
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

İNTEGRAL VE İNTEGRO TİPİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Fatma Büşra AKTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(EYLÜL) 2025

Fatma Büşra AKTAŞ tarafından hazırlanan “İNTEGRAL VE İNTEGRO TİPİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ / OY ÇOKLUĞU ile Gazi Üniversitesi Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Adil MISIR
Matematik A.B.D, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum. ..……

Başkan: Prof. Dr. Fatma AYAZ
Matematik A.B.D, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum. ……...

Üye: Doç. Dr. Yasemin BAŞCI
Matematik A.B.D, Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum. ……...

Tez Savunma Tarihi: 15/09/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……..……
Prof. Dr. Uğur GÖKMEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza

Fatma Büşra AKTAŞ

...../……/…….

İNTEGRAL VE İNTEGRO TİPİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Fatma Büşra AKTAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(EYLÜL) 2025

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi, matematiksel modellemede önemli bir yere sahip olan Fredholm ve Volterra integro-diferensiyel denklemlerini ve bu denklemlerin sayısal çözüm yöntemlerini incelemesine odaklanmaktadır. Çalışma, ikinci tip Volterra integro-diferensiyel denklemler için Adomian ayrıştırma metodu, Laplace dönüşüm metodu ve seri çözüm metodu gibi çeşitli sayısal tekniklerin yanı sıra, bu denklemlerin başlangıç değer problemlerine ve Volterra integral denklemlerine dönüştürülmesi süreçlerini ele almaktadır. Birinci tip Volterra integro-diferensiyel denklemleri için ise Laplace dönüşüm metodu öne çıkmaktadır. Fredholm integro-diferensiyel denklemleri bölümünde, ikinci tip denklemler için doğrudan hesaplama metodu, Adomian ayrıştırma metodu ve değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu incelenmekte ve gürültü teriminin etkileri ile seri çözüm yöntemlerinin uygulanabilirliği tartışılmaktadır. Tez, bu sayısal yöntemlerin avantajlarını ve sınırlılıklarını değerlendirerek, integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde karşılaşılan zorlukların üstesinden gelmek için farklı çözüm yolları amaçlamaktadır.

Bilim Kodu	:	20406
Anahtar Kelimeler	:	İntegro-diferensiyel denklemler, Volterra integro-diferensiyel denklemler, Fredholm integro-diferensiyel denklemler.
Sayfa Adedi	:	66
6Danışman	:	Prof. Dr. Adil MISIR

SOLUTİON METHODS FOR INTEGRAL AND INTEGRO-DİFFERENTİAL EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Fatma Büşra AKTAŞ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

(SEPTEMBER) 2025

ABSTRACT

This master's thesis focuses on examining Fredholm and Volterra integro-differential equations, which hold significant importance in mathematical modeling, along with their numerical solution methods. The study delves into various numerical techniques such as Adomian decomposition method, Laplace transformation method, and series solution method for second type Volterra integro-differential equations, as well as addressing the processes of converting these equations into initial value problems and Volterra integral equations. Laplace transformation method stands out for first type Volterra equations. In the section concerning Fredholm integro-differential equations, direct calculation method, Adomian decomposition method, and modified Adomian decomposition method are explored for second type equations, while discussing the applicability of noise term and series solution methods. Quickly, by evaluating the advantages and limitations of these numerical methods, different solution approaches aim to overcome the difficulties encountered in solving integro-differential equations.

Science Code	:	20406
Key Words	:	Integro-differential equations, Volterra integro-differential equations, Fredholm integro-differential equations.
Page Number	:	66
Supervisor	:	Prof. Dr. Adil MISIR

TEŞEKKÜR

Bu akademik serüvenimin en önemli kilometre taşlarından biri olan yüksek lisans tez çalışmamın tamamlanmasında, akademik rehberliği ve kıymetli katkılarıyla tez sürecime yön veren değerli danışman hocam Prof. Dr. Adil MISIR'a çok teşekkür ederim. Bilgi ve deneyimlerinizin ışığında gelişen bu çalışma, sizin değerli katkılarınızla daha da derinleşmiş ve zenginleşmiştir.

Eğitimim için ömrünü adayan, sevgisi ve fedakârlıklarıyla beni bugünlere getiren, kısa süre önce kaybettiğim canım annem Bedriye SAYAT'a ve canım aileme derin minnetimi ve teşekkürlerimi sunuyorum. Onların gösterdiği sabır, emek ve sevgi bu tezin ardındaki en büyük güç olmuştur.

En özel teşekkürlerimi, hayatımın en kıymetli parçası, sevgili eşim Muhammed Furkan AKTAŞ'a ve bu süreçte önce annesinin karnında, sonra kucağımızda bana en büyük desteği veren canım oğlum Alp Tuna AKTAŞ'a ediyorum. Varlığınız, sevginiz ve sabrınız bu yolculuğu benim için anlamlı kıldı. Siz olmasaydınız, bu tez çalışması asla tamamlanamazdı. Her şey için sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2.TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Tanımlar 3

2.2. Laplace Dönüşümü ve Özellikleri 7

2.3. Ters Laplace Dönüşümü ve Özellikleri 11

2.4. İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Sınıflandırılması 13

3. VOLTERRA İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEMLER 14

3.1. İkinci Tip Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemler 15

3.1.1. Seri Çözüm Metodu 16

3.1.2. Adomian Ayrıştırma Metodu 18

3.1.3. Laplace Dönüşüm Metodu 21

3.1.4. Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerinin Başlangıç Değer Problemlerine Dönüştürülmesi 23

3.1.5. Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerinin Volterra İntegral Denklemlerine Dönüştürülmesi 25

3.1.6. Gürültü Terimi 25

3.2. Birinci Tip Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemler 28

3.2.1. Birinci Tip Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemler Çözümü İçin Laplace Dönüşüm Metodu 29

4. FREDHOLM İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEMLER 31

4.1. İkinci Tip Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler 31

4.1.1. Doğrudan Hesaplama Metodu 32

4.1.2. Adomian Ayrıştırma Metodu 34

4.1.3. Değiştirilmiş Adomian Ayrıştırma Metodu 38

4.1.4. Gürültü Terimi 39

4.1.5. Seri Çözüm Metodu 40

5. VOLTERRA ve FREDHOLM İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN UYGULAMA ALANLARI 43

5.1. Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemini Kharrat-Toma Dönüşümü İle Çözümü 43

5.1.1. Kharrat-Toma İntegral Dönüşümü 45

5.1.2. Kharrat-Toma Dönüşümü ile Volterra İntegro-Direfensiyel Denklemlerin Çözümü 50

5.1.3. Örnekler 53

5.2. Elektromanyetik Alanın Modellenmesi için Volterra veya Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler 56

5.3. Popülasyon Dinamikleri Modellenmesi için Volterra veya Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler 57

5.4. Kimya ve Reaksiyon Mühendisliği için Volterra veya Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler 57

5.5. Finans ve Ekonomi için Volterra veya Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler 58

5.6. Çevre Bilimi için Volterra veya Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler 58

6. SONUÇ VE ÖNERİLER 59

KAYNAKLAR 63

ÖZGEÇMİŞ 66

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathcal{K}(x,t)$	Çekirdek Fonksiyonu
L^{-1}	Çift Katlı İntegral Operatörü
$\mathcal{B}[f(x)]$	Kharrat-Toma Dönüşümü
$*$	Konvolüsyon İşlemi
λ	Lamda
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}\{f(t)\}$	Ters Laplace Dönüşümü

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
BDP	Başlangıç Değer Problemi
FİDD	Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemi
VİDD	Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemi

1. GİRİŞ

İntegro-diferensiyel denklemler, diferensiyel denklemlerle integral denklemlerini birleştiren bir bilinmeyen fonksiyonu integral içerisinde diferensiyel terimleri içeren denklemlerdir. Bu denklemler, birçok bilim ve mühendislik alanında karşılaşılan çeşitli doğal fenomenlerin matematiksel modellenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. İntegro-diferensiyel denklemler, belirli bir aralıkta bir fonksiyonun değerleri arasındaki ilişkiyi ifade eden integral terimleri içerdikleri için diferensiyel denklemlerden daha genel bir yapıya sahiptirler.

İntegro-diferensiyel denklemlerin temel özellikleri arasında lineer ve lineer olmayan, integral terimlerinin varlığı, başlangıç koşullarının veya sınır koşullarının belirli ve belirsiz olabilmesi ve çözümün analitik veya sayısal yöntemlerle bulunması gerekebilir. Bu denklemler, belirli bir aralıkta türevlenen ve integral alanı içeren herhangi bir fonksiyonu modelleyebilirler.

Bu denklemlerle ilgili temel kavramları inceleyen çalışmalar, 19. yüzyılın ortalarında ortaya çıkmıştır. Denklemlerin gelişimi, matematikçilerin diferensiyel denklemler ve integral denklemleri arasındaki ilişkiyi daha derinlemesine anlamalarıyla hız kazanmıştır.

İntegro-diferensiyel denklemler, integral sınırlarına göre iki ana türe ayrılır: Volterra ve Fredholm [1]. Fredholm ve Volterra, integro-diferensiyel denklemlerle bağlantılı olarak adını duyuran iki önemli matematikçidir. Volterra integro-diferensiyel denklemleri, integral sınırlarının değişken olduğu durumlarda ortaya çıkar. Bu denklemler, Vito Volterra tarafından 1887 yılında tanıtılmış ve daha sonra Traian Lalescu tarafından 1908 yılında doktora tezinde incelenmiştir. Fredholm integro-diferensiyel denklemleri, integral sınırlarının sabit olduğu durumlarda ortaya çıkar. Bu denklemler, Ivar Fredholm tarafından 1900 yılında tanıtılmış ve daha sonra Émile Picard, David Hilbert ve diğerleri tarafından geliştirilmiştir. Her iki matematikçinin çalışmaları, integro-diferensiyel denklemlerin teorik ve uygulamalı çalışmalarında temel bir rol oynamıştır.

İntegro-diferensiyel denklemler, bilinmeyen fonksiyonun kendisinin ve türevlerinin integralin hem içinde hem de dışında yer alabilmesidir. Diferensiyel denklemlerin integral formlarına dönüştürülmesi, integro-diferensiyel denklemlerin yaygın bir kaynağıdır. Bu denklemler, Volterra'nın çalışmalarına dayanan teorinin bir uzantısı olarak kabul edilebilir.

Bu denklemlerin özellikleri denklemin türüne, integral sınırlarına, integral çekirdeğine ve başlangıç veya sınır koşullarına bağlıdır. Bu denklemlerin çözümleri, genellikle analitik olarak bulunamaz veya çok zordur. Analitik çözümü mümkün olmayan bu tür denklemler için çeşitli yaklaşık ve sayısal yöntemler tercih edilmektedir. Bu yöntemlerin her biri belirli durumlar için uygundur ve avantajları ile sınırlılıkları farklılık göstermektedir.

Sayısal yöntemler, denklemleri ayrıklaştırarak veya yaklaşık olarak çözerek, denklemin çözümünü belirli noktalarda veya aralıklarda hesaplamayı amaçlar.

- Sayısal yöntemlerin bazı örnekleri şunlardır: Euler metodu, Runge-Kutta metodu, sonlu fark metodu, Adomian ayrışım metodu, Laplace dönüşümü metodu, Fourier dönüşümü metodu, vb.

Yaklaşık yöntemler, matematiksel problemlerin çözümlerini belirli bir fonksiyon sınıfı veya bazı fonksiyonlar kullanarak yaklaşık olarak ifade etmeye çalışır. Genellikle, analitik çözümleri karmaşık veya hesaplanması zor olan problemler için başvurulan bu yöntemler, matematiksel modellemeyi ve problemlerin çözümünü daha erişilebilir ve anlaşılır hale getirir [2].

- Yaklaşık yöntemlerinin bazı örnekleri şunlardır: Polinom yaklaşımı, Taylor serisi yaklaşımı, Legendre polinomları yaklaşımı, Hermite polinomları yaklaşımı, Bessel fonksiyonları yaklaşımı, vb. [2].

Bu yöntemlerin seçimi, denklemin özelliklerine, istenilen doğruluk seviyesine, hesaplama maliyetine ve uygulama alanına göre değişmektedir.

Bu tez, integro-diferensiyel denklemlerin çeşitli özellikleri, çözüm yöntemleri ve Fredholm ile Volterra integro-diferensiyel denklemleri gibi özel durumlarını incelemeyi amaçlamaktadır. Tezde integro-diferensiyel denklemlerin tarihçesi, temel kavramları ve sınıflandırması detaylı bir şekilde ele alınmıştır ve bu denklemlerin çözümünde kullanılan çeşitli yöntemler incelenmiştir. Ayrıca, integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan teorik ve sayısal yöntemlerin detaylı bir açıklaması yapılmıştır. Son olarak, tezde elde edilen bulgular özetlenmiş ve gelecekteki araştırmalar için öneriler verilmiştir. Bu tezin sonucunda elde edilen bulgular, integro-diferensiyel denklemlerin özellikleri ve çözüm yöntemleri hakkındaki literatüre katkıda bulunmayı amaçlamaktadır

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Tanımlar

2.1.1 Tanım (İntegral Denklemi)

İntegral işareti altında bilinmeyen bir fonksiyonu içeren denklemlere integral denklemleri denir [3].

Genel olarak karşımıza çıkan integral ve integro-diferensiyel denklemleri şunlardır; Lineer integral denklemleri, lineer olmayan integral denklemleri, Volterra integral denklemleri, Fredholm integral denklemleri, singüler (tekil) integral denklemleri, Volterra integro-diferensiyel denklemleri ve Fredholm integro-diferensiyel denklemleridir.

Tek değişkenli fonksiyonlarda bir integral denklemin en sık karşılaşılan modeli,

$$\psi(x)u(x) = \text{ff}(x) + \lambda \int_{a}^{\text{b}} \mathcal{K}(x,t)u(t)dt \tag{2.1}$$

şeklinde olup burada a ve b sabitler; λ bir parametre, $\psi(x), \text{ff}(x), \mathcal{K}(x,t)$; tanım bölgesi $a \le x,\ t \le \text{b}$ üzerinde bilinen fonksiyonlar; $u(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. $\mathcal{K}(x,t)$ fonksiyonuna da çekirdek adı verilir. İntegral denklemlerin farklı sınıflandırılmaları mevcuttur.

2.1.2. Tanım (Lineer İntegral Denklemleri veya Lineer İntegro-Diferensiyel Denklemler)

İntegral işaretinin altındaki $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu kuvveti bir olan denklemlerdir. $u(x)'in$ kuvveti birden farklı veya $e^u, log\, u$ gibi kuvveti yoksa lineer olmayan integral denklemler veya lineer olmayan integro-diferensiyel denklemler olarak adlandırılır.

Lineer bir integral denklemin en genel şeklini

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{\text{b}} \mathcal{K}(x,t)u(t)dt \tag{2.2}$$

formunda verebiliriz. Burada a ve b birer sabit sayı, λ bir parametre, $\text{ff}(x)$ ve $\mathcal{K}(x,t)$ tanım bölgesi $a \le x \le \text{b}$ ve $a \le t \le \text{b}$ olmak üzere bilinen bir fonksiyonlardır. $u(x)$ ise bilinmeyen bir fonksiyondur. Özel olarak $\text{ff}(x)$ fonksiyonu integral denklemin kaynak terimi, $\mathcal{K}(x,t)$ fonksiyonu da x ve t değişkenlerine bağlı integral denklemin çekirdeği

olarak adlandırılır. Eş. 2.2 de lineer integral denklemine $f(x) = 0$ ise homojen, aksi halde homojen olmayan lineer integral denklemi denir [4].

2.1.3. Tanım (Konvolüsyon)

$f(t)$ *ve* $g(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu (katlaması) $(f * g)(t)$ ile gösterilir ve

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{2.3}$$

belirli integrali ile tanımlanır [5].

2.1.4. Tanım **(**Konvolüsyon Çekirdekli İntegral Denklemi)

Eğer $\mathcal{K}(x,t)$ çekirdeği sadece $x - t$ farkına bağlıysa yani $x - t$ ifadesini değişken olarak alan tek değişkenli bir fonksiyon ise bu integral denklemine konvolüsyon çekirdekli integral denklemi denir [6]. *Eş. 2.3* de verilen $(f * g)(t)$ ifadesi bu tanıma uygun bir konvolüsyon örneğidir.

2.1.5. Tanım (Birinci Tip İntegral Denklemi)

İntegral denkleminde bilinmeyen fonksiyonun sadece integralin içinde olduğu denklemlere birinci tip integral denklemi denir. Yani Eş 2.2 denkleminde $f(x) = 0$ olan denklemlerin genel formu;

$$f(x) = \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x,t)u(t)dt \tag{2.4}$$

şeklindedir [6].

2.1.6. Tanım (İkinci Tip İntegral Denklemi)

Bilinmeyen fonksiyonun hem integralin içinde hem de doğrudan dışarıda yer aldığı integral denklemleri, ikinci tür (ya da ikinci tip) integral denklemleri olarak tanımlanır. Yani Eş. 2.2 denkleminde $f(x) \neq 0$ olan denklemlerin genel formu;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.5}$$

şeklindedir [6].

2.1.7. Tanım (Volterra İntegral Denklemi)

Bir integral denkleminde integralin sınırlarından en az biri değişken olan denklemlere Volterra integral denklemleri adı verilir. Özel olarak;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.6}$$

bu formda yazılan denklemler *ikinci tip Volterra integral denklemleri* olarak adlandırılır. Eğer $f(x) = 0$ ise denklem *homojen Volterra integral denklemi* olarak nitelendirilir. Homojen Volterra integral denklemi, yalnızca bilinmeyen fonksiyonu ve çekirdek fonksiyonunu içeren özel bir durumdur.

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.7}$$

şeklindedir [6].

2.1.8. Tanım (Fredholm İntegral Denklemi)

Alt ve üst sınırları sabit olan integral ifadelerini içeren denklemler, *Fredholm tipi integral denklemler* olarak sınıflandırılır. Bu denklemin genel formu;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_b^a K(x,t)u(t)dt \tag{2.8}$$

şeklindedir. Eğer $f(x) = 0$ ise bu denklemlere homojen Fredholm integral denklemleri adı verilir. Genel formu;

$$u(x) = \lambda \int_b^a K(x,t)u(t)dt \tag{2.9}$$

şeklindedir [6].

2.1.9. Tanım (Singüler (Tekil) İntegral Denklem)

$\mathcal{K}(x,t)$ çekirdek fonksiyonu $B=\{(x,t)\colon a\le x\le b,\ a\le t\le b\}$ bölgesinde sürekli ise integral denklemine regüler (düzgün) integral denklem, $\mathcal{K}(x,t)$ çekirdek fonksiyonu bu aralıkta süreklilik göstermiyorsa, bu tür denklemler *tekil (singüler) integral denklemler* olarak adlandırılır [6].

Örnek olarak; $\mathcal{K}(x,t), 0\le x\le\infty$ aralığında bir çekirdek olmak üzere, $\mathcal{K}(x,t)=sin(xt)$ sürekli çekirdeği ile

$$f(x)=\int_0^{\infty} sin(xt)u(t)dt$$

denklemi birinci tip regüler integral denklemidir. Benzer şekilde, $\mathcal{K}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{x-t}}$ singüler çekirdeği ile

$$f(x)=\int_0^{x}\frac{1}{\sqrt{x-t}}u(t)dt \tag{2.10}$$

denklemi birinci tip singüler integral denklemidir.

Eş. 2.10 verilen denklem, birinci tip singüler integral denklem örneği Abel problemleri ve genelleştirilmiş Abel integral denklemleri olarak adlandırılır. Bu adlandırma, Norveçli matematikçi Niels Abel'in 1823 yılında matematiksel fizik alanındaki araştırmalarında bu denklemleri icat etmesinden kaynaklanmaktadır.

2.1.10. Tanım (Genelleştirilmiş Abel İntegral Denklem)

Genelleştirilmiş Abel integral denklemi ve *zayıf singüler (tekil)* integral denklemleri;

$$f(x)=\int_0^{x}\frac{1}{(x-t)^{\alpha}}u(t)dt, \tag{2.11}$$

ve

$$u(x)=f(x)+\int_0^{x}\frac{1}{(x-t)^{\alpha}}u(t)dt, \tag{2.12}$$

şeklinde verilen bir integral denklemleridir. Burada $f(x)$ bilinen bir fonksiyon olup, $u(t)$ ise bulunması gereken bilinmeyen bir fonksiyondur. Burada $0 < \alpha < 1$ parametresi integralin türüne göre değişebilir. Eğer $\alpha = \frac{1}{2}$ olarak alırsak o zaman denklemimiz (2.10) dan;

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t)dt$$

şeklini alır. Bu şekilde oluşan denkleme *Abel singüler (tekil)* integral denklem adı verilir [6].

2.2. Laplace Dönüşümü ve Özellikleri

2.2.1. Tanım (Laplace Dönüşümü)

$f(t)$, $t \geq 0$ için tanımlı bir fonksiyon olsun ve $t < 0$ için $f(t) = 0$ kabul edilsin. Burada $s > 0$ reel bir parametre olmak üzere, e^{-st} ifadesi t reel değişkeninin bir fonksiyonu olmak üzere;

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

integrali var olacak şekilde s parametresi için bir değer bulmak mümkünse bu değere $f(t)$ fonksiyonunun *Laplace dönüşümü* denir. Bu dönüşüm $\mathcal{L}\{f(t)\}$ veya $\mathcal{F}(s)$ ifadeleri ile

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (2.13)$$

şeklinde gösterilir [7].

Laplace dönüşümü Fransız matematikçi Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) tarafından tanımlanmıştır**.** Laplace dönüşümü, zaman alanındaki bir $f(t)$ fonksiyonunu frekans alanındaki bir $\mathcal{F}(s)$ fonksiyon ile ilişkilendirir. Laplace dönüşümü ile ilgili olarak, konvolüsyon teoremi iki fonksiyonun dönüşümlerinin çarpımının evrişimleriyle ilişkilidir. *Tanım 2.1.3.* den konvolüsyon teoreminin ispatını yapabiliriz.

2.2.2. Tanım (Üstel Mertebeli Fonksiyon)

Bir t_0 sabiti verilsin. Eğer $t \geq t_0$ için tanımlı bir $f(t)$ fonksiyonu için

$|f(t)| \leq M e^{at}$

şeklinde bir eşitsizliği sağlayacak şekilde M ve a pozitif sayıları bulunabiliyor ise, $f(t)$ fonksiyona a-üstel mertebeli veya kısaca üstel mertebeden bir fonksiyondur denir [7].

2.2.3. Teorem (Laplace Dönüşümün Varlığı)

Kabul edelim ki $f(t)$ reel değerli fonksiyonu her sonlu $\alpha \leq t \leq b$ alt aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden olsun. Bu durumda $s > \alpha$ için

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{2.14}$$

Laplece dönüşümü mevcuttur [7].

2.2.4. Teorem (Konvolüsyon Teoremi)

$f(t)$ ve $g(t)$ nin Laplaceleri mevcut ise

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s) \tag{2.15}$$

dir. Burada $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ dir.

İspat

Konvolüsyon tanımından

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} dt \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

yazabiliriz. İntegrasyonların sırasını değiştirir ve içteki integralde $\eta = t - \tau$ dönüşümü yaparsak;

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} &= \int_0^\infty f(\tau) \int_\tau^\infty e^{-st}\, g(t-\tau)dt \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s t}d\tau \int_0^\infty e^{-s\eta} g(\eta)d\eta \\ &= \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}\end{aligned}$$

buluruz. Konvolüsyon işlemi değişme, birleşme ve dağılma özelliklerine sahiptir.

■

2.2.5. Teorem (Laplace Lineerlik Özelliği)

Eğer $f_1, f_2, \dots f_n$ fonksiyonları Laplace dönüşümü mevcut olan fonksiyonlar ise $c_1, c_2, \dots, c_n$ ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\} + \cdots + c_n\mathcal{L}\{f_n(t)\} \qquad (2.16)$$

dir [8].

2.2.6. Teorem (Birinci Kaydırma Özelliği)

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{F}(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \mathcal{F}(s-a), \qquad (s > \alpha) \qquad (2.17)$$

dır [8].

2.2.7. Teorem (Skaler Değişim Özelliği)

Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{F}(s)$ ise;

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}\mathcal{F}\left(\frac{1}{a}s\right), a \neq 0, \qquad (2.18)$$

dir [8].

2.2.8. Teorem (Türevin Laplace Dönüşümleri)

Kabul edelim ki f sürekli f', $0 \le t \le A$ aralığında parçalı sürekli olsun. $t \ge M$ için $|f(t)| \le K.e^{at}$ koşulunu sağlayan K, a ve M sabitleri mevcut olsun. Bu durumda $s > a$ için $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ vardır ve

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \tag{2.19}$$

eşitliğini sağlar [8].

2.2.9. Teorem

$t \ge 0$ için tanımlı f reel değerli fonksiyonun $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ türevleri var, sürekli ve aynı üstel mertebeden fonksiyonlar olsun. Eğer $f^{(n)}$ türev fonksiyonu da her sonlu $0 \le t \le t_0$ aralığından en azından parçalı sürekli ise;

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0) \tag{2.20}$$

dır [8].

2.2.10. Teorem

Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur [8].

i. $p > -1$ için

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^p \, du, \qquad s > 0 \tag{2.21}$$

dir.

ii. *('t^n' ile çarpma özelliği):* $n \in$ N için

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \mathcal{F}^{(n)}(s) \tag{2.22}$$

dir.

iii. *('t' ile bölme özelliği):* Eğer $\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t}$ mevcut ise;

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} \mathcal{F}(u)du \tag{2.23}$$

dir.

iv. *(İntegrallerin Laplace Dönüşümleri):*

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0}^{t} f(u)du\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{F}(s) \tag{2.24}$$

dir.

v. $\lim_{s\to\infty}\mathcal{F}(s) = 0$ dir.

2.3. Ters Laplace Dönüşümü ve Özellikleri

2.3.1. Tanım (Ters Laplace Dönüşümü)

Laplace dönüşümü $\mathcal{F}(s)$ olan bir $f(t)$ fonksiyonuna, $\mathcal{F}(s)$ fonksiyonunun *ters Laplace* dönüşümü denir. Bu durum kısaca

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s)\} \tag{2.25}$$

ile gösterilir [8].

2.3.2. Teorem (Ters Laplace Lineerlik Özelliği)

Eğer $i = 1,2,\ldots,n$ *için* $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}_i(s)\}$ mevcut ise $c_1, c_2, \ldots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere;

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{c_1\mathcal{F}_1(s) + c_2\mathcal{F}_2(s) + \cdots + c_n\mathcal{F}_n(s)\}\\ = c_1\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}_1(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}_2(s)\} + \cdots + c_n\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}_n(s)\}\end{aligned} \tag{2.26}$$

dir [8].

2.3.3. Teorem (Ters Laplace Skaler Değişim Özelliği)

Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s)\} = f(t)$ ise,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(as)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right), \qquad (a \neq 0) \tag{2.27}$$

dir [8].

2.3.4. Teorem (Ters Laplace Birinci Öteleme Özelliği)

Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s)\} = f(t)$ ise,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s-a)\} = e^{at} f(t) \tag{2.28}$$

dir [8].

2.3.5. Teorem (Ters Laplace İkinci Öteleme Özelliği)

Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s)\} = f(t)$ ise,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}\mathcal{F}(s)\} = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases} \tag{2.29}$$

dir [8].

2.3.6. Teorem (Türevlerin Ters Laplace Özelliği)

Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s)\} = f(t)$ ise,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{F}^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t) \tag{2.30}$$

dir [8].

2.3.7. Teorem (İntegrallerin Ters Laplace Özelliği)

Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s)\} = f(t)$ ise,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_{s}^{\infty}\mathcal{F}(u)du\right\}=\frac{1}{t}f(t) \tag{2.31}$$

dir [8].

2.3.8. Teorem ('s' İle Çarpma Özelliği)

Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s)\}=f(t)$ ve $f(0)=0$ ise,

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\mathcal{F}(s)\}=f'(t) \tag{2.32}$$

dir [8].

2.3.9. Teorem ('s' İle Bölme Özelliği)

Eğer $\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{F}(s)\}=f(t)$ ise,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathcal{F}(s)\right\}=\int_{0}^{t}f(u)du \tag{2.33}$$

dur [8].

Yukarıdaki şekilde tanımlanan Laplace ve ters Laplace dönüşümü ve onlara ait özellikler integral denklem veya integro-diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmada önemli bir araç olarak kullanılır.

2.4. İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegro-diferensiyel denklemler, başta mühendislik ve uygulamalı bilimler olmak üzere birçok alanda ortaya çıkan fiziksel sistemlerin matematiksel modellenmesinde kritik bir rol oynamaktadır. Özellikle başlangıç ve sınır değer problemleri, belirli dönüşümler yoluyla integro-diferensiyel denklem formuna indirgenebilmektedir. Bu tür denklemlerin sınıflandırılmasında ise, integro-diferensiyel denklemler için geliştirilmiş sınıflandırma yaklaşımları ve yöntemleri büyük ölçüde geçerliliğini korumakta ve benzer şekilde uygulanmaktadır [9].

3. VOLTERRA İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Başlangıç değerli diferensiyel problemlerini, integral biçiminde ifade edilmek istendiğinde ortaya çıkan bu yeni yapıdaki denklemlere, matematiksel literatürde Volterra integro-diferensiyel denklemleri şeklinde adlandırılmıştır.

Bu tür denklemler $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunu hem integral işareti içinde hem de integral işareti dışında $u^{(n)}(x)$, $n \geq 1$ şeklinde türevleriyle birlikte integral dışında içermektedir. Volterra tipi integro-diferensiyel denklemlerin genel tanımı gereği, bu yapılarda da entegrasyon sınırlarından en az biri bağımlı değişkene bağlıdır; dolayısıyla integral sınırları sabit değildir [9,10,11,12].

Denklemin genel formu;

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{3.1}$$

şeklindedir.

Bu denklemde, $u(x)$ fonksiyonu, x bağımsız değişkenine göre n-inci mertebeden türeve sahip bir fonksiyon, $f(x)$, x bağımsız değişkenine bağlı olan verilmiş (bilinen) bir fonksiyon, λ sabit bir parametre ve $K(x,t)$, x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir çekirdek fonksiyonudur. Örnekler verecek olursak;

$$u'(x) = \int_0^x xu(t)dt$$

denklemi birinci tip Volterra integro-diferensiyel denklemi ve

$$u'(x) = cos(x) + \int_0^x (x-t)^2 u(t)dt$$

denklemi de ikinci tip Volterra integro-diferensiyel denklemidir.

3.1. İkinci Tip Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemler

İkinci tip VİDD, bir fonksiyonun integraliyle kendisi arasındaki ilişkiyi ifade eden diferensiyel denklemlerdir; bu denklemler, dinamik sistemlerin, popülasyon modellerinin, elektrik devrelerinin ve diğer birçok uygulama alanının matematiksel modellenmesinde önemli rol oynarlar. Örneğin, birçok fiziksel sistemde, gecikmeli geri bildirimlerin veya hafıza etkilerinin hesaba katılması gerektiğinde, ikinci tip VİDD kullanılır. Ayrıca, bu tür denklemler, ekolojik modellerde türler arası etkileşimleri ve dengeleri açıklamak için kullanılabilir.

İkinci tip VİDD, homojen denklemler ve homojen olmayan denklemler olarak sınıflandırabiliriz. $\mathfrak{f}(x) = 0$ ise bu denklemlere homojen denklemler denir. $\mathfrak{f}(x) \neq 0$ ise bu denklemlere ise homojen olmayan denklemdir denir [13].

Örneğin;

$$u''(x) = 3 + \frac{2}{6}\int_0^x (x - t)u(x)dx$$

denkleminde $\mathfrak{f}(x) = 3$ olduğundan bir homojen olmayan ikinci tip Volterra integro-diferensiyel denklemidir.

O zaman integrasyon sınırlarının en az biri değişken olan ve $\mathfrak{f}(x) \neq 0$ homojen olmayan integral denklemlerine ikinci tip VİDD olarak tanımlarız. Genel formu Eş. 3.1'den;

$$u^{(n)}(x) = \mathfrak{f}(x) + \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x,t)u(t)dt$$

şeklindedir.

Bundan sonraki kesimde ikinci tip VİDD de sayısal çözme metotları olan seri çözüm metodu, Adomian ayrıştırma metodu, Laplace dönüşüm metodu, VİDD'in başlangıç değer problemlerine dönüştürülmesi, Volterra integro-diferensiyel denklemlerinin Volterra integral denklemlerine dönüştürülmesi ve birinci tip Volterra integro-diferensiyel denklemlerini ele alacağız.

3.1.1. Seri Çözüm Metodu

VİDD' nin çözümü için yaygın olarak kullanılan yöntemlerden biri seri çözüm metodudur. Bu yöntem, fonksiyon serisi yöntemleri, çözümün seri açılımı ile ifade edilebildiği özel durumlarda uygulanır. Reel değerli $u(x)$ fonksiyonu, her mertebeden türevlere sahip olduğunda ve tanım bölgesindeki bir x_0 noktası etrafında

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{3.2}$$

şeklinde yakınsayan bir Taylor serisi geliştirebiliyorsa, analitik fonksiyon olarak tanımlanır [21]. Özellikle x_0 seçildiğinde;

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \qquad n = 0,1,2, \ldots$$

dolayısıyla

$$a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \ldots$$

olmak üzere;

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

bu şekilde bir seri açılımına ulaşılır. Yöntem analitik $u(x)$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasındaki Taylor açılımının, ikinci tip VİDD 'de yerine yazılması ile çözümü sağlanır. $T\big(f(x)\big), f(x)$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ civarındaki Taylor serisi olmak üzere;

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

VİDD'inin $u^{(k)}(0) = k!\,\alpha_k, \quad 0 \le k \le n-1$ koşuluna uyan çözümü problemini ele alalım. Bu durumda

$$a_0 = u(0), \; a_1 = u'(0), \qquad a_2 = \frac{1}{2!}u''(0), \qquad a_3 = \frac{1}{3!}u'''(0)$$

eşitliklerini elde ederiz. Seri açılımlarını Eş. 3.1'de verilen denklemde yerlerine yazdığımızda;

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^{(n)} = \mathcal{T}\big(f(x)\big) + \mathcal{K}(x,t)\int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right) dt$$

şeklini alır ve yine buradan da $\mathcal{T}\big(f(x)\big), f(x)'in$ Taylor serisi olmak üzere denklem

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)^{(n)} = \mathcal{T}\big(f(x)\big) + \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x,t)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)\, dt \qquad (3.3)$$

elde edilen çözüm bu son şekli alır [20]. Metodun işleyişini daha net gösterebilmek için, şimdi bir örnek üzerinden uygulamasını yapalım.

Örnek

$$u'(x) = 2 + \int_0^x u(t)\, dt, \quad u(0) = 0$$

ile verilen Volterra integro-diferensiyel b.d.p.'ni seri çözümü metodunu kullanarak çözünüz.

Çözüm

Eğer $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisini denklemde yerine yazarsak;

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = 2 + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dt$$

elde ederiz. Daha sonra integralden kurtulup eşitliği yeniden yazarsak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{(n-1)} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$$

elde etmiş oluruz. Buradan ise x'in kuvvetleri eşitlenirse;

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a_{n-1} x^n$$

bulunur. Başlangıç koşullarından $a_0 = 0$ olduğu kullanılırsa;

$$a_0 = 0,\ \ a_1 = 2\ ,\ \ a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{n(n+1)}, n \geq 1$$

genel indirgeme formülünü elde ederiz. Buradan ise

$n = 1$ için $\quad a_2 = 0$

$n = 2$ için $\quad a_3 = \frac{1}{3}$

$n = 3$ için $\quad a_4 = 0$

$n = 4$ için $\quad a_5 = \frac{1}{60}$

$\vdots$

elde ederiz. Bu katsayıları kullanarak çözümü $u(x)$ şeklinde seri olarak yazabiliriz:

$$u(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = 2x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

olarak elde ederiz. Bu $u(x)$ fonksiyonunun Maclaurin serisinin $sinh(x)$ fonksiyonuna ait olduğunu gösterir. Yani, $u(x) = x + sinh(x)$ olarak bulunur.

3.1.2. Adomian Ayrıştırma Metodu

Adomian ayrıştırma metodu, George Adomian tarafından geliştirilmiş yarı-analitik bir çözüm tekniğidir. Bu yöntem, özellikle ikinci tür VİDD'in analitik ya da yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde etkin olarak kullanılmaktadır. Yöntemin temel yaklaşımı, denklemi doğrusal ve doğrusal olmayan bileşenlerine ayırmak, doğrusal kısmı doğrudan çözmek ve doğrusal olmayan kısmı ise Adomian polinomları yardımıyla temsil etmektir [15,16,17,18].

Bu yöntemin avantajı, herhangi bir küçük parametreye veya iterasyon sürecine ihtiyaç duymamasıdır. Birçok bilim, mühendislik, fizik ve biyoloji alanında önemli uygulamalara sahiptir.

Bu yöntemi daha detaylı gösterebilmek için standart formda tanımlanan ikinci türevin kullanıldığı VİDD'nin Eş. 3.1'den;

$$u''(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt\,, \qquad u(0) = a_0, \qquad u'(0) = a_1$$

formunu ele alalım. Eğer denklemin her iki tarafını iki kere integre edersek;

$$u(x) = a_0 + a_x + L^{-1}(f(x)) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)u(t)dt\right)$$

denklemini elde ederiz. Burada L^{-1} ile iki katlı bir integral operatörü gösterilmiştir.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{3.4}$$

seri açılımını kullanırsak denklemimiz;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_x + L^{-1}\big(f(x)\big) + L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)dt\right)$$

şeklini alır. Buradan ise;

$$u_0(x) \quad = \quad a_0 + a_x + L^{-1}\big(f(x)\big)$$

$$u_{k+1}(x) \quad = \quad L^{-1}\left(\int_0^x K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)dt\right), \qquad k \geq 0$$

iterasyonunu elde etmiş oluruz. Yukardaki işlemler ikinci tip VİDD çözüm algoritmasıdır. Aynı adımları izleyerek diğer mertebeden denklemleri de aynı şekilde çözebiliriz.

Örnek

$$u''(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt\,, \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1$$

ile verilen integro-diferensiyel başlangıç değer problemini (b.d.p.), Adomian ayrıştırma metodunu kullanarak çözünüz.

Çözüm

Bu denklem, ikinci tip VİDD'dir. Bu denklemin çözümü için Adomian ayrıştırma yöntemini kullanacağız. İlk olarak iki katlı integral operatörü olan L^{-1};

$$L^{-1}[\mathcal{G}](x) = \int_0^x \int_0^s \mathcal{G}(t)dtds,$$

olarak tanımlayalım. Denklemin her iki tarafını 0'dan x'e iki kez integralini alırsak;

$$u(x) = u(0) + u'(0)x + \frac{x^3}{3!} + L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u(t)dt\right) = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u(t)dt\right)$$

denklemini elde ederiz. $u(x)$ in Ayrıştırma bileşenlerine bakarsak;

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

$$u_0(x) = 1 + x + \frac{x^3}{3!}$$

$$u_1(x) = L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_0(t)dt\right) = \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$u_2(x) = L^{-1}\left(\int_0^x (x-t)u_1(t)dt\right) = \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}$$

$$\vdots$$

elde ederiz. Bu bilgilerle denklemin çözümünü:

$$u(x) = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$u(x) = coshx + 2sinhx - x$$

$$= \frac{3}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x} - x$$

olarak elde ederiz.

3.1.3. Laplace Dönüşüm Metodu

Laplace dönüşümü, VİDD'inde denklemin çözümü için kullanılan bir yöntemdir. Laplace dönüşümü, bir fonksiyonu başka bir fonksiyona dönüştüren bir integral dönüşümüdür [19]. Genellikle, bir fonksiyonun zaman alanındaki davranışını frekans alanına dönüştürmek için kullanılır. Bu dönüşüm, özellikle diferensiyel denklemlerin çözümünde, sinyal işleme ve kontrol sistemlerinde yaygın olarak kullanılan güçlü bir matematiksel araçtır.

Eğer Eş. 3.1 ile verilen,

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{x} K(x,t)u(t)dt$$

VİDD'nin $K(x,t)$ çekirdeği sadece $x-t$ farkına bağlı yani $x-t$ yi değişken kabul eden bir değişkenli bir fonksiyon ise bu integral denklemine konvolüsyon çekirdekli integro-diferensiyel denklemi deriz [20]. Bu çekirdeği fark çekirdeği olarak da adlandırabiliriz. Çekirdek fonksiyonu $K(x,t)$ fark formuna sahip,

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{x} K(x-t)u(t)dt \tag{3.5}$$

VİDD şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin çözümünü Laplace dönüşüm ile elde edebiliriz. Ayrıca bilindiği gibi $u(x)$'in türevlerinin Laplace dönüşümünün genel ifadesi;

$$L\left\{u^{(n)}(x)\right\} = s^{n}U(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}\,u^{(k-1)}(0) \tag{3.6}$$

şeklindedir [20]. Yukarda verilen Laplace bilgilerinden faydalanılarak VİDD'nin çözümünde Laplace dönüşüm metodunu uygulayabiliriz. Bir örnek ile bunu gösterelim.

Örnek

$$u'(x) = 2 + \int_0^x u(t)\,dt, \quad u(0) = 1$$

ile verilen Volterra integro b.d.p'ni , Laplace dönüşüm metoduyla çözünüz.

Çözüm

Verilen VİDD;

$$u'(x) = 2 + \int_0^x u(t)\,dt$$

olup bu denklemin çekirdek fonksiyonu $\mathcal{K}(x-t) = 1$ olarak belirlendiği için, Laplace dönüşüm yöntemi uygulanabilir. Öncelikle, denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulandığında, $\mathcal{U}(s) = \mathcal{L}\{u(x)\}$ ifadesi elde edilir.

$$\mathcal{L}\{u'(x)\} = \mathcal{L}\{2\} + \mathcal{L}\left\{\int_0^x u(t)\,dt\right\}$$

$$s\mathcal{U}(s) - u(0) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{U}(s)$$

olur. Bu ifadeden $u(0) = 1$ olduğunu kullanarak, $\mathcal{U}(s)$ belirlersek

$$\mathcal{U}(s) \quad = \quad \frac{2+s}{s^2-1}$$

olarak bulunur. Şimdi ters Laplace dönüşümü ile

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2+s}{s^2-1}\right\}$$

bulunur. İlk olarak bu ifadeyi basit kesirlerine ayıralım;

$$\mathcal{U}(s) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2+s}{s^2-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)} + \frac{1}{(s+1)}\right\}$$

şimdi ters Laplace dönüşümü operatörünün lineerliğinden yararlanarak, $\mathcal{U}(s)$ fonksiyonunun ters Laplace dönüşümünü

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{U}(s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)} + \frac{1}{(s+1)}\right\} = \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

olarak buluruz. Sonuç olarak denklemin tam çözümü;

$$u(x) = \frac{3}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$$

olarak elde edilir.

3.1.4. Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerinin Başlangıç Değer Problemlerine Dönüştürülmesi

Başlangıç değer problemleri, bir denklemin bir bağımsız değişken ile verilen yan koşullara uyan çözümünü bulma problemleridir. VİDD'nin başlangıç değer problemlerine dönüştürülmesi, bu denklemlerin çözümü için kullanılan bir yöntemdir ve birçok uygulamada önemli bir rol oynar.

Bu dönüşüm işlemi VİDD'nin ikinci türevli bir diferensiyel denklem haline getirilmesini içerir. Bu sayede, başlangıç değer problemlerine uygulanabilen standart diferensiyel denklemlerinin çözüm yöntemleri kullanılabilir hale gelir.

Örnek

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt\,, \quad u(0) = 3$$

ile verilen Volterra integro-diferensiyel b.d.p.'ni, başlangıç değer problemine dönüştürerek çözünüz.

Çözüm

$$u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt$$

VİDD, başlangıç değer problemine dönüştürmek için öncelikle denklemin her iki tarafının da Leibniz kuralı ile türev alınırsa

$$u''(x) = u(x)$$

elde edilir. Verilen denklemde $x = 0$ alınırsa

$$u'(0) = 1 + \int_0^0 u(t)dt = 1$$

bulunur. Buradan da $u'(0) = 1$ başlangıç koşulunu elde ederiz. Böylece VİDD'den

$$u''(x) - u(x) = 0, \qquad u(0) = 3, \qquad u'(0) = 1$$

şeklinde ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemi için bir b.d.p. elde edilir. Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem $r^2 - 1 = 0$ şeklinde olur. Bu denklemin köklerini $r_1 = 1, \quad r_2 = -1$ olarak buluruz. Denklemin genel çözümü ise

$$u(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

şeklinde elde edilir. Başlangıç şartlarını kullanarak,

$$u(0) = c_1 + c_2 = 3$$

$$u'(0) = c_1 - c_2 = 1$$

sistemi bulunur. Bu sistemden, $c_1 = 2$ ve $c_2 = 1$ bulmuş oluruz. Dolayısıyla, b.d.p. nin çözümünü,

$$u(x) = 2e^x + e^{-x}$$

olarak elde ederiz. Bu çözüm, Volterra integro-diferensiyel b.d.p.'ne dönüştürerek çözümüdür.

3.1.5. Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerinin Volterra İntegral Denklemlerine Dönüştürülmesi

Çekirdeğin $\mathcal{K}(x,t) = \mathcal{K}(x-t)$ ile tanımlanan bir fark çekirdeği olması koşuluyla, VİDD'ni kolaylıkla eşdeğer Volterra integral denklemine dönüştürebiliriz. Bu, denklemin her iki tarafının integrali alınarak ve başlangıç koşulları kullanılarak kolaylıkla yapılabilir. Volterra integral denklemine dönüşümü gerçekleştirmek için, çoklu integralleri tek bir integrale dönüştüren iyi bilinen aşağıdaki formülü kullanabiliriz [22].

$$\int_0^x \int_0^x u(t)dt = \int_0^x (x-t)u(t)dt, \tag{3.7}$$

$$\int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)dt = \frac{1}{2!}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt, \tag{3.8}$$

ve genelleştirilmiş formu;

$$\underbrace{\int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x}_{n\text{ -tane}} u(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}u(t)dt \tag{3.9}$$

dir. Eş. 3.9 Cauchy formülü olarak bilinir. Standart bir Volterra integral denklemine dönüşümü belirledikten sonra, daha önce bahsettiğimiz alternatif yöntemlerden herhangi birini kullanarak ilerleyebiliriz.

3.1.6. Gürültü Terimi

Kendi kendini iptal eden gürültü terimleri olgusu, Adomian ve Rach'in 1988 yılında yayınladıkları bir makalede tanımladıkları bir matematiksel yöntemdir. Bu yöntem, gürültü terimlerinin integral veya integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde ortadan kalktığı varsayımına dayanır. Bu sayede, denklemlerin kesin çözümleri, ilk denklemi kullanarak basitçe elde edilebilir [22]. Bu yöntem, özellikle lineer olmayan denklemlerin çözümünde yararlıdır. Lineer olmayan terimler, Adomian polinomları olarak adlandırılan sonsuz bir seri ile yaklaştırılır. Gürültü terimleri ise, integral veya integro-diferensiyel denklemlerin

çözümünde, sıfıra yaklaşan küçük terimler olarak kabul edilir. Bu şekilde denklemlerin kesin çözümleri, ilk denklemi kullanarak basitçe elde edilebilir.

Yalnızca iki bileşen olan $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ gürültü terimlerini içeren ikinci tip VİDD'nin tam sonucunu sadece ilk iki integrasyona bakılarak bulanabilir. $u_0(x)$ ve $u_1(x)$bileşenleri arasındaki kendi kendini iptal eden terimlere gürültü terimleri denir. Ancak bu gürültü terimi kullanarak kesin çözüme ulaşılamıyorsa kapalı formda bir çözüm veya yaklaşık bir çözüm elde etmek için $u(x)$ in diğer bileşenlerini belirlemeye devam etmeliyiz [22]. Şimdi bu yöntemi bir örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek

$$u'(x) = 3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\int_0^x u(t)dt, \qquad u(0) = 0$$

ile verilen Volterra integro-diferensiyel denklemini, Volterra integral denklemine dönüştürerek çözünüz.

Çözüm

Denklemin her iki tarafını 0'dan $x'e$ integralini alıp başlangıç koşullarını yerine yazalım. Daha sonra çift katlı integrali Cauchy formülünü kullanarak tek katlı integrale dönüştürelim.

O zaman;

$$u(x) = 3x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}\int_0^x \int_0^t u(s)dsdt$$

$$= 3x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}\int_0^x (x-t)u(t)dt.$$

denklemini elde ederiz. Yukardaki denklemin standart bir VİDD olduğu açıkça görülmektedir. Şimdi ayrıştırma yöntemiyle denklemimizi çözelim;

$$u_0(x) \quad = \quad 3x - \frac{x^3}{6}$$

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= \frac{1}{3}\int_0^x (x-t)\left(3t-\frac{t^3}{6}\right)dt \\
&= \frac{1}{3}\int_0^x \left(3t(x-t)-\frac{t^3}{6}(x-t)\right)dt \\
&= \frac{1}{3}\int_0^x \left(3tx-3t^2-\frac{t^3x}{6}+\frac{t^4}{6}\right)dt \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{3x^3}{2}-x^3-\frac{x^5}{24}+\frac{x^5}{30}\right) \\
&= \frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{360}.
\end{aligned}
$$

Sonuçta $u(x)'i, u_0(x)$ ve $u_1(x)'$in toplamı olarak yazarsak;

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) = \left(3x-\frac{x^3}{6}\right)+\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{360}\right)$$

elde ederiz. Buradan ortak terimleri iptal edersek;

$$u(x) = 3x-\frac{x^5}{360}$$

olarak bulunur.

Bir integro-diferensiyel denklemin çözümü sırasında, bazen ana denklem üzerinde daha küçük, ihmal edilebilir gürültü terimleri ortaya çıkabilir. Bu terimler, genellikle integral veya integro-diferensiyel terimlerin doğasından kaynaklanır ve çözüm sürecinde hesaba katılabilir. Ancak, bu terimlerin analitik olarak yönetilmesi zor olabilir.

Bir önceki örnekte verilen bir denklemin çözümünde $\frac{x^3}{6}$ gibi bir terim varsa ve bu terimin bir bileşeninde $u_0(x)$ ile diğer bileşeninde $u_1(x)$ gibi zıt işaretlerle göründüğünü fark ederiz. Bu durumda, bu gürültü terimini iptal ederiz. Ardından, örnek 3.1.6. verilen denklemde $u(x) = 3x - \frac{x^5}{360}$ olduğunu doğrularsak bu denklemin tam çözümünün olduğunu

gözlemleyebiliriz. Çünkü, denklemin çözümü $u(x) = 3x - \frac{x^5}{360}$ gürültü terimi iptal edilmiş haliyle tam olarak eşleşmektedir.

Bu süreç, verilen integro-diferensiyel denklemin çözümünü daha anlaşılır hale getirmiş ve daha basit bir şekilde çözülmesini sağlamıştır. Özellikle, gürültü terimlerinin iptal edilmesi ve basit bir çözüm kullanılması, denklemin analitik olarak çözümünü kolaylaştırmakta ve sonucu daha açık bir şekilde ortaya koymaktadır.

3.2. Birinci Tip Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemler

Birinci tip VİDD'leri, bir fonksiyonun kendisi ve türevi birlikte, bağımsız değişkenin bir alt sınırından fonksiyonun değerine kadar olan integralini içeren denklemlerdir [23]. Bu denklemler, nüfus artışı, yayılma, halo olayı gibi fiziksel, biyolojik ve ekonomik problemlerin modellenmesinde kullanılır. Bu denklemlerin çözümü için, Laplace dönüşüm metodu, theta metodu, dikdörtgenler metodu, geri-Euler metodu, Crank-Nicolson metodu gibi çeşitli analitik ve nümerik yöntemler vardır [23,24].

3.2.1. Tanım (I.Tip Volterra İntegro-Diferensiyel Denklem)

Eş. 3.1'de verilen denklemde $f(x) = 0$ olan integral denklemlerine birinci tip Volterra integro-diferensiyel denklemler denir ve genel formu

$$u^{(n)}(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x,t)u(t)dt \tag{3.10}$$

şeklindedir [22].

Birinci tip VİDD'de sayısal çözme metotlarından biri olan Laplace dönüşüm metodunu ele alacağız.

3.2.1. Birinci Tip Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Çözümü İçin Laplace Dönüşüm Metodu

Laplace dönüşümü, birinci tip VİDD için bir çözüm metodudur. Bu metot, bir fonksiyonun Laplace dönüşümünü alarak, orijinal fonksiyonun çözümünü bulmayı sağlar ve birinci tip VİDD için de kullanılabilir. Metodun kullanılabilmesi, özellikle çekirdeğin fark formuna sahip olmasına bağlı olan önemli koşullardan biri olmak üzere;

$$u^{(n)}(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x-t)u(t)dt,$$

denkleminin her iki tarafına da Laplace dönüşümü uygulandığında,

$$\mathcal{L}\{u^{(n)}(x)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^x \mathcal{K}(x-t)u(t)dt\right\}$$

$$\mathcal{L}\{u^{(n)}(x)\} = s^{(n)}\mathcal{U}(s) - s^{(n-1)}u(0) - s^{(n-2)}u'(0) - \cdots - su^{(n-2)}(0) - su^{(n-1)}(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x \mathcal{K}(x-t)u(t)dt\right\} = \mathcal{L}\{\mathcal{K}(x-t) * u(t)\} = \mathcal{L}\{\mathcal{K}(x-t))\}\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{\mathcal{K}(x-t)\}\,\mathcal{U}(s)$$

denklemin hem sağ hem sol tarafının Laplace'larını ayrı ayrı hesaplamış oluruz. Buradan her iki tarafını da birleştirirsek;

$$s^{(n)}\mathcal{U}(s) - s^{(n-1)}u(0) - s^{(n-2)}u'(0) - \cdots - su^{(n-2)}(0) - su^{(n-1)}(0) = \mathcal{L}\{\mathcal{K}(x-t)\}\,\mathcal{U}(s)$$

ve dolayısıyla

$$\mathcal{U}(s)(s^n - \mathcal{L}\{\mathcal{K}(x-t)\}) = s^{(n-1)}u(0) + s^{(n-2)}u'(0) + \cdots + su^{(n-2)}(0) + su^{(n-1)}(0)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathcal{U}(s) = \frac{s^{(n-1)}u(0) + s^{(n-2)}u'(0) + \cdots + su^{(n-2)}(0) + su^{(n-1)}(0))}{s^n - \mathcal{L}\{\mathcal{K}(x-t)\}} \tag{3.11}$$

elde etmiş oluruz. Her iki tarafın ters Laplace alırsak tam çözümü ulaşmış oluruz. Şimdi bir örnek ile bu durumu gösterelim.

Örnek

$$\int_0^x (x-t)u(t)\,dt + \int_0^x (x-t)^2 u'(t)dt = 2x - 2sinx, \quad u(0) = 0$$

b.d.p.ni Laplace dönüşüm metodu ile çözünüz.

Çözüm

Denklemin her iki yanına Laplace dönüşümünü uygularsak

$$\frac{1}{s^2}U(s) + \frac{2}{s^3}(sU(s) - u(0)) = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{1+s^2}$$

elde ederiz. Buradan

$$U(s)\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^2}\right) = \frac{2}{s^2(1+s^2)}$$

olarak dolayısıyla

$$U(s) = \frac{2}{3(1+s^2)}$$

olarak bulunur. Eğer ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \frac{2}{3}sinx$$

buluruz. Sonuç olarak, örnek denklemin çözümü

$$u(x) = \frac{2}{3}sinx$$

olarak elde ederiz.

4. FREDHOLM İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEMLER

FİDD'i, integral içerisinde $u(x)$ fonksiyonunu, integral dışında ise türevlerinden bir $u^{(n)}(x),\ n \geq 1$ bulunduran denklemlerdir [14]. Fredholm integral denklemlerinin yapısı gereği, integrasyon sınırları sabit olarak kabul edilir. FİDD' nin birinci ve ikinci tip olmak üzere iki türü vardır.

Genel bir FİDD'i;

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt,\ \ u^{(k)}(0) = b_k,\ 0 \leq k \leq n-1, \qquad n \in \mathrm{N} \tag{4.1}$$

şeklindedir. $f(x) = 0$ ise Eş. 4.1 denklemine birinci tip, $f(x) \neq 0$ ise ikinci tip Fredholm integro diferensiyel denklemi denir. Örnek verirsek;

$$u'(x) = \int_0^1 xu(t)dt$$

denklemi, birinci tip FİDD'i,

$$u''(x) = e^x - 2x + 2x\int_0^1 tu(t)dt$$

denklemi ise ikinci tip FİDD'idir.

4.1. İkinci Tip Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler

İkinci tip FİDD'lerde sayısal çözme metotları olan doğrudan hesaplama metodu, Adomian ayrıştırma metodu, değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu, gürültü terimi ve seri çözüm metodunu inceleyeceğiz.

4.1.1. Doğrudan Hesaplama Metodu

Doğrudan hesaplama metodu, bir integral denkleminin çözümünü analitik bir formülle elde etmeye çalışan bir sayısal yöntem türüdür. İkinci tip FİDD'leri gibi karmaşık denklemlerin çözümünde kullanılır. Bu yöntemler genellikle belirli formüller ve matematiksel teknikler kullanarak kesin sonuçlar üretmeye çalışılır. FİDD'inin standart bir formunu aşağıdaki şekilde alalım;

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt\,, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \;\; 0 \le k \le n-1, \tag{4.2}$$

denkleminde $u^{(n)}(x), u(x)$'in x'e göre n'inci türevidir ve b_k ise başlangıç koşullarını tanımlayan sabitlerdir [14]. $K(x,t) = \sum_{k=1}^{n} g(x)h(t)$ denejere çekirdeğini Eş. 4.2 denklemine yerleştirdiğimizde ve gereken işlemleri yaptıktan sonra denklemi;

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x) + \int_a^b h(t)u(t)dt\,, \;\; u^{(k)}(0) = b_k, \;\; 0 \le k \le n-1, \tag{4.3}$$

elde ederiz. Eş. 4.3 denkleminden görüleceği üzere sağ tarafta yer alan belirli integral sabit olan α'ya eşittir, yani:

$$\alpha = \int_a^b h(t)u(t)dt \tag{4.4}$$

dir [14]. Böylece Eş. 4.3 denklemini

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \alpha g(x) \tag{4.5}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada α'yı belirlemek için $u(x)$'in tam çözümüne ulaşmak gerekir. Eş. 4.5 denkleminin her iki tarafını da n kez 0'dan x'e kadar integre edererek ve başlangıç koşullarını kullanarak $u(x)$'in tam çözümüne ulaşmış oluruz.

Örnek

$$u'''(x) = cosx - x - \int_0^1 tu'(t)dt\,, u(0) = 2, u'(0) = -1, u''(0) = 0$$

ile verilen FİDD'ini, doğrudan hesaplama metodunu kullanarak çözünüz.

Çözüm

$$u'''(x) = cosx - x - \int_0^1 tu'(t)dt\,, u(0) = 2,\ \ u'(0) = -1,\ \ u''(0) = 0 \tag{4.6}$$

denklemi şu şekilde,

$$u'''(x) = cosx - (1 + \alpha)x \tag{4.7}$$

yazılır. Burada;

$$\alpha = \int_0^1 tu'(t)dt \tag{4.8}$$

dir. α belirlemek Eş. 4.7 denklemindeki $u'(x)$'in x ve α'ya bağlı bir ifadesini bulmamız gerekir. Bunun için Eş. 4.7'de üç kere integrasyon yapılarak ve başlangıç koşulları kullanılarak şu denklemlere ulaşırız;

$$u''(x) = sinx - \frac{1+\alpha}{2}x^2$$

$$u'(x) = -cosx - \frac{1+\alpha}{6}x^3 - 1$$

$$u(x) = -sinx - \frac{1+\alpha}{24}x^4 - x + 2.$$

$u'(x)$ ifadesini Eş. 4.8 denklemine yerleştirerek α'yı bulabiliriz. O zaman,

$$\alpha = \int_0^1 t\left(-cosx - \frac{1+\alpha}{6}x^3 - 1\right)dt$$

dir. Buradan integrali hesapladığımızda $\alpha = -\frac{1}{2}$ olarak buluruz. Son olarak $\alpha = -\frac{1}{2}$ değerini $u(x)$ denkleminde yerine koyarsak,

$$u(x) = -sinx - \frac{1}{48}x^4 - x + 2$$

sonucunu elde ederiz.

4.1.2. Adomian Ayrıştırma Metodu

İkinci tip FİDD'leri için Adomian Ayrıştırma Metodu, genelde lineer olmayan terimleri içeren bir integro-diferensiyel denklemi çözmek için kullanılan bir tekniktir.

Örneğin;

$$u''(x) = u(x) + \int_a^b \mathcal{K}(x,t)u(t)dt\,, \quad u(0) = a_0, \quad u'(0) = a_1$$

problemini ele alalım. Problemde bize FİDD'i verilmiştir. İlk olarak Eş. 3.1'de verilen denklemden

$$\mathcal{F}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x,t)u(t)dt$$

denilirse ve n=2 alınırsa Eş 3.1 denklemi

$$u''(x) = \mathcal{F}(x)$$

denklemine dönüşür.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \mathcal{F}(x)$$

olur.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du(x)}{dx}\right) = \mathcal{F}(x)$$

olduğundan,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du(x)}{dx}\right) = \mathcal{F}(x)$$

olarak yazabiliriz. Her iki tarafı dx ile çarparsak;

$$d\left(\frac{du(x)}{dx}\right) = \mathcal{F}(x)dx$$

olur. Her iki tarafın 0 'dan x'e integrali alınırsa

$$\frac{du(x)}{dx} - u'(0) = \int_0^x \mathcal{F}(s)ds$$

elde edilir. Buradan;

$$du(x) = \left(u'(0) + \int_0^x \mathcal{F}(s)ds\right)dx$$

elde ederiz. Bu denklemin öncelikle her iki yanını integre edelim;

$$\int_0^x du(s) = \int_0^x \left(u'(0) + \int_0^s \mathcal{F}(v)dv\right)ds,$$

buradan $u(0) = a_0,\ u'(0) = a_1$ başlangıç koşullarıyla, L^{-1} iki katlı bir integral olmak üzere

$$u(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}\big(u(x)\big) + L^{-1}\left(\int_a^b \mathcal{K}(x,t)u(t)dt\right)$$

denklemini buluruz. Seri açılımını kullanırsak denklemimiz;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = a_0 + a_1x + L^{-1}\{u(x)\} + L^{-1}\left(\int_a^b \mathcal{K}(x,s,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)dt\right)$$

halini alır ve buradan ise

$$u_0(x) \quad = \quad a_0 + a_1 + L^{-1}\big(u(x)\big)$$

$$u_{k+1}(x) \quad = \quad L^{-1}\int_{a}^{b} \mathcal{K}(x,t)(u(t))dt\,, \qquad k \geq 0$$

elde etmiş oluruz.

Yukardaki işlemler ikinci tip FİDD çözüm algoritmasıdır. Aynı adımlar izleyerek diğer mertebeler içinde denklemler aynı şekilde çözülebiliriz.

Örnek

$$u'(x) = 24x^2 + \int_{0}^{1} u(t)dt\,, u(0) = 1$$

ile verilen FİDD'ini, Adomian ayrıştırma yöntemi ile çözünüz

Çözüm

Denklemin her iki tarafını dx ile çarptıktan sonra 0' dan x' e integre edersek;

$$\int_{0}^{x} du(x) = \int_{0}^{x} (24x^2)dx + \int_{0}^{x} \left(\int_{0}^{1} u(t)dt \right) ds$$

dolayısıyla

$$u(x) - u(0) = 8x^3 + x\left(\int_{0}^{1} u(t)dt \right)$$

elde ederiz**.** Buradan başlangıç koşullarını yerine yazarsak

$$u(x) - 1 = 8x^3 + x\left(\int_{0}^{1} u(t)dt \right)$$

dolayısıyla

$$u(x) = 1 + 8x^3 + x\left(\int_0^1 u(t)dt\right)$$

bulunur. $u(x)'$in seri formu kullanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n(x)} = 1 + 8x^3 + x\left(\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} u(t)dt\right)$$

elde edilir. Buradan da;

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 + 8x^3 \\ u_{k+1}(x) &= x\int_0^1 u_k(t)dt\,, \qquad k \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1 + 8x^3 \\ u_1(x) &= x\int_0^1 u_0(t)dt = 3x, \\ u_2(x) &= x\int_0^1 u_1(t)dt = \frac{3}{2}x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde devam eder. O zaman $u(x)'$'in seri çözümü,

$$u(x) = 1 + 8x^3 + 3x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots\right)$$

şeklinde buluruz. Yakınsak geometrik serinin toplamı $r = \frac{1}{2}$ olmak üzere,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

elde ederiz. O halde denklemin tam çözümü

$$u(x) = 1 + 8x^3 + 6x$$

şeklindedir.

4.1.3. Değiştirilmiş Adomian Ayrıştırma Metodu

İkinci tip FİDD'inde değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu, integral içerisinde yer alan bilinmeyen fonksiyon ve dışında yer aldığı lineer veya lineer olmayan denklemleri çözmek için kullanılan bir yöntemdir. Bu metot, Adomian ayrıştırma metodu ile benzerlik gösterir, ancak gürültü terimi olarak adlandırılan bir düzeltme terimi ekler. Bu terim, denklemin doğrusal olmayan kısmının Taylor serisi açılımından elde edilir. İntegral denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek için oldukça etkili bir yöntemdir [17,18,19,20].

Eş. 2.8'de verilen Fredholm integral denklemi olan;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x,t)u(t)dt$$

ele alalım. Bu denklemde Eş. 3.2' de verilen;

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

seri formu ile

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

ele alalım. Buna göre;

$$\begin{aligned} u_0(x) &= f_1(x), \\ u_1(x) &= f_2(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x,t)u_0(t)dt, \\ u_{k+1}(x) &= \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x,t)u_k(t)dt\,, \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

şeklinde $u(x)$ fonksiyonunun bileşenleri tespit edilmesi yoluyla çözüme ulaşılır [18].

4.1.4. Gürültü Terimi

Yalnızca iki bileşen olan $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ gürültü terimlerini içeren ikinci tip Fredholm integro-diferensiyel denklemlerin tam çözümüne, yalnızca ilk iki integrasyon adımının incelenmesiyle ulaşmak mümkündür. Ancak bu gürültü terimi kullanarak kesin çözüme ulaşılamıyorsa kapalı formda bir çözüm veya yaklaşık bir çözüm elde etmek için $u_0(x)$ ′in diğer bileşenlerini belirlemeye devam etmeliyiz [21,22]. Şimdi bu yöntemi bir örnekle göstermeye çalışalım.

Örnek

$$u'''(x) = cos\, x - x^2 - \int_0^1 (x^2 t u'(t))dt\,,\ u(0) = 0,\ u'(0) = 1,\ u''(0) = 0$$

ile verilen Fredholm integro-diferensiyel b.d.p.'ni, ayrıştırma yöntemini kullanarak çözünüz.

Çözüm

Denklemin her iki tarafının da 0'dan x'e üç kez art arda integralini alır ve elde edilen ifadelere başlangıç koşulları kullanırsak;

$$u(x) = -sinx - \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{60}x^5 \int_0^1 t u'(t)dt$$

denklemini elde ederiz. Eğer seri çözüm metodunu kullanılır ve denklemin her iki tarafını değiştirirsek;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = -sinx - \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{60}x^5 \int_0^1 t\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n{}'(t)\right)dt$$

şeklinde denklem elde ederiz. Denklemin her iki tarafını şu şekilde yazabiliriz;

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = -sinx - \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{60}x^5\left(\int_0^1 t u_0{}'(t)dt\right) - \frac{1}{60}x^5\left(\int_0^1 t u_1{}'(t)dt\right) + \cdots$$

Buradan da;

$$u_0(x) \quad = \quad -sinx - \frac{1}{60}x^5$$

$$u_1(x) = -\frac{1}{60}x^5\left(\int_0^1 t\left(-cost - \frac{t^4}{12}\right)dt\right)$$

$$= \frac{1}{60}x^5(sin1 + cos1 - \frac{71}{72})$$

elde ederiz. $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ dikkate alındığında $\frac{1}{60}x^5$ teriminin ortaya çıktığını görüyoruz. Her iki bileşende de zıt işaretlerle görünür. Dolayısıyla gürültü olgusuna göre kesin çözüm $u(x) = -sinx$ 'tir.

4.1.5. Seri Çözüm Metodu

Çözümü $u(x)$ olan Eş. 4.1 denkleminde verilen bir

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda\int_a^b \mathcal{K}(x,t)u(t)dt\,, u^{(i)}(0) = a_i, 0 \le i \le n-1$$

analitik Fredholm integro-diferensiyel b.d.p.'ni göz önüne alalım. Bu durumda, $u(x)$ ve diğer ilgili fonksiyonların seri açılımları denklemde yerine yazıldığında, aşağıdaki biçimi alır:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^{(n)} = T\big(f(x)\big) + \int_a^b \mathcal{K}(x,t)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right)dt$$

halini alır. Buna göre $T(f(x))$ ifadesi $f(x)$'in Taylor açılımını gösterdiğinden denklem;

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)^{(n)} = T\big(f(x)\big) + \lambda\int_a^b \mathcal{K}(x,t)(a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots)dt$$

olarak yazılır ve çözüm aranır.

Örnek

$$u'(x) = 2 + 2x + \int_{-1}^{1} (1 - xt)u(t)dt \, , u(0) = 1$$

ile verilen FİDD'ini, seri çözüm metoduyla çözünüz.

Çözüm

Seri çözüm yöntemi kullanarak $u(x)$'i bir seri olarak

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

şeklinde ifade edelim. Bu seriyi denklemimize yerine koyarak a_n katsayılarını bulmaya çalışacağız. İlk olarak $u'(x)$ ifadesini hesaplayalım:

$$u'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

olur. Denklemdeki tüm terimleri ve bu ifadeye yerine koyarak düzenlersek;

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 2 + 2x + \int_{-1}^{1} \left((1 - xt) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt$$

olur. Şimdi başlangıç değer koşulu olarak $a_0 = 1$ verildiği için seriyi $n = 0$ için genişletebiliriz.

Bu durumu daha net görmek için seriyi biraz açarsak;

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots = 2 + 2x + \int_{-1}^{1} \left((1 - xt) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt$$

elde ederiz. Daha sonra sağ taraftaki integrali açalım:

$$\int_{-1}^{1}\left((1-xt)\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\right)dt = \int_{-1}^{1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n - x\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+1}\right)dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}a_n t^n dt - x\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-1}^{1}a_n t^{n+1}\,dt$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) - \left(x\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{1^{n+2}}{n+2} - x\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) - x\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1^{n+2}}{n+2} - \frac{(-1)^{n+2}}{n+2}\right)$$

olur. Bu sonucu denklemde yerine yazalım;

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = 2 + 2x + \sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) - x\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1^{n+2}}{n+2} - \frac{(-1)^{n+2}}{n+2}\right)$$

eğer serilerin ilk birkaç terimin açıp düzenlersek;

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = 2 + 2x + \left(2 - x - \frac{2}{3}xa_1 + \frac{2}{3}a_2 - \frac{2}{5}xa_3 + \frac{2}{5}a_4 - \frac{2}{7}xa_5 + \frac{2}{5}a_6 - \frac{2}{9}xa_7 + \frac{2}{9}a_8 + \cdots\right)$$

dolayısıyla

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots = \left(4 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{2}{5}a_4 + \frac{2}{5}a_6 + \frac{2}{9}a_8 + \cdots\right) + x\left(1 - \frac{2}{3}a_1 - \frac{2}{5}a_3 - \frac{2}{7}a_5 - \frac{2}{9}a_7 - \cdots\right)$$

elde ederiz. Şimdi ise iki tarafı karşılaştırarak katsayılar;

$$a_0 = 1, a_1 = 4, a_n = 0, n \geq 2$$

buluruz. Dolayısıyla başlangıç koşulu $a_0 = 1$ alındığında tam çözüm $u(x) = 1 + 4x$ biçiminde buluruz.

5. VOLTERRA ve FREDHOLM İNTEGRO-DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN UYGULAMA ALANLARI

Volterra ve Fredholm integro-diferensiyel denklemler, uygulamalı matematik, fizik, biyoloji, mühendislik ve ekonomi gibi birçok alanda önemli bir rol oynar. Bu denklemler, özellikle zamanla değişen, geçmiş durumlarla etkileşimli veya belirsizlik içeren sistemlerin modellenmesinde kullanılır. Süreçlerin hafıza etkisini ve zaman içindeki kümülatif davranışlarını yakaladığı için dinamik ve karmaşık yapılar için oldukça uygundur. Aşağıda, bu denklemlerin farklı alanlardaki kullanımına dair bazı detaylı örnekleri ve uygulama alanları verilmiştir.

5.1. Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerin Kharrat-Toma Dönüşümü İle Çözümü

İntegro-diferensiyel denklemleri hem türev hem de integral terimlerini içeren matematiksel denklemlerdir. Bu tür denklemler, sistemlerin hem geçmiş hem de mevcut durumlarının aynı anda dikkate alarak dinamik süreçlerin modellemesinde kullanılır. Genellikle fizik, mühendislik, biyoloji ve ekonomi gibi alanlarda kullanılan bu denklemler, zamana bakarak süreçlerin geçmiş etkilerini ifade etmek için oldukça çok kullanılır. İntegro-diferensiyel denklemler, belirli bir aralıkta bir fonksiyonun değerleri arasındaki ilişkiyi ifade eden integral terimleri içerdikleri için diferensiyel denklemlerden daha genel bir yapıya sahiptirler. Bu denklemlerle ilgili temel kavramları inceleyen çalışmalar, 19. yüzyılın ortalarında ortaya çıkmıştır. Denklemlerin gelişimi, matematikçilerin diferensiyel denklemler ve integral denklemleri arasındaki ilişkiyi daha derinlemesine anlamalarıyla hız kazanmıştır [13,14].

Genel olarak lineer VİDD'i bölüm 3 de tanıtıldığı gibi

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \mathcal{K}(x,t)u(t)dt$$

şekilde ifade edilir. Bu denklemde, $u(x)$ fonksiyonu, x bağımsız değişkenine göre *n*-inci mertebeden türeve sahip bir fonksiyon, $f(x)$, x bağımsız değişkenine bağlı olan verilmiş

(bilinen) bir fonksiyon, λ, sabit bir parametre ve $\mathcal{K}(x,t)$ de x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir çekirdektir [21,22].

$\not{f}(x)$ in yapısına göre Eş. 2.6 VİDD'i birinci tür veya ikinci tür olarak adlandırılır. Şöyle ki eğer $\not{f}(x) = 0$ ise Eş. 2.6 VİDD'i

$$u^{(n)}(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x,t)u(u)dt$$

halini alır ve bu denkleme birinci tür lineer Volterra integro-diferensiyel denklemi denir. Eğer $\not{f}(x) \neq 0$ ise Eş. 2.6 denklemine ikinci tür lineer Volterra integro-diferensiyel denklemi denir [21,22].

Diferensiyel denklemleri çözmek için birçok integral dönüşümleri kullanılır. Bu dönüşümlerden en sık kullanılanı Laplace dönüşümüdür. Laplace dönüşümü gibi bazı temel dönüşümlere ilişkin pek çok çalışma vardır. Laplace dönüşümü ilk olarak 1780'lerde Pierre-Simon de Laplace tarafından tanıtılmıştır. Laplace dönüşümü, en eski integral dönüşümüdür [26].

Laplace dönüşümü [26], Elzaki dönüşümü [27], Aboodh dönüşümü [28], Mohand dönüşümü [29], Rahmoh dönüşümü [30] ve Kharrat-Toma dönüşümü [31] gibi birçok integral dönüşümü kullanılarak integro-diferensiyel denklemler çözülebilinir. Mahgob ve Elzaki çalışmalarında, özel bir "bulge" fonksiyonu içeren integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde Elzaki dönüşümünü uygulamışlardır [27]. Aboodh dönüşümü ile Adomian ayrıştırma yönteminin birleşimi, lineer ve lineer olmayan integro-diferensiyel denklemlerde başarılı sonuçlar vermiştir [28]. Senthil Kumar ve diğerleri Mohand dönüşümünün lineer Volterra integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde kesin sonuçlarını elde etmişlerdir [29]. Farah ve Hamad, Rahmoh integral dönüşümünü integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde özellikle Volterra tipi integro-diferensiyel denklemler üzerinde etkili olduğu belirtilmiştir [30].

Kharrat-Toma dönüşümü, diferensiyel ve integral denklemler üzerinde etkili bir çözüm yöntemi olarak geliştirilmiş ve çeşitli disiplinlerde uygulanabilirliği kanıtlanmıştır. Literatürde yapılan çalışmalar, bu dönüşümün özellikle nüfus dinamiği, büyüme ve çürüme modelleri, integro-diferensiyel denklemler çözümünde önemli avantajlar sunduğunu göstermektedir [31,32]. Kharrat-Toma dönüşümünün en önemli özelliklerinden biri, geleneksel integral dönüşümlerine kıyasla daha az karmaşık hesaplamalar gerektirmesi ve

analitik çözüme ulaşmada kolaylık sağlamasıdır. Özellikle lineer ve lineer olmayan problemlerde etkili bir yöntem sunarak, çözüm süreçlerini hızlandırmaktadır [31].

Kharrat-Toma dönüşümü, evrişim teoremi sayesinde integral operatörlerin çözümünü basitleştirerek VİDD'lerine doğrudan uygulanabilmektedir [31]. Laplace ve Sumudu dönüşümlerine kıyasla daha az hesaplama gerektirmesi, mühendislik ve uygulamalı matematik alanlarında tercih edilmesine neden olmaktadır. Özellikle homotopi pertürbasyon yöntemi ile birleştirildiğinde, bu dönüşüm hem lineer hem de lineer olmayan integro-diferensiyel denklemler üzerinde yüksek doğruluk sağlayarak, geleneksel sayısal ve analitik yöntemlere güçlü bir alternatif sunmaktadır [31]. Ayrıca, değişken katsayılı diferensiyel denklemler için doğrudan uygulanabilir olması, çözüm sürecinde diferensiyel operatörleri integral dönüşümlere çevirerek denklemleri daha kolay çözülebilir hale getirmektedir.

Hızlı yakınsama özelliği sayesinde, özellikle büyüme ve çürüme modellerinde etkin bir çözüm sunan Kharrat-Toma dönüşümü, nüfus dinamiği gibi uygulamalarda kullanışlılığını kanıtlamıştır [32]. Literatürde yapılan analizler, bu dönüşümün diferensiyel denklemleri cebirsel denklemlere indirgeme kabiliyetine sahip olduğunu ve bu sayede hesaplamaları önemli ölçüde basitleştirdiğini göstermektedir [32].

Bu avantajlar, onu mühendislik, fizik, biyoloji, ekonomi gibi birçok disiplinde güçlü bir araç haline getirmektedir. Kharrat, tarafından yapılan araştırma, çift Kharrat-Toma dönüşümünün integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde oldukça etkili bir yöntem olduğunu ortaya koymuştur. Bu dönüşüm, özellikle kısmi diferensiyel denklemlerin yanı sıra, karmaşık çekirdek fonksiyonlarına sahip integro-diferensiyel denklemler üzerinde geniş bir uygulama alanına sahiptir [32]. Sonuç olarak, Kharrat-Toma dönüşümü, modern matematiksel modelleme tekniklerinde hız, doğruluk ve hesaplama kolaylığı açısından önemli bir yöntem olarak öne çıkmaktadır.

5.1.1. Kharrat-Toma İntegral Dönüşümü

5.1.1. Tanım (Kharrat-Toma ve Ters Kharrat Toma Dönüşümü)

Kharrat-Toma ve ters Kharrat-Toma integral dönüşümü sırasıyla

$$\mathcal{B}[\mathcal{f}(t)] = \mathcal{G}(\mathcal{s}) = \mathcal{s}^3 \int_0^\infty \mathcal{f}(x) e^{-\frac{x}{2}} dx, x \geq 0 \tag{5.1}$$

ve

$$\mathcal{f}(x) = \mathcal{B}^{-1}[\mathcal{G}(\mathcal{s})] = \mathcal{B}^{-1}\left[\mathcal{s}^3 \int_0^\infty \mathcal{f}(x) e^{-\frac{x}{2}} dx\right] \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathcal{B}$ integral dönüşümü şunu ifade eder; eğer $\mathcal{f}(x)$, $[0, \infty)$ aralığında parça parça sürekli ve üstel mertebeli bir fonksiyon ise $\mathcal{B}^{-1}, \mathcal{B}$ integral dönüşümünün tersi olacaktır [31].

5.1.1. Teorem (Kharrat-Toma Dönüşümünün Varlığı)

Eğer $\mathcal{f}(x)$ fonksiyonu üstel mertebeli ve $\int_0^{\mathcal{b}} |\mathcal{f}(x)| dx$ integralini mevcut kılan bir $\mathcal{b} > 0$ sayısı var ise $\mathcal{B}[\mathcal{f}(x)]$ Kharrat-Toma dönüşümü vardır [31].

Bazı fonksiyonların Kharrat-Toma ve ters Kharrat-Toma dönüşümleri aşağıda verilmiştir.

Kharrat-Toma Dönüşümleri

$\mathcal{f}(x)$	$\mathcal{B}[\mathcal{f}(x)] = \mathcal{G}(\mathcal{s})$
1	$\mathcal{s}^5$
x	$\mathcal{s}^7$
x^n	$n!.\mathcal{s}^{2n+5}$
$e^{\mathcal{k}x}$	$\frac{\mathcal{s}^5}{1-\mathcal{k}\mathcal{s}^2}$
$sin(\mathcal{k}x)$	$\frac{\mathcal{k}\mathcal{s}^7}{1+\mathcal{k}^2\mathcal{s}^4}$
$cos(\mathcal{k}x)$	$\frac{\mathcal{s}^5}{1+\mathcal{k}^2\mathcal{s}^4}$
$sinh(\mathcal{k}x)$	$\frac{\mathcal{k}\mathcal{s}^7}{1-\mathcal{k}^2\mathcal{s}^4}$

$cosh(\hbar x)$	$\frac{\mathcal{s}^5}{1-\hbar^2\mathcal{s}^4}$

Ters Kharrat-Toma Dönüşümleri

$\mathcal{G}(\mathcal{s})$	$\mathcal{f}(x)=\mathcal{B}^{-1}[\mathcal{G}(\mathcal{s})]$
$\mathcal{s}^5$	*1*
$\mathcal{s}^7$	x
$n!.\mathcal{s}^{2n+5}$	x^n
$\frac{\mathcal{s}^5}{1-\hbar\mathcal{s}^2}$	$e^{\hbar x}$
$\frac{\hbar\mathcal{s}^7}{1+\hbar^2\mathcal{s}^4}$	$sin(\hbar x)$
$\frac{\mathcal{s}^5}{1+\hbar^2\mathcal{s}^4}$	$cos(\hbar x)$
$\frac{\hbar\mathcal{s}^7}{1-\hbar^2\mathcal{s}^4}$	$sinh(\hbar x)$
$\frac{\mathcal{s}^5}{1-\hbar^2\mathcal{s}^4}$	$cosh(\hbar x)$

5.1.2. Teorem (Lineerlik Özelliği)

Eğer $\mathcal{B}[\mathcal{f}_1(x)]=\mathcal{G}_1(\mathcal{s}),\ \mathcal{B}[\mathcal{f}_2(x)]=\mathcal{G}_2(\mathcal{s}),\ldots,\ \mathcal{B}[\mathcal{f}_n(x)]=\mathcal{G}_n(\mathcal{s})$ ve $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ler keyfi sabitler ise o zaman;

$$\mathcal{B}\left[\sum_{i=1}^{n}c_i\mathcal{f}_i(x)\right]=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathcal{B}[\mathcal{f}_i(x)] \tag{5.3}$$

dir [31].

İspat

Kharrat-Toma dönüşümünün tanımını kullanırsak

$$\mathcal{B}\left[\sum_{i=1}^{n}c_i\mathcal{f}_i(x)\right]=\mathcal{s}^3\int_0^\infty\sum_{i=1}^{n}c_i\mathcal{f}_i(x)e^{-\frac{x}{\mathcal{s}^2}}dx=\sum_{i=1}^{n}c_i\left(\mathcal{s}^3\int_0^\infty\mathcal{f}_i(x)e^{-\frac{x}{\mathcal{s}^2}}dx\right)=\sum_{i=1}^{n}c_iB[f_i(x)]$$

elde ederiz ki bu da dönüşümün lineer olduğunu verir.

■

5.1.3. Teorem (Çeviri Özelliği)

Eğer $\mathcal{B}[f(x)] = \mathcal{G}(s)$ ve $\alpha > 0$ bir sabit ise

$$\mathcal{B}[f(\alpha x)] = \frac{1}{\alpha^2\sqrt{\alpha}}\mathcal{G}\left[\sqrt{\alpha}s\right] \tag{5.4}$$

dir [31].

5.1.4. Teorem (Birinci Kaydırma Özelliği)

Eğer $\mathcal{B}[f(x)] = \mathcal{G}(s)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise,

$$\mathcal{B}[e^{\alpha x}f(x)] = (1-\alpha s^2)^{\frac{3}{2}}\mathcal{G}\left[\frac{s}{\sqrt{1-\alpha s^2}}\right] \tag{5.5}$$

dir [31].

5.1.5. Teorem (Konvolüsyon Teoremi)

Eğer $\mathcal{B}[f(x)] = \mathcal{M}(s)$ $\mathcal{B}[g(x)] = \mathcal{N}(s)$ ise

$$\mathcal{B}[f(x) * g(x)] = \frac{1}{s^3}\mathcal{M}(s)\mathcal{N}(s) \tag{5.6}$$

dir. Burada $(f * g)(x), f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının konvolüsyonunu temsil eder ve

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt \tag{5.7}$$

şeklinde tanımlıdır [31].

İspat

$$\mathcal{B}[f(x) * g(x)] = s^3\int_0^\infty \left([f(x) * g(x)]e^{-\frac{x}{s^2}}\right)dx$$

$$= s^3\int_0^\infty e^{-\frac{x}{s^2}}dx\int_t^x f(t)g(x-t)dt; \qquad 0 \le t \le x \le \infty$$

$$= s^3 \int_0^\infty f(t)dt \int_t^\infty g(x-t)e^{-\frac{x}{s^2}}dx$$

Eğer $x - t = u$ ise o zaman $x = t + u$ olur. Burada $x: t \to \infty \Rightarrow u: 0 \to \infty$ sonucunu verir.

$$\mathcal{B}[f(x) * g(x)] = s^3 \int_0^\infty f(t)dt \int_0^\infty g(u)e^{-\frac{t+u}{s^2}}du$$

$$= \frac{1}{s^3}\left(s^3 \int_0^\infty f(t)e^{-\frac{t}{s^2}}dt\right)\left(s^3 \int_0^\infty g(u)e^{-\frac{u}{s^2}}du\right)$$

$$= \tfrac{1}{s^3}\mathcal{M}(s)\mathcal{N}(s).$$

■

5.1.6. Teorem (x^n ile Çarpma Özelliği)

Eğer $\mathcal{B}[f(x)] = \mathcal{G}(s)$ ise

$$\mathcal{B}[xf(x)] = \frac{s^3}{2}\frac{d\mathcal{G}(s)}{ds} - \frac{3}{2}s^2\mathcal{G}(s) \tag{5.8}$$

$$\mathcal{B}[x^2f(x)] = \frac{s^6}{4}\frac{d^2\mathcal{G}(s)}{ds^2} - \frac{3}{4}s^5\frac{d\mathcal{G}(s)}{ds} + \frac{3}{4}s^4\mathcal{G}(s) \tag{5.9}$$

$$\mathcal{B}[x^3f(x)] = \frac{s^9}{8}\frac{d^3\mathcal{G}(s)}{ds^3} - \frac{3}{8}s^7\frac{d\mathcal{G}(s)}{ds} + \frac{3}{8}s^6\mathcal{G}(s) \tag{5.10}$$

dir [31].

5.1.7. Teorem (Türev için Kharrat-Toma Dönüşümü)

Eğer $\mathcal{B}[f(x)] = \mathcal{G}(s)$ ise

$$\mathcal{B}[f'(x)] = \frac{1}{s^2}\mathcal{G}(s) - s^3f(0) \tag{5.11}$$

$$\mathcal{B}[f''(x)] = \frac{1}{s^4}\mathcal{G}(s) - sf(0) - s^3f'(0) \tag{5.12}$$

ve $n \geq 2$ için (5.13)

$$\mathcal{B}\left[f^{(n)}(x)\right] = \frac{1}{s^{2n}}G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{-2n+2k+5} f^{(k)}(0); \;\; n \geq 1$$

dir [31].

İspat:

Eğer Kharrat-Toma dönüşümünün tanımını kullanırsak

$$\mathcal{B}[f'(x)] = s^3 \int_0^\infty f'(x) e^{-\frac{x}{s^2}} dx$$

olur. Eğer bu integrale

$$u = e^{-\frac{x}{s^2}} \Rightarrow du = -\frac{1}{s^2} e^{-\frac{x}{s^2}} dx$$

$$dv = f'(x)dx \Rightarrow \; v = f(x)$$

alıp kısmi integrasyon uygularsak

$$\mathcal{B}[f'(x)] \;\; = s^3 \left[e^{-\frac{x}{s^2}} f(x) \Big|_0^\infty + \frac{1}{s^2} \int_0^\infty f(x) e^{-\frac{x}{s^2}} dx \right]$$

$$= s^3 \left[-f(0) + \frac{1}{s^5} G(s) \right] = \frac{1}{s^2} G(s) - s^3 f(0)$$

elde ederiz. Benzer şekilde

$$\mathcal{B}[f''(x)] = \frac{1}{s^2} \mathcal{B}[f'(x)] - s^3 f'(0)$$

$$= \frac{1}{s^2} \left(\frac{1}{s^2} G(s) - s^3 f(0) \right) - s^3 f'(0)$$

$$= \frac{1}{s^4} G(s) - s f(0) - s^3 f'(0)$$

elde edilir.

■

5.1.2 Kharrat-Toma Dönüşümü ile Volterra İntegro-Direfensiyel Denklemlerin Çözümü

Kharrat-Toma dönüşümü, integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde etkili bir yöntem olarak öne çıkmaktadır. Bu çalışmada, $\mathcal{K}(x,t)$ çekirdeğinin $(x-t)$ farkına dayalı bir konvolüsyon tipi çekirdek olarak ele alındığı ve VİDD'lerinin hem birinci hem de ikinci türü için çözüm yöntemlerinin Kharrat-Toma dönüşümü ile nasıl uygulanabileceği incelenmiştir. Konvolüsyon tipi ikinci tür VİDD'i Eş. 3.1'den şu şekilde ifade edilebilir:

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x-t)u(t)dt \tag{5.14}$$

ve konvolüsyon tipi birinci tür VİDD'i Eş. 2.7 yardımıyla

$$u^{(n)}(x) = \int_0^x \mathcal{K}(x-t)u(t)dt \tag{5.15}$$

olarak ifade edilir. Şimdi birinci tip VİDD'ini Kharrat-Toma dönüşümü teoremlerini uygulayarak ispatlayalım.

5.1.8. Teorem

Eş 5.15 'de verilen birinci tip VİDD'inin çözümü

$$u(x) = \mathcal{B}^{-1}[\mathcal{G}(s)] = \mathcal{B}^{-1}\left[\frac{s^3\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right]}{\mathcal{B}[\mathcal{K}(x)]}\right] \tag{5.16}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\mathcal{K}$ konvolüsyon tipi çekirdek ve $\mathcal{B}[u(x)] = \mathcal{G}(s)$ olarak tanımlanmıştır.

İspat

Eğer Eş. 5.15 birinci tip VİDD'inin her iki tarafına Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak

$$\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right] = \mathcal{B}\left[\int_0^x \mathcal{K}(x-t)u(t)dt\right] = \mathcal{B}[\mathcal{K}(x) * u(x)]$$

olur. Dolayısıyla

$$\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right] = \mathcal{B}[\mathcal{K}(x) * u(x)]$$

elde edilir. Kharrat-Toma dönüşümü için konvolüsyon teoremini kullanırsak,

$$\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right] = \frac{1}{s^3}\mathcal{B}[\mathcal{K}(x)]\mathcal{B}[u(x)]$$

veya buna denk olarak

$$\mathcal{B}[u(x)] = \frac{s^3\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right]}{\mathcal{B}[\mathcal{K}(x)]}$$

buluruz. Eğer bu eşitliğin her iki tarafına ters Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak

$$u(x) = \mathcal{B}^{-1}[G(s)] = \mathcal{B}^{-1}\left[\frac{s^3\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right]}{\mathcal{B}[\mathcal{K}(x)]}\right]$$

elde ederiz.

■

5.1.9. Teorem

Eş. 5.14 ile verilen ikinci tip Volterra integro-diferensiyel denkleminin çözümü

$$u(x) = \mathcal{B}^{-1}[G(s)] = \mathcal{B}^{-1}\left[\frac{\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right] - \mathcal{B}[f(x)]}{\frac{\lambda}{s^3}\mathcal{B}[\mathcal{K}(x)]}\right] \tag{5.17}$$

ile ifade edilir. Burada $\mathcal{K}$, çekirdek, λ parametre ve $\mathcal{B}[u(x)] = \mathcal{G}(s)$ olarak tanımlanmıştır.

İspat

Eğer Eş. 5.14 ikinci tip Volterra integro-diferensiyel denkleminin her iki tarafına Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak

$$\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right] = \mathcal{B}\left[f(x) + \lambda \int_0^x \mathcal{K}(x-t)u(t)dt\right]$$

ve lineerlik özelliğinden dolayı

$$\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right] = \mathcal{B}[f(x)] + \lambda\mathcal{B}\left[\int_0^x \mathcal{K}(x-t)u(t)dt\right]$$

elde ederiz. Eğer konvolüsyon tanımını kullanırsak bu ifadeyi

$$\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right] = \mathcal{B}[f(x)] + \lambda\,\mathcal{B}[\mathcal{K}(x) * u(x)]$$

olarak yazabiliriz. Kharrat-Toma dönüşümü için konvolüsyon teoremini kullanırsak,

$$\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right] = \mathcal{B}[f(x)] + \frac{\lambda}{s^3}\mathcal{B}[\mathcal{K}(x)]\mathcal{B}[u(x)]$$

veya denk olarak

$$\mathcal{B}[u(x)] = \frac{\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right] - \mathcal{B}[f(x)]}{\frac{\lambda}{s^3}\mathcal{B}[\mathcal{K}(x)]}$$

elde ederiz. Eğer bu ifadenin her iki tarafına da ters Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak

$$u(x) = \mathcal{B}^{-1}[\mathcal{G}(s)\ \ ] = \mathcal{B}^{-1}\left[\frac{\mathcal{B}\left[u^{(n)}(x)\right] - \mathcal{B}[f(x)]}{\frac{\lambda}{s^3}\mathcal{B}[\mathcal{K}(x)]}\right]$$

elde ederiz.

■

5.1.3. Örnekler

Bu bölümde, Kharrat-Toma ve ters Kharrat-Toma dönüşümü kullanılarak konvolüsyon tipi VİDD'lerinin çözüm prosedürünü açıklamak için bazı örnekler verilmiştir.

Örnek

$$u'(x) = \int_0^x \cos(x-t)\, u(t)dt, \quad u(0) = 1$$

ile verilen b.d.p. ni Kharrat-Toma dönüşümü ile çözünüz.

Çözüm

$\mathcal{B}[u(x)] = \mathcal{G}(s)$ olarak yazalım. Eş. 5.15'de verilen birinci tip VİDD'ine Kharrat-Toma dönüşümü uygulayıp ardından konvolüsyon teoremini kullanırsak;

$$\mathcal{B}[u'(x)] = \mathcal{B}[\cos(t) * u(t)]$$

elde ederiz. Buradan Kharrat-Toma dönüşümünün özelliklerini kullanarak

$$\frac{1}{s^2}\mathcal{G}(s) - s^3 u(0) = \frac{1}{s^3}\mathcal{B}[\cos(t)]\mathcal{B}[u(t)]$$

elde ederiz. Eğer $\mathcal{B}[\cos(t)] = \frac{s^5}{1+s^4}$ olduğunu hatırlarsak

$$\frac{1}{s^2}\mathcal{G}(s) - s^3 u(0) = \frac{s^2}{1+s^4}\mathcal{G}(s)$$

elde ederiz. Eğer $u(0) = 1$ başlangıç koşulunu kullanırsak

$$\frac{1}{s^2}\mathcal{G}(s) - s^3 = \frac{s^2}{1+s^4}\mathcal{G}(s)$$

veya buna denk olarak

$$\mathcal{B}[u(x)] = \mathcal{G}(s) = s^5 + s^9$$

elde ederiz. Bu eşitliğin her iki tarafına ters Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak başlangıç değer probleminin çözümünü

$$u(x) = \mathcal{B}^{-1}[s^5 + s^9] = 1 + \frac{x^2}{2}$$

olarak elde ederiz.

Örnek

$$u'(x) = 2e^x + \int_0^x \cos(x-t)\,u(t)dt, \quad u(0) = 0$$

ile verilen b.d.p. ni Kharrat-Toma dönüşümü ile çözünüz.

Çözüm

$\mathcal{B}[u(x)] = \mathcal{G}(s)$ olarak yazalım. Kharrat-Toma dönüşümünü Eş. 5.14' de verilen ikinci tip VİDD'ine uygularsak

$$\mathcal{B}[u'(x)] = \mathcal{B}\left[2e^x + \int_0^x \cos(x-t)\,u(t)dt\right]$$

elde ederiz. Eğer bu eşitliğin ikinci tarafına Kharrat-Toma dönüşümünün lineerliği ve konvolüsyon özelliklerini uygularsak,

$$\mathcal{B}[u'(x)] = \mathcal{B}[2e^x] + \mathcal{B}[\cos(t) * u(t)]$$

ve dolayısıyla

$$\frac{1}{s^2}\mathcal{G}(s) - s^3u(0) = 2\frac{s^5}{1+s^2} + \frac{1}{s^3}B[cos(t)]B[u(t)]$$

elde ederiz. Eğer, $\mathcal{B}[\cos(t)] = \frac{s^5}{1+s^4}$ olduğunu kullanırsak

$$\frac{1}{s^2}\mathcal{G}(s) - s^3u(0) = 2\frac{s^5}{1+s^2} + \frac{s^2}{1+s^4}\mathcal{G}(s)$$

elde ederiz. Eğer$u(0) = 0$ başlangıç koşulunu uygular ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$\mathcal{B}[u(x)] = \mathcal{G}(s) = \frac{2s^7}{1+s^2} + \frac{2s^{11}}{1+s^2}$$

elde ederiz. Eğer bu eşitliğin her iki tarafına ters Kharrat-Toma dönüşümünü uygularsak verilen başlangıç değer probleminin çözümünü

$$u(x) = \mathcal{B}^{-1}\left[\frac{2s^7}{1+s^2} + \frac{2s^{11}}{1+s^2}\right] = 2xe^{-x} + \frac{1}{3}x^3e^{-x}$$

olarak elde ederiz.

5.2. Elektrik Mühendisliği, Devre Teorisi ve Elektromanyetik Alanda Volterra ve Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemleri

Elektromanyetik alanın bir bölgedeki davranışını matematiksel olarak modellemek için, Maxwell denklemleri temel alınır. Bu denklemler, elektrik ve manyetik alanların birbirleriyle ve zamanla nasıl etkileştiğini tanımlar. Elektromanyetik alanın bir ortam içindeki dağılımını veya yayılmasını daha ayrıntılı incelemek istediğimizde ise integro-diferensiyel denklemler devreye girer.

i. **Elektromanyetik Dalgaların Yayılması:** Örneğin, bir boşlukta veya bir malzeme içindeki elektromanyetik dalgaların yayılması, dalga denklemleri ile ifade edilir. Elektromanyetik dalgaların matematiksel modellemesi genellikle dalga denklemleri ile başlar (örneğin, Maxwell denklemleri), ancak özellikle karmaşık ortamlarda (örneğin, yarı iletkenlerde veya dielektrik malzemelerde) elektrik alanın dağılımı integro-diferensiyel denklemler aracılığıyla daha ayrıntılı olarak inceleyebiliriz.

ii. **İntegro-Diferensiyel Denklemler ve Elektromanyetik Alan:** Elektromanyetik alanın integro-diferensiyel denklemlerle modellenmesi, genellikle elektromanyetik alanın geçmiş durumları ile şu anki durumu arasındaki ilişkileri tanımlamak için kullanılır. Örneğin, bir ortamda elektrik alanın dağılımı, önceki bir zamandaki alan durumlarına bağlı olarak hesaplanabilir.

Örnek (Yansıyan dalga ve yarı iletkenlerdeki elektrik alan):

Bir yarı iletken yüzeyinde elektromanyetik dalganın nasıl yansıdığını anlamak için Volterra integro-diferensiyel denklemleri kullanılabilir. Bu denklemler, geçmiş bir zamanda yansıma katsayısını belirleyen ve bu yansımanın gelecekteki alan dağılımı üzerindeki etkilerini hesaplayan matematiksel yapılar sağlar.

iii. **Numerik Çözümler ve Simülasyonlar:** Pratik uygulamalarda, bu tür karmaşık denklemlerin çözümleri genellikle sayısal yöntemlerle elde edilir. Spektral

yöntemler gibi teknikler, integro-diferensiyel denklemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılır.

vi. **Elektrik Devresinde Laplace Yönteminin Kullanımı:** Verilen başlangıç koşullarıyla doğrusal bir integro diferensiyel denklemi çözmek için Laplace dönüşüm yöntemi, özellikle elektrik mühendisliğinde karşılaşılan birçok problemde önemli bir rol oynar. Örneğin; RLC devreleri, elektrik mühendisliği ve fizik alanlarında sıkça karşılaşılan rezonans devreleri arasında yer alır. Bu devreler direnç (R), indüktör (L) ve kapasitör (C) birleşimi sayesinde, devrelerin dinamik davranışları analiz edilebilir ve rezonans fenomeni gibi önemli olaylar incelenebilir. Bu devrelerin çözümünde integro-diferensiyel denklemler ve Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak, devrelerin zamanla değişen akım ve gerilimleri kolayca hesaplanabilir.

5.3. Popülasyon Dinamikleri Modellenmesi için Volterra veya Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler

Biyolojide, popülasyon dinamiklerini anlamak için bu denklemler yaygın olarak kullanılır. Örneğin, bir ekosistemdeki türler arası etkileşimlerin (örneğin, avcı-av ilişkileri) nasıl birbirlerini etkilediğini ve bu etkileşimlerin zaman içinde popülasyonlara nasıl yansıdığını modellemek için VİDD'leri kullanabiliriz.

5.4. Kimya ve Reaksiyon Mühendisliği için Volterra veya Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler

Kimya ve reaksiyon mühendisliğinde, kimyasal reaksiyonların zaman içinde nasıl ilerlediğini anlamak için Volterra veya Fredholm integro-diferensiyel denklemleri kullanılır. Bu denklemler, reaksiyon hızının zamanla nasıl değiştiğini ve bu değişikliklerin reaksiyon sonuçları üzerindeki etkilerini analiz etmek için önemlidir.

Örneğin; Bir gaz fazındaki bir reaksiyonu düşünelim. Reaksiyon hızı $k(t)$, zamanla yavaş yavaş artan bir şekilde değişiyor olsun. Bu durumda, VİDD'inin matematiksel formülasyonu şu şekildedir:

$$\frac{dC(t)}{dt} = \left(\int_0^t f(t,s)C(s)ds \right) C(t)$$

Burada $f(t,s)$ geçmişteki reaksiyon konsantrasyonlarına bağlı olarak değişen bir fonksiyondur.

Analiz ve Sonuçlar: Bu türden bir denklem modeli, belirli başlangıç koşulları altında (başlangıçta reaksiyon konsantrasyonu $C(0)$ reaksiyonun nasıl ilerleyeceğini ve reaksiyon hızının zamanla nasıl değiştiğini tahmin etmemize yardımcı olur. Kimya ve reaksiyon mühendisliğinde bu tür modeller, yeni reaksiyon şartları ve optimizasyon stratejileri geliştirmek için kullanılır.

5.5. Finans ve Ekonomi için Volterra veya Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler

Finansal olarak, opsiyon fiyatlaması gibi karmaşık süreçlerin matematiksel modelleri Volterra veya Fredholm integro-diferensiyel denklemleri içerebilir. Bu denklemler, finansal piyasalardaki fiyat hareketlerinin ve opsiyonların zaman içinde nasıl değiştiğini tahmin etmek için kullanılır.

5.6. Çevre Bilimi için Volterra veya Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemler

Son olarak, çevre bilimlerinde su veya hava kirliliği gibi çeşitli çevresel faktörlerin modellenmesinde integro-diferensiyel denklemler önemli bir rol oynar. Örneğin, su kirliliğinin bir gölde nasıl yayıldığını veya hava kalitesinin bir bölgede nasıl değiştiğini anlamak için bu denklemler kullanılabilir.

Bu alanlarda Volterra ve Fredholm integro-diferensiyel denklemler, karmaşık süreçlerin matematiksel olarak modellemesi ve sistemlerin davranışlarının tahmin edilmesi için güçlü bir araç seti sunar. Bu denklemler, gerçek dünya problemlerine matematiksel çözümler sağlama yeteneğiyle bilim ve mühendislikte yaygın olarak kullanılmaktadır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez, Volterra ve Fredholm integro-diferensiyel denklemleri üzerine odaklanarak çeşitli matematiksel çözüm tekniklerinin uygulanabilirliğini araştırmayı amaçlamıştır.

Tezin ilk bölümü, giriş mahiyetinde olup, integro-diferensiyel denklemlerin tarihsel gelişim süreci, literatürdeki yeri ve çeşitli bilimsel disiplinlerdeki kullanımları üzerine genel bir çerçeve sunmaktadır. Bu bağlamda, Volterra ve Fredholm integro-diferensiyel denklemlerinin ortaya çıkışı, temel özellikleri ve farklı alanlardaki rolü detaylandırılmıştır.

Tezin ikinci bölümünde ise, araştırmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak matematiksel araçların anlaşılmasını kolaylaştırmak amacıyla gerekli tanımlar, öncül bilgiler ve temel teoremler sistematik bir biçimde ele alınmıştır. Böylece okuyucunun hem teorik hem de uygulamalı bölümlerde sunulan analizleri takip edebilmesi için sağlam bir altyapı oluşturulması hedeflenmiştir.

Tezin üçüncü kısmında VİDD'lerde ikinci tip Volterra integro-diferensiyel denklemler için çeşitli çözüm teknikleri incelenmiş ve karşılaştırılmıştır. Adomian ayrıştırma metodu, Laplace dönüşüm metodu, seri çözüm metodu, VİDD'lerinin başlangıç değer problemlerine dönüştürülmesi ve VİDD'lerin Volterra integral denklemlerine dönüştürülmesi yöntemleri üzerinde derinlemesine çalışmalar yapılmıştır.

Adomian ayrıştırma metodu, lineer olmayan VİDD'in çözümünde etkili bir şekilde kullanılabilmekte ve birçok pratik uygulamada başarıyla uygulanmaktadır.

Laplace Dönüşümü ise integral terimleri içeren lineer veya lineer olmayan VİDD'in çözümünde önemli bir araç olarak görülmektedir, özellikle sabit katsayılı integral terimleri içeren denklemlerde kullanımı yaygındır.

Seri çözüm metodu ise belirli koşullar altında VİDD'in analitik yaklaşımlarla çözümünde kullanılabilir. Özellikle integral ve türev terimlerinin uygun bir şekilde serilere genişletilebildiği durumlarda kullanımı pratik olabilmektedir.

Başlangıç değer problemlerine dönüştürme yöntemi, VİDD'in daha geleneksel diferansiyel denklem çözüm teknikleriyle ele alınabilmesini sağlar. Bu yöntem, VİDD'in başlangıç

koşulları ile ilgili problemlere dönüştürerek, literatürde daha fazla çalışma yapılmış olan algoritmalarla çözüm süreçlerini kolaylaştırır.

Son olarak, Volterra integral denklemlerine dönüştürme yaklaşımı, VİDD'in bazı özel durumlarında çözüm sürecini basitleştirebilir ve integral denklemler üzerinden analitik çözümlerin elde edilmesine imkân tanır.

Bu çalışmanın sonuçları, VİDD'in farklı türlerinin çözümünde kullanılan çeşitli tekniklerin avantajlarını ve sınırlamalarını ortaya koymaktadır. Gelecekte, daha karmaşık VİDD'in modelleri için yeni ve geliştirilmiş sayısal yöntemlerin geliştirilmesi ve bu tekniklerin pratik uygulamalara uyarlanması önerilmektedir.

Tezin dördüncü kısmında FİDD'lerinde ikinci tip FİDD için çeşitli çözüm tekniklerini incelemiş ve değerlendirmiştir. İnceleme, doğrudan hesaplama metodu, Adomian ayrıştırma metodu, değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu, gürültü terimi ve seri çözüm metodu üzerinde yoğunlaşmıştır.

Doğrudan hesaplama metodu, FİDD'in doğrudan sayısal hesaplama yöntemlerini kullanarak çözümünü sağlar. Bu yöntem, integral terimlerin doğrudan sayısal integrasyonu ile elde edilen sonuçlar üzerinde hassas ve etkili çözümler sunar.

Adomian ayrıştırma metodu, FIDD'in lineer olmayan versiyonlarının analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan bir yöntemdir. Denklem, serinin ayrıştırılması ve ardışık terimlerin hesaplanmasıyla basit bir şekilde ifade edilir.

Değiştirilmiş Adomian ayrıştırma metodu, Adomian'ın orijinal metodolojisini genişleterek, belirli durumlarda daha iyi yaklaşımlar sağlayan bir varyasyondur. Bu yöntem, özellikle karmaşık lineer olmayan FİDD'in çözümünde daha fazla esneklik ve doğruluk sağlar.

Gürültü terimi yaklaşımı, FİDD'in sistemdeki gürültü bileşenlerini dikkate alarak çözümler üretir. Bu metodoloji, gerçek hayattaki belirsizliklerin modellenmesinde önemli bir rol oynar.

Seri çözüm metodu, FİDD'in analitik çözümlerini elde etmek için terimleri bir seri şeklinde genişleterek ve ardışık terimlerin yakınsaklığını inceleyerek uygulanır. Bu yöntem, denklemlerin bazı özel koşullar altında analitik çözümlerini elde etmek için kullanışlıdır.

Bu çalışmanın sonuçları, FİDD'in farklı çözüm teknikleriyle ele alındığında her bir yöntemin avantajlarını ve sınırlamalarını ortaya koymaktadır. Özellikle, karmaşık ve lineer olmayan FİDD'ler için daha ileri sayısal yöntemlerin geliştirilmesi ve deneysel çalışmalarla doğrulanması önerilmektedir. Bu yöntemlerin uygulanabilirliği, pratikteki kompleks problemleri çözme kapasitesini artırabilir ve gelecekteki uygulamalar için yeni olanaklar sunabilir.

Tezin beşinci kısmında Volterra ve Fredholm integro-diferensiyel denklemlerin uygulama alanlarına değinilmiştir. Örneğin, VİDD'lerin çözümünde Kharrat-Toma dönüşümü uygulayarak daha az zamanda ve minimum çaba ile çözümlendiğine yer verilmiştir.

Mühendislik alanında, integro-diferensiyel denklemler manyetik alan modelleri, yapısal analizler ve akışkan dinamiği gibi karmaşık sistemlerin matematiksel modellenmesinde kullanılır. Tezimde incelenen sayısal analiz yöntemleri, bu alanlarda matematiksel modellemelerin doğruluğunu ve çözüm süreçlerini optimize etmeyi sunar.

Fizik ve matematikte, elektromanyetizma, dalga yayılımı ve kuantum mekaniği gibi fenomenler, Volterra ve Fredholm denklemleriyle açıklanabilir. Bu alanlarda çalışan araştırmacılar, tezimde sunulan teorik sonuçları analiz etmek veya yeni bulgular elde etmek için kullanabilirler.

Ekonomi ve finans alanında, stokastik süreçlerin modellemesi, opsiyon fiyatlaması ve risk yönetimi gibi finansal problemler integro-diferensiyel denklemlerle ele alınabilir. Finansal analistler, tezimde ele alınan matematiksel teknikleri kullanarak piyasalardaki karmaşık davranışları anlama ve tahmin etme konusunda avantaj sağlayabilirler.

Biyoloji ve tıp alanında, popülasyon dinamiği, hastalık yayılımı ve nörofizyoloji gibi biyolojik süreçler integro-diferensiyel denklemlerle modellenebilir. Bu alandaki uzmanlar, tezimde ele alınan matematiksel modelleri kullanarak canlı sistemlerdeki dinamikleri anlamak ve deneysel verilerle karşılaştırmak için bu tekniklerden yararlanabilirler.

Sonuç olarak, bu tezde incelenen matematiksel yöntemlerin, mühendislikten biyolojiye kadar geniş bir yelpazede uygulama potansiyeli bulunduğu görülmektedir. Gelecekteki çalışmalarda, bu yöntemlerin daha geniş veri setleri ve karmaşık sistemler üzerinde nasıl genişletilebileceği ve iyileştirilebileceği üzerine daha derinlemesine araştırmalar yapılması

önerilmektedir. Bu çalışmanın, akademik araştırmacılar, endüstri profesyonelleri ve disiplinler arası çalışma grupları için önemli bir kaynak olarak gösterilebilinir.

KAYNAKLAR

1. Bilgen,H. (2014). *Fredholm integral denklemlerinin üç pozitif çözümü*,Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi, Yaşar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı,İzmir.

2. İnternet: Wikipedia katılımcıları. (2024). *Sayısal analiz*. Vikipedi, Özgür Ansiklopedi. URL:https://tr.wikipedia.org/w/index.php?title=Say%C4%B1sal_analiz&oldid=30957510 Son Erişim Tarihi: 9 Ocak 2024.

3. Lovitt, W. V. (1950). *Linear integral equations,* New York: Dover Publications Inc.

4. Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and nonlinear integral equations methods and applications,* Berlin: Springer-Verlag.

5. Adomian, G. (1994). *Solving frontier problems of physics, the decomposition method*, Boston: Kluwer.

6. Zabreyko, P. P. (1975). *Integral equations*, Leyden: Noordhoff International Publishing.

7. Göktürk, B. B. (2004). *Laplace dönüşümü ve uygulamaları*,Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

8. Mısır, A. (2020). *Teori teknik ve uygulamaları diferensiyel denklemler* (Genişletilmiş 3. baskı), Ankara: Gazi Kitabevi.

9. Moiseiwitsch, B. L. (1977). *Integral equations,* London ve New York: Longman.

10. Chambers, L.G. (1976). *Integral equations, a short course*. London: International Textbook Company.

11. Churchhouse, R. F. (1981). *Handbook of applicable mathematics,* New York: Wiley.

12. Volterra, V. (1959). *Theory of functionals of integral and integro-differential equations,* New York: Dover.

13. Burton, T. A. (2005). *Volterra integral and differential equations (2. ed.),* Amsterdam: Elsevier.

14. Wazwaz, A. M. (1997). *A first course integral equations,* Singapore: World Scientific.

15. Adomian, G. (1994). *Solving frontier problems of physics, the decomposition method*, Boston: Kluwer.

16. Wazwaz, A. M. (2009). *Partial differential equations and solitary Waves theory*, Beijing ve Berlin: HEP ve Springer.

17. Adomian, G., & Rach, R. (1992). *Noise terms in decomposition series solution*, Computers Math. Appl., 24(11), 61–64.

18. Adomian, G. (1986). *Nonlinear stochastic operator equations*, San Diego: Academic Press.

19. Dyke, P. P. G. (2001). *An introduction to Laplace transforms and Fourier series*, London: Springer-Verlag Limited.

20. Daymaz, T. (2018). *Lineer integral denklemler için bazı çözüm yöntemleri*, Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

21. İnternet: *Reel (gerçel) değerli fonksiyon dizileri* (2014). Çankırı Karatekin Üniversitesi.URL:http://websitem.karatekin.edu.tr/user_files/hirmak/files/fonkdiziler.pdf.

22. Rahman, M. (2007). *Integral equations and their applications*, Boston: WIT Press.

23. Öztunç, Ö. (2009). *Parabolik volterra integro-diferensiyel denklemlerin nümerik çözümleri*, Yayınlanmış Yüksek Lisans Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Aydın.

24. Çimen, E. (2018). *A computational method for Volterra ıntegro-differential equation.* Erzincan University Journal of Science and Technology, 11(3), 347-352.

25. Wazwaz, A. M. (1999). *A reliable modification of the Adomian decomposition method*, Appl. Math. Comput., 102, 77-88.

26. Spiegel, M. R. (1965). *Laplace transforms* (p. 249). New York: McGraw-Hill.

27. Mahgob, A. M., & Elzaki, T. M. (2015). *Elzaki transform and integro-differential equation with a bulge function*. *IOSR Journal of Mathematics*, 11(2), 25–28.

28. Aggarwal, S., Chauhan, R., & Sharma, N. (2018). *Application of Aboodh transform for solving linear Volterra integro-differential equations of second kind.* International Journal of Research in Advanced Technology, 6**(**8), 1186–1190.

29. Kumar, P. S., Gnanavel, M. G., & Viswanathan, V. (2018). *Application of Mohand Transform for Solving Linear Volterra Integro-Differential Equations.* International Journal of Research in Advanced Technology, 6**(**10), 2554–2556.

30. Farah, R. A., & Hamad, M. A. (2024). *On the use of RAHMOH integral transform for solving differential equations.* International Journal of Physics and Mathematics, *6*(2), 1–8.

31. Kharrat, B. N., & Toma, G. A. (2020). *A new integral transform: Kharrat-Toma transform and its properties*. World Applied Sciences Journal, 38(5), 436–443.

32. Kharrat, B. N. (2024). "New Double Kharrat-Toma Transform and its Application in Partial Differential Equations," World Applied Sciences Journal, 42(1), 30-36.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler



Soyadı, adı	:AKTAŞ, Fatma Büşra
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 19.02.1997, İstanbul
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (535) 933 55 05
e-mail	: fbusra.sayat@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı	Devam ediyor
Lisans	Başkent Üniversitesi / Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2020

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2024-Halen	Batman MBA Okulları	İlköğretim Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Hobiler

Yüzmek, Kitap Okumak, Tiyatro ve Film İzlemek, Tarihi ve Turistik Yerleri Gezmek, Fotoğraf Çekmek, Araştırma Yapmak…



Gazili olmak ayrıcalıktır