altmanifold olarak adlandırılır.

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M}, \Im, \overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her $\Upsilon \in \Gamma(TM)$ için $\Im\Upsilon$ ve $\Im N_j$, Eş. 3.13 ve Eş. 3.14 yardımıyla sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$\Im\Upsilon = \sum_{j=1}^{t} \eta_j(\Upsilon) N_j \ ,$$

$$\Im N_j = \delta_j + \sum_{k=1}^{t} \theta_{jk} N_k .$$

3.4.2. Önerme

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M}, \Im, \overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$\sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1, \Upsilon_2) P N_j = -\sum_{j=1}^{t} g(\Im\Upsilon_2, N_j) A_{N_j} \Upsilon_1 \ ,$$

$$\sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)QN_j = \sum_{j=1}^{t} g(\Im\Upsilon_2,N_j)\nabla^{\perp}_{\Upsilon_1}N_j + \sum_{j=1}^{t}\Upsilon_1(g(\Im\Upsilon_2,N_j)) - \Im(\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2).$$

İspat

$\Upsilon_1,\Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ ise $\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ ve $\Im\Upsilon_1, \Im\Upsilon_2, \Im(\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2) \in \Gamma(TM^{\perp})$ olur. Eğer $\overline{\nabla}\Im = 0$ ise Önerme 3.2.3 kullanılarak

$$\sum_{j=1}^{t} g(\xi\Upsilon_2,N_j)A_{N_j}\Upsilon_1 + \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)PN_j = 0$$

elde ederiz. Aynı zamanda

$$\sum_{j=1}^{t} g(\xi\Upsilon_2,N_j)\nabla^{\perp}_{\Upsilon_1}N_j = \xi(\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2) + \sum_{j=1}^{t} f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)QN_j - \sum_{j=1}^{t}\Upsilon_1(g(\xi\Upsilon_2,N_j))N_j$$

yazabiliriz.

3.4.3. Önerme

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir anti-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda, M üzerinde aşağıdaki bağıntıları sağlayan M'nin hemen hemen kompleks metalik yapısıyla indirgenmiş $(g,\eta_j,\delta_j,(\theta_{jk})_{t\times t})$ yapısı vardır:

$$\Upsilon_1 = -\frac{2}{3s}\sum_{j=1}^{t}\eta_j(\Upsilon_1)\delta_j \ ,$$

$$\eta_j(\Upsilon_1) = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{t}\theta_{jk}\eta_k(\Upsilon_1),$$

$$\eta_k(\delta_j) = r\theta_{jk} - \frac{3}{2}s\tau_{jk} - \sum_{\lambda=1}^{t}\theta_{j\lambda}\theta_{\lambda k} \ ,$$

$$\delta_j = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{t}\theta_{jk}\delta_k \ ,$$

$$g(\Upsilon_1,\Upsilon_2)=-\frac{2}{3s}\sum_{j=1}^{t}\eta_j(\Upsilon_1)\eta_j(\Upsilon_2)$$

$\forall\Upsilon_1,\Upsilon_2\in\Gamma(TM)$. $\overline{M}$ nin hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifold olduğunu dikkate aldığımızda

$$\nabla_\Upsilon\delta_j=\sum_{k=1}^{t}(\theta_{jk}A_{N_k}\Upsilon+\psi_{jk}(\Upsilon)\delta_k)\ ,$$

$$\Upsilon(\theta_{jk})+f_\lambda(\Upsilon,\delta_j)+f_j(\Upsilon,\delta_\lambda)=\sum_{k=1}^{t}(\theta_{jk}\psi_{k\lambda}(\Upsilon)-\theta_{k\lambda}\psi_{jk}(\Upsilon))$$

eşitliklerini de verebiliriz.

3.5. Hemen Hemen Kompleks Metalik Manifoldun Slant Altmanifoldları

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu olsun. Cauchy-Schwartz eşitsizliğini kullanarak her $\Upsilon\in\Gamma(TM)$ için

$$|g(\Im\Upsilon,\mu\Upsilon)|\leq\|\Im\Upsilon\|\|\mu\Upsilon\|$$

yazabiliriz.

Böylece her $\upsilon\in M$ ve herhangi bir sıfırdan farklı $\Upsilon_\upsilon\in\Gamma(T_\upsilon M)$ tanjant vektörü için

$$g(\Im\Upsilon_\upsilon,\mu\Upsilon_\upsilon)=cos\alpha(\Upsilon_\upsilon)\|\Im\Upsilon_\upsilon\|\|\mu\Upsilon_\upsilon\|$$

olacak şekilde bir $\alpha:\Gamma(T_\upsilon M)\to[0,\pi]$ fonksiyonu vardır. $\mu\Upsilon_\upsilon$ ile $\Im\Upsilon_\upsilon$ arasındaki $\alpha(\Upsilon_\upsilon)$ açısı Υ'nun Wirtinger açısı olarak adlandırılır ve aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$cos\alpha(\Upsilon_\upsilon)=\frac{g(\Im\Upsilon_\upsilon,\mu\Upsilon_\upsilon)}{\|\Im\Upsilon_\upsilon\|\|\mu\Upsilon_\upsilon\|}=\frac{\|\mu\Upsilon_\upsilon\|}{\|\Im\Upsilon_\upsilon\|}.$$

3.5.1. Tanım

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\mu\Upsilon_\upsilon$ ile $\Im\Upsilon_\upsilon$ arasındaki $\alpha(\Upsilon_\upsilon)$ açısı her $\upsilon \in M$ ve $\Upsilon_\upsilon \in \Gamma(T_\upsilon M)$ için sabit oluyorsa M slant altmanifold olarak adlandırılır ve aşağıdaki bağıntıyı sağlar:

$$cos\alpha = \frac{g(\Im\Upsilon,\mu\Upsilon)}{\|\Im\Upsilon\|\|\mu\Upsilon\|} = \frac{\|\mu\Upsilon\|}{\|\Im\Upsilon\|}. \tag{3.24}$$

$(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik Riemann manifoldunun slant açısı $\alpha = 0$ ve $\alpha = \frac{\pi}{2}$ slant altmanifoldları sırasıyla invaryant ve anti-invaryant altmanifoldlardır. Ne invaryant ne de anti-invaryant olan slant altmanifoldlar ise öz slant altmanifoldlar olarak adlandırılırlar.

3.5.2. Önerme

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu olsun. Eğer M slant açısı α olan bir slant altmanifold ise bu takdirde her $\Upsilon_1,\Upsilon_2 \in \Gamma((T_\upsilon M))$

$$g(\mu\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2) = cos^2\alpha\{rg(\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2) - \frac{3}{2}sg(\Upsilon_1,\Upsilon_2)\},$$

$$g(N\Upsilon_1,N\Upsilon_2) = sin^2\alpha\{rg(X,\Im\Upsilon_2) - \frac{3}{2}sg(\Upsilon_1,\Upsilon_2)\}.$$

İspat

Eş. 3.24 yardımıyla,

$$cos\alpha = \frac{\|\mu\Upsilon_1\|}{\|\Im\Upsilon_1\|},$$

$$cos\alpha^2\|\Im\Upsilon_1\|^2 = \|\mu\Upsilon_1\|^2,$$

$$cos\alpha^2 g(\Im\Upsilon_1,\Im\Upsilon_1) = g(\mu\Upsilon_1,\mu\Upsilon_1)$$

yazabiliriz.

Eğer son denklemde Υ_1 yerine $\Upsilon_1+\Upsilon_2$ yazılır ve denklem Eş. 3.3 ile birlikte göz önünde bulundurulursa

$$cos\alpha^2 g(\Im\Upsilon_1+\Im\Upsilon_2,\Im\Upsilon_1+\Im\Upsilon_2)=g(\mu\Upsilon_1+\mu\Upsilon_2,\mu\Upsilon_1+\mu\Upsilon_2),$$

$$cos\alpha^2(g(\Im\Upsilon_1,\Im\Upsilon_1)+2g(\Im\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2)+g(\Im\Upsilon_2,\Im\Upsilon_2))=g(\mu\Upsilon_1,\mu\Upsilon_1)+2g(\mu\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2)+g(\mu\Upsilon_2,\mu\Upsilon_2),$$

$$cos\alpha^2 g(\Im\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2)=g(\mu\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2),$$

$$cos\alpha^2\{rg(\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2)-\frac{3}{2}sg(\Upsilon_1,\Upsilon_2)\}=g(\mu\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2).$$

Aynı zamanda,

$$g(\Im\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2)=g(\mu\Upsilon_1+N\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2+N\Upsilon_2),$$

$$g(\Im\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2)=g(\mu\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2)+g(N\Upsilon_1,N\Upsilon_2)$$

şeklindedir ve

$$\begin{aligned} g(N\Upsilon_1,N\Upsilon_2) &= g(\Im\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2)-g(\mu\Upsilon_1,\mu\Upsilon_2) \\ &= g(\Im\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2)-cos\alpha^2 g(\Im\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2) \\ &= sin\alpha^2 g(\Im\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2) \\ &= sin\alpha^2\{rg(\Upsilon_1,\Im\Upsilon_2)-\frac{3}{2}sg(\Upsilon_1,\Upsilon_2)\} \end{aligned}$$

yazabiliriz.

3.5.3. Teorem

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir altmanifoldu olsun. M bir slant altmanifolddur ancak ve ancak $\varepsilon=cos^2\alpha$ o.ü.

$$\mu^2=\varepsilon(r\mu-\frac{3}{2}sI). \tag{3.25}$$

İspat

M bir slant altmanifold olsun, bu durumda, her $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(T_\upsilon M)$ için

$$\begin{aligned} g(\mu^2\Upsilon_1, \Upsilon_2) &= g(\mu(\mu\Upsilon_1), \Upsilon_2) \\ &= g(\Im(\mu\Upsilon_1), \Upsilon_2) \\ &= g(\mu\Upsilon_1, \Im\Upsilon_2) \\ &= g(\mu\Upsilon_1, \mu\Upsilon_2) \\ &= cos^2\alpha(rg(\Upsilon_1, \Im\Upsilon_2) - \frac{3}{2}sg(\Upsilon_1, \Upsilon_2)) \\ &= cos^2\alpha g(r\Im\Upsilon_1 - \frac{3}{2}s\Upsilon_1, \Upsilon_2) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\mu^2\Upsilon_1 = cos^2\alpha(r\Im\Upsilon_1 - \frac{3}{2}s\Upsilon_1, \Upsilon_2)$$

elde ederiz. Böylece $\varepsilon = cos^2\alpha$ dır.

Tersine olarak $\mu^2 = \varepsilon(r\mu - \frac{3}{2}sI)$ olacak şekilde bir $\varepsilon \in [0,1]$ sayısı olsun. Bu takdirde her $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(T_\upsilon M)$ için

$$\begin{aligned} cos\alpha &= \frac{g(\Im\Upsilon_1, \mu\Upsilon_1)}{\|\Im\Upsilon_1\|\|\mu\Upsilon_1\|} \\ &= \frac{g(\Upsilon_1, \mu^2\Upsilon_1)}{\|\Im\Upsilon_1\|\|\mu\Upsilon_1\|} \\ &= \frac{g(\Upsilon_1, \varepsilon(r\Im - \frac{3}{2}sI)\Upsilon_1)}{\|\Im\Upsilon_1\|\|\mu\Upsilon_1\|} \\ &= \varepsilon\frac{rg(\Upsilon_1, \Im\Upsilon_1) - \frac{3}{2}sg(\Upsilon_1, \Upsilon_1)}{\|\Im\Upsilon_1\|\|\mu\Upsilon_1\|} \\ &= \varepsilon\frac{g(\Im\Upsilon_1, \Im\Upsilon_2)}{\|\Im\Upsilon_1\|\|\mu\Upsilon_1\|} \\ &= \varepsilon\frac{\|\Im\Upsilon_1\|}{\|\mu\Upsilon_1\|}. \end{aligned}$$

Böylece $\varepsilon = cos^2\alpha = sabit$ elde ederiz ve ispat tamamlanır.

3.5.4. Önerme

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir slant altmanifoldu olsun. Her $\Upsilon_1,\Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_{\Upsilon_1}\mu^2)\Upsilon_2 = rcos^2\alpha(\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2.$$

İspat

Eş. 3.25 ifadesinden

$$\mu^2(\nabla_{\Upsilon_1})\Upsilon_2 = cos^2\alpha(r\mu\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2 - \frac{3}{2}s\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2)$$

ve

$$\nabla_{\Upsilon_1}\mu^2\Upsilon_2 = cos^2\alpha(r\nabla_{\Upsilon_1}\mu\Upsilon_2 - \frac{3}{2}s\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2)$$

yazabiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned}(\nabla_{\Upsilon_1}\mu^2)\Upsilon_2 &= \nabla_{\Upsilon_1}\mu^2\Upsilon_2 - \mu^2(\nabla_{\Upsilon_1})\Upsilon_2 \\ &= cos^2\alpha(r\nabla_{\Upsilon_1}\mu\Upsilon_2 - \frac{3}{2}s\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2) - cos^2\alpha(r\mu\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2 - \frac{3}{2}s\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2) \\ &= rcos^2\alpha(\nabla_{\Upsilon_1}\mu\Upsilon_2 - \mu\nabla_{\Upsilon_1}\Upsilon_2) \\ &= rcos^2\alpha(\nabla_{\Upsilon_1}\mu)\Upsilon_2\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3.5.5. Önerme

M, $(m+t)$ boyutlu $(\overline{M},\Im,\overline{g})$ hemen hemen kompleks metalik yarı-Riemann manifoldunun m boyutlu bir slant altmanifoldu olsun. Her $\Upsilon_1,\Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_{\Upsilon_1}\mu^2)\Upsilon_2 = rcos^2\alpha\sum_{j=1}^{t}[\eta_j(\Upsilon_2)A_{N_j}\Upsilon_1 + f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)\delta_j]$$

ifadesi geçerlidir.

İspat

Her $\Upsilon_1, \Upsilon_2 \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_{\Upsilon_1}\mu^2)\Upsilon_2 = rcos^2\alpha\left[\sum_{j=1}^{t}[g(\xi\Upsilon_2, N_j)A_{N_j}\Upsilon_1 + f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)PN_j]\right]$$

yazabiliriz. Burada $\eta_j(\Upsilon_2) = g(\Im\Upsilon_2, N_j) = g(\xi\Upsilon_2, N_j)$ ve $PN_j = \delta_j$ olduğunu dikkate alırsak,

$$(\nabla_{\Upsilon_1}\mu^2)\Upsilon_2 = rcos^2\alpha\left[\sum_{j=1}^{t}\eta_j(\Upsilon_2)A_{N_j}\Upsilon_1 + f_j(\Upsilon_1,\Upsilon_2)\delta_j\right]$$

olduğunu görürüz. Böylece ispat tamamlanır.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında öncelikle Riemann manifoldların ve altmanifoldlarının özellikleri ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir. Metalik oranlar ailesinden alınan ilhamla, tanıtılan yeni tip manifoldların ortaya çıkışı ve bunları inceleyen çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. Çalışmanın araştırma kısmında ise bu şekilde tanımlanan hemen hemen kompleks metalik manifoldun tanımı verilmiş ve hemen hemen kompleks metalik manifoldun altmanifoldlarının geometrisi incelenmiştir. Altmanifoldlar üzerine indirgenmiş yapının temel özellikleri verilmiştir. Ayrıca hemen hemen kompleks metalik manifoldun invaryant, anti-invaryant ve slant altmanifoldlarının özellikleri incelenmiştir. Bu tez çalışmasının devamı olarak hemen hemen kompleks metalik manifoldun farklı tipte altmanifoldları ve bunların özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. De Spinadel, V.W (1999). The metallic means family and multifractal spectra,*Nonlinear Analysis*, 36, 721-745.

2. Crasmareanu, M.,and Hretcanu, C.E. (2008). Golden differantial geometry.*Chaos, Solitons & Fractals*, 38(5), 1229-1238.

3. Hretcanu, C.E., and Crasmareanu, M. (2013). Metallic structures on Riemannian manifolds. *Revista de la Union Matematica*, 54(2), 15-27.

4. Özkan, M., and Yılmaz, F. (2018). Metallic structures on differential manifolds. *Journal of Science and Arts*, 3(44), 645-660.

5. Erdoğan, F.E., and Yıldırım, C.(2017). *Semi-invariant submanifolds of golden Riemannian manifolds*. In 2nd International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences, Ağrı.

6. Hretcanu, C.E., and Blaga, A.M. (2018). Submanifolds in metallic Riemannian manifolds. *Differential Geometry-Dynamical Systems*, 20, 83-97.

7. Erdoğan, F.E. (2018). Transversal lightlike submanifolds of metallic semi-Riemannian manifolds.*Turkish Journal of Mathematics*, 42(6), 3133-3148.

8. Acet, B.E. (2018). Lightlike hypersurfaces of metallic semi-Riemannian manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15(12), 1850201.

9. Hreţcanu, C.E., and Blaga, A.M. (2018). Slant and semi-slant submanifolds in metallic Riemannian manifolds. *Journal of Function Spaces*, 2864263, 13 .

10. Hreţcanu, C.E., and Crasmareanu, M. (2007). On some invariant submanifolds in a Riemannian manifold with golden structure. *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Math. (N.S.)*, 53(1), 199-211.

11. Blaga, A.M., and Hretcanu, C.E. (2018). Invariant, anti-invariant and slant submanifolds of a metallic Riemannian manifold. *Novi Sad Journal of Mathematics*, 48(2), 57-82.

12. Poyraz, N.Ö., and Yaşar, E. (2019). Lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 141, 92-104.

13. Poyraz, N.Ö. (2020). Golden GCR-lightlike submanifolds of golden semi-Riemannian manifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 17, 1-16.

14. Yüksel, P.S., Erdoğan, F.E., and Acet B.E. (2020). Lightlike submanifolds of metallic semi-Riemannian manifolds. *Filomat*, 34(6), 1781-1794.

15. Acet, B.E., Erdoğan, F.E., and Perktaş, S.Y. (2022). Half-lightlike submanifolds of

metallic semi-Riemannian manifolds. *International Electronic Journal of Geometry*, 15(2), 202-214.

16. Şahin, B. (2018). Almost poly-Norden manifolds. *International Journal of Maps in Mathematics*, 1(1), 68-79.

17. Yüksel Perktaş, S. (2020). Submanifolds of almost poly-Norden Riemannian manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(1), 31-49.

18. Karaman, Ç., and Topuz, Z. (2020). On holomorphic poly-Norden manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1388-1400.

19. Kılıç, E., Acet, T., and Yüksel Perktaş, S. (2022). Lightlike hypersurfaces of poly-Norden semi-Riemannian manifolds. *Turkish Journal of Science*, 7(1), 21-30.

20. Özkan M., and Doğan S. (2022). Almost bronze structures on differentiable manifolds. *Journal of Mathematics*, vol. 2022, https://doi.org/10.1155/2022/6940387.

21. Turanlı, S., Gezer, A., and Cakıcıoğlu H. (2021). Metallic Kähler and nearly metallic Kähler manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 18(9), 2150146.

22. Lee, J. M. (2002). *Introduction to Smooth Manifolds*. Washington: Springer, 628p.

23. Hacısalihoğlu, H. H. (2000). *Diferensiyel Geometri*, Ankara: Ankara Üniversitesi, 296.

24. Lee, J. M.(2009). *Manifolds and Differential Geometry*. Providence: American Mathematical Society, 671.

25. Hacısalihoğlu, H. H. (2006). *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*. Elazığ: Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 435.

26. Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*. (1. Baskı). Ankara: Nobel Yayın, 294.

27. Renteln, P. (2014). *Manifolds, Tensors, and Forms*. New York: Cambridge University Press, 329.

28. Okubo, T. (1987). *Differential Geometry*. New York: Marcel Dekker Inc, 788.

29. Nomizo, K., and Kobayashi, S. (1993). *Foundations of Differantial Geometry, Vol. 1*. New York: John Wiley & Sons, 329.

30. Yano, K., and Kon M. (1984). *Structures on Manifolds*. World Sci. Publishing Co. Ptc. Ltd., 508.

31. Lee, J. M. (1997). *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. New York: Springer-Verlag, 224.

32. Chen, B. Y. (1973). *Geometry of Submanifolds*. New York: Marcel Dekker, 298.

33. Bejancu, A. (1986). *Geometry of CR Submanifolds*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 169 .

34. Torun, A., and Özkan, M. (2023). Submanifolds of Almost-Complex Metallic Manifolds. *Mathematics*, 11(5), 1172.



Gazili olmak ayrıcalıktır