

KANTOROVICH-STANCU TİP OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

Neslihan KOZAN BAŞAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2010

ANKARA

Neslihan Kozan BAŞAK tarafından hazırlanan KANTOROVICH-STANCU TİP
OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM adlı bu tezin Yüksek Lisans olarak uygun
olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek
Lisans olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

Matematik Bölümü Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

Matematik Bölümü Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Şeyhmus YARDIMCI

Matematik Bölümü, Ankara Üniversitesi

Tarih: 05/02/2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini
onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Neslihan KOZAN BAŞAK

KANTOROVICH-STANCU TİP OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM
(Yüksek Lisans Tezi)

Neslihan KOZAN BAŞAK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2010

ÖZET

Bu tezde Dan Bârbosu tarafından çalışılan Kantorovich-Stancu tip operatörler ile bazı yaklaşım özellikleri verilmiştir. Bundan başka bu operatörlerin süreklilik modülü yardımıyla integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşım hızı üzerine teoremler incelenmiştir.

Bilim Kodu :204.1.095
Anahtar Kelimeler :Yaklaşım teoremleri, Kantorovich-Stancu tip operatörler, süreklilik modülü, yaklaşım hızı
Sayfa Adedi :59
Tez Yöneticisi :Yrd. Doç. Dr. İsmet YÜKSEL

APPROXIMATION BY KANTOROVICH-STANCU TYPE OPERATORS
(M.Sc. Thesis)

Neslihan KOZAN BAŞAK

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

February 2010

ABSTRACT

In this thesis, we investigated some approximation properties of Kantorovich-Stancu type operators studied by Dan Barbosu. Moreover, we studied some theorems on the rate of convergence in terms of the modulus of continuity for integrable functions.

Science Code	:204.1.095
Key Words	:Approximation theorems, Kantorovich-Stancu type operators, modulus of continuity, rate of convergence
Page Number	:59
Adviser	:Assist. Prof. Dr. İsmet YÜKSEL

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında bilgi, ilgi ve yardımlarını esirgemeyen danışmanım Yrd. Doç. Dr. İsmet YÜKSEL'e ve çalışmalarım süresince bana sürekli destek veren eşime ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1.Normlu Uzay.....	4
2.2.Sonlu Aralıklarda Tanımlı Sürekli Fonksiyonlar Uzayı.....	4
2.3.Lineer Pozitif Operatörler.....	9
2.4. $C[a,b]$ uzayında P. P. Korovkin Teoremi.....	20
2.4.1.Weierstrass'ın ilk yaklaşım teoremi.....	20
2.4.2. Weierstrass'ın ikinci yaklaşım teoremi.....	21
3. KANTOROVİCH- STANCU TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM	
ÖZELLİKLERİ.....	27
3.1. Stancu Operatörleri.....	27
3.2. Kantorovich-Stancu Operatörleri Tanım Ve Özellikleri.....	31
3.3.Kantorovich- Stancu Tip Operatörünün Süreklilik Modülüyle Yaklaşım	
Hızının Hesaplanması.....	41
KAYNAKLAR.....	58
ÖZGEÇMİŞ.....	59

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$< a, b >$	$[a, b], [a, b), (a, b], (a, b), (-\infty, \infty), (-\infty, a), (a, \infty)$ aralıklarından biri
$B_n(f, x)$	Bernstein operatörü
$C[a, b]$	$[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$K_n(f, x)$	Kantorvich operatörü
$K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)$	Kantorvich-Stancu operatörü
$\ L\ _{X \rightarrow Y}$	X normlu uzayından Y normlu uzayına dönüşüm yapan L operatörünün normu
$L_1[0, 1]$	$[0, 1]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\max_{x \in [a, b]} f'(x) $	Her $x \in [a, b]$ için $f'(x)$ 'in alacağı en büyük değer
$p_{n,k}(x)$	Bernstein polinomu
$P_n^{(\alpha, \beta)}(f, x)$	Stancu operatörü
X^+	$\{f \in X : f(t) \geq 0\}$
$\omega(f, \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\Rightarrow$	Düzgün yakınsama

1.GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde sonlu kapalı aralık üzerinde sürekli fonksiyonlara lineer pozitif operatör dizileri ile yaklaşım problemi önemli bir yer tutmaktadır. K. Weierstrass [1] sonlu kapalı aralık üzerinde tanımlı sürekli fonksiyona yeterince yakın bir polinom fonksiyonlar dizisi bulunabileceğini ispatlamıştır. Çünkü polinom fonksiyonlar, bilgisayarda direkt olarak hesaplanabileceğinden kullanıma uygundur. Bu özellik itibari ile pek çok matematikçi bu teoreme uygun diziler oluşturmuşlardır. Bu dizilerin oluşturulma tekniği lineer pozitif operatörlerle yaklaşım problemini ortaya çıkartmıştır.

$[2,3]$ ' de S. N. Bernstein, $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar için

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olmak üzere

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1.1)$$

toplamsal operatörler dizisini tanımlamış ve $[0,1]$ aralığında düzgün olarak f fonksiyonuna yaklaştığını göstermiştir. H. Bohman [4] ise ilk önce özel bir lineer pozitif operatörler dizisi tanımlayarak bu dizilerin $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlara yakınsaklık koşulları vermiştir.

Daha sonra D. D. Stancu [5]'de $0 \leq \alpha \leq \beta$ eşitsizliğini sağlayan α ve β reel sayıları için Eş.1.1 ile verilen operatörlerin bir modifikasyonu olan

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) = \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

operatörler dizisini tanımlamış ve $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlara yaklaşım özelliklerini incelemiştir.

S. N. Bernstein operatörleri ile süreksiz fonksiyonlara yaklaşmak uygun olmadığından integrallenebilir fonksiyonlar uzayında Korovkin teoremini incelemek için L. V. Kantorovich [6], Eş.1.1 operatörlerinden daha genel bir operatörler dizisi tanımlamıştır. Bu operatörler

$$K_n(f, x) = (n+1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(s) ds \quad (1.2)$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Daha sonra D. Bârbosu [7] Eş.1.2 de verilen operatörlerden daha genel olan Kantorovich – Stancu tip operatörleri çalışmıştır. Bu operatörler;

$$f \in L_1[0,1], \quad n \in \mathbb{N} \text{ olmak üzere,}$$

$$K_n^{(\alpha, \beta)} : L_1[0,1] \rightarrow C[0,1]$$

$$K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) = (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} f(s) ds$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bu tez giriş bölümü birinci bölüm olmak üzere toplam üç bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde temel kavram ve teoremler tanıtılmıştır. Buna bağlı olarak fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı lineer pozitif operatörler ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca $C[a, b]$ uzayında düzgün yakınsama tanımı ve Korovkin teoremi ifadesi ve ispatı verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Kantorovich–Stancu operatörler dizisinin $[0, 1]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşım özellikleri verilmiştir. Süreklilik modülü yardımıyla $[0, 1]$ aralığında tanımlı integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşım hızı üzerine teoremler incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Normlu Uzay

2.1. Tanım

X bir lineer uzayı olsun.

$$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

fonksiyonu tanımlansın.

$$N1) \|x\| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$$

$$N2) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$N3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartları sağlanıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna X üzerinde norm ve $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine ise normlu uzay denir [8].

2.2. Sonlu Aralıklarda Tanımlı Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

2.2. Tanım

$[a, b]$ kapalı, sonlu aralığında tanımlı ve reel değerli sürekli fonksiyonların kümesini

$C[a, b]$ ile gösterelim. $C[a, b]$ kümesi,

$$i) (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$ii) \lambda \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere}$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

işlemleri ile bir lineer uzaydır.

$[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli bir f fonksiyonu Weierstrass teoremine göre maksimum ve minimum değerleri yine $[a, b]$ aralığı üzerinde alır. $C[a, b]$ üzerinde norm

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Bu norma göre $C[a, b]$ uzayı Tanım 2.1'deki N1, N2 ve N3 şartlarını sağlar.

$$N1) \|f\| = 0 \Leftrightarrow \|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \text{ için } |f(x)| = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \text{ için } f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow f = \theta$$

$$N2) \|\alpha f\| = \max_{a \leq x \leq b} |\alpha f(x)|$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} |\alpha| |f(x)|$$

$$= |\alpha| \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

$$= |\alpha| \|f\|$$

$$N3) \|f + g\| = \max_{a \leq x \leq b} |(f + g)(x)|$$

$$= \max_{a \leq x \leq b} |f(x) + g(x)|$$

$$\leq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |g(x)|$$

$$\leq \|f\| + \|g\|$$

şeklinde gösterilmiş olur. O halde $(C[a, b], \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır.

2.3. Tanım

(f_n) , $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\forall x \in [a, b]$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde ε 'na bağlı bir n_0 doğal sayısı bulunabiliyorsa (f_n) dizisine $[a, b]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir.

2.1. Teorem

$\forall x \in [a, b]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ olsun ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $M_n = \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)|$ yazılsın. Bu takdirde f_n fonksiyonlar dizisinin $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak f fonksiyonuna yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ olmasıdır. Yani (M_n) bir sıfır dizisidir ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ doğal sayısı vardır ki $\forall n \geq n_0$ için $0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq M_n \leq \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

İspat

f_n fonksiyon dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsasın. O halde; herhangi bir

$\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda $\forall x \in [a, b]$ için $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir n_0

sayısı vardır. Bu durumda $n \geq n_0$ için $\sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ olur.

$M_n = \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)|$ olduğunda $|M_n| = M_n < \varepsilon$ olur. Buradan anlaşılır ki,

$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ ' dir.

Karşıt olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ alınsın. $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$ olduğundan $n \geq n_0$ olduğunda $M_n < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı vardır. $n \geq n_0$ olduğunda $\sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olur.

$n \geq n_0$ olduğunda $\forall x \in [a, b]$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olur. Buradan da f_n fonksiyon dizisi $[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün olarak f fonksiyonuna yakınsar.

2.1. Örnek

$f_n(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right)^2$ biçiminde tanımlanan f_n dizisi $[-1, 1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

Çözüm

$\forall x \in [-1, 1]$ için (f_n) dizisi $f(x) = x^2$ eşitliği ile verilen f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Şöyle ki;

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 - x^2 \right| \\ &= \left| \frac{1}{n^2} - \frac{2x}{n} \right| \\ &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{|2x|}{n} \\ &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \\ &\leq \frac{3}{n} \end{aligned}$$

olur ki burada, $\left(\frac{3}{n}\right)$ bir sıfır dizisidir. O halde;

$$\sup_{-1 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = M_n \leq \frac{3}{n}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan da (M_n) dizisi bir sıfır dizisi olup Teorem 2.1'den

f_n dizisi $[-1,1]$ aralığında $f(x) = x^2$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

2.2. Örnek

$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^3 x^2}$ biçiminde tanımlanan f_n dizisi $[0,1]$ aralığındaki her bir x için düzgün yakınsak değildir.

Şöyle ki;

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 x}{1+n^3 x^2} = 0$ dır. Yani f_n dizisi $f = 0$ fonksiyonuna yakınsar. Bu yakınsamanın düzgün olup olmadığına bakılırsa;

$$M_n = \max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = \frac{n^2 x}{1+n^3 x^2}, \text{ dir.}$$

Maksimum değeri türev ile bulalım.

$$f'_n(x) = \frac{n^2(1-n^3 x^2)}{(1+n^3 x^2)^2} = 0 \text{ ise; } x_n = n^{-\frac{3}{2}} \text{ bulunur. Buradan;}$$

$$f_n(0) = 0, f_n(1) = \frac{n^2}{1+n^3} \text{ ve}$$

$$f_n(x_n) = f_n\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{n^2 \cdot n^{-\frac{3}{2}}}{1+n^3 n^{-3}} = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

olacağından;

$$M_n = \frac{\sqrt{n}}{2}, \text{ dir.}$$

(M_n) dizisi bir sıfır dizisi değildir. O halde Teorem 2.1'e göre bu yakınsama düzgün değildir.

$C[a, b]$ uzayında tanımlanan maksimum norma göre $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ ile (f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna $[a, b]$ kümesi üzerinde düzgün yakınsaması aynı şeyi belirtir.

2.3. Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y normlu fonksiyon uzayları olmak üzere X 'den alınan her f fonksiyonuna Y 'de bir g fonksiyonunu karşılık getiren bir L kuralı varsa, bu L kuralına X 'den Y 'ye bir operatör denir. $f \in X$, $g \in Y$ ve x g 'nin tanım kümesine ait olmak üzere;

$$L(f)(x) = L(f, x) = g(x)$$

ya da daha açık biçimde ifade edilecek olursa; f 'nin x , g 'nin tanım kümesine ait olmak üzere;

$$L(f(t), x) = g(x)$$

biçiminde gösterilir.

X uzayına L operatörünün tanım bölgesi denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. $L(f, x) = g(x)$ ise Y uzayının bir elemanı olup bu şekildeki g fonksiyonlarının kümesine L operatörünün değerler kümesi denir ve $R(L)$ ile gösterilir. $R(L) \subset Y$ dir.

Bu kısımdaki tanımlarda X ve Y normlu fonksiyon uzayları ve L ise X üzerinde bir lineer operatör tanımlanır.

2.4. Tanım

$L: X \rightarrow Y$ bir operatör ve $x \in D_g$ olsun. L operatörü için;

$$i) \forall f_1, f_2 \in X \text{ için } L(f_1 + f_2, x) = L(f_1, x) + L(f_2, x)$$

$$ii) \forall c \in \mathbb{R} \text{ için } L(cf, x) = cL(f, x)$$

şeklinde verilen şartlar sağlanıyorsa, L operatörüne lineer operatör adı verilir. Bu şartlar aşağıdaki gibi birleştirilebilir.

$$L(c_1f_1 + c_2f_2, x) = c_1L(f_1, x) + c_2L(f_2, x)$$

Bu tanımdan görülür ki; L operatörü için

$$L(0; x) = L(0.f, x) = 0L(f, x) = 0$$

sağlanır[9].

2.5. Tanım

X ve Y iki lineer fonksiyon uzayı olmak üzere; $L : X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun.

$$X^+ = \{f \in X : \forall t \in D_f \text{ için } f(t) \geq 0\} \text{ ve } Y^+ = \{g \in Y : \forall x \in D_g \text{ için } g(x) \geq 0\}$$

şeklinde tanımlansın. X uzayı üzerinde tanımlanmış olan L lineer operatörü, X^+ kümesindeki her bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyonlardan oluşmuş olan Y^+ kümesindeki herhangi bir fonksiyona dönüştürüyorsa bu L operatörüne lineer pozitif operatör denir. L lineer operatörü için $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani, L lineer pozitif operatör ise $\forall t \in D_f$ için $f(t) \geq 0$ olduğunda $\forall x \in D_g$ için $L(f, x) \geq 0$ olur.

2.1. Uyarı

L lineer pozitif operatörü her bir $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) < 0$ şartını sağlayan fonksiyonları yine aynı şekilde negatif değerli fonksiyonlara dönüştürür. Şöyle ki her bir $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) < 0$ dır. Buradan $-f(x) > 0$ olur. L lineer pozitif operatör olduğundan her bir $x \in \mathbb{R}$ için;

$$0 \leq L(-f, x) = -L(f, x)$$

yazılabilir.

Yani $x \in \mathbb{R}$ için $L(f, x) < 0$ elde edilir.

2.1. Önerme

X ve Y iki lineer fonksiyon uzayı olmak üzere; $L : X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatör olsun. $f, g \in X$ olmak üzere her bir $t \in D_f$ için $f(t) \leq g(t)$ iken $\forall x \in D_g$ için $L(f, x) \leq L(g, x)$ 'tir.

İspat

Her bir $t \in D_f$ için $f(t) \leq g(t)$ ise;

$$0 \leq g(t) - f(t)$$

olur.

Buradan $0 \leq (g - f)(t)$ yazılır.

L lineer pozitif operatör olduğu için, Tanım 2.5'ten

$$0 \leq L(g - f, x)$$

olur.

Bu eşitsizlikte Tanım 2.4 kullanırsa,

$$0 \leq L(g, x) - L(f, x)$$

olur. Buradan

$$L(f, x) \leq L(g, x)$$

yazılır.

2.2. Önerme

$L : X \rightarrow Y$ lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda;

$$|L(f, x)| \leq L(|f|, x)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

Her bir $t \in D_f$ için aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ eşitsizliğine L operatörü uygulansın. Lineer pozitif operatörler monotonluk özelliğini sağladığından

$$L(-|f(t)|, x) \leq L(f(t), x) \leq L(|f(t)|, x)$$

eşitsizliği oluşur. L lineer olduğundan

$$-L(|f(t)|, x) \leq L(f(t), x) \leq L(|f(t)|, x)$$

bulunur. Buradan ise

$$|L(f(t), x)| \leq L(|f(t)|, x)$$

ifadesine ulaşılmış olur.

2.3. Örnek

$f \in C[0, 1]$ ve $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ olmak üzere, $0 \leq x \leq 1$ aralığındaki her bir x için

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

ile tanımlanan Bernstein polinomu her bir n için, $x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan bir lineer pozitif operatördür.

2.4. Örnek

f fonksiyonu $[0, \infty)$ ' da tanımlı reel değerli olsun. Her bir $x \geq 0$ için,

$$Z_n(f, x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

şeklinde tanımlı Szasz operatörü her bir n için açıkça görülür ki lineer pozitif operatördür.

2.5. Örnek

$f \in C[0, A)$ ve $A > 0$ için

$$A_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}$$

şeklinde tanımlanan Baskakov operatörü her bir n için lineer pozitif operatördür.

2.3. Önerme

(c_k) reel sayıların bir dizisi ve f, p_k ($k \in \mathbb{N}$) reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar olmak üzere;

$$L(f, x) = \sum_{k=0}^n f(c_k) p_k(x)$$

şeklinde tanımlanan L operatörü lineerdir. L operatörünün pozitif olması için gerek ve yeter şart her x ve k için $p_k(x) \geq 0$ olmasıdır.

İspat

L operatörünün lineerliği açıktır.

L operatörü pozitif operatör ve kabul edilsin ki en az bir k_0 için $p_{k_0} < 0$

Buna göre,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq c_{k_0} \\ 1, & x = c_{k_0} \end{cases}$$

şeklinde pozitif $f(x)$ fonksiyonu tanımlanır.

$$\begin{aligned} L(f, x) &= \sum_{k=0}^n f(c_k) p_k(x) \\ &= f(c_{k_0}) p_{k_0}(x) \\ &= p_{k_0}(x) < 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durum ise L operatörünün pozitif olması ile çelişir. O halde her x, k için $p_{k_0}(x) \geq 0$ olmalıdır.

Önermenin diğer tarafına bakılırsa, her x, k için $p_k(x) \geq 0$ ve $f \geq 0$ olsun. Buna göre $p_k(x) f(x) \geq 0$ olur. L 'nin tanımından;

$$L(f, x) = \sum_{k=0}^n f(c_k) p_k(x) \geq 0$$

yazılabilir. Bu da L 'nin pozitif olması ile aynı anlama gelir.

2.4. Önerme

$$K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A_1 : L[a, b] \rightarrow C[a, b]$$

olmak üzere;

$$A_1(f, x) = \int_a^b f(t) K(t, x) dt$$

şeklinde tanımlanan A_1 operatörünün pozitif olması için gerek ve yeter şart $K(t, x)$ ile ifade edilen operatörün çekirdeğinin pozitif olmasıdır.

İspat

A_1 operatörünün lineer olduğu açıktır. A_1 operatörü pozitif olsun ve kabul edilsin ki en az bir t_0 için $K(t, x) < 0$ olsun. Operatörün K çekirdeği sürekli olduğundan t_0 'ı içeren bir $[m, n] \subset [a, b]$ aralığı vardır ki; her $t \in [m, n]$ için $K(t, x) < 0$ olur. O halde;

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b] \setminus [m, n] \\ 1, & x \in [m, n] \end{cases}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanan f fonksiyonu için $f \geq 0$ olduğu açıktır. Fakat,

$$A_1(f, x) = \int_m^n K(t, x) dt < 0$$

olur. Bu durum ise A_1 operatörünün pozitif olması ile çelişir. O halde her t, x için $K(t, x) \geq 0$ olmalıdır.

Tersine her t, x için $K(t, x) \geq 0$ olduğunu kabul edilsin ve $f \geq 0$ alınsın A_1 operatörünün tanımından

$$A_1(f, x) = \int_a^b f(t) K(t, x) dt > 0$$

elde edilir. Bu durum ise A_1 'in lineer pozitif operatör olduğunu gösterir.

2.6. Tanım

X ve Y normlu fonksiyon uzayları ve $L: X \rightarrow Y$ bir lineer operatör olsun. $D(L) \subset X$, L 'nin tanım kümesi olmak üzere, her $f \in D(L)$ için;

$$\|L(f, x)\|_Y \leq M \|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan bir $M > 0$ reel sayısı varsa L operatörüne $D(L)$ ' de sınırlı operatör denir[9].

Ayrıca,

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \inf \{M : \|L(f, x)\|_Y \leq M \|f\|_X\}$$

sayısına L operatörünün normu denir.

Bundan sonraki önerme ve sonuçlarda X ve Y normlu uzaylar olarak alınacaktır.

2.2. Teorem

X, Y normlu fonksiyon uzayları $L : X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda L operatörü için sınırlılık ve süreklilik birbirine denk ifadelerdir.

2.5. Önerme

$L : X \rightarrow Y$ sınırlı lineer operatörü için,

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

L sınırlı lineer operatör ise;

$\|L(f, x)\|_Y \leq M \|f\|_X$ eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ vardır. Buna göre,

$$\frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X} \leq M \quad (\|f\|_X \neq 0)$$

olur. Her bir $x \in X$ için yukarıdaki eşitsizlik sağlanır. O halde;

$$\left\{ \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X} : \|f\|_X \neq 0 \right\} \leq M$$

yazılabilir. Supremum tanımına göre,

$$\sup \left\{ \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X} : \|f\|_X \neq 0 \right\} \leq M$$

dir. Her bir $M > 0$ için sağlandığına göre,

$$\sup \left\{ \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X} : \|f\|_X \neq 0 \right\} \leq \inf \{ M > 0 : \|L(f, x)\|_Y \leq \|f\|_X M \}$$

$\|L\|_{X \rightarrow Y}$ tanımından ise

$$\sup \left\{ \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X} : \|f\|_X \neq 0 \right\} \leq \|L\|_{X \rightarrow Y} \quad (2.1)$$

bulunur. Diğer yandan infimum tanımından her $\varepsilon > 0$ için en az bir $f_\varepsilon \in X$ vardır.

Öyle ki;

$$\|L(f_\varepsilon, x)\|_Y \geq (\|L\|_{X \rightarrow Y} - \varepsilon) \|f_\varepsilon\|_X$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan ise $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{\|L(f_\varepsilon, x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X \rightarrow Y} - \varepsilon$$

olur. Burada supremum tanımı kullanılırsa

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X} \geq \frac{\|L(f_\varepsilon, x)\|_Y}{\|f_\varepsilon\|_X} \geq \|L\|_{X \rightarrow Y} - \varepsilon$$

olur. Sol taraf ε 'a bağlı değildir. O halde; $\varepsilon \rightarrow 0$ için eşitsizlik bozulmaz. Buradan ise

$$\sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X} \geq \|L\|_{X \rightarrow Y} \quad (2.2)$$

eşitsizliği elde edilir.

O halde Eş.2.1 ve Eş.2.2'den,

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X}$$

sonucu bulunur.

2.1. Sonuç

$L : X \rightarrow Y$ sınırlı lineer operatörü için,

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|f\|_X = 1} \|L(f, x)\|_Y$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat

Önerme 2.5, Tanım 2.1 ve Tanım 2.4'ü kullanarak

$$\begin{aligned} \|L\|_{X \rightarrow Y} &= \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X} \\ &= \sup_{\|f\|_X \neq 0} \left\| \frac{1}{\|f\|_X} L(f, x) \right\|_Y \\ &= \sup_{\|f\|_X \neq 0} \left\| L\left(\frac{f}{\|f\|_X}, x\right) \right\|_Y \end{aligned}$$

olur.

$$\frac{f}{\|f\|_X} = g(x) \text{ alınırsa, } \|g(x)\| = 1 \text{ olur.}$$

Buna göre;

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|g\|_X=1} \|L(g, x)\|_Y$$

olur.

2.6. Önerme

$L: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ lineer pozitif operatör olsun. L operatörü f 'nin $[a, b]$ aralığının dışındaki değerlerden bağımsız ise, bu durumda

$$\|L\|_{C[a, b] \rightarrow C[a, b]} = \|L(1, x)\|_{C[a, b]}$$

olur.

İspat

$f \in C[a, b]$ olsun, $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ise her $x \in [a, b]$ için $|f(x)| \leq \|f\|$ ve Önerme

2.2.'den $|L(f, x)| \leq L(|f|, x)$ yazılır. Buradan ise,

$$|L(f, x)| \leq L(|f|, x) \leq L(\|f\|, x) \leq \|f\| L(1, x)$$

eşitsizliği elde edilir.

Eşitsizliğin her iki tarafının maksimumu alınırsa;

$$\|L(f, x)\| \leq \|L(1, x)\| \|f\|$$

olur. Buradan da

$$\sup_{\|f\|=1} \|L(f, x)\| \leq \|L(1, x)\| \tag{2.3}$$

yazılır.

Sonuç 2.1.'den,

$$\|L\|_{C[a, b] \rightarrow C[a, b]} = \sup_{\|f\|=1} \|L(f, x)\| \leq \|L(1, x)\|$$

olur. O halde

$$\|L\|_{C[a,b] \rightarrow C[a,b]} \leq \|L(1,x)\|$$

eşitsizliği yazılır.

Her $f \in C[a,b]$ ve her $x \in [a,b]$ için,

$$\sup_{\|f\|=1} \|L(f,x)\| \geq \|L(1,x)\| \quad (2.4)$$

olduğu açıktır. Eş.2.3 ve Eş.2.4'ten,

$$\|L\|_{C[a,b] \rightarrow C[a,b]} = \|L(1,x)\|_{C[a,b]}$$

elde edilir.

2.4 $C[a,b]$ Uzayında P.P. Korovkin Teoremi

Yaklaşım Teorisinin amacı herhangi bir fonksiyonun daha kullanışlı olan farklı bir fonksiyon türünden gösterimini elde etmektir. Böyle bir gösterim fonksiyon hakkında daha rahat bir bilgi elde etmemizi sağlar.

1885 yılında Weierstrass $[a,b]$ aralığındaki sürekli her “ f ” fonksiyonuna bir polinomla yaklaşabileceğini söylemiştir.

2.4.1. Weierstrass’ ın ilk yaklaşım teoremi

$\forall \varepsilon > 0$ ve $f(x) \in C[a,b]$ için öyle bir $p(x)$ polinomu vardır ki; $[a,b]$ aralığındaki her x için $|p(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Farklı şekilde ifade edilirse $[a,b]$ aralığında sürekli her “ f ” fonksiyonu için $f(x)$ ’e $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsayan bir $(p_n(x))$ polinom dizisi vardır[1,10].

Bu teoremin birçok ispatı vardır. Bu ispatlardan birini de 1912 yılında S.N.Bernstein [2,3] yaparak lineer pozitif operatörler ile yaklaşım teorisinde önem arz eden Bernstein polinomlarını tanımlamıştır.

2.4.2. Weierstrass'ın ikinci yaklaşım teoremi

Bu teoremden periyodik ve sürekli fonksiyonlara yaklaşan trigonometrik polinomların bulunabileceği anlatılmıştır.

“ $f(x)$ ”, 2π periyotlu sürekli bir fonksiyon ve $\varepsilon > 0$ ise öyle bir $T(x)$ trigonometrik polinomu vardır ki “ x ” in tüm reel değerleri için $|T(x) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır[1].

Bu teoremin ispatı De –La Valle Poussin tarafından 1908 yılında yapılmıştır.

1952 yılında H. Bohman [4,9] toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığındaki sürekli olan f fonksiyonuna yaklaşması problemini incelemiştir. H. Bohman göstermiştir ki ; $x \in [0,1]$, $0 \leq \alpha_{k,n} \leq 1$ ve $k < r$ için $\alpha_{k,n} \leq \alpha_{r,n}$ olduğunda;

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f(\alpha_{k,n}) p_{k,n}(x), \quad p_{k,n}(x) \geq 0$$

pozitif operatörler dizisinin $n \rightarrow \infty$ için $[0,1]$ aralığında sürekli $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşullar;

$$L_n(1, x) \rightarrow 1 \tag{2.5}$$

$$L_n(t, x) \rightarrow x \tag{2.6}$$

$$L_n(t^2, x) \rightarrow x^2 \tag{2.7}$$

şeklinde ifade edilir. $\vec{\rightarrow}$ gösterimi düzgün yakınsamayı ifade etmektedir. H. Bohman operatörlerinin değeri $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığındaki değerlerden bağımsızdır.

1953 yılında P. P. Korovkin[10], H. Bohman'ın teoremini daha genel bir halde vermiştir.

2.5. Teorem (Korovkin teoremi)

L_n lineer pozitif operatörler dizisi $[a,b]$ aralığındaki her bir $a \leq x \leq b$ için Eş.2.5, Eş.2.6 ve Eş.2.7 şartları sağlansın. O takdirde $C[a,b]$ uzayında olan, ayrıca a' da soldan b' ye sağdan sürekli bulunan ve tüm reel ekseninde sınırlı herhangi bir “ f ” fonksiyonu için n sonsuza gittiğinde;

$$L_n(f;x) \xrightarrow{\vec{\rightarrow}} f(x)$$

olur[9].

İspat

f fonksiyonu tüm reel ekseninde sınırlı olduğu için en azından bir K pozitif sayısı vardır, öyle ki tüm x 'ler için;

$$f(x) < K \text{ olur.} \quad (2.8)$$

$f \in C[a,b]$ olduğundan $\varepsilon > 0$ için en azından bir $\delta > 0$ sayısı bulabiliriz ki ;

$$t \in (-\infty, \infty) \text{ ve}$$

$$x \in [a,b] \text{ için } |t-x| < \delta \text{ iken;}$$

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \quad (2.9)$$

sağlanır.

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olduğundan $x, t \in [a, b]$ için Eş.2.9 sağlanır. Eğer $x \in [a, b]$ ve $t \notin [a, b]$ olduğunda ise Eş.2.9 sağlanır. Çünkü f fonksiyonu a' da soldan , b' de sağdan süreklidir.

Eş.2.8 ve Eş.2.9'dan dolayı tüm $t \in (-\infty, \infty)$ ve $x \in [a, b]$ için;

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2}(t-x)^2 \quad (2.10)$$

Eş.2.10 gerçekleşir. Şöyle ki;

Eğer, $|t-x| \geq \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta} \geq 1$ dir.

Bu durumda; $\frac{|t-x|}{\delta} \leq \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$

olur. Ayrıca,

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1 \text{ ve } \frac{2K(t-x)}{\delta^2} \geq 2K \text{ 'dır.}$$

dolayısıyla,

$$|f(t) - f(x)| \leq 2K \leq \frac{2K}{\delta^2}(t-x)^2$$

olur. Bu ifade Eş.2.9 ile birleştirilirse Eş.2.10 elde edilir.

Eğer ; $|t-x| \leq \delta$ ise $\frac{2K}{\delta^2}(t-x)^2$ olur. Ayrıca f tüm reel ekseninde sınırlı olduğundan

$|f(t)| \leq K$ ve $|f(x)| \leq K$ 'dır. O halde,

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\ &\leq \frac{2K}{\delta^2}(t-x)^2 \\ &< \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2}(t-x)^2 \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
 \|L_n(f(t) - f(x), x) + f(x)L_n(1, x) - f(x)\| &\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|, x)\| \\
 &\quad + \|f(x)(L_n(1, x) - 1)\| \\
 &\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|, x)\| \\
 &\quad + \|f(x)\| \|L_n(1, x) - 1\| \\
 &\leq \|L_n(|f(t) - f(x)|, x)\| \\
 &\quad + \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \|L_n(1, x) - 1\|
 \end{aligned}$$

olur.

Bu eşitsizlikte $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(1, x) = 1$ olduğundan eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci ifade 0'a yakınsar. Yani $\varepsilon_n \rightarrow 0$ için $\|f\| \|L_n(1, x) - 1\| \leq \varepsilon_n$ olur.

O halde,

$$\|L_n(f, x) - f(x)\| \leq \|L_n(|f(t) - f(x)|, x)\| + \varepsilon_n \quad (2.11)$$

elde edilir.

Şimdi bu eşitsizliğin ikinci tarafına bakalım. Eş.2.10'e L_n operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 L_n(|f(t) - f(x)|, x) &\leq L_n(\varepsilon 1, x) + L_n\left(\frac{2K}{\delta^2}(t-x)^2, x\right) \\
 &\leq \varepsilon L_n(1, x) + \frac{2K}{\delta^2} L_n((t-x)^2, x) \\
 &\leq \varepsilon [L_n(1, x) - 1] + \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} [L_n(t^2, x) - 2xL_n(t, x) + x^2L_n(1, x)] \\
 &\leq \varepsilon [L_n(1, x) - 1] + \varepsilon \\
 &\quad + \frac{2K}{\delta^2} \{ [L_n(t^2, x) - x^2] - 2x[L_n(t, x) - x] + x^2[L_n(1, x) - 1] \}
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

olur.

Eş.2.12'te her iki tarafın normu alınır

$$\begin{aligned} \|L_n(|f(t) - f(x)|, x)\| \leq & \left\{ \varepsilon [L_n(1, x) - 1] + \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \|L_n(t^2, x) - x^2\| \right. \\ & \left. + 2 \max_{a \leq x \leq b} |x| \|L_n(t, x) - x\| + \max_{a \leq x \leq b} |x|^2 \|L_n(1, x) - 1\| \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

olur. Bu ifadede yer alan $2 \max_{a \leq x \leq b} |x| = 2b$ ve $\max_{a \leq x \leq b} |x|^2 = b^2$ dir.

Bu sonuçlar Eş.2.13'te yazıldığında,

$$\begin{aligned} \|L_n(|f(t) - f(x)|, x)\| \leq & \left\{ \varepsilon [L_n(1, x) - 1] + \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} \|L_n(t^2, x) - x^2\| \right. \\ & \left. + 2b \|L_n(t, x) - x\| + b^2 \|L_n(1, x) - 1\| \right\} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca Eş.2.5, Eş.2.6 ve Eş.2.7 koşullarından dolayı $n \rightarrow \infty$ olduğunda,

$$\|L_n(|f(t) - f(x)|, x)\| \rightarrow 0$$

olur.

O halde Eş.2.11'den de yararlanırsa $n \rightarrow \infty$ için,

$$\|L_n(f, x) - f(x)\| \rightarrow 0$$

olduğu görülür.

2.2. Sonuç

Eğer L_n lineer pozitif operatörler dizisi $[a, b]$ aralığında

$$L_n(1, x) \xrightarrow{\rightarrow} 1$$

$$L_n((t-x)^2, x) \xrightarrow{\rightarrow} 0$$

koşulları sağlanıyorsa o takdirde $C[a, b]$ uzayında olan ve tüm reel ekseninde sınırlı herhangi bir f fonksiyonu ve $a \leq x \leq b$ için,

$$L_n(f, x) \xrightarrow{\rightarrow} f(x)$$

olur [9, 10, 11].

3.KANTOROVİCH-STANCU TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Kantorovich-Stancu tip operatör ele alınacaktır. İlk kısımda Stancu operatörlerinin tanımı ve bazı özellikleri verilecektir. Daha sonraki kısımlarda ise Kantorovich-Stancu operatörlerinin yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı verilecektir.

3.1. Stancu Operatörleri

$n \in \mathbb{N}$, α ve β reel sayıları $0 \leq \alpha \leq \beta$ eşitsizliğini sağlamak üzere

$$P_n^{(\alpha, \beta)} : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) = \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlı $P_n^{(\alpha, \beta)}$ operatörüne “Stancu operatörleri” denir. Bu operatörler D. D. Stancu tarafından tanımlanmıştır[10]. $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ durumunda Eş.1.1’de tanımlanan Bernstein operatörlerine indirgenir[2,3]. Burada

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (3.2)$$

ile ifade edilen Eş.3.2’ye “Bernstein Taban Elemanı” denir.

Şimdi Korovkin test fonksiyonları için aşağıdaki Lemmayı verelim.

3.1. Lemma

$e_k(s) = s^k$, $k = 0, 1, 2$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır [5].

$$i) P_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) = 1 \quad (3.3)$$

$$ii) P_n^{(\alpha, \beta)}(e_1, x) = \frac{n}{n+\beta} x + \frac{\alpha}{n+\beta} \quad (3.4)$$

$$iii) P_n^{(\alpha, \beta)}(e_2, x) = \frac{1}{(n + \beta)^2} [n(n-1)x^2 + (1 + 2\alpha)nx + \alpha^2] \quad (3.5)$$

İspat

i) Eş.3.1’de $f(s) = e_0(s) = 1$ alınır ve binom eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) &= \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= (x + 1 - x)^n \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $f(s) = e_1(s) = s$ alınırsa,

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(e_1, x) &= \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) f\left(\frac{k + \alpha}{n + \beta}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k + \alpha}{n + \beta}\right) p_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(\frac{k + \alpha}{n + \beta}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k + \alpha}{n + \beta}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n + \beta} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{\alpha}{n + \beta} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n + \beta} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + P_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) \end{aligned} \quad (3.6)$$

olur. Eş.3.6’nın ikinci tarafındaki ilk toplamı hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Eş.3.7’de k yerine $k+1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k x (1-x)^{n-k-1} \\
&= nx \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= nx (x+1-x)^{n-1} \\
&= nx
\end{aligned} \tag{3.8}$$

olur. Eş.3.6’da, Eş.3.8 ve Eş.3.3 yerlerine yazılırsa Eş.3.4 elde edilir.

iii) $f(s) = e_2(s) = s^2$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
P_n^{(\alpha, \beta)}(e_2, x) &= \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)^2 p_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\frac{k^2 + 2k\alpha + \alpha^2}{(n+\beta)^2} \right] p_{n,k}(x) \\
&= \frac{1}{(n+\beta)^2} \sum_{k=0}^n k^2 p_{n,k}(x) + \frac{2\alpha}{(n+\beta)^2} \sum_{k=0}^n k p_{n,k}(x) + \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2} \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(n+\beta)^2} \sum_{k=0}^n k^2 p_{n,k}(x) + \frac{2\alpha}{(n+\beta)^2} P_n^{(\alpha,\beta)}(e_1, x) + \frac{\alpha^2}{(n+\beta)^2} P_n^{(\alpha,\beta)}(e_0, x) \quad (3.9)$$

olur. Eş.3.9'daki ilk toplamı $k^2 = k(k-1) + k$ eşitliğini kullanarak bulalım.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 p_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^n [k(k-1) + k] p_{n,k}(x) \\ &= \left[\sum_{k=0}^n k(k-1) p_{n,k}(x) + \sum_{k=0}^n k p_{n,k}(x) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} k(k-1) + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned} \quad (3.10)$$

olur.

Eş.3.10'un ikinci tarafındaki ilk terimde k yerine $k+2$ ve ikinci terimde k yerine $k+1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 p_{n,k}(x) &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n(n-1)(n-2)!}{k!(n-2-k)!} x^{k+2} (1-x)^{n-k-2} \\ &\quad + n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^{k+1} (1-x)^{n-k-1} \\ &= n(n-1)x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{n-2-k} + nx \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= n(n-1)x^2 (x+1-x)^{n-2} + nx(x+1-x)^{n-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

olur. Eş.3.11, Eş.3.8 ve Eş.3.3, Eş.3.9'da yerine yazılırsa Eş.3.5 elde edilir.

3.2. Kantorovich-Stancu Operatörleri Tanım ve Özellikleri

1930 yılında L.V. Kantorovich [6], Eş.1.1’de verilen Bernstein operatörlerinin genelleştirmesini tanımlayarak Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşımı çalıştı. Bu operatörler aşağıdaki gibi elde edilir.

$f \in L_1[0,1]$, $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlanan Bernstein operatöründen aşağıdaki işlemlerle devam edilirse,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_n(f, x) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \left[kx^{k-1} (1-x)^{n-k} - (n-k)x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n!}{(n-k)!k!} kx^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n!}{(n-k)!k!} (n-k)x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n!}{(n-1-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} x^k (1-x)^{n-k-1} - n \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] p_{n-1,k}(x) \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(s) p_{n-1,k}(s) ds \end{aligned}$$

olur.

Buna göre , $n \in \mathbb{N}$, $f \in L_1[0,1]$ ve $x \in [0,1]$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlanan n . Kantorovich Operatörü,

$$K_n : L_1[0,1] \rightarrow C[0,1]$$

$$K_n(f, x) = (n+1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(s) ds$$

elde edilir.

D. Bârbosu [7]’de Stancu operatörlerinin genelleştirilmesini çalışmıştır. Bu operatörler,

$$f \in L_1[0,1] , n \in \mathbb{N} \text{ olmak üzere,}$$

$$K_n^{(\alpha, \beta)} : L_1[0,1] \rightarrow C[0,1]$$

$$K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) = (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} f(s) ds \quad (3.12)$$

biçiminde verilerek literatürde Kantorovich-Stancu tipi operatör adını almıştır.

Eş.3.12 ile verilen operatörlerde $\alpha = \beta = 0$ alınırsa Eş.1.2’deki Kantorovich operatörü elde edilir.

3.2. Lemma

$f \in L_1[0,1]$ olsun. Bu durumda Eş.3.12 ile tanımlı Kantorovich-Stancu operatörü lineer pozitifdir.

İspat

f pozitif fonksiyon olsun her bir $s \in [0,1]$ için $f(s) \geq 0$ olsun.

Bu durumda,

$$\int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} f(s) ds \geq 0$$

olur.

Ayrıca,

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0 \text{ olduğundan } K_n^{(\alpha,\beta)}(f, x) \geq 0$$

olur.

Şimdi ise $K_n^{(\alpha,\beta)}(f, x)$ operatörünün lineer olduğunu gösterelim.

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in L_1[0,1]$ olmak üzere,

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(c_1 f + c_2 g, x) = (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} (c_1 f(s) + c_2 g(s)) ds$$

$$= (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \left[\int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} c_1 f(s) ds + \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} c_2 g(s) ds \right]$$

olur.

İntegralin lineerliğinden,

$$\begin{aligned}
K_n^{(\alpha, \beta)}(c_1 f + c_2 g, x) &= (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} c_1 f(s) ds \\
&\quad + (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} c_2 g(s) ds \\
&= c_1 (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} f(s) ds \\
&\quad + c_2 (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} g(s) ds \\
&= c_1 K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) + c_2 K_n^{(\alpha, \beta)}(g, x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $K_n^{(\alpha, \beta)}$ operatörü hem pozitif hem de lineer operatördür.

3.3. Lemma

Eş.3.12 ile tanımlı operatör her $x \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$i) K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) = 1 \quad (3.13)$$

$$ii) K_n^{(\alpha, \beta)}(e_1, x) = \frac{n}{(n + \beta + 1)} x + \frac{\alpha}{(n + \beta + 1)} + \frac{1}{2(n + \beta + 1)} \quad (3.14)$$

$$iii) K_n^{(\alpha, \beta)}(e_2, x) = \frac{n(n-1)}{(n + \beta + 1)^2} x^2 + \frac{2(1 + \alpha)n}{(n + \beta + 1)^2} x + \frac{\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3}}{(n + \beta + 1)^2} \quad (3.15)$$

İspat

i) Eş.3.13 için $e_0(s) = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) &= (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} e_0(s) ds \\
&= (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} 1 ds \\
&= (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} s \Big|_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} \\
&= (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left[\frac{k + \alpha + 1}{n + \beta + 1} - \frac{k + \alpha}{n + \beta + 1} \right] \\
&= (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{1}{(n + \beta + 1)}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

olur. Eş.3.16'da $\frac{1}{(n + \beta + 1)}$ sabiti toplam sembolünün dışına alınırsa,

$$\begin{aligned}
&= (n + \beta + 1) \frac{1}{(n + \beta + 1)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= 1 (1 + x - x)^n \quad \text{(Binom açılımından)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

olur.

ii) Eş.3.14 için $e_1(s) = s$ olmak üzere,

$$K_n^{(\alpha, \beta)}(e_1, x) = (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} e_1(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&= K_n^{(\alpha, \beta)}(e_1, x) = (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} s ds \\
&= (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{s^2}{2} \Big|_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} \\
&= \frac{(n + \beta + 1)}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left[\left(\frac{k + \alpha + 1}{n + \beta + 1} \right)^2 - \left(\frac{k + \alpha}{n + \beta + 1} \right)^2 \right] \\
&= \frac{(n + \beta + 1)}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left[\left(\frac{k + \alpha + 1 - k - \alpha}{n + \beta + 1} \right) \left(\frac{k + \alpha + 1 + k + \alpha}{n + \beta + 1} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2(n + \beta + 1)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} (2k + 2\alpha + 1) \tag{3.17}
\end{aligned}$$

olur.

Eş.3.17’de toplam sembolünün lineerlik özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned}
K_n^{(\alpha, \beta)}(e_1, x) &= \frac{1}{2(n + \beta + 1)} \left\{ 2 \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2\alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} 1 \right\} \tag{3.18}
\end{aligned}$$

yazılır.

Eş.3.18’de Eş.3.3 ve Eş.3.8 yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
K_n^{(\alpha, \beta)}(e_1, x) &= \frac{1}{2(n + \beta + 1)} (2nx + 2\alpha + 1) \\
&= \frac{n}{n + \beta + 1} x + \frac{\alpha}{n + \beta + 1} + \frac{1}{2(n + \beta + 1)}
\end{aligned}$$

olur.

iii) $e_2(x) = s^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
K_n^{(\alpha, \beta)}(e_2, x) &= (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} s^2 ds \\
&= (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \frac{s^3}{3} \Big|_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} \\
&= \frac{(n + \beta + 1)}{3} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left[\left(\frac{k + \alpha + 1}{n + \beta + 1} \right)^3 - \left(\frac{k + \alpha}{n + \beta + 1} \right)^3 \right] \\
&= \frac{(n + \beta + 1)}{3} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left\{ \left(\frac{k + \alpha + 1 - k - \alpha}{n + \beta + 1} \right) \left[\left(\frac{k + \alpha + 1}{n + \beta + 1} \right)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\frac{k + \alpha + 1}{n + \beta + 1} \right) \left(\frac{k + \alpha}{n + \beta + 1} \right) + \left(\frac{k + \alpha}{n + \beta + 1} \right)^2 \right] \right\} \\
&= \frac{(n + \beta + 1)}{3} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left\{ \left(\frac{1}{n + \beta + 1} \right) \left[\frac{k^2 + \alpha^2 + 1 + 2k\alpha + 2k + 2\alpha}{(n + \beta + 1)^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{k^2 + 2k\alpha + \alpha^2 + k + \alpha}{(n + \beta + 1)^2} + \frac{k^2 + 2k\alpha + \alpha^2}{(n + \beta + 1)^2} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{3(n + \beta + 1)^2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} [3k^2 + 6k\alpha + 3k + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1] \quad (3.19)
\end{aligned}$$

olur.

Eş.3.19’da toplam sembolünün lineerlik özelliği kullanılarak ifade düzenlenirse,

$$K_n^{(\alpha, \beta)}(e_2, x) = \frac{1}{3(n + \beta + 1)^2} \left[3 \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 6\alpha \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + 3 \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 3\alpha^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
& + 3\alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Big] \tag{3.20}
\end{aligned}$$

olur.

Eş.3.20’de Eş.3.3, Eş.3.8 ve Eş.3.11 yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
K_n^{(\alpha, \beta)}(e_2, x) &= \frac{1}{3(n+\beta+1)^2} \left[3(n(n-1)x^2 + nx) + 6\alpha nx + 3nx + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 \right] \\
&= \frac{n(n-1).x^2 + nx}{(n+\beta+1)^2} + \frac{2\alpha nx}{(n+\beta+1)^2} + \frac{nx}{(n+\beta+1)^2} \\
&+ \frac{\alpha^2}{(n+\beta+1)^2} + \frac{\alpha + \frac{1}{3}}{(n+\beta+1)^2} \\
&= \frac{n(n-1)}{(n+\beta+1)^2} x^2 + \frac{2(1+\alpha)n}{(n+\beta+1)^2} x + \frac{\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3}}{(n+\beta+1)^2}
\end{aligned}$$

olur.

3.4. Lemma

Eş.3.12 ile tanımlı Kantorovich-Stancu Operatörü aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$K_n^{(\alpha, \beta)}((e_1 - x)^2, x) = \frac{(\beta+1)^2 - n}{(n+\beta+1)^2} x^2 - \frac{(\beta+1)(2\alpha+1) - n}{(n+\beta+1)^2} x + \frac{\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3}}{(n+\beta+1)^2}$$

İspat

$$\begin{aligned}
 K_n^{(\alpha, \beta)} \left((e_1 - x)^2, x \right) &= K_n^{(\alpha, \beta)} \left(e_1^2 - 2e_1x + x^2, x \right) \\
 &= K_n^{(\alpha, \beta)} (e_2, x) - 2xK_n^{(\alpha, \beta)} (e_1, x) + x^2K_n^{(\alpha, \beta)} (e_0, x)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

olur. Lemma 3.3'te bulunan sonuçlar Eş.3.21'de yazılırsa

$$\begin{aligned}
 K_n^{(\alpha, \beta)} \left((e_1 - x)^2, x \right) &= \frac{n(n-1)x^2 + nx}{(n+\beta+1)^2} + \frac{2\alpha nx}{(n+\beta+1)^2} + \frac{nx}{(n+\beta+1)^2} + \frac{\alpha^2}{(n+\beta+1)^2} \\
 &\quad + \frac{1}{3(n+\beta+1)^2} - 2x \left[\frac{n}{n+\beta+1}x + \frac{\alpha}{n+\beta+1} + \frac{1}{2(n+\beta+1)} \right] + x^2 \\
 &= \frac{n(n-1)x^2}{(n+\beta+1)^2} + \frac{2nx}{(n+\beta+1)^2} + \frac{2\alpha nx}{(n+\beta+1)^2} + \frac{\alpha^2}{(n+\beta+1)^2} \\
 &\quad + \frac{\alpha}{(n+\beta+1)^2} + \frac{1}{3(n+\beta+1)^2} - \frac{2nx^2}{n+\beta+1} - \frac{2x\alpha}{n+\beta+1} - \frac{x}{n+\beta+1} + x^2
 \end{aligned}$$

olur.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 K_n^{(\alpha, \beta)} \left((e_1 - x)^2, x \right) &= \frac{n(n-1)}{(n+\beta+1)^2} x^2 + \frac{2n(1+\alpha)}{(n+\beta+1)^2} x \\
 &\quad + \frac{3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{3(n+\beta+1)^2} - \frac{(2\alpha+1)}{n+\beta+1} x + \frac{(n+\beta+1-2n)}{n+\beta+1} x^2 \\
 &= \frac{(\beta+1)^2 - n}{(n+\beta+1)^2} x^2 - \frac{(\beta+1)(2\alpha+1) - n}{(n+\beta+1)^2} x + \frac{\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3}}{(n+\beta+1)^2}
 \end{aligned}$$

olur.

Bu bölümde Kantorovich-Stancu operatörlerinin özellikleri ve $[0,1]$ aralığında

$K_n^{(\alpha, \beta)}$ operatörler dizisinin bazı yaklaşım özellikleri ve teoremler verilecektir.

3.1. Teorem

Her $f \in L_1[0,1]$ için $(K_n^{(\alpha,\beta)}(f))$ dizisi $[0,1]$ aralığı üzerinde f 'ye düzgün yakınsaktır.

İspat

$K_n^{(\alpha,\beta)}$ operatörünün lineerlik özelliğinden,

$$K_n^{(\alpha,\beta)}((e_1 - x)^2, x) = K_n^{(\alpha,\beta)}(e_2, x) - 2xK_n^{(\alpha,\beta)}(e_1, x) + x^2K_n^{(\alpha,\beta)}(e_0, x)$$

yazılır.

Lemma 3.4'ten $K_n^{(\alpha,\beta)}(e_2, x), K_n^{(\alpha,\beta)}(e_1, x), K_n^{(\alpha,\beta)}(e_0, x)$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$K_n^{(\alpha,\beta)}((e_1 - x)^2, x) = \frac{(\beta+1)^2 - n}{(n+\beta+1)^2} x^2 - \frac{(\beta+1)(2\alpha+1) - n}{(n+\beta+1)^2} x + \frac{\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3}}{(n+\beta+1)^2} \quad (3.22)$$

olur.

Eş.3.22'deki polinom katsayılarına sırasıyla,

$$A(\beta, n), B(\alpha, \beta, n) \text{ ve } C(\alpha, \beta, n)$$

diyelim.

$$\begin{aligned} A(\beta, n) &= \frac{(\beta+1)^2 - n}{(n+\beta+1)^2} \\ &\leq \frac{(\beta+1)^2 + n}{(n+\beta+1)^2} \\ &= A'(\beta, n) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
B(\alpha, \beta, n) &= \frac{-(\beta+1)(2\alpha+1)+n}{(n+\beta+1)^2} \\
&\leq \frac{(\beta+1)(2\alpha+1)+n}{(n+\beta+1)^2} \\
&= B'(\alpha, \beta, n)
\end{aligned}$$

denilirse;

$$K_n^{(\alpha, \beta)}\left((e_1 - x)^2, x\right) \leq (A'(\beta, n) + B'(\alpha, \beta, n) + C(\alpha, \beta, n))(x^2 + x + 1)$$

olur.

Ayrıca $x \in [0, 1]$ olduğundan $x^2 + x + 1 \leq 3$ olup,

$$K_n^{(\alpha, \beta)}\left((e_1 - x)^2, x\right) \leq 3(A'(\beta, n) + B'(\alpha, \beta, n) + C(\alpha, \beta, n))$$

olur.

$A' + B' + C = M_n$ denilirse M_n bir sıfır dizisi olur. Teorem 2.1'den

$$K_n^{(\alpha, \beta)}\left((e_1 - x)^2, x\right) \text{ ifadesi } 0 \text{ 'a düzgün yakınsak olur. Eş.3.13'te } K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) = 1$$

olduğundan ve Sonuç 2.2.'den $(K_n^{(\alpha, \beta)})$ dizisi f 'ye düzgün yakınsar.

3.3. Kantorovich-Stancu Tip Operatörünün Süreklilik Modülüyle Yaklaşım Hızının Hesaplanması

Burada $[0, 1]$ aralığında Kantorovich-Stancu operaötünün süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı elde edilecektir.

3.1. Tanım

$\langle a, b \rangle$ ifadesi $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b], (-\infty, \infty), (-\infty, b), (a, \infty)$ aralıklarından birini gösterebilir. $x, y \in \langle a, b \rangle$ için $\delta > 0$ olmak üzere,

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|$$

değerine f ' nin süreklilik modülü denir [1,10,11]. $\omega(f, \delta)$ yerine $\omega(\delta)$ veya $\omega_f(\delta)$ gösterimleri de kullanılabilir.

Süreklilik modülünün özellikleri aşağıdaki gibi gösterilir.

i) ω fonksiyonu δ ' nın monoton artan bir fonksiyonudur.

ii) f ' nin $\langle a, b \rangle$ ' de düzgün sürekli ($\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır ki $|x - y| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ olur.) olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f, \delta) = 0 \text{ olmasıdır.}$$

iii) $m \in \mathbb{N}$ ise $\omega(f, m\delta) \leq m\omega(f, \delta)$ 'dır.

iv) $\lambda > 0$ reel sayısı için $\omega(f, \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f, \delta)$ ' dır.

$$v) |f(t) - f(x)| \leq \omega(f, |t - x|)$$

3.2. Teorem

$f \in L_1[0, 1]$, $\alpha \leq \beta$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ sağlaması şartıyla her bir $x \in [0, 1]$ için Kantorovich-Stancu operatörü aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| \leq 2\omega\left(f, \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x)\right)$$

Burada,

$$\delta_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sqrt{K_n^{(\alpha, \beta)}\left(\left(e_1 - x\right)^2, x\right)}, \text{ dir.}$$

İspat

i) $|s - x| < \delta$ iken,

$$\omega(f, |s - x|) \leq \omega(f, \delta)$$

$$\leq \left[1 + \left(\frac{s-x}{\delta} \right)^2 \right] \omega(f, \delta) \quad (3.23)$$

olur.

ii) $|s-x| \geq \delta$ iken,

$$\begin{aligned} \frac{|s-x|}{\delta} \geq 1 \quad \text{ise} \quad |s-x| &\leq |s-x| \frac{|s-x|}{\delta} \\ &\leq \frac{|s-x|^2}{\delta} \frac{\delta}{\delta} \\ &\leq \frac{|s-x|^2}{\delta^2} \delta \end{aligned} \quad (3.24)$$

yazılır.

Eş.3.24'e süreklilik modülü uygulanırsa,

$$\omega(f, |s-x|) \leq \omega\left(f, \frac{|s-x|^2}{\delta^2} \delta\right) \quad (3.25)$$

olur.

Eş.3.25'e Tanım 3.1'deki (iv) özelliği uygulanırsa,

$$\omega(f, |s-x|) \leq \left[1 + \left(\frac{s-x}{\delta} \right)^2 \right] \omega(f, \delta) \quad (3.26)$$

olur. O halde, Eş.3.23 ve Eş.3.26'dan

$$\begin{aligned} |f(s) - f(x)| &\leq \omega(f, |s-x|) \\ &\leq \left[1 + \left(\frac{s-x}{\delta} \right)^2 \right] \omega(f, \delta) \end{aligned} \quad (3.27)$$

elde edilir.

$K_n^{(\alpha, \beta)}$ operatörü lineer olduğu için,

$$\begin{aligned}
 K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) &= K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \cdot 1 \\
 &= K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) \\
 &= K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - K_n^{(\alpha, \beta)}(f(x)1, x) \\
 &= K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - K_n^{(\alpha, \beta)}(f(x), x)
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

biçiminde yazılır.

Eş.3.28’de Kantorovich-Stancu operatörü tanımı yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) &= (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} f(s) ds \\
 &\quad - (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} f(x) 1 ds \\
 &= (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} (f(s) - f(x)) ds
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

olur.

Eş.3.29’un her iki tarafının mutlak değeri alınır,

$$|f(s) - f(x)| \leq |f(s) - f(x)|$$

olduğundan,

$$\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| \leq (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} |f(s) - f(x)| ds \tag{3.30}$$

olur.

Eş.3.30'da Eş.3.27 yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| &\leq (n + \beta + 1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} \left(1 + \frac{(s-x)^2}{\delta^2} \right) \omega(f, \delta) ds \\
 &\leq (n + \beta + 1) \omega(f, \delta) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} \left(1 + \frac{(s-x)^2}{\delta^2} \right) ds
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

olur.

Öncelikle Eş.3.31'deki integrali hesaplırsak,

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} \left(1 + \frac{(s-x)^2}{\delta^2} \right) ds &= \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} ds + \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} \frac{(s-x)^2}{\delta^2} \\
 &= s \Big|_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} + \frac{1}{\delta^2} \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} [s^2 - 2sx + x^2] ds \\
 &= \frac{1}{n + \beta + 1} + \frac{1}{\delta^2} \left(\frac{s^3}{3} - xs^2 + x^2s \right) \Big|_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}}
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

olur.

Eş.3.32'de işlem kısalığı için;

$$\frac{k + \alpha}{m + \beta + 1} = a \text{ diyelim.}$$

O halde,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{s^3}{3} - xs^2 + x^2s \right) \Bigg|_a^{a+\frac{1}{m+\beta+1}} &= \left(a + \frac{1}{n+\beta+1} \right)^3 \frac{1}{3} - x \left(a + \frac{1}{n+\beta+1} \right)^2 \\
&\quad + x^2 \left(a + \frac{1}{n+\beta+1} \right) - \frac{a^3}{3} + xa^2 - x^2a \\
&= \frac{1}{3} \left[a^3 + 3a^2 \frac{1}{n+\beta+1} + 3a \frac{1}{(n+\beta+1)^2} + \frac{1}{(n+\beta+1)^3} \right] \\
&\quad - x \left[a^2 + 2a \frac{1}{(n+\beta+1)} + \frac{1}{(n+\beta+1)^2} \right] + x^2 \left(a + \frac{1}{(n+\beta+1)} \right) - \frac{a^3}{3} + xa^2 - x^2a \\
&= \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{(n+\beta+1)} + \frac{a}{(n+\beta+1)^2} + \frac{1}{3(n+\beta+1)^3} - xa^2 \\
&\quad - \frac{2ax}{n+\beta+1} - \frac{x}{(n+\beta+1)^2} + x^2a + \frac{x^2}{(n+\beta+1)} - \frac{a^3}{3} + xa^2 - x^2a \\
&= \frac{a^2}{(n+\beta+1)} + \frac{a}{(n+\beta+1)^2} + \frac{1}{3(n+\beta+1)^3} - \frac{2ax}{n+\beta+1} - \frac{x}{(n+\beta+1)^2} + \frac{x^2}{(n+\beta+1)}
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi a eşitliği yerine yazılır ve ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{s^3}{3} - xs^2 + x^2s \right) \Bigg|_a^{a+\frac{1}{m+\beta+1}} &= \frac{\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta+1} \right)^2}{n+\beta+1} + \frac{\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta+1} \right)}{(n+\beta+1)^2} + \frac{1}{3(n+\beta+1)^3} \\
&\quad - \frac{2\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta+1} \right)x}{(n+\beta+1)} - \frac{x}{(n+\beta+1)^2} + \frac{x^2}{(n+\beta+1)} \\
&= \frac{(k+\alpha)^2}{(n+\beta+1)^3} + \frac{(k+\alpha)}{(n+\beta+1)^3} + \frac{1}{3(n+\beta+1)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2(k+\alpha)x}{(n+\beta+1)^2} - \frac{x}{(n+\beta+1)^2} + \frac{x^2}{(n+\beta+1)} \\
& = \frac{k^2+2k\alpha+\alpha^2}{(n+\beta+1)^3} + \frac{(k+\alpha)}{(n+\beta+1)^3} + \frac{1}{3(n+\beta+1)^3} \\
& -\frac{2kx+2\alpha x}{(n+\beta+1)^2} - \frac{x}{(n+\beta+1)^2} + \frac{x^2}{(n+\beta+1)}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

olur.

Bulduğumuz Eş.3.33, Eş.3.32’de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{k+\alpha}{m+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{m+\beta+1}} \left(1 + \frac{(s-x)^2}{\delta^2} \right) ds = \frac{1}{m+\beta+1} + \frac{1}{\delta^2} \left[\frac{k^2+2k\alpha+\alpha^2}{(m+\beta+1)^3} + \frac{(k+\alpha)}{(m+\beta+1)^3} + \frac{1}{3(m+\beta+1)^3} \right. \\
& \left. -\frac{2kx+2\alpha x}{(m+\beta+1)^2} - \frac{x}{(m+\beta+1)^2} + \frac{x^2}{(m+\beta+1)} \right]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

elde edilir. Eş.3.34, Eş.3.31'deki integral ifadesinin yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| K_n^{(\alpha,\beta)}(f,x) - f(x) \right| \leq (n+\beta+1) \omega(f,\delta) \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \left\{ \frac{1}{n+\beta+1} + \frac{1}{\delta^2} \right. \\
& \quad \times \left[\frac{k^2+2k\alpha+\alpha^2}{(n+\beta+1)^3} + \frac{(k+\alpha)}{(n+\beta+1)^3} + \frac{1}{3(n+\beta+1)^3} \right. \\
& \quad \left. \left. -\frac{2kx+2\alpha x}{(n+\beta+1)^2} - \frac{x}{(n+\beta+1)^2} + \frac{x^2}{(n+\beta+1)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Toplam sembolünün lineerliği kullanılarak,

$$\left| K_n^{(\alpha,\beta)}(f,x) - f(x) \right| \leq \omega(f,\delta) \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) + \omega(f,\delta) \frac{1}{\delta^2} \left\{ \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \frac{k^2}{(n+\beta+1)^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \frac{2k\alpha}{(n+\beta+1)^2} + \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \frac{\alpha^2}{(n+\beta+1)^2} \\
& + \sum_{k=0}^n P_{n,k} \frac{k}{(n+\beta+1)^2} + \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \frac{\alpha}{(n+\beta+1)^2} \\
& + \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \frac{1}{3(n+\beta+1)^2} - \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \frac{2xk}{(n+\beta+1)} \\
& - \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \frac{2\alpha x}{(n+\beta+1)} - \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) \frac{x}{(n+\beta+1)} + \sum_{k=0}^n P_{n,k}(x) x^2 \Big\}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

olur.

Lemma 3.1'deki Eş.3.3, Eş.3.4 ve Eş.3.5'i Eş.3.35'te yerine yazdığımızda,

$$\begin{aligned}
& \left| K_n^{(\alpha,\beta)}(f,x) - f(x) \right| \leq \omega(f,\delta) + \omega(f,\delta) \frac{1}{\delta^2} \left\{ \frac{n(n-1)x^2 + nx}{(n+\beta+1)^2} \right. \\
& \quad + \frac{2\alpha nx}{(n+\beta+1)^2} + \frac{\alpha^2}{(n+\beta+1)^2} + \frac{nx}{(n+\beta+1)^2} \\
& \quad + \frac{\alpha}{(n+\beta+1)^2} + \frac{1}{3(n+\beta+1)^2} - \frac{2nx^2}{n+\beta+1} \\
& \quad \left. - \frac{2x\alpha}{n+\beta+1} - \frac{x}{n+\beta+1} + x^2 \right\} \\
& \leq \omega(f,\delta) + \frac{1}{\delta^2} \omega(f,\delta) \left\{ \frac{n(n-1)}{(n+\beta+1)^2} x^2 \right. \\
& \quad + \frac{2n(1+\alpha)}{(n+\beta+1)^2} x + \frac{3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{3(n+\beta+1)^2} + \frac{(\beta-n+1)}{(n+\beta+1)} x^2 + \frac{(2\alpha+1)}{n+\beta+1} x \Big\} \\
& \leq \omega(f,\delta) \left(1 + \delta^{-2} \left\{ \frac{n(n-1)}{(n+\beta+1)^2} x^2 + \frac{2n(1+\alpha)}{(n+\beta+1)^2} x \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{3\alpha^2 + 3\alpha + 1}{3(n+\beta+1)^2} + \frac{(\beta-n+1)}{(n+\beta+1)} x^2 + \frac{(2\alpha+1)}{n+\beta+1} x \right\} \right)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

olur.

Eş.3.36 düzenlenir ve Lemma 3.4 kullanılırsa,

$$\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| \leq \omega(f, \delta) \left(1 + \delta^{-2} K_n^{(\alpha, \beta)}((e_1 - x)^2, x) \right) \quad (3.37)$$

olur.

$$\delta_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sqrt{K_n^{(\alpha, \beta)}((e_1 - x)^2, x)} \text{ seçilirse,}$$

$$\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| \leq \left(1 + \delta^{-2} \left(\delta_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right)^2 \right) \omega(f, \delta) \quad (3.38)$$

olur.

Eş.3.38’de $\delta = \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ alındığında

ispat tamamlanmış olur.

3.3. Teorem

$f \in L_1[0, 1]$ ve her bir $x \in [0, 1]$ için,

$$\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| \leq 2\omega\left(f, \delta_n^{(\alpha, \beta)}\right)$$

İspat

Teorem 3.1’in ispatında

$$K_n^{(\alpha, \beta)}((e_1 - x)^2, x) \leq 3 \left(\frac{(\beta + 1)^2 + n}{(n + \beta + 1)^2} + \frac{n + (\beta + 1)(2\alpha + 1)}{(n + \beta + 1)^2} + \frac{\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3}}{(n + \beta + 1)^2} \right)$$

olduğunu görmüştük.

$$\delta_n^{(\alpha, \beta)} = \sqrt{3 \left(\frac{(\beta+1)^2 + n}{(n+\beta+1)^2} + \frac{n + (\beta+1)(2\alpha+1)}{(n+\beta+1)^2} + \frac{\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3}}{(n+\beta+1)^2} \right)}$$

seçilerek Teorem 3.2'deki Eş.3.37'de yerine yazılırsa,

$$\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| \leq \left(1 + \delta^{-2} 3 \left(\frac{(\beta+1)^2 + n}{(n+\beta+1)^2} + \frac{n + (\beta+1)(2\alpha+1)}{(n+\beta+1)^2} + \frac{\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3}}{(n+\beta+1)^2} \right) \right) \omega(f, \delta)$$

olur.

$$\text{Burada } \delta = \delta_n^{(\alpha, \beta)} = \sqrt{3 \left(\frac{(\beta+1)^2 + n}{(n+\beta+1)^2} + \frac{n + (\beta+1)(2\alpha+1)}{(n+\beta+1)^2} + \frac{\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{3}}{(n+\beta+1)^2} \right)} \text{ alınırsa,}$$

$$\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| \leq 2\omega\left(f, \delta_n^{(\alpha, \beta)}\right)$$

olur.

3.1. Açıklama

Her bir $x \in [0, 1]$ için Teorem 3.2 yerel yaklaşımı verirken Teorem 3.3'te ise her bir $x \in [0, 1]$ için genel bir yaklaşımdan bahsetmektedir.

$\delta_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ 'nin maksimumu α, β arasındaki bağıntıya bağlı olduğu için daha da küçük yapılabilir.

$[a, b]$ aralığında sürekli her fonksiyon bu aralıkta integrallenebilir. O halde $C[0, 1] \subset L_1[0, 1]$ olduğuna göre Teorem 3.2 ve Teorem 3.3'ün sonuçları olarak aşağıdaki iki sonuç verilebilir.

3.1. Sonuç

Her bir $f \in C[0,1]$ için $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha \leq \beta$ olmak üzere, $x \in [0,1]$ için Teorem

3.2'deki eşitsizlik elde edilir.

3.2. Sonuç

Her bir $f \in C[0,1]$ için her $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha \leq \beta$ olmak üzere, $x \in [0,1]$ için Teorem

3.3'teki eşitsizlik elde edilir.

3.4. Teorem

$f \in C^1([0,1])$ ve her $x \in [0,1]$ için Eş.3.9 ile tanımlanan Kantorovich-Stancu operatörü aşağıdaki eşitsizliği sağlar[12].

$$\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| \leq |f'(x)| \left| \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n + \beta + 1} - \frac{\beta + 1}{n + \beta + 1} x \right| + 2 \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x) \omega(f, \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x))$$

İspat

$$K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) = K_n^{(\alpha, \beta)}(f(s), x) - f(x) \quad (3.39)$$

Eş. 3.39'da eşitliğin birinci tarafına $f(x)$ ekleyip çıkartırsak,

$$\begin{aligned} K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) &= K_n^{(\alpha, \beta)}(f(s) - f(x) + f(x), x) - f(x) \\ &= K_n^{(\alpha, \beta)}(f - f(x), x) + K_n^{(\alpha, \beta)}(f(x), x) - f(x) \\ &= K_n^{(\alpha, \beta)}(f - f(x), x) + f(x) K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - f(x) \\ &= K_n^{(\alpha, \beta)}(f - f(x), x) + f(x) [K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - 1] \end{aligned} \quad (3.40)$$

olur.

$$\text{Eş.3.40' ta } f(s) = f(x) + f'(x)(s-x) + f(s) - f(x) - f'(x)(s-x)$$

yazılırsa,

$$\begin{aligned} K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) = \\ K_n^{(\alpha, \beta)}(f(x) + f'(x)(s-x) + f(s) - f(x) - f'(x)(s-x) - f(x), x) \\ + f(x) [K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - 1] \end{aligned} \quad (3.41)$$

olur . Eş.3.41'in her iki tarafının mutlak değeri alınır,

$$\begin{aligned} |K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x)| = \\ |K_n^{(\alpha, \beta)}(f(x) + f'(x)(s-x) + f(s) - f(x) - f'(x)(s-x) - f(x), x) \\ + f(x) [K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - 1]| \end{aligned}$$

olur.

Üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} |K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x)| \leq |f'(x)| |K_n^{(\alpha, \beta)}(s-x, x)| \\ + |K_n^{(\alpha, \beta)}(f(s) - f(x) - f'(x)(s-x), x)| \\ + |f(x)| |K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - 1| \end{aligned}$$

olur.

Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} |K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x)| \leq |f'(x)| |K_n^{(\alpha, \beta)}(s-x, x)| \\ + K_n^{(\alpha, \beta)}(|f(s) - f(x) - f'(x)(s-x)|, x) \\ + |f(x)| |K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - 1| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |f'(x)| \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(s-x, x) \right| + K_n^{(\alpha, \beta)} \left(\left| s-x \right| \left| \frac{f(s)-f(x)}{(s-x)} - f'(x) \right|, x \right) \\
&+ |f(x)| \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - 1 \right| \\
&\leq |f'(x)| \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(s-x, x) \right| + K_n^{(\alpha, \beta)} \left(|s-x| |f'(s) - f'(x)|, x \right) \\
&+ |f(x)| \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - 1 \right|
\end{aligned} \tag{3.42}$$

olur.

Eş.3.42’de ikinci terimi hesaplayalım.

$$|f'(s) - f'(x)| \leq \omega(f', |s-x|) \tag{3.43}$$

Eş.3.43’te $|s-x|$ ifadesi $\frac{\delta}{\delta}$ ile çarpılırsa,

$$|f'(s) - f'(x)| \leq \omega\left(f', |s-x| \frac{\delta}{\delta}\right) \tag{3.44}$$

Eş.3.44’e Tanım 3.1’de (iv) özelliği uygulanırsa,

$$|f'(s) - f'(x)| \leq \left(1 + \frac{|s-x|}{\delta}\right) \omega(f', \delta)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitsizliğin her iki tarafı $|s-x|$ ile çarpılırsa,

$$|s-x| |f'(s) - f'(x)| \leq |s-x| \left(1 + \frac{|s-x|}{\delta}\right) \omega(f', \delta)$$

olur.

$$|s-x| |f'(s) - f'(x)| \leq \left(|s-x| + \frac{|s-x|^2}{\delta}\right) \omega(f', \delta)$$

eşitsizliğin her iki tarafına $K_n^{(\alpha, \beta)}$ operatörünü uygularsak,

$$K_n^{(\alpha, \beta)}(|s-x| |f'(s) - f'(x)|, x) \leq K_n^{(\alpha, \beta)}\left(|s-x| + \frac{|s-x|^2}{\delta}, x\right) \omega(f', \delta) \quad (3.45)$$

olur.

Bulduğumuz Eş.3.45'i Eş.3.42'de yerleştirirsek,

$$\begin{aligned} |K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x)| &\leq |f'(x)| |K_n^{(\alpha, \beta)}(s-x, x)| \\ &\quad + \left[K_n^{(\alpha, \beta)}(|s-x|, x) + K_n^{(\alpha, \beta)}\left(\frac{(s-x)^2}{\delta}, x\right) \right] \omega(f', \delta) \\ &\quad + |f(x)| |K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - 1| \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $s-x = \chi_x$ dersek,

$$\begin{aligned} |K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x)| &\leq |f'(x)| \\ &\quad + |K_n^{(\alpha, \beta)}(\chi_x, x)| \left[K_n^{(\alpha, \beta)}(\chi_x, x) + \frac{K_n^{(\alpha, \beta)}(\chi_x^2, x)}{\delta} \right] \omega(f', \delta) \\ &\quad + |f(x)| |K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - 1| \end{aligned}$$

olur.

Cauchy Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x)| &\leq |f'(x)| |K_n^{(\alpha, \beta)}(\chi_x, x)| \\ &\quad + \left[\sqrt{K_n^{(\alpha, \beta)}(\chi_x^2, x)} \sqrt{K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x)} + \frac{K_n^{(\alpha, \beta)}(\chi_x^2, x)}{\delta} \right] \omega(f', \delta) \\ &\quad + |f(x)| |K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - 1| \end{aligned}$$

yazılır.

Eşitsizliğin ilk kısmında $\sqrt{K_n^{(\alpha, \beta)}(\chi_x^2, x)}$ parantezine alınırsa,

$$\begin{aligned}
\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| &\leq \left| f'(x) \right| \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(\chi_x, x) \right| \\
&\quad + \left[\sqrt{K_n^{(\alpha, \beta)}(\chi_x^2, x)} \left(\sqrt{K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x)} + \frac{\sqrt{K_n^{(\alpha, \beta)}(\chi_x^2, x)}}{\delta} \right) \right] \omega(f', \delta) \\
&\quad + \left| f(x) \right| \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - 1 \right|
\end{aligned}$$

olur.

Eşitsizlikteki $\chi_x = s - x$ ifadesinde $e_1(s) = s$ yazdığımızda,

$$\begin{aligned}
\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| &\leq \left| f'(x) \right| \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(e_1, x) - x K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) \right| \\
&\quad + \sqrt{K_n^{(\alpha, \beta)}((e_1 - x)^2, x)} \left[\sqrt{K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x)} + \delta^{-1} \sqrt{K_n^{(\alpha, \beta)}((e_1 - x)^2, x)} \right] \omega(f', \delta) \\
&\quad + \left| f(x) \right| \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(e_0, x) - 1 \right|
\end{aligned} \tag{3.46}$$

olur.

Lemma 3.3 ve Lemma 3.4 eşitlikleri Eş.3.46'da yerlerine yazılır ve

$$\delta_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sqrt{K_n^{(\alpha, \beta)}((e_1 - x)^2, x)} \text{ seçilirse,}$$

$$\begin{aligned}
\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| &\leq \left| f'(x) \right| \left| \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n + \beta + 1} - \frac{\beta + 1}{(n + \beta + 1)} x \right| \\
&\quad + \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x) \left[1 + \delta^{-1} \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right] \omega(f', \delta)
\end{aligned}$$

olur.

Bu eşitsizlikte $\delta = \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ seçilirse ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\left| K_n^{(\alpha, \beta)} f(x) - f(x) \right| \leq \left| f'(x) \right| \left| \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n + \beta + 1} - \frac{\beta + 1}{(n + \beta + 1)} x \right| + 2 \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x) \omega(f', \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x))$$

elde edilir.

3.5. Teorem

$f \in C^1([0, 1])$ ve $x \in [0, 1]$ için Eş.3.9'da tanımlanan operatör aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| \leq \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n + \beta + 1} M_1 + 2 \delta \omega(f', \delta) \quad (3.47)$$

Burada,

$$M_1 = \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)| \text{ ve } \delta = \max_{x \in [0, 1]} \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x) \text{ 'dir.}$$

İspat

Teorem 3.4'te

$$\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(f, x) - f(x) \right| \leq \left| f'(x) \right| \left| \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n + \beta + 1} - \frac{\beta + 1}{(n + \beta + 1)} x \right| + \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x) 2 \omega(f', \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x))$$

olduğunu göstermiştik. Buradan anlaşılaacağı üzere;

$$\left| f'(x) \right| \leq \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)| = M_1 \text{ ve } \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x) \leq \max_{x \in [0, 1]} \delta_n^{(\alpha, \beta)}(x)$$

olur. Ayrıca ,

$$\left| \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n + \beta + 1} - \frac{\beta + 1}{(n + \beta + 1)} x \right| \leq \max_{x \in [0, 1]} \left| \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n + \beta + 1} - \frac{\beta + 1}{(n + \beta + 1)} x \right| \text{ 'dir.}$$

Buradan,

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n+\beta+1} - \frac{\beta+1}{(n+\beta+1)} x \right| = M_{(\alpha,\beta)} = \begin{cases} \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{n+\beta+1} & , \alpha \leq \beta \leq 2\alpha \\ \frac{\alpha + \frac{1}{2} - (\beta+1)}{n+\beta+1} & , 2\alpha \leq \beta \end{cases}$$

yazılabilir.

$$\left| K_n^{(\alpha,\beta)} f(x) - f(x) \right| \leq M_{(\alpha,\beta)} M_1 + \delta_n^{(\alpha,\beta)}(x) 2\omega(f', \delta)$$

olur. $\delta = \delta_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ yazılırsa, Eş.3.47 elde edilir.

3.1. Uyarı

δ , α ve β arasındaki bağıntıya bağlı olduğu için D. D. Stancu'nun [5,13]'deki çalışmalarından faydalanılarak Eş.3.47'nin sağ tarafındaki ifadede hata oranı daha küçük olacak şekilde daha iyi bir yaklaşım derecesi elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Natanson, I.P., "Constructive Function Theory Volume I", **Frederick Zingar Publishing**, New York, 1-15 (1964).
2. Bernstein, S. N., "Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités", **Commun. Soc. Math. Kharkow**, 13(2): 1-2 (1912-1913).
3. Lorentz, G. G., "Bernstein Polynomials", **Univ. Of Toronto Press**, Toronto, 3-5 (1953).
4. Bohman, H., "On approximation of continuous and analytic functions", **Ark. Mat.**, **2**, 43-56 (1952).
5. Stancu, D.D., "Approximation of function by a new class of polynomial operators", **Rev. Roum. Math. Pures et Appl.**, 13(8): 1173-1194 (1968).
6. Kantorovich, L.V., "Sur certain développements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein, I, II", **C.R. Acad. URSS**, 563-568, 595-600 (1930).
7. Bârboșu, D., "Kantorovich-Stancu type operators", **Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics**, 5(3): 53-54 (2004).
8. Bayraktar, M., "Fonksiyonel Analiz", **Gazi Kitapevi**, 21 (2006).
9. Hacısalıhoğlu, H. H. ve Hacıyev, A., "Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı", **Ankara Üniv. Basımevi**, Ankara, 1-80 (1995).
10. Korovkin, P. P., "Linear Operators and Approximation Theory", **Hindustan Publishing Corp. (India)**, Delhi, 1-63 (1960).
11. Altomare, F. And Campiti, M., "Korovkin-type Approximation Theory and its Applications", **Walter de Gruyter**, New York, 265-373 (1994).
12. Shisha, O., "And Mond, B., The degree of convergence of linear positive operators", **Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.**, 60: 1196-2000 (1968).
13. Stancu, D.D., "Asupra unei generalizări a polinoamelor lui Bernstein", **Studia Universitatis Babeș-Bolyai**, Romanian, 14(2): 31-45 (1969).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	KOZAN BAŞAK, Neslihan
Uyruğu	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	04.11.1977 Ankara
Telefon	03125381013
e-mail	neslihankozan06@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü	2001
Lise	Bahçelievler Deneme Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2001-2002	Elit Dershane	Matematik Öğretmeni
2002-2004	Hanak Lisesi	Matematik Öğretmeni
2004-2006	Şereflikoçhisar MEM	Matematik Öğretmeni
2006-2008	İskitler Endüstri M. Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Edebiyat, Tiyatro, Masa Tenisi