T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM BÖLÜMÜ
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ ANABİLİM DALI

cK¢ MODELİNE GÖRE 10. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİK YER KAVRAMINA İLİŞKİN KAVRAMALARI ÜZERİNE NİTEL BİR ARAŞTIRMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hazırlayan
Gönül YAZGAN

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Ziya ARGÜN

Ankara 2006

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Gönül YAZGAN'a ait "**cKÇ MODELİNE GÖRE 10. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİK YER KAVRAMINA İLİŞKİN KAVRAMALARI ÜZERİNE NİTEL BİR ARAŞTIRMA**" adlı çalışma jürimiz tarafından Ortaöğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: .....

(Danışman)

Üye: .....

Üye: .....

ÖZET

cK¢ Modeline Göre 10. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik Yer Kavramına İlişkin Kavramaları Üzerine Nitel Bir Araştırma

(Yüksek Lisans Tezi)

Gönül YAZGAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2006

Araştırmanın başlangıcında öğrenmenin nasıl gerçekleştiğini ortaya çıkarmaya çalışan modellerden birisi olan cK¢ modelinin teorik alt yapısı araştırılmış, ilgili kaynaklar taranmış ve yapılan incelemeler sonunda araştırma projesi hazırlanmıştır. Literatürde kavramalar ve öğrenciler tarafından oluşturulan kavramalar hakkında birçok araştırma bulunmaktadır. Kavramaların kapsamlı bir teşhisi öğrenmenin ne kadarının gerçekleşip ne kadarının gerçekleşmediğinin öğrenilmesi hususunda önemlidir. Bunun yanında kavrama, doğrudan gözlenilebilir

bir unsur değildir. Doğrudan gözlenilebilir unsurlar, öğrencilerin kullandıkları işlemler, problem çözüşleri, çözdükleri problemleri açıklarken kullandıkları dil ve öğrencilere ait kontrol yapılarıdır. Öğrenmenin gerçekleşmesi ve kalıcı olması için bu doğrudan gözlenilebilir unsurların dikkate alınması gerekmektedir. cK¢ modeli de öğrenci kavramalarının bu şekildeki bir teşhisine olanak sağlamaktadır. cK¢ modelinin çıkış noktası, Fransız matematik eğitimcisi Brousseau tarafından 1970 ve 1990 yılları arasında geliştirilmiş olan "Öğretici Durumlar Teorisi (The Theory of Didactical Situations)" dir. Bu teorinin amacı, matematikte yer alan öğretici durumlarda (didactical situations) meydana gelen öğrenmelerin nasıl gerçekleştiğini ortaya çıkarmak ve öğrenciyi epistemolojik konu olarak modellemektir. cK¢ modeli problem durumlarının matematiksel bilginin asıl kaynağı olduğu varsayımını kabul ederek, öğrenmenin nasıl gerçekleştiğini ortaya çıkarmaya çalışan bir modeldir.

Bu araştırmada veri toplama aracı olarak 10. sınıf öğrencileri için araştırmacı ve araştırmacının danışmanı tarafından bir çalışma kağıdı hazırlanmıştır. Çalışma kağıdı, cK¢ modeline göre 10. sınıf öğrencilerinin "geometrik yer" kavramı ile ilgili kavramalarını ortaya çıkarmak için hazırlanmıştır.

Araştırma, Ankara'da özel bir dershanede eğitim alan ikişer öğrenciden oluşan 6 grup yani 12 öğrenci ile yapılmıştır. Araştırmacı ve araştırmacının danışmanı tarafından çalışma kağıdında yer alan soruların cK¢ modeline göre matematiksel analizi yapılmıştır. Öğrencilerden elde edilen verilerin, cK¢ modeline göre analizi yapılmıştır. Bu analizler, araştırmacı ve araştırmacının danışmanı tarafından yapılan matematiksel analiz ile karşılaştırılmış ve yorumlanmıştır. Bu karşılaştırmalardan çıkarılan sonuçlar olarak öğrencilerin sahip olduğu "geometrik yer" kavramalarını iyi yapılandırmadıkları, yanlış kavramalara sahip oldukları ve bu kavram yanılgılarını irdelemeksizin kullandıkları görülmüştür. "Geometrik yer" kavramı ile ilgili öğrenci kavramalarının sezgisel olarak yapılandırıldığı sonucuna da varılmıştır. Öğrenci kavramalarının, cK¢ modeline göre yapılan analizin, öğretilen içeriğin öğrencide ne derece yapılandığını ortaya çıkarmak açısından önemli olduğu bu araştırmada görülmüştür. Bu model sayesinde araştırmacı tarafından, öğretilen ve öğrenilen kavramlar hakkında daha geniş perspektif içeren yorumlar yapılabilmiştir.

Ayrıca araştırma bulguları çerçevesinde, hem bu uygulamaya hem de bu konularda çalışma yapmak isteyen eğitimcilere ve araştırmacılara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

ABSTRACT

A Quantitative Research of 10th year Students's Conceptions On Geometric Locus Concept By Using The cK¢ Model

(M. Sc. Thesis)

Gönül YAZGAN

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE EDUCATION

June 2006

At the beginning of the research, one of the models is called cK¢ model, which explains how learning process is becoming, resources related to the topic were scanned and then following this procedure the project was prepared. In the literature, there are lots of researches, concerning conceptions in general, an conceptions, created by students, in particular. A comprehensive identification of the conceptions is important to understand, of what proportion of the learning have been achieved, and of what proportion of the learning have not been achieved. Diagnosing conceptions is very important and also a conception is not an observable element. Observable elements are operators used by students, the problem solved, the language used to express them and theoretical control structures. For the realization and durability of the learning, it is necessary for it, to consider these observable facts.

The cK¢ model also enables such an identification of the student conceptions. The starting point of the cK¢ model is the Theory of Didactical Situations, created by the French mathematics educator Guy Brousseau, between the 1970's and 1990's. The aim of the Theory of Didactical Situations is to study learning in didactical situations in the mathematical domain and the student being modelled as an epistemic subject. The cK¢ model, is the kind of model, which tries to explore how the learning process realizes, by accepting the hypothesis that problematic situation are the main resource of the information.

In this research, a work sheet has been prepared by the researcher and the researcher's advisor, as an instrument of data collecting, for the 10th year students. The work sheet has been prepared for exploring the 10th year students' conceptions, concerning the "geometric locus" concept, according to the cK¢ model.

The research has been conducted with 6 groups, each of which composes of 2 students (i.e. 12 students in sum), who are getting their education in Ankara, in a private establishment, preparing students for various exams. The questions that take place in the work sheet, have been analyzed by the researcher and the researcher's advisor. The data that obtained from the students, have been analyzed, according to the cK¢ model. These analyzes have been compared with the mathematical analyzes that were conducted by the researcher and the researcher's advisor, and they have been interpreted. As results of this comparison, it has been observed that these students have not well constructed their conceptions of "geometric locus", they have some misconceptions and they use these misconceptions, without thinking on it. It has also been concluded that, the conceptions of the students, concerning the "geometric locus", are being made, intuitively. In this research, the significance of students' conceptions and the significance of the analyzes that is conducted according to the cK¢ model, in exploring in what degree, the taught content has been internalized by the student, has also been seen thanks to hat model, comments of wider perspective, concerning the concepts that are being taught and learned, have been able to be made, by the researcher. Besides, within the limits of the research

findings, suggestions are made for both this study and for research who want to work on this issue in the future.

TEŞEKKÜR

Araştırmanın gerçekleşmesinde görüşleriyle yardımcı olan ve çalışma boyunca yol gösteren Prof. Dr. Ziya ARGÜN'e en derin saygılarımla teşekkür ederim.

Araştırma boyunca manevi desteğini ve görüşlerini esirgemeyen Doç. Dr. Ahmet ARIKAN'a teşekkür ederim.

Araştırmada bilgisiyle ve desteğiyle her zaman yol gösteren Arş. Gör. Handan DEMİRCİOĞLU (ÇOLAK)'a teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan, maddi ve manevi her türlü desteği benden hiçbir zaman esirgemeyen arkadaşlarıma ve özellikle en zor zamanlarımda her zaman yanı başımda hissettiğim dostum Özge SOĞANCI'ya teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca her kararımda beni destekleyen aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....iii
ABSTRACT.....vi
TEŞEKKÜR.....ix
İÇİNDEKİLER.....x
TABLOLAR CETVELİ.....xii
ŞEKİLLER CETVELİ.....xiv
1. GİRİŞ.....1
1.1. Problem Durumu.....1
1.1.1. Nesnelci Öğrenme Kuramları.....1
1.1.1.1. Davranışçı Öğrenme Kuramları.....2
1.1.1.2. Bilişsel Öğrenme Kuramları.....2
1.1.2. Yapısalcı Öğrenme Kuramları.....3
1.2. Problem Cümlesi.....6
1.3. Araştırmanın Amacı.....6
1.4. Araştırmanın Önemi.....7
1.5. Varsayımlar.....8
1.6. Sınırlılıklar.....8
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE.....9
2.1. Teorik Giriş.....9
2.1.1.Öğretici Durumlar Teorisi (The Theory of Didactical Situations).....9
2.1.2.Bilgi-Bilme.....9
2.1.3.Davranış-Bilme.....10
2.1.4.Tutarlılık ve Uygulama Alanı.....15
2.1.5. Kavram Yanılgısı-Hata-Bilme.....16
2.2. cK¢ (Concept, Knowing, Concept) Modeli.....23
2.2.1. *"Kavrama"* nın biçimsel betimlemesi.....23
2.2.2.Öğrenme.....28

2.2.3. Kavrama, Bilme, Kavrama……...29

2.3. "Geometrik Yer" Kavramı……..31

2.4. İlgili Araştırmalar……..35

3. YÖNTEM……...38

3.1. Evren ve Örneklem……38

3.2. Veri Toplama Tekniği……..38

3.3. Verilerin Analizi……39

4. BULGULAR VE YORUMLAR……..63

4.1. 1. soruya ait bulgular……64

4.2. 2. soruya ait bulgular ……109

4.3. 3. soruya ait bulgular ……120

4.4. 4. soruya ait bulgular ……143

4.5. 5. soruya ait bulgular ……176

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER ……..223

5.1. Sonuçlar……223

5.2. Öneriler……..227

KAYNAKÇA……...229

EKLER……237

TABLOLAR CETVELİ

Tablo 1. 1. soruya ait problem kümesi

Tablo 2. 1. soruya ait işlem kümesi

Tablo 3. 1. soruya ait temsil kümesi

Tablo 4. 1. soruya ait kontrol kümesi

Tablo 1.1. 1. grubun 1. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 1.2. 2. grubun 1. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 1.3. 3. grubun 1. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 1.4. 4. grubun 1. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 1.5. 5. grubun 1. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 1.6. 6. grubun 1. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 5. 2. soruya ait problem kümesi

Tablo 6. 2. soruya ait işlem kümesi

Tablo 7. 2. soruya ait temsil kümesi

Tablo 8. 2. soruya ait kontrol kümesi

Tablo 2.1. 1. grubun 2. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 2.2. 2. grubun 2. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 2.3. 3. grubun 2. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 2.4. 4. grubun 2. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 2.5. 5. grubun 2. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 2.6. 6. grubun 2. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 9. 3. soruya ait problem kümesi

Tablo 10. 3. soruya ait işlem kümesi

Tablo 11. 3. soruya ait temsil kümesi

Tablo 12. 3. soruya ait kontrol kümesi

Tablo 3.1. 1. grubun 3. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 3.2. 2. grubun 3. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 3.3. 3. grubun 3. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 3.4. 4. grubun 3. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 3.5. 5. grubun 3. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

Tablo 3.6. 6. grubun 3. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü
Tablo 13. 4. soruya ait problem kümesi
Tablo 14. 4. soruya ait işlem kümesi
Tablo 15. 4. soruya ait temsil kümesi
Tablo 16. 4. soruya ait kontrol kümesi
Tablo 4.1. 1. grubun 4. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü
Tablo 4.2. 2. grubun 4. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü
Tablo 4.3. 3. grubun 4. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü
Tablo 4.4. 4. grubun 4. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü
Tablo 4.5. 5. grubun 4. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü
Tablo 4.6. 6. grubun 4. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü
Tablo 17. 5. soruya ait problem kümesi
Tablo 18. 5. soruya ait işlem kümesi
Tablo 19. 5. soruya ait temsil kümesi
Tablo 20. 5. soruya ait kontrol kümesi
Tablo 5.1. 1. grubun 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü
Tablo 5.2. 2. grubun 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü
Tablo 5.3. 3. grubun 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü
Tablo 5.4. 4. grubun 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü
Tablo 5.5. 5. grubun 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü
Tablo 5.6. 6. grubun 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

ŞEKİLLER CETVELİ

Şekil-1	1. sorunun, anahtar kavrama (P,İ,T,K) dörtlüsüne göre çizimi
Şekil-2	2. sorunun, anahtar kavrama (P,İ,T,K) dörtlüsüne göre çizimi
Şekil-3	3. sorunun, anahtar kavrama (P,İ,T,K) dörtlüsüne göre çizimi
Şekil-4	4. sorunun, anahtar kavrama (P,İ,T,K) dörtlüsüne göre çizimi
Şekil-5	6. sorunun, anahtar kavrama (P,İ,T,K) dörtlüsüne göre çizimi
Şekil-6	1. grubun 1. soruya ait çizimi
Şekil-7	2. grubun 1. soruya ait çizimi
Şekil-8	3. grubun 1. soruya ait çizimi
Şekil-9	4. grubun 1. soruya ait çizimi
Şekil-10	5. grubun 1. soruya ait çizimi
Şekil-11	6. grubun 1. soruya ait çizimi
Şekil-12	1. grubun 2. soruya ait çizimi
Şekil-13	2. grubun 2. soruya ait çizimi
Şekil-14	3. grubun 2. soruya ait çizimi
Şekil-15	4. grubun 2. soruya ait çizimi
Şekil-16	5. grubun 2. soruya ait çizimi
Şekil-17	6. grubun 2. soruya ait çizimi
Şekil-18	1.grubun 3. soruya ait ilk çizimi
Şekil-19	1.grubun 3. soruya ait ikinci çizimi
Şekil-20	2.grubun 3. soruya ait çizimi
Şekil-21	3.grubun 3. soruya ait çizimi
Şekil-22	4. grubun 3. soruya ait çizimi
Şekil-23	5.grubun 3. soruya ait ilk çizimi
Şekil-24	5.grubun 3. soruya ait ikinci çizimi
Şekil-25	6 .grubun 3. soruya ait çizimi
Şekil-26	1.grubun 4. soruya ait çizimi
Şekil-27	2.grubun 4. soruya ait çizimi
Şekil-28	3.grubun 4. soruya ait çizimi
Şekil-29	4.grubun 4. soruya ait ilk çizim

Şekil-30 4.grubun 4. soruya ait ikinci çizimi
Şekil-31 4.grubun 4. soruya ait üçüncü çizimi
Şekil-32 5.grubun 4. soruya ait çizimi
Şekil-33 6.grubun 4. soruya ait çizimi
Şekil-34 1. grubun 5. soruya ait çizimi
Şekil-35 1. grubun 5. soruya ait grafik çizimi
Şekil-36 2. grubun 5. soruya ait çizimi
Şekil-37 2. grubun 5. soruya ait grafik çizimleri
Şekil-38 3. grubun 5. soruya ait çizimi
Şekil-39 3. grubun 5. soruya ait grafik çizimi
Şekil-40 4. grubun 5. soruya ait çizimleri
Şekil-41 4. grubun 5. soruya ait çizimi
Şekil-42 5. grubun 5. soruya ait çizimi
Şekil-43 6. grubun 5. soruya ait çizimi
Şekil-44 6. grubun 5. soruya ait çizimi

1. GİRİŞ

Bu bölümde, "Problem Durumu", "Problem Cümlesi", "Araştırmanın Amacı", "Araştırmanın Önemi", "Varsayımlar", "Sınırlılıklar" alt başlıkları ele alınmıştır.

1.1. Problem Durumu

Okul ortamı düzenlenirken yada bir ders müfredatı oluşturulurken temel amaçlardan birisi "öğretim" eyleminin gerçekleştirilmesidir. Etkili ve verimli öğretim uygulamalarının temelinde genellikle güçlü bir öğrenme kuramı yer almaktadır. Bir öğrenme kuramı, kapsamlı araştırmalar sonucunda insanların nasıl öğrendiğini açıklamak amacıyla oluşturulmuş birçok genellemeler ve ilkeler içeren bir model yada sistem olarak tanımlanabilir. Her öğrenme kuramı, bilme ve bilginin ne olduğuna ilişkin felsefi bir anlayışı yansıtan varsayımlara da genel olarak sahiptir (Deryakulu, 2001).

Öğrenme kuramları genel olarak incelendiğinde, nesnelci (objectivist) ve yapısalcı (constructivist) olarak sınıflandırılmaktadır. Farklı iki görüşe sahip olan bu kuramlar algılama, bilme, anlama ve öğrenmeye ilişkin açıklamaları konusunda farklılıklar göstermektedir.

1.1.1. Nesnelci Öğrenme Kuramları

Nesnelcilik, bilginin ne olduğu ve bir şeyi bilmenin ne anlama geldiğine ilişkin felsefî bir görüştür (Bednar, Cunningham, DulTy ve Perry, 1995). Nesnelci görüş açısına göre, yaşadığımız dünya, içinde barındırdığı canlı ve cansız varlıklar, bu varlıkların kendilerine özgü özellikleri ve yine varlıkların aralarındaki karşılıklı ilişkilerinden oluşan *tam* ve *tek* bir yapıya sahiptir (Lakoff, 1987). Yine bu görüşe göre, kişinin bir şeyi anlaması, her bireyin dünya ile etkileşimi sonucunda zihninde

oluşturduğu anlam, zaten dünyada var olan bilgilerin zihne olduğu gibi aktarılmasından başka bir şey değildir (Duffy ve Bednar, 1991; Lunenbcrg, 1998). Nesnelci yaklaşım öğrenmeyi, öğrencilere aktarılan bilgilerin olduğu gibi edinilmesi olarak kabul etmektedir (Duffy ve Jonassen, 1991).

Nesnelci görüşün eğitim alanında çeşitli yansımaları bulunmaktadır. Özellikle bilginin ne olduğu, bilmenin ne anlama geldiği, öğretme ve öğrenme işlevinin ne olması gerektiğine ilişkin varsayımlarını paylaşan öğrenme kuramlarından en iyi bilinenleri *davranışçı* kuramlar ve bilgi işlemeye dayalı *bilişsel* kuramlardır (Deryakulu, 2001).

1.1.1.1. Davranışçı Öğrenme Kuramları

Davranışçı kurama göre öğrenme, bireyin davranışlarındaki gözlemlenebilir bir değişmedir (Gropper, 1987; Jonassen, 1991a; Jonassen, 1991b). Buna göre, sunulan uyarıcıya karşı öğrencinin istenen tepkiyi göstermesi öğrenme olarak kabul edilmektedir. Burada geçen uyarıcı kavramı, öğretimle sunulan içeriği, tepki ise öğrencinin gösterdiği gözlemlenebilen davranışı nitelemektedir. Bu kurama göre, öğrenciler davranışlarını kendilerine verilen amaçlara ve bu doğrultuda gösterdikleri eylemlerin sonuçlarına göre ayarlamaktadırlar. Bu nedenle, öğrenme, sunulan uyarıcıyla gösterilen davranış arasındaki öğrenilmiş ilişkinin aşamalı olarak güçlendirilmesine, bu da davranışın sonucuna ve çeşitli yollarla pekiştirilmesine bağlı olarak kabul edilmektedir (Şimşek ve Deryakulu, 1994).

1.1.1.2. Bilişsel Öğrenme Kuramları

Bilgi işlemeye dayalı bilişsel kurama göre öğrenme, dışsal uyarıcıların içsel yada zihinsel süreçlerle işlenmesi yoluyla oluşmaktadır. Bu kurama göre, dış çevreden duyu organları aracılığıyla algılanan bilgiler, zihinde tıpkı bir bilgisayarın verileri işlemesi gibi işlenmektedir. (Jonassen, 1988).

Her ne kadar, bilgi işlemeye dayalı bilişsel öğrenme kuramı öğrenmede öğrencinin zihinsel bilgi işleme etkinliklerini ön plana alarak davranışçı kuramdan oldukça farklı bir bakış açışı sergilese de, temelde her iki kuram da bilgi ve bilmeyle ilgili nesnelci görüşün varsayımlarını benimsemektedir (Jonassen, 1990).

1.1.2.Yapısalcı Öğrenme Kuramları

Yapısalcı görüş, bilginin ne olduğu ve bir şeyi bilmenin ne anlama geldiğine ilişkin olarak nesnelci görüşten oldukça farklı bir felsefi anlayışa sahiptir. Bu görüşün temelinde, bilginin yada anlamın dış dünyada bireyden bağımsız olarak var olmadığı ve edilgen olarak dışarıdan bireyin zihnine aktarılmadığı, tersine etkin biçimde birey tarafından zihinde *yapılandırıldığı* görüşü yer alır (Cunningham, 1991; Duffy ve Jonassen, 1991). Bir başka deyişle, bireyin çeşitli deneyimler yaşadığı gerçek bir dünya vardır, fakat bu dünyaya anlam veren bireydir. Anlam bireyden bağımsız olarak dış dünyada var olan bir şey değildir. Bu nedenle, nesnelci görüşün savlarının tersine, yapıcı görüşe göre bilgi yada anlam bireysel olarak yapılandırılan bir şey olduğundan, dünyada hiçbir nesne, olay, olgu yada kavrama ilişkin tek ve nesnel bir gerçeklikten söz edilemez. Gerçeklik, bir dereceye kadar, birey onu ne olarak tasarlarsa yada algılarsa odur (Jonassen, 1990). Her konuya ilişkin birçok bakış açışı ve anlam söz konusudur. Kişinin bir şeyi bilmesi, anlaması yada yorumlaması, o şeye ilişkin yaşadığı deneyime bağlıdır (Brown. Collins, & Duguid, 1989).

Yapısalcı görüşe göre öğrenme, öğrencinin duyu organları aracılığıyla dış dünyadan algıladığı belirli bir nesne, olay, olgu yada kavrama ilişkin zihninde kendi gerçeğini (bilgilerini) yapılandırması yada en azından önceki deneyimlerine dayalı olarak gerçeği yorumlaması sürecidir (Jonassen, 1994). Her öğrenci, doğduğu günden bu yana yaşadığı çeşitli bireysel yada toplumsal deneyimlerin izlerini taşıyan ve daha önceki öğrenme deneyimlerinden edinmiş olduğu anlamlı bilgileri içeren bir zihinsel yapıya sahiptir (Deryakulu,2001).

Bilimsel yönelimli yapısalcı görüş, öğrenmeyi temelde bireysel bir girişim olarak görmektedir (Scheurman, 1998).

Toplumsal yönelimli yapıcı görüş, öğrenmeyi bireyin yaşadığı toplumsal ve kültürel doku içinde gerçekleştirdiği bir bilinçli etkinlik olarak değerlendirmektedir (Scheurman, 1998).

Birçok yapısalcı öğretim modeli özünde bu iki anlayışı harmanlayarak kullanmakta, öğrencilerin öğrenme sırasında bilgileri hem bireysel, hem de toplumsal olarak yapılandırdıklarını belirtmektedirler (Deryakulu, 2001).

Son zamanlarda yapılan birçok çalışma da farklı yeni öğrenme teorileri yeni öğretim durumları için araştırılmaktadır ve yeni öğrenme teorilerinin öğrenci başarılarına etkilerine bu araştırmalarda yer verilmektedir.

Matematik eğitiminde de yapılan çoğu araştırmada, öğrencilerin nasıl öğrendiklerini anlamaya çalışan öğrenme modelleri ve yine bu modellerin öğretme eylemindeki uygulamaları yer almaktadır. Bu öğrenme modelleri özellikle yapılandırmacılık temelli modellerdir. Bu modellerin bazılarından kısaca bahsedilecektir.

Dubinsky (1991), Hareket-Süreç-Obje-Şema (Action-Process-Object-Schema, APOS) olarak bilinen bir bilişsel model geliştirmiştir. Bu model, Piaget'in düşünsel soyutlamasına (reflective abstraction) dayanmaktadır. Schoenfeld (1985) ise Matematiksel Problem Çözme (Mathematical Problem Solving) olarak adlandırdığı öğrenme modelinde, bir öğrencinin matematiksel anlamasının, problemleri çözme yeteneği gibi olduğunu ifade etmektedir. Bu yeteneği etki altında bırakan bilginin dört kategorisi olduğunu teşhis etmiştir. Schoenfeld, bu kategorileri kaynaklar (resources), anlamaya yarayanlar (heuristics), kontroller (controls) ve inanç sistemleri (belief systems) olarak ifade etmiştir. Kaynaklar, öğrencilerin sahip oldukları temel matematik bilgileridir. Anlamaya yarayanlar, problem çözme stratejileri ve teknikleridir. Kontroller, öğrencinin kaynak ve stratejilerle ilgili

kararlarıdır. Son olarak inanç sistemi, öğrencinin matematiksel bakış açısıdır. Bu modelle göre, bir öğrencinin matematiksel davranışları açıklanırken, bu dört kategorinin ele alınması gerekmektedir. Bir diğer model ise Vinner (1992) 'ın, Dreyfus ve Tall ile birlikte bir öğrencinin kavram imajı (concept image) ve kavram tanımı (concept definition) üzerinde tartışmaları sonucunda ortaya çıkmıştır. Kavram imajı, öğrencinin kavram ile ilgili sahip olduğu tüm objeler, süreçler ve şemalar yardımıyla oluşturduğu bir koleksiyondur. Kavram imajı ise zihinsel resimleri ve kavram yanılgılarını içerebilmektedir. Bu imaj ile matematiksel tanım arasıdaki gerilim, kavram imajı ve kavram tanımı ile oluşturulan modelin merkezidir (Dreyfus,1990).

Matematik eğitiminde öğrenmenin nasıl gerçekleştiği ile ilgili oluşturulan modellerden birisi de "Öğretici Durumlar Teorisi (The Theory of Didactical Situations)" dir. Öğretici durumlar teorisi, Fransız matematik eğitimcisi Brousseau tarafından, 1970 ve 1990 yılları arasında geliştirilmiştir. Bu araştırmada incelenen cK¢ modelinin de çıkış noktası öğretici durumlar teorisidir. Bu teorinin amacı, matematikte yer alan öğretici durumlarda (didactical situations) meydana gelen öğrenmelerin nasıl gerçekleştiğini ortaya çıkarmaktır. İlk olarak durumun matematiksel analizine odaklanılmaktadır. Bu teoride öğrenci, öğretmenin etkisi göz önüne alınmaksızın, bir epistemolojik konu olarak modellenmektedir (13).

Bu araştırmanın konusu olan cK¢ modeli ise öğretici durumlar (didactical situations) ile ilişkilidir. Bazı kaynaklarda bu modelin ismi "problématique" olarak geçmektedir (12). Burada "*problématique*" kelimesi ile herhangi teorik bir yapıyla ilgili olan araştırma sorularının kümesi kast edilmektedir (Balacheff,1990). cK¢ modeli yapılandırmacılık temellidir. Bunun yanında cK¢ modeli, problem durumlarının, matematiksel bilgiye kaynak oluşturduğu varsayımına dayanmaktadır. Ayrıca öğretmenin rolü ve matematiğin sosyal durumları bu modelde yer almaktadır. Pedagojik olarak öğrenciler, öğretici (didactical) süreçler içinde yer almaktadır. cK¢ modelinde, öğrencinin matematiksel bilgiyi (yeniden) yapılandırabilmesi için öğrenciyi üstesinden gelmesi gereken epistemolojik engellerle karşılaştırmak asıl

amaçtır (Artigue, 1992). Yine bu model, öğrenci kavramalarını modellemeyi ve öğrenci kavramaları için biçimsel bir betimleme yapmayı amaçlamaktadır.

Bu araştırmada cK¢ modeli ile öğrencilerin "geometrik yer" kavramı ile ilgili kavramalarını ortaya çıkarmaya çalışılacaktır. "Geometrik yer", matematikte "yer" kelimesinin özelleştirilmiş halidir. "Yer" kelimesinin hissettirdiği fikir, somut yada soyut bir olguya odaklanma, yoğunlaşma ve yine bir olguyu betimlemektir. Bu bağlamda "geometrik yer" için "aynı özellikleri olan noktaların oluşturdukları çizgi veya yüzey" tanımlaması yapılmıştır (1). Matematik literatüründe ise,

1) Belli bir kuralı sağlayan noktalar kümesidir (6).
2) Matematikte geleneksel olarak hareketli bir noktanın çizdiği yol, iz olarak tanımlanmaktadır. Fakat şimdilerde verilen şartları sağlayan bir eğri üzerindeki tüm noktalar kümesi olarak tanımlanmaktadır (11).

şeklinde yapılan tanımlamalar görülmektedir. Bu yapılan tanımlamaların ışığı altında öğrenci kavramaları, cK¢ modeli yardımıyla incelenecektir.

1.2. Problem Cümlesi

Bu araştırmanın temel problemi: "cK¢ modeli yardımıyla "geometrik yer" kavramı ile ilgili öğrenci kavramalarının yapısı nasıl ortaya çıkarılabilir?" sorusunun araştırılmasıdır.

1.3. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmada, matematik derslerinde yer alan temel kavramlar hakkındaki öğrenci kavramalarının nasıl yapılandığını anlamak ve bu yapının matematik eğitimine katkısını özel bir kavram olan "geometrik yer" kavramı yardımıyla görmeye çalışmak amaçlanmıştır. Bunun için aşağıdaki sorulara yanıt aranmaya çalışılacaktır:

1) cK¢ modeline göre, öğrenci kavramalarının genel yapısı nasıldır?

2) cK¢ modeline göre matematik derslerinde yer alan, "geometrik yer" kavramı göz önüne alındığında öğrenci kavramaları belirlenmesi ve sınıflandırılması nasıldır?

1.4. Araştırmanın Önemi

Öğrenme-öğretme sürecinde olumlu sonuçların alınabilmesi için öğrenmenin nasıl gerçekleştiğinin bilinmesi gerekmektedir. Son yıllarda yapısalcı yaklaşıma göre öğrenmenin nasıl gerçekleştiğini açıklamaya çalışan öğrenme modellerinin, öğretim yaşantısındaki uygulamaları, matematik eğitimi araştırmalarında yer almaktadır. Literatür taraması sonucunda, öğrenci kavramalarını net bir şekilde, biçimsel olarak ortaya koyan bir araştırmayla, Balacheff tarafından matematik eğitimi literatürüne kazandırılan cK¢ modeliyle karşılaşılmıştır. Bu modelde, kişinin kavramalarının biçimsel bir betimlemesi (formal characterization) sunulmaktadır. Yine bu modelde, kişinin bulunduğu ortamla uyum halinde olması esas alınmaktadır. Uyum halinde olmak ise, kişi ile kişinin çevresi arasında bir dengenin kurulması olarak ifade edilmektedir. cK¢ modeli, sadece öğrenciye odaklanmak yerine hem öğrenciye hem de çevresine odaklanmaktadır yani kişi/çevre dengesine odaklanmaktadır (14). cK¢ modeli yardımıyla, öğrenme-öğretme süreci net bir şekilde teşhis edilebilmektedir.

Öğrenci kavramalarına bu açıdan bakılacak olunursa, matematik eğitimi üzerine Türkiye'de yapılan araştırmalarda, kavramanın biçimsel tanımlanması yardımıyla öğrenci kavramalarının değerlendirilmesi ve sınıflandırılması üzerine yapılmış bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu araştırma, öğrenci kavramalarının sınıflandırılması yoluyla öğrencilerin, temel kavramlarla ilgili sahip oldukları yapılarını ortaya çıkartabilmek için önemlidir. Öğretmenler, bu çalışma yardımıyla öğrenme-öğretme etkinlikleriyle ilgili bilgilerini genişletebilirler. Ayrıca, bu araştırma, matematik eğitimi alanında çalışan öğretim görevlilerine cK¢ modeli ile

detaylı bilgi sunabilir. Bunun yanında öğrencilerin geometrik yer kavramıyla ilgili oluşturdukları yapıları gözlemlemek adına okuyucuya yardımcı olabilir.

1.5. Varsayımlar

Araştırmada aşağıdaki durumlar varsayım olarak kabul edilmiştir.

1) Araştırmanın kuramsal çerçevesini oluşturmak için taranacak kaynakların güvenilir ve yeterli bilgi vereceği varsayılmıştır.

2) Gözlem yapılan öğrencilerin kendilerinden yanıtlamaları istenen soruları ciddiyetle ve açık bir şekilde yanıtlayacakları varsayılmıştır.

1.6.Sınırlılıklar

1) Bu araştırma, yapılacak olan gözlemler öğrenci gözlemleri ile sınırlıdır.

2) Araştırmada sorulan sorular, seçilen bir matematik konusuyla sınırlandırılacaktır.

3) Bu araştırmada, Ankara'da özel bir dershanenin 10. sınıf öğrencilerinden tesadüfi yöntemle seçilen öğrenciler ile sınırlıdır.

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1. Teorik Giriş

2.1.1.Öğretici Durumlar Teorisi (The Theory of Didactical Situations)

cK¢ modeli, Öğretici Durumlar Teorisi (The Theory of Didactical Situations) ile bağlantılıdır. Matematik eğitimi alanında geliştirilmiş ve kullanılmakta olan Öğretici Durumlar Teorisine göre bilgi, matematiksel aktiviteler, nesneler ve kavramlar arasındaki etkileşimin sonuçlarıdır. Ayrıca yine bilgi, öğrenme ve öğretme durumlarında, kavramların temsilleri ile öğrencinin sahip olduğu tüm temsil sistemidir. Bu teori, öğrencilerin bilişsel dengesizliğin nedeni olan bir muhite uyum sağlamak amacıyla, öğrencilerin öğrendikleri ile ilgilenen Piaget'in epistemolojisine dayanmaktadır. Bunun yanı sıra teori, Piaget'in epistemolojisi ile öğrencinin sahip olduğu önceki bilgilerin düzenli olarak yeniden yapılandırılma fikrini de paylaşmaktadır (Brousseau, 1997). Asıl önemli nokta ise, bu teorinin merkezinde sadece öğrencinin yer almamasıdır. Burada öğretici durum ile kastedilen, öğrenciler, öğretmen ve matematiksel bilgi arasındaki ilişkileri organize eden sosyal bir süreçtir (13).

2.1.2.Bilgi-Bilme

İngilizceye çevrildiğinde "*knowledge*" yani "*bilgi*" anlamına gelen iki Fransızca kelime bulunmaktadır. Bu kelimeler, "*les savoirs*" ve "*les connaissances*" dır. Bunlardan ilki yani *"les savoirs"* isminin fiil hali olan "*savoir*" İngilizce ifade edilecek olunursa "*to know for a fact*" fiiline karşılık gelmektedir (Brousseau ve diğerleri 2004). İngilizce-Türkçe sözlük yardımıyla anlamına bakılacak olunursa "kesin olarak bilmek" ifadesi ile karşılaşılmaktadır. Diğer bir kelime olan "*les connaissances*" isminin fiil hali olan "*connaitre*" nin İngilizce karşılığına bakılacak olunursa "*to be familiar with*" ifadesi görülmektedir. (Brousseau ve diğerleri 2004).

Yine bu fiilin de Türkçe anlamı "bir şeye alışık olmak, aşina olmak" olarak görülmüştür. Bu ayırım, bir matematiksel durumda şu şekilde izah edilebilir: Bir teoremin tam olarak ne olduğunu, nasıl uygulanacağını ve ispatını bilmek "*savoir*" fiiliyle ifade edilmektedir. Diğer taraftan "*connaitre*" fiili ile bir teoremin aşağı yukarı nasıl olduğu, ne anlama geldiği ve bu teoremin içeriği hakkında yeteri kadar bilgi sahibi olacak kadar çok karşılaşmış olmak durumu ifade edilmektedir. Bilgi ve bilme arasındaki fark Brousseau tarafından da şu şekilde belirtmiştir:

"*Bilginin bir parçası, yerleşmiş bir bilmedir.*"

Brousseau (1997, s.62)

cK¢ modelinde Fransızca "*les savoirs*" kelimesinin karşılığı, "*knowledge*" yani "*bilgi*" ve yine Fransızca "*les connaissances*" kelimesinin karşılığı, "*knowing*" yani "*bilme*" olarak kullanılmaktadır. Burada "*bilme*", herhangi bir konuda öğrencilerin kişisel yapılandırmalarını, toplum tarafından kabul gören zihni yapılandırmalar olan "*bilgi*" den ayırt etmek için kullanılan isimdir.

2.1.3.Davranış-Bilme

Öğretme eyleminin iyi ya da kötü olunduğunu, öğrencilerin davranışları ve ortaya koydukları ürünler göstermektedir. Bu davranışlar ve ürünler öğrencilerin oluşturdukları "*bilme*" nin ve öğretilen içerik ile ilişkilerinin sonuçlarıdır. Fakat böylesi değerlendirmeler sadece, gözlemlenen davranışlar ile üzerinde düşünülen bilgi arasında geçerli, doğru bir ilişki kurulduğunda mümkündür ve sonuçları anlamlıdır. Davranışlar ile bilme arasındaki bu ilişki oldukça önemlidir. Davranışçılığa karşı verilen mücadelenin bir sonucu olarak, bu ilişki araştırmalarda gizlenmiştir. Fakat eğitim araştırmalarında, daima üstü kapalı da olsa bu ilişki en azından metodolojik düzeyde sunulmaktadır. Buradaki asıl sorun, bilginin bir parçasına ait anlamın, davranışlara indirgenememesidir. Fakat bu duruma karşıt olarak bilginin bir parçasına ait olan anlam, davranışlarla bağlantısı kurulmadan karakterize edilemez, teşhis edilemez ya da öğretilemez (Gaudin,2002).

Anlam ve davranışlar arasındaki bağlantı, 1987'de basılan "*Cognitive Science and Mathematics Education*" adlı kitapta, Schoenfeld tarafından açıkça belirtilmiştir. Schoenfeld, Bilişsel Bilim (Cognitive Science) yaklaşımı ile problem çözme davranışlarının detaylı olarak betimlenmesini ilişkilendirmektedir. Buna dayanarak da, problem çözme davranışlarının öğretilebilir ve tekrarlanabilir olduğunu belirtmektedir. Schoenfeld'in (1987) ortaya koyduğu bu durum, kendi araştırmasından yapılan alıntıya göre şu şekilde ifade edilmektedir:

"Amacım, bir bilişsel bilim perspektifinden problem çözmeye ait buluşsal yöntemleri (heuristics) ortaya çıkarmaktır: problem çözme stratejilerini tanımlarken ihtiyaç duyulan detayların seviyesi ne olmalıdır ki öğrenciler gerçekten bu stratejileri kullanabilsinler?"

Schoenfeld (1987)

Bu bir *problématique* olarak görülmektedir. Schoenfeld'in ortaya koyduğu bu problématique, iki temel soruyu cevapsız bırakmaktadır:

1) Problem çözmeyi detaylı anlatan bir tanımlama, hangi açılardan bir işlemden diğerine geçişlerde güven sağlayabilir? Yada işlemler arası geçişlerin etkili olabilmesi için detaylı yapılan bir tanımlama var mıdır?

2) Problem çözme davranışları tanımlamaları hangi açılardan davranışlar ve bilmeler arasındaki ilişkiler hakkında bilgi verir?

Schoenfeld, ikinci soruya ilişkin olarak, kitabının yapılandırmacılıktan bahsettiği bölümünde davranışlar ve bilmeler arasındaki bu ilişki ile ilgili tüm sonuçları ortaya koymasa da bu ilişkinin önemli olduğunu belirtmiştir. (Balacheff, 2000)

Davranışlar ile bilmeler arasındaki ilişkiler, "*Theory of Didactical Situations*" (Brousseau, 1997) kitabında da esas alınmaktadır. Bu teorinin varsayımlarından birisi şöyle belirtilmektedir: *"Her problem durumu, bilmenin göstergeleri olan öğrenci*

davranışlarına ihtiyaç duyar." Her durum için tek tek yapılan bu temel eşleme, problem çözme sürecinde, problem durumlarının yorumlarıyla ve öğrenciye temsiller ya da modellerle gösterilmiş olması gereken stratejilerin yer alan davranışların yorumlarıyla ispat edilebilmektedir (Brousseau, 1997). Bu varsayım, Bilişsel Bilim de yer alan bazı yaklaşımlar tarafında da paylaşılmaktadır:

"Her davranış bir bilme demektir."

(Pichot,1994).

Gerçekten bu önerme deneysel olarak yapılan araştırmaların çoğunu doğrulamaktadır. Çünkü öğrencilerin davranışları, analizlerin yer aldığı çalışmaların kökenidir (Balacheff, 2000). Bunun yanında, gözlem yapılan "gerçeklik" olan sınıf ortamından ya da laboratuar deneyinden, bir davranışı "çıkartıp almak", hem metodolojiksel hem de teoriksel bir problemdir. Gözlenen "davranış", "gerçeklik" tarafından ortaya konulan bir durum olarak değil de bir gözlemcinin aldığı kararın sonucu olarak düşünülmektedir (Robert, 1992).

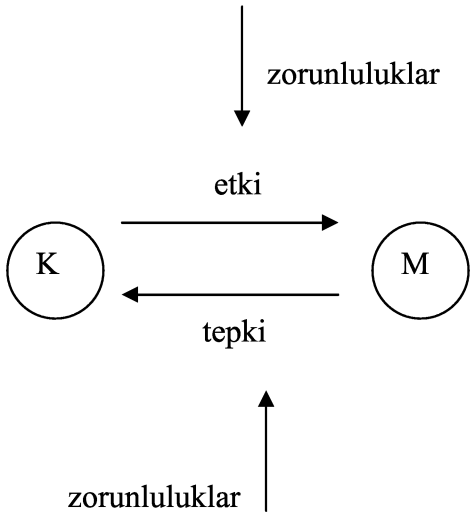
Eğer bir davranış, bir *kişi (person)* ile o kişiye ait *çevre (envoriment)* arasındaki somut ilişkilerin betimlemesi ise bu davranış kişinin karakteristiklerine (yapısına) bağlı olduğu kadar kişinin içinde bulunduğu çevrenin karakteristiklerine de (yapısına da) bağlıdır (Balacheff, 2000). Bunun yanı sıra "*kişi*" ve "*çevre*", üzerinde düşünülen sorulara paralel olmayan karmaşık olgulara da işaret etmektedir. Bu araştırmanın odağı, bir kişinin bakış açısından hareket ederek, kişinin bir bilgi parçasıyla olan ilişkisidir. Bu nedenle *konu (subject)*, bir kişinin bilişsel boyutundaki bir çeşit izdüşüm olarak kabul edilmektedir. Yani "kişinin bilişsel bakış açışı" olarak düşünülmektedir. Aynı şekilde çevrenin bütün karmaşıklığı bu araştırmada yer almamaktır. Çevrenin, sadece verilen bilginin bir parçasıyla ilgili olan vasıfları ile ilgilenilmektedir. Bu araştırmada *muhit (milieu)*, konu ile ilgili olan çevrenin bir altkümesi olarak alınmaktadır. Muhit, çevrenin epistemolojik (bilgisel) boyutundaki bir çeşit yansımasıdır (Balacheff, Gaudin, 2002).

Matematikte yer alan bir durum ele alınacak olunursa, bilmeler sadece bir konu ile bir somut çevrenin arasındaki etkileşimin sonuçları değildir. Ayrıca bilmeler, konunun kendisi ya da diğer konular tarafından meydana getirilen işaretler sisteminin etkileşimlerini de içermektedir. Bilmelerin ürünü anlamına gelen sosyal etkileşimler için ve sembolik sistemi tamamlamak için muhitin klasik anlamı genişletilmektedir. Muhit, Brousseau'nun belirttiği gibi (1997), öğrenme sürecindeki, *konu 'nun muhalif sistemi* (subject antagonist system) olarak alınmaktadır. Yani "konu 'nun muhalif sistemi"ni oluşturanlar, "konunun bilmeleri ile uyumsuzluk içinde olanlar her şey" şeklinde düşünülmektedir. Bundan dolayı bilme, sadece konunun ya da sadece muhitin bir özelliği olarak düşünülmemektedir. Bunun yerine bilme, konu ile muhit yani konunun muhalif sistemi arasındaki etkileşimin özelliği olarak düşünülmelidir (Balacheff, Gaudin, 2002). Konu ile muhit arasındaki bu etkileşim, *konu/muhit sisteminin* varlığını sürdürebilmesi için gerekli koşulları yerine getirmesi nedeniyle anlamlıdır. *Varlığını sürdürebilme* ile konu/muhit sisteminin bazı rahatsızlıkları takip eden bir dengeye ulaşma kapasitesi kastedilmektedir. *Rahatsızlık*, konu tarafından tanınır ve teşhis edilir. Bu duruma örnek olarak, bir çelişki ya da tereddüt hali düşünülebilir. Bazı durumlarda, dengenin yapısı bu rahatsızlıklarla değişebilir ve bu değişim de gereklidir (Balacheff, 2000). Bu durum Vergnaud (1981)'un önermesinin bir formülleştirilmesi olarak şu şekilde ifade edilebilir: problemler, bilmelerin kökeni ve kriterleridir.

Problem, derecesi ne olursa olsun konu/muhit sisteminde meydana gelen rahatsızlıkların her biridir. Bilme kendini, konu/muhit sisteminin varlığını sürdürebilmesindeki zorunluluklarını yerine getirebilmek için problem çözerken yapılan davranışlarla gösterebilmektedir. Bu zorunluluklar, dengenin yeniden kazanılmasının bir yolu değildir, fakat dengenin sağlanmasının kriterleridir (Balacheff, Gaudin, 2003). Bu zorunluluklar, sistemin varlığını sürdürebilmesini garantileyen gerekli koşulları ifade ettiği için, yasaklayıcı (proscriptive) olduğu söylenilebilir. Benzer şekilde bu zorunluluklar, dengenin nasıl yeniden yapılması gerektiğini detaylarıyla anlatmadıkları için de kuralcı (prescriptive) değildirler (Stewart,1994).

Didactical (öğretici) problématique' de pragmatik ve yeterli bir şekilde kullanılan "*bilme*" şu şekilde tanımlanmaktadır:

> *Varlığın sürdürülmesi için gerekli olan zorunluluklar altındaki bir bilme, muhit ile konunun arasındaki etki/tepki döngüsünün dinamik dengesinin ifadesidir.*



Bilmenin bu betimlemesi, konu ile muhitin arasında hakiki bir bağ kurarak, bilgi yapısı ile ilgili en iyi anlamayı sağlamaktadır. Ayrıca bu betimleme, yapılandırmacılığın temeli olan anlamlandırmanın sistematik ve çevresel yapısına da sahiptir. Son olarak burada belirtilen problemlerin temel işlevi, anlamlandırmanın ve öğrenmenin betimlemesinde yer almasıdır (Balacheff, Gaudin,2003).

2.1.4.Tutarlılık ve Uygulama Alanı

Gözlemcinin bakış açısından çelişki olarak görünen bir rasyonel düşünme ve bilmenin bir arada oluşu, bilinen bir paradokstur. Bourdieu (1990)' ya göre bu paradoksun açıklaması şu şekildedir:

> "*Bir diyagram, farklı durumlarda farklı etmenler tarafından başarılı bir şekilde üretilen bilmeleri, aynı ortamda bir araya getirebilmektedir. Bu sayede diyagram, bilmeler arası bağlantıların bir bütününü ortaya koyar. Farklı durumlarda yer alan, pratikte asla bir araya gelmeyen ve mantıksal olarak çelişkili görünen bilmeler bu diyagramlar yardımıyla kıyaslanabilir.*"
>
> (Bourdieu,1990)

Paradoksun, Bourdieu tarafından yukarıda yapılan açıklaması, farklı durumlarda gözlemlenen bir tek etmen durumu olarak genişletilebilir. Bu açıklamanın özü, bir taraftan zaman, diğer taraftan durumların çeşitliliğini içermektedir. Birbiriyle çelişkili olan bilmeler, geçmişte, farklı periyotlarda görülebilmektedir. Aynı zamanda bu karakterdeki bilmeler, birbirlerinden haberdar görünmemektedir. Sonuç olarak da birbirleriyle çelişen bu bilmelerin aynı derecede işlevsel (operasyonel) olmasıyla, konu etkilerini (actions) organize eder. Durumların çeşitliliği ise farklı tipteki unsurları tanıtır. Bourdieu tarafından yapılan bu şekildeki bir açıklama, her bir öğrenmenin, genel bir yapıya ait olmadığını, daha spesifik bir yapıyla ilgili olduğunu fark ettirmektedir. Diğer bir taraftan da yine bu açıklama, etkili bir araç olarak kabul edilen spesifik ve somut bir geçerlilik alanı ile ilişkilidir. Bir gözlemci tarafından izomorfik durumlar olarak algılansa da bir durumdan diğerine geçiş apaçık ortada olan bir süreç değildir (Balacheff, 2000).

Bourdieu' nun yaptığı bu açıklama doğrultusunda "*uygulama alanı*" için konunun, daha önceden de sahip olduğu ve birbirlerine çok fazla açık olmayan yani birbirleriyle çok fazla bağlantısı olmayan, geçerlilik alanlarını işaret etmek için

kullanılmaktadır. Bir konu, kendisine ait olan uygulama alanında tutarlıdır ve hiçbir çelişkiye düşmez. Yani bir uygulama alanında rasyonel konu, bilme konusuyla yeniden uzlaştırılır (Balacheff, Gaudin,2003).

Bir gözlemci, uygulama alanı yardımıyla ortaya konulan çelişkilerin, durumlarla olan bağlantısını ortaya koyabilmektedir. Fakat konu, bu çelişkileri birbirinden bağımsız ve tamamen farklı olarak görmektedir. Bunun yanında, *gözlemcinin referans aldığı sistemde (observer referential system)* konu/muhit sisteminin gözlenen durumları aynı yolla sınıflandırılmalıdır (Balacheff, Gaudin, 2002).

Aslında birbirleriyle çelişen bilmelerin varlığını kabul etmek, güvenilirliğin kriterleriyle ve problem çözme ya da ödev yapmayla belirlenen uyum sürecinin bir ürünü olan zihinsel yapıya ait teorik prensipleri reddediyor gibi görünebilir. Bu durum, matematik eğitimi araştırmalarında problemleri arttırmaktadır. Çözümlerin farklı doğrultularda aranması, matematik eğitiminde problemlere neden olmaktadır. Bu bakımdan, bu araştırmada "*kavrama*", bir durumdaki bilme olarak alınmaktadır (Balacheff, 2000).

2.1.5. Kavram Yanılgısı-Hata-Bilme

Öğrencilerin ortaya koyduğu yapılarında görülen çelişkiler ve hatalar eğitimde incelenen sorunlardan birisidir. Bu olgunun anlaşılması için çözümler, farklı açılardan araştırılmıştır. 80li yıllarda özelikle bu araştırmalar, öğrencilerin kavram yanılgıları üzerine yapılmıştır (Balacheff, Gaudin, 2003).

Confrey, 1986'da American Educational Research Association' nın yıllık toplantısında sunduğu bir bildiride, öğretme eylemindeki başarısızlığı ortaya koymak için kavram yanılgıları üzerine yapılan araştırmalardaki gelişime dikkat

çekmiştir. Confrey, bütün çabalara rağmen, birçok öğrencinin, matematik ve fen alanında fazlasıyla kavram yanılgılarına sahip olduğunu belirtmiştir. Bunun yanında, matematik eğitimi üzerinde çalışanların bu probleme daha pragmatik bir yaklaşımı olduğunu da aşağıdaki gibi ifade etmiştir:

> *"Kavram yanılgıları, öğrencilerin büyük çoğunluğunun temel kavramlarla ilgili problemleri çözülmede başarısız olmasının, edinilen tecrübelerle belgelenmesi olarak tanımlanır."*
>
> (Confrey, 1986, s. 4)

Confrey, daha sonra yayınlanan makalesinde (1990), kavram yanılgısı paradigmasına ilişkin değişik yaklaşımların ayrımını yapmıştır. Bunlar, Piaget'nin genetik epistemolojisi, bilimsel epistemoloji ve bilgisel süreç yaklaşımıdır. Burada belirtilen her bir yaklaşımın amacı, öğrencinin kavramaları ile fark edilen bilgi arasında çelişki oluştuğunda, bir "*problématique*" ortaya koymaktır. (Confrey,1990, s.4)

Kavram yanılgısı ile ilgili olan bütün bu yaklaşımlarda, çocuk-öğrenci, söz konusu olan bilginin sahibi olarak görünen yetişkin-uzmandan temelde farklı bir konu olarak görünmektedir. Fakat yukarıda belirtilen bakış açısı, bu kavram yanılgılarına ait bilişsel mantığın teşhis edilmesine engel olmamaktadır (Balacheff,2000). Yine Confrey' e ait bir ifade aşağıda verilmiştir:

> *"[...] çocuk, olayları bir öğretmen, bir araştırmacı ya da bir uzman gibi "görmüyor" olabilir. Çok kez çocuğun cevabı hemen hatalı olarak sınıflandırılır. Eğer çocuğun durumla ilgili nasıl fikir yürüttüğü düşünülürse, çocuğun hatalarının kanıtlanabilir ve üzerinde düşünüp taşınabilir olduğu bulunur."*
>
> (Confrey, 1990, s.29)

Gerçekten, konuyla ilgili kavramların öğrencide oluşturdukları doğrultusunda kavram yanılgıları bilme ile ortak kuralları etkisinde kalmaktadır:

> *"Bir kavram yanılgısı, yapılanların, uygun olmayan bir "betimlemesini" istemez. Problem formülleştirilmesi (beklenti), problem çözme (hareket) ve problemin yeniden yapılandırılması (tekrar gözden geçirme) döngüsünün tamamlandığı bir takım problemlerin (süreçlerin) başarılı bir şekilde yerine getirilmesini ister."*
>
> (Confrey,1986)

Yukarıdaki görüşünü kapalı olarak belirtmiş olsa da Confrey (1990), makalesini tekrar gözden geçip düzenlediğinde, von Glasersfeld'e atıfta bulunmuştur:

> *"Bilmelerimizin tuzağına düştüğümüzü kabul edecek olursak, bu durumda von Glasersfeld (1984) kavramsal yapımızda "eşleme" den ziyade "uygun olma" hali yani bir anahtarın, bir kilide uygun olması hali için çabaladığımız ileri sürmektedir. Bu düşünceyi kullanacak olursak, von Glasersfeld kavramlarımızın objektif olarak doğru olmasından ziyade onların pratik olarak varlığının sürdürmesi yönünde karar verdiğimizi ileri sürmektedir. "*
>
> (Confrey,1990)

Şimdiye kadar belirtilenlerin ışığı altında, bir kavram yanılgısı geçerlilik alanına sahiptir denilebilir. Eğer kavram yanılgısı, geçerlilik alanına sahip olmasaydı o zaman yukarıda belirtildiği şekilde var olması mümkün olamazdı (Balacheff, Gaudin, 2002). Bu durumda, kavram yanılgısıyla bir bilme arasında çok küçük bir fark vardır. Aralarındaki temel farklılık, kavram yanılgısında, en azından bir gözlemci tarafından fark edilen bir red, bir yalanlama vardır. Hatta kavram yanılgısı bir bilme olarak ele alındığında, kimi yazarların "kavram yanılgısı" kelimesini

kullanmadığı görülmektedir. Kavram yanılgıları fen ve matematik alanına ait önceki bilgilerle açıkça reddedilmesine rağmen, daha önceden yapılandırılan doğru bilginin bir sonucu olarak varlığının sürdürmektedir (Balacheff,2000).

Bachelard (1938, s.13) a göre gerçek, asla birinin inanabileceği şey değil, her zaman birinin düşünmesi gereken şeydir. Bu durum yüzyılın ilk yarısında, "*bilme her zaman gelişim içindedir*" şeklinde ifade edilmiştir. Eğer bu ifade kabul edilecek olursa, o zaman hatalar vasıtasıyla, uygun koşullar sağlandığında etkili olduğunu gösteren bir bilginin kalıcılığı ve bir bilginin kendi içinde ya da bir ortamda oluşum ihtimali ortaya çıkmaktadır (Balacheff, Gaudin, 2003). Yapılandırmacılık, hatanın bu yapısını birden bire fark edemediği belirtilebilir ya da en azından fark edemediği düşünülebilir (Balacheff, Gaudin, 2002). Örneğin, Jean Piaget'in psikoloji uygulamalarını öğretici olarak geliştiren Aebli (1963), hataların, öğrencinin yanlış anlamalarının ya da yanlış alışkanlıklarının kanıtı olarak karakterize etmektedir. Bunun sonucu olarak, bazı problem durumlarında harekete geçebilen hatalı tepkiler, öğrencilerle detaylı olarak çalışılmalıdır. Böylece öğrenciler, bazı süreçlerin neden doğru ya da yanlış olduklarını anlayabilirler. Ayrıca doğru ile yanlış tepkiler arasındaki ilişkileri ve farklılıkları yakalayabilirler (Aebli, 1963). Daha geniş bir bakış açısından bakıldığında, öğrenci bir bilişsel konu olduğu fakat henüz tam olarak bir bilme konusu olmadığı belirtilmektedir (Balacheff, 2000). Bu durum için yapılmış olan açıklamalar aşağıda yer almaktadır:

> *"İşlevsel basamaktan bakıldığında, çocuk, yetişkinle aynıdır. Fakat bu aynı oluş, gelişmenin safhalarına dayanarak değişen zihinsel bir yapıyla birlikte meydana gelir."*
>
> (Piaget,1969,s.224)

"Yapılandırma süreciyle meşgul olan çocuk, kendini her zaman her şeyini öğrenmek zorunda olduğu çevresinin özellikleriyle ve çevresindeki somut bir gerçekle uzlaştırmak için zorlar"

(Piaget,1969, s.225)

Çocuğun zihinsel yapısının içeriği, bütün teorik yapı tarafından tam olarak bir bilme durumu olarak düşünülmesine rağmen, bu içerik tam olarak bir bilme durumu değildir (Balacheff, Gaudin, 2002). Kuhn (1957)' un "The Copernican Revolution" kitabında bahsedilen ifadeler, 70lerin başında henüz başarılamamıştı. Bu kitap ile Kuhn, sosyal bilimlerde paradigma kavramını ilk defa ortaya atmıştır. Kitabında yer alan bir ifade aşağıda verilmiştir:

"Dünyanın hareket ettiği fikri ilk önce aynı derecede mantıksız görünür. Hislerimiz bize hareketle ilgili bildiğimiz her şeyi söyler ve bunun içinde dünyaya dair bir hareket hissi yoktur. Tekrar eğitilene kadar sağduyumuz bize, dünyanın hareket halinde olması halinde havanın, bulutların, kuşların ve yeryüzüne bağlı olmayan diğer nesnelerin geride kalacağının kesin olduğunu, zıplayan bir adamın, zıplamaya başladığı noktanın uzağına düşeceğini, çünkü o havadayken altındaki yeryüzünün hareket edeceğini söyler..."

(Kuhn,1957)

Kuhn için, bilginin gelişiminde, kişinin ve evrimsel sürecin önemli olduğunu savunan genetik epistemolojist olduğu söylenilebilir. Piaget de, Kuhn'nun arkasından bilimde "genetikçiler" olarak bilinmektedir (Fuller, 2005).

Eğitimde 80li yılların asıl gelişimi, hataların sadece bilgisizlik, tereddüt ya da şans sonucu olmadığını fark etmektir. Bunun yanında hatalar, dikkate değer ve başarılı olan bir önceki bilmenin sonucudur. Bu gelişimde asıl fark edilen ise,

bahsedilen bir önceki bilmenin, yanlış yada sadece yeniden uyarlanmamış olarak açığa vurulmuş olduğunun farkına varmaktır (Brousseau,1997,s.87). Fransa'da bu paradigma ile ilgili yapılan ilk çalışmalardan birisi (Salin, 1976), hataların bilişsel karakterini sunmaktadır. Bu çalışmaya göre, hata bir taraftan, bir bilmenin diğer bir bilmeye olan bakış açısıdır yani bir konuya göre, yeni bir bilmenin bakış açısından önceki bilmenin gelişmesidir. Diğer taraftan etrafın tepkisi, konu tarafından başarısızlık olarak "yorumlandığında" yani konu, etrafın tatmin edemediği bir beklentiye sahip olduğu durumda, hata, konu tarafından tanınabilir.

Konu, bazı durumlarda fark edilmesi gereken kopukluğu teşhis edemez. Farkına varılmayan bu kopukluk, bir bilmenin belirtisi olduğunda yani konu/muhit sisteminin bir önceki dengesinin tekrar sağlanmasının belirtisi olduğunda "*hata*" olarak adlandırılır. Yani bir kopukluk olduğu fark edilmeden konu/muhit sistemi dengesinin yeniden kurulması hatadır. Burada, daha önceki konu/muhit sistemi sağlam olduğu için sözü edilen bilme gerçekleşmektedir yani bilme, her zaman istenilen şekilde olmayabilmektedir. Son zamanlarda yapılmakta olan araştırmalarda, bütün hataların olumsuz olmadığı kabul edilmektedir. Hatta, en temel bilmelerin yapılandırılması için bazı hataların farkında olmak ve onların üstesinden gelebilmek gerekmektedir (Balacheff, 2000).

Brousseau'nun 70li yılların başındaki çalışmaları, hataların zihinsel yapı kökeninin bilmeler olduğu gerçeğini daha çok açıklamaktadır. Yanlış olarak görünen bu bilmelerin bazılarının, öğrenme için gerekli olduğunu savunmaktadır. Öğrenciler, geçici olarak, hatalı bilmelerin farkına varmadan, yanından geçip gidebilir. Çünkü sonrasında bu bilmenin hatalı oluş nedeninin farkında olmak, yeni bir bilmenin yapılandırılması ve anlaşılması için gereklidir (Balacheff, Gaudin, 2002). Hatalar, matematik derslerinin amaçlarından biri olan matematiksel anlamayı arttırabilirler. Aslında yanlışlar bir öğrencinin bilmediğini değil, ne bildiğini göstermektedir (Kislenko, 2005).

Bilmedeki hataların kökeni, lokal olarak çürütülebilir. Ancak hata, ona bir geçerlilik alanı sağlayan bilgiye ilişkin geçerliliğini, bazen bazı durumlarda koruyabilmektedir. Örneğin bazı öğrenciler, düzgün yakınsamayı, yakınsamanın bir kısıtlaması olarak görebilmektedirler. Aslında yakınsak diziye ek şartlar getirerek, düzgün yakınsama tanımı oluşturulmaktadır. Bunun yanında, hatalı oluşan bilme, reddedilirken ve yeni bir bilmeyle yer değiştirirken pragmatik geçerliliğini koruyabilmektedir. Örneğin, ondalıklı sayılar doğal sayı değildir. Fakat bu şekilde düşünmek hesaplama yapılırken oldukça kullanışlı olmaktadır. Bundan dolayı denilebilir ki, önceki bilmeler reddedilmesine rağmen, kalmakta ısrar edebilmektedirler. Önceki bilmeler, yeni bilmelerle birlikte ve kararsız, anlam ifade etmeyen bir bilme oluşturabilmektedirler. Yeni bir bilme oluşsa bile, hatalı bilme kalmakta ısrar edebilmektedir (Balacheff, Gaudin, 2002).

Brousseau, Bachelard'ın ardından (1938) "*epistemolojik engeller*" i yeni anlamalar için zorunlu geçitler olarak adlandırmıştır:

> *"Bilginin bir parçası, örneğin bir engel, her zaman öğrenci ve onu çevreleyenler arasındaki etkileşimin bir meyvesidir. Daha doğrusu bu engel, öğrenci ile bu bilmeyi ilgi çekici yapan durum arasındaki etkileşimin meyvesidir."*
>
> (Brousseau,1997, s.85)

Bilmeler ile epistemolojik engeller arasındaki temel farklılık, bu durumların bilgisel anlamlarında yatmaktadır. Her iki durumda bilmenin konumu farklıdır. Birincisi yani bilme durumu, sözü edilen bilmenin varlığı, genel ve doğru olduğu durumdur. Burada bir bilgi, neyse bilme olarak da odur. İkincisi yani epistemolojik engeller durumu ise hiçbir yargılama yapmadan, sadece iki bilme arasındaki ilişkiyi geliştirme düşüncesine ihtiyaç duyar. Her bilme, ister yanlış ya da doğru, ister kısmen ya da kötü adapte edilmiş olsun, neyse odur. Bir bilme her şeyden önce, yeterlilik ve uygunluk kriterlerini takiben konu/muhit sisteminin en uygun olma

durumunun sonucudur (Balacheff,2000). Öğrenci, matematiksel bilgisini yeniden yapılandırmak için karşılaştığı epistemolojik engellerin üstesinden gelmelidir (Artigue,1992).

Konu/muhit sistemi yapısının bir sonucu olarak, her bilme geçici bir karaktere sahiptir ve dahası her bilme tekrar gözden geçirilebilir, bir bilmenin geçerlilik alanı bazı rahatsızlıkların sonucu olarak değiştirilebilir. "Bilme" ile bu bilmenin bir dengeyi tekrar sağlamak amacıyla bir araç olduğu "problemler" arasında güçlü ilişki fark edilmektedir (Balacheff, Gaudin, 2003).

2.2. cKȼ (Concept, Knowing, Concept) Modeli

2.2.1. *"Kavrama"* nın biçimsel betimlemesi

"*Kavrama*" kelimesi, öğretme ve öğrenme araştırmalarında yıllardır kullanılmaktadır. Fakat bu araştırmalarda kavramanın, kesin bir tanımını kullanmak yerine hissedildiği gibi kullanılmıştır. Kavrama fikri, hem inançlarla hem de bilgi ile ilişkilidir. Kavramlar, inançların altsınıfları olarak düşünülmektedir (Thompson, 1992). Pekhonen (1994)' e göre kavramalar, her bir adımı bilinçli olan, sorgulama sürecine dayanan iyi düzenlenmiş inançlardır. Kavrama kelimesi, bir araç olarak kullanılmaktadır ancak tanımı net bir şekilde yapılmamıştır (Artique,1991, s.266). Artique 'nin analizine göre kavrama, lokal bir objeye dayanmaktadır. Bu açıdan bakıldığında, kavramanın bilgisel düzeyi, "kavram yanılgısı" kelimesinden farklı değildir. Kavramanın, daha bir esaslı tanımının yapılmasına ve de kavramaların ortak ve farklı yönlerinin analiz edilmesini sağlayan araçlara ihtiyaç olduğu görülmektedir (Balacheff,2000). Bu ihtiyaç, ayrıca Vinner (1983, 1987) tarafından da belirtilmiştir.

Kavramanın olası bir betimlemesi, bir konuya ait (yani kişinin bilişsel bakış açısına ait) olan kavramaların çeşitliğini ve hatta bazı durumlardaki çelişkilerini de

ortaya koyan, açıklayan ve anlatan yapıda olması beklenmektedir. Ayrıca, geliştirilen modelde "kavrama"nın tanımını yapmakla "bilme" ve "kavram" kelimelerinin de anlamları kesin olarak belirlenebilir olmalıdır (Balacheff, Gaudin, 2003).

"Kavrama (conception)", "bilme (knowing)" ve "kavram (concept)" modelin elemanlarıdır. Bu soyut yapıların, çağrışım yaptırdıklarından dolayı değil işlevlerinden ve ilişkilerinden dolayı farklılıkları ortaya çıkmaktadır. Bu nokta da tartışılması gereken nokta, bu betimlemenin ne ölçüde eğitimde anlamlı olduğu, ne ölçüde uygun bir betimleme olduğu ya da eğitim araştırmalarında ortaya çıkan problemleri ne ölçüde çözdüğü sorusudur.

cK¢ modelinde kavrama, bir dörtlü (P,İ,T,K) olarak adlandırılmaktadır:

-P, problem kümesidir (set of problems),

-İ, işlem(operatör) kümesidir (set of operators),

-T, temsil kümesidir (representation system),

-K, kontrol kümesidir (kontrol structre).

Burada belirtmek gerekir ki, bir kavrama gözlenebilir bir eleman değildir, gözlenilebilir elemanlar, öğrenci tarafından kullanılan işlemler (operatörler), çözülen problem, öğrencinin açılamak için kullandığı dil ve teorik kontrol yapılarıdır.

İlk üç unsur, Vergnaud (1991, s.145) tarafından bir kavramı betimlemek için tanımlanmıştır. Vergnaud, kavram için yaptığı tanımlamayı ilk olarak, 80lerin başında yapmıştır.

Matematik eğitiminde çalışan her araştırmacının aklına ilk soru, bu biçimsel tanımın, kişinin yüz yüze geldiği "gerçeklik" ile nasıl ilişkilendirileceğinin bilinmesidir. Bu amaçla da tanımın her bir elemanının incelenmesi gerekmektedir (Balacheff, 2000).

P, problem kümesinin somut ve paragmatik olarak betimlenmesi, karmaşıktır. Problem kümesinin betimlenmesi için iki çözüm sunulmuştur (Balacheff, Gaudin, 2002):

1) Etkili bir çözümün elde etmek için, bir araç olarak ele alınan kavramaya ait bütün problemler, problemler kümesinin elemanıdır (Vergnaud,1991,s.145). Fakat bu çözüm yeterince spesifik değildir. Doğal sayılar gibi çok temel konular da bile yardım edememektedir.

2) Kavramaya ait tüm problemlere gerek yoktur. Problemlerden öyle sonlu tanesi vardır ki, diğer problemler, bu sonlu tane problemlerden elde edilir. Problemler kümesi olarak bu sonlu tane problem baz alınır (Brousseau, 1997, s.30). Brousseau 'nun tanımında ise şöyle bir soru cevapsız kalmaktadır: "Ele alınan kavrama için kabul edilen problemler kümesi nasıl belirlenmelidir?"

Yukarıda belirtilen tanımların yerine Balacheff (2003), öğrencilerin kavramalarını teşhis eden kavramlar ortaya atıldığında, oluşan problemlerin belirlenmesinde, deneysel yolla elde edilen pragmatik durumların adaptasyonunu teklif etmektedir. Bu önerilen yaklaşım, matematiğin bugünkü kullanımıyla ve tarihi süreç içerisinde matematiğin analiz edilmesiyle desteklenebilir. (örn: Sierpinska 1989, Thurston 1994, d'Ambrosio 1993, Lave 1988, Nuñes ve diğerleri, 1983).

Problem kümesi, kavramanın "uygulama alanı"dır. Öğrenciye yöneltilen herhangi bir matematiksel kavramla ilgili olarak, öğrencinin verdiği cevaplar göz önüne alındığında, ortaya konan ve öğrencinin kullandığı her türlü bilmesine ait olduğu düşünülen elemanlar, bu kümede yer almaktadır. Ayrıca "problem kümesi"nin nasıl belirleneceği, bu model üzerinde çalışanlar tarafından hala bir tartışma konusu olarak görülmektedir (Webber, Pesty ve Balacheff ,2002).

İ, işlem(operatör) kümesinin somut ve pragmatik betimlemesi sorunu daha klasik, daha alışıldıktır. İşlemler, konu ile muhit arasındaki ilişkilerin gelişimini elde etmek anlamında kullanılmaktadır, etki için araçlardır. İşlemler, materyal bir çevrede etkilerin yapılmasına izin verecek şeklinde "somut" olabilirler ya da grafiksel, sembolik olarak ya da dile ait temsilleri dönüştürmeye izin verecek şekilde de "soyut" olabilirler. Bir işlem, bir yazılım ortamında işlevsel formunda ya da bir söze ait kuralları, bir cebirsel ifadeye dönüştürme formunda hatta bir netice içindeki bir teorem formunda alınabilir (Balacheff,2000).

İşlem kümesi, öğrencinin karşılaştığı herhangi bir matematiksel kavramla ilgili olarak öğrencinin verdiği cevaplarda yer almaktadır. Bu küme P, problem kümesinde yer alan problemleri çözme aktivitelerini içermektedir. Bir işlem, bir problemi yeni bir probleme dönüştürür. Bir işlemler dizisi, problemin çözümüne olanak vermektedir. İşlem kümesi elemanı için bir örnek verilecek olunursa: *"Eğer bir ABC üçgenin üç tane simetri doğrusu varsa, bu üçgen eşkenar üçgendir"* (Webber, Pesty ve Balacheff ,2002).

T, temsil kümesi planlanmış, yapılandırılmış işaretler kümesinden, dile ait yapıdan meydana gelir, konu ile muhit arasındaki ilişkide kullanılır, etki ile tepkiyi, operasyonları ve kararları destekler. Bu model, bir bilme ile oluşturulan sistem içindeki konu ve muhit üzerine yoğunlaşmaktadır. O bakımdan temsil kümesi ile konu ya da bilginin işaretlere indirgenmesi kastedilmemektedir. Temsil kümesi elemanlarına örnek olarak, cebirsel dil, geometrik çizimler, doğal dil ayrıca matematiksel yazılımlar ve hesap makineleri verilebilir. Temsil kümesi, konu/muhit sistemine dayanarak, problemleri yeteri kadar açıklayabilmelidir ve işlem

kullanımını desteklemelidir (Balacheff Gaudin, 2003). Temsil kümesi, öğrencinin karşılaştığı herhangi bir matematiksel kavramla ilgili olarak öğrencinin verdiği cevaplarda yer almaktadır. Öğrencilerin sahip oldukları problem kümesi ve işlem kümesi elemanlarının açıklanmasını destekler (Webber, Pesty ve Balacheff ,2002).

Kavramanın son boyutu olan K, kontrol kümesi, seçim yapmak, karar almak ve yargılamaları ifade etmek için gerekli olanlar tarafından meydana getirilir. Bu boyut, çoğunlukla kapalı olarak bırakılmaktadır. Hal bu ki bu boyutta, etkinin uygun olup olmadığına karar veren kriterlerin, problemin çözülüp çözülmediğinin ya da matematiksel bir içeriğin anlaşılmasındaki önemli elemanların farkına varılmaktadır. Vergnaud 'un kavrama için yaptığı tanımda kontrol kümesi, etkide yer alan teoremler ve sonuçlarla belirtilmektedir (Vergnaud, 1991). Bu teoremler ve sonuçlar şu şekilde açıklanmaktadır: konu, etkilerinin mantıklı ve doğru olup olmadığını kontrol eden prosedürlere sahiptir. Konunun sahip olduğu bu prosedürler, teoremler ve sonuçlarla uyumlu olduğunda anlamlı fikirler haline gelmektedirler. Schoenfeld (1985), problem çözme sürecinde, kontrolün can alıcı rolünü göstermiştir. Kontrol, onaylama ile direkt olarak bağlantılıdır ve onaylama da esasında anlamayla bağlantılıdır (Balacheff,1987). Kontrol kümesi, öğrencinin karşılaştığı herhangi bir matematiksel kavramla ilgili bir olarak öğrencinin verdiği cevaplarda yer almaktadır. Problem çözme sürecinde öğrenciler, seçtikleri işlemlerin, bu süreçteki etkilerin (actions) ve ulaştıkları sonuçların geçerliliğini denetlerler ve onaylarlar. Kontrol kümesindeki elemanlarla, bu seçimlerin ve verilen kararların doğru olup olmadığı anlaşılmaktadır (Webber, Pesty ve Balacheff ,2002).

Burada dikkat edilmesi gereken nokta, bir kavramanın böylesi bir betimlemesinin, konu ile kişinin etkileşim içinde bulunduğu muhitten daha çok ilişkili olmadığıdır. Diğer taraftan, bu betimleme konu/muhit sisteminin bir tanımlamasına olanak sağlamaktadır. Temsil kümesi, böylesi bir betimlemeye ve etkin gönderici (konu) ve tepkisel alıcı (muhit) yardımıyla işlem (operatör) kullanımı sağlamaktadır. Kontrol kümesi, konunun bir etkinin yeterliliğini ve geçerliliğini açıklamasına yine konunun muhitin seçtiği tepkiyi açıklamasını sağlamaktadır. Bu

betimleme, psikolojik temelli bir zihinsel modele dayanmadan, öğrenmeyi modellemekte ve analiz ederken bir bilişsel araç olmaktadır.

2.2.2.Öğrenme

Öğrenme, muhitte meydana gelen ya da sistemdeki kısıtlamalardan oluşan rahatsızlıkların sebep olduğu ya da hatta konunun kendisinden kaynaklanan rahatsızlıklardan ötürü kaybolan konu/muhit sistemi dengesinin yeniden yapılandırılma sürecidir (Balacheff,2000). Aslında, rahatsızlıkların üstesinden gelmek yani problemleri çözmek, tam bir öğrenmenin gerçekleşmesine olanak vermemektedir. Rahatsızlıklar, kavramaların ortaya çıkışına destek olmaktadır. Öğrenmeyi harekete geçiren durumlar, öğrenciyi yeni şartlara alıştırmak için ve yeni yapılar için gerekli olan rahatsızlıkları ortaya çıkarmak için iyi planlanmış olmalıdırlar (Balacheff, Gaudin, 2003).

Öğretici (didactical) problématique, öğrenmeyi harekete geçirmek için kasıtlı olarak çıkarılan bu rahatsızlıklar durumunu ele almaktadır. Etkiden beklenen sonuç ile muhitten gelen tepki arasında bir rahatsızlık varsa bu rahatsızlığın göstergesi bir kopukluktur (gap). Bu bir taraftan, konunun kendi amacına uygun olmayan bir kopukluğun varlığını fark edebilmesi demektir. Diğer taraftan, muhitin teşhis edilebilir tepkiler vermesi demektir (Balacheff, 2000).

Bir öğretmenin, öğretilmesi gereken içerik ile ilgili rolü, bir konuyla bir muhitin karşılaşmasını organize etmektir. Böylece, konu ile muhit arasındaki etkileşimden, öğretme amacına uygun bir bilme meydana gelebilir. Böylesi bir karşılaşma, her an olabilen bir olay değildir. Öğrenci için bir çevrenin içinde olmak,

öğrencinin "yorumlayabilmesi" için yeterli değildir (Balacheff,1998). Muhit, öğretme amacına uygun olmalıdır. Beklenen etkiyle ilgili çevredeki uygun özellikleri seçmek, çevrenin tepkisini tanımlamak ve bu tepkiyi anlamak aşikar olaylar değildir. Öğretmen için, öğrenci öğrenmelerinin yapılandırılmasında başarılı olmak demek, muhit ve bu muhit ile ilgili etki/tepkilere dayanan bir ortam yapılandırmak demektir. Fakat bu ortamın öğreticiliği, bir öğrenci tarafından bir kısıtlama olarak algılanılabilir. Örneğin, eğer öğretmen öğrencileri çok fazla destekler ve uyarırsa, öğrenci hedeflenen öğrenme sonuçlarını alamayabilir. Bunun nedeni, öğrencinin öğretmeni memnun etme eğilimi ya da öğrencinin problemi beklenildiği gibi çözemeyişi olabilir. Bu da öğretici (didactical) sistemlerin temel karmaşıklığıdır (Balacheff, Gaudin, 2002).

Öğretme/Öğrenme durumları üç temel kısıtlama altındadır: zaman kısıtlamaları, bilgisel kısıtlamalar (Arsac,1992) ve kalıcı kısıtlamalardır. Bunlardan ilki olan kısıtlama, okulla ilgilidir. Örnek olarak okul süresi, ders yılının düzenlenmesi ve derslerin düzenlenmesi verilebilir. Bu kısıtlamalardan ikincisi ise herhangi bir içeriği ve herhangi bir öğrenme ürününün geçerliliği için kriter sağlayan faktörlerin altını çizen bilginin varlığıyla ortaya çıkmaktadır. Son olarak üçüncü kısıtlama, doğal öğrenme durumlarının karşısında yer alan öğretici durumların temelini oluşturmaktadır (Balacheff, Gaudin, 2003).

2.2.3. Kavrama, Bilme, Kavrama

Bilme, cK¢ modelinde olduğu gibi, aynı içeriğe sahip kavramaların bir kümesi olarak adlandırılırsa, bir bilmenin geçerlilik alanı hakkında konuşulabilir. Bir kavramaya, bir diğer kavramanın bakış açısından bakıldığında, yanlış olarak görülebildiğinden, bu aynı zamanda bir bilmenin çelişkili tarafını da ortaya

koymaktadır (Balacheff, 1995). Kavram ise aynı içeriğe sahip olan bilmeler kümesidir.

Yaklaşık 10 ülkeden 20 matematik eğitimcisine sahip olan, matematik eğitimindeki temel ve önemli konular üzerine araştırmalar gerçekleştiren BACOMET grubunun, 1996 gerçekleştirilen IV. Projesinde Biehler'in sormuş olduğu(15):

> *"Bir matematiksel kavramın anlamının, tüm kullanımlarının bir sentezi olduğu olduğunu söyleyemez miyiz? "*

sorusuna cK¢ modelinin, olumlu cevap verdiği düşünülmektedir. Fakat bunun yanında, Sfard (1991)'un kavram için yapmış olduğu tanımla pek örtüşmemektedir:

> *"Kavram kelimesi (ki bazen fikir (notion) ile yer değiştirmektedir) bir "matematiksel fikir" düşünüldüğünde, ideal bilginin biçimsel (formal) evreni olarak "resmi (official)" bir formda düşünülebilir. Kavram tarafından (kavramın içsel karşılığı ise kişisel bilmenin evrenidir) hissettirilen bütün içsel (internal) yapılar (associations) ve temsiller (representations) "kavrama" olarak adlandırılacaktır."*

cK¢ modelinde "kavram " daha pragmatik bir yaklaşımla ele alınmış olsa da Sfard'un yapmış olduğu "kavrama" tanımı cK¢ modeline yapılan kavrama tanımından çokta farklı değildir (Balacheff, Gaudin, 2002).

Kavrama, bir durum içinde konuya ait anlık bir bilmedir (instantiation of the knowing). Bu durum, konu/muhit sistemi tarafından karakterize edilmektedir. Hatta kavrama, konu/durum ikilisi yoluyla, anlık bir kavram olarak düşünülebilir. En nihayetinde bir bilme, belirli bir muhitte uyarılan kavramaların kümesidir. Kavram ise aynı nesneye sahip olan bilmeler kümesidir. Kavram, her biri kavramalardan oluşan bilme kümlerinin oluşturduğu küme olarak düşünülmektedir (Balacheff, Gaudin, 2003).

2.3. "Geometrik Yer" Kavramı

Araştırmada, cK¢ modelinin yapısını ortaya koymak için seçilen "geometrik yer" kavramı ile ilgili bazı önemli noktalar, bu başlık altında belirtilmektedir.

Öncellikle "yer" kelimesi için Türk Dil Kurumu sözlüğüne bakılacak olunursa, bu kelimenin aynı zamanda astronomi terimi olduğu belirtilmektedir. Bu sözlükte "yer" kelimesinin anlamları aşağıdaki gibi sıralanmaktadır(1):

1. Yerküre
2. Bir şeyin, bir kimsenin kapladığı veya kaplayabileceği boşluk, mahal, mekân
3. Gezinilen, ayakla basılan taban
4. Bulunulan, yaşanılan, oturulan şehir, kasaba, mahalle
5. Durum, konum, vaziyet
6. Ülke, bölge.
7. Görev, makam
8. Önem.
9. Herhangi bir şeye, bir işe ayrılmış bölüm veya alan.
10. İz.
11. Üzerine yapı kurulmaya elverişli arazi, arsa.
12. Ekime elverişli toprak parçası, arazi

13. Bir olayın geçtiği veya geçeceği bölüm, alan, mahal
14. Otel, motel vb.nde kalınacak oda.
15. Sinema ve tiyatroda veya taşıtlarda oturulacak koltuk, sandalye
16. *mecaz* Durum, konum.

Yukarıda belirtilen anlamların hissettirdiği ortak fikir, somut ya da soyut bir olguya odaklanma, yoğunlaşma ve yine bir olguyu betimleme şeklinde belirtilebilir. Bu bağlamda bakıldığında "yer" kelimesinin anlamları içinde altı çizgili olanlar araştırmacı tarafından önemli bulunmuştur.

Benzer şekilde "yer" kelimesinin İngilizce anlamına bakıldığında, "locus" kelimesi karşılık gelmektedir ve bu kelimenin çoğulu "loci" dir. Ayrıca Latince kökenli bir kelimedir. Biyolojide ve evrimsel hesaplamada (evolutionary computation) "locus" bir genin (yada diğer anlamı olarak bir dizilişin) bir kromozomdaki konumu anlamında kullanılmaktadır. Eski Yunan ve Latin edebiyat eserlerinde (klasiklerde), yazılı kaynaklarda (literatürde) ve teolojide ise "locus" (locus classicus) bir fikir, düşünce için dayanak olabilecek tabir (deyim) ya da kesin olan paragrafların ilk ortaya çıkışına işaret etmektedir (2).

"Locus" kelimesi *topos* kelimesinden gelmektedir. Platon'un "Timaeus" adlı kitabında yer alan mitlerden birisi, uzayın oluşumu ile ilgilidir. Burada, uzayın kendi kozmik oluşumu ve biçimlenmesine *chora,* yaratılışından sonra evrenin tamamlanmış haline de *topos* denilmiştir. Genel kullanımına bakıldığında ise *chora* ve *topos* yaklaşık olarak aynı anlama sahiptir. Burada bir farklılık belirtilecek olursa, *chora* daha üstünkörü ve sezgisel bir şekilde ve *topos* ise daha spesifik bir şekilde kullanılır. Matematikteki "geometrik yer" kelimesi, *chora* kelimesinden değil *topos* kelimesinden gelmektedir ve spesifik ihtiyaçlarla tanımlanmış veya bu ihtiyaçların sonucunda oluşmuş şekil anlamına gelmektedir (2).

Ayrıca Milattan önce 3. yüzyıl boyunca Euclid ve Apollonius' un da dahil olduğu Yunan matematikçiler problem çözümlerinde locus teoremi ve uygulamaları

ile özel bir ilgi duyduğu bilmektedir. Bir Yunan geometrik yer teoreminin, "verilenlerle oluşturulmuş bir geometrik nesne (genellikle bir nokta), bir geometrik nesnede (genellikle bir eğri ya da yüzey) yer alan özelliklerle tanımlanmış bağıntılara sahip olma" şartını sağlaması gerekmekteydi. Bir sınıflama, geometrik yer teoremleri ve problemlerin oluşturulması, tasarlanması sadece Euclid'in "Elemanlar" adlı kitabında yer alan doğrular ve çemberler ya da konik kesitleri ya da özel doğrular postulatlar yardımıyla çözülüp çözülememesine göre yapılmaktaydı (5).

Türk Dil Kurumu sözlüğüne tekrar bakıldığında "geometrik yer" bileşik sözcük olarak ifade edilmiş ve "aynı özellikleri olan noktaların oluşturdukları çizgi veya yüzey" olarak tanımlanmıştır (1).

Matematikte "geometrik yer" kavramının tanımı için literatür taraması yapıldığında elde edilen tanımlar sıralanacak olursa:

1) Belli bir kuralı sağlayan noktalar kümesine geometrik yer denir (6).
2) Ortak bir özellik paylaşan noktaların bir koleksiyonudur. Noktaların yeri, çoğunlukla sürekli şekil (shape) ya da şekiller olarak biçimlenmektedir (7).
3) Bir geometrik yer, aynı şartı sağlayan tüm noktalar kümesidir (genelde bir eğri ya da yüzey şeklindedirler.) (8).
4) (Bazen matematikte düzlemde belli özellikleri yerine getirerek hareket eden bir noktanın çizdiği yolu tanımlamak kullanışlıdır. Örneğin, saniye ibresinin ucundaki noktanın 60 saniyede çizdiği yol nedir? Cevap tabii ki bir çemberdir. Çemberi tanımlamanın bir başka yolu da şudur: düzlemde merkez olarak adlandırılan sabit bir noktaya verilen bir uzaklıkta olan bütün noktaların geometrik yeri bir çemberdir.) Düzlemde bir geometrik yer, belli özellikleri yerine getirerek hareket eden bir noktanın olası tüm konumları ya da yerleri olarak düşünülebilir (9).
5) Bir doğru, bir noktanın hareket ettiği yol olarak veya tam manasıyla "bir noktanın geometrik yeri" olarak kabul edilebilir. Geometrik yer, herhangi bir

şeyin hareketi ile biçimlenmiş bir yol olarak da tanımlanabilir ve yine, bir doğru, kendi hareketi ile bir yüzey oluşturur (generate), hareketli yüzeyler bir katı cismi oluşturur (generate) ve bu yüzey, doğrunun geometrik yeridir ve katı cisim, yüzeyin geometrik yeridir(10).

6) Matematikte geleneksel olarak hareketli bir noktanın çizdiği yol, iz olarak tanımlanmaktaydı. Fakat şimdilerde verilen şartları sağlayan bir eğri üzerindeki tüm noktalar kümesi olarak tanımlanmaktadır (11).

Yapılan literatür taramasının ışığı altında "geometrik yer" terimi yukarıdaki tanımları, iki temel tanımın farklı versiyonları olarak düşünebilir:

1.Verilen kurala göre hareket eden bir noktanın (cismin) çizdiği yola, o noktanın geometrik yeri denir.

2. Belirli kurala uyan (x,y) noktalarının kümesine geometrik yer denir.

"Geometrik yer" ile ilgili literatür taramasının yanı sıra Ana Paula Jahn (2002), tarafından Brezilya'da yapılan bir araştırmada, Cabri-géomètre II programında bulunan, "yer (locus)" ve "iz (trace)" araçlarını öğrencilere kullandırarak, dönüşüm ile ilgili olası cevapları analiz edilmiştir. Bu araştırmadan anlaşıldığı üzere, iki geometrik yer yaklaşımı vardır. Bunlardan birincisi, geometrik yerin, aynı özelliğe sahip bir noktalar kümesidir oluşudur. Bir karakteristik şart, bir noktanın kümeye ait olup olmadığını belirler. Objelerin "klasik" noktasal betimlemesi, bu yaklaşıma örnek bir durumdur, orta dikme, açıortay, konik ve özellikle çember gibi. "Geometrik yer" kavramı için ikinci yaklaşım ise bir uygulama (application) ya da dönüşüm (transformtion) altında bir objenin görüntüsü olarak tanımlanan noktalar kümesinin görüntüleri olan noktalar kümesine işaret etmektedir (Antibi&Barra, 1996):

"Eğer f: M → N = f(M) ye bir fonksiyon dersek, *N nin yerini bulmak* demek f(M) tüm noktalar kümesini bulmak demektir. Buda f altında, L doğrusunun görüntüsünü bulmak demektir. "

Yukarıda yapılan tanımla yardımıyla geometrik yer, fonksiyonel formda ifade edilmektedir. Teorik açıdan, noktalar kümesi olarak (bir doğru, bir çember…) düşünülen bir F şekline ait olan P hareketli noktası, f uygulaması (application) altıda P noktasının görüntüsü olan P' noktasıyla eşlenir. Bu iki yaklaşım göz önüne alındığında, "geometrik yer" kavramının iki anlamı vardır, sentetik şekilden (bütünsel bakış açısı) bir noktalar kümesi olan bir şekle olan değişimi uygun hale getirir ve şekli yeniden düzenler. Fransa'da okutulmakta olan ders kitapları analiz edildiğinde "geometri yer" kavramının ortaöğretim seviyesinde daha dinamik bir yolla sunulduğunu tespit edilmiştir: "Bir M noktası sabit bir (L) doğrusu üzerinde hareket etsin, M ile birleştirilmiş olan diğer bir N noktası M ile birlikte hareket eder. Problem, N noktasının hangi sabit (L_1) doğrusunda hareket edeceğini bulma işleminden oluşmaktadır. Bu (L_1) doğrusu, M, (L) doğrusu üzerinde hareket ettiğinde N nin *'geometrik yeri'* dir." (Antibi&Barra, 1996).

Sonuç olarak bu çalışmada, "geometrik yer" (ya da dönüştürülen şekil), (L) şekli üzerinde gezici M noktasının görüntüsü olan N noktasının yörüngesi olarak tanımlanmaktadır. Buradaki tanımlama, fizikteki hareket konusuyla eşlenemez. Tarihsel bir çalışmadan esinlenerek, öğrencilerin bir noktayı bir dönüşüm kavramı olarak algılayabilmelerini amaç edinen *"bir eğri üzerinde noktayı hareket ettirmek"* yorumu yapılan çalışmada kullanılmıştır (Jahn, 2002).

2.4. İlgili Araştırmalar

cK¢ modelinin kullanıldığı bir araştırma Fransa eğitim sisteminde ilköğretim son sınıf olan 12. sınıf öğrencileriyle yapılmıştır. Fonksiyon ile ilişkili olan kavramalar tarihsel ve epistemolojik açıdan incelenmiştir. Bu durum çalışmasında, öğrencilerin sahip oldukları grafiksel ve cebirsel temsiller arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Öğrencilerin kavramaları, dinamik bir geometri ortamı olan Cabri-Géomètre II programında öğrencilere yaptırılan uygulamalar yardımıyla ortaya

çıkarılmıştır. Bu araştırmada gönüllü katılan altı öğrenci, yine kendi istekleri doğrultusunda ikişerli gruplar olarak halinde çalışmışlardır. Her bir ikişerli grup bir gözlemci tarafından takip edilmiştir. Ayrıca asıl çalışma öncesinde öğrencilere Cabri-Géomètre II programının nasıl kullanıldığı ile ilgili dersler yapılmıştır. Bu dersler sonunda oluşturulan üç gruptan ikisi ile çalışmaya devam edilmiştir. Öğrencilerin sorulan sorulara verdikleri cevaplar doğrultusunda, öğrencilerin fonksiyon kavramı bağlamında grafiksel ve cebirsel temsilleri arasındaki bağlantılar tespit edilmiştir (Gaudin,1999).

Bir diğer araştırma ise matematiksel ve didaktik olarak analiz edilen yansıma (reflective) kavramı ile ilgili öğrenci kavramaları üzerine yapılmıştır. Bu araştırmada, öğrenci kavramalarının ana elemanları teşhis etmek amacıyla beş soru sorulmuştur. Bu araştırmada odaklanılan, öğrencilerin doğru işlemler (operatörler) ve kontroller kullanıp kullanmadıklarıdır. Yine bu araştırmada, bilgisayar bilimcileri, geliştirdiği çoklu temsiller (multi-agents) metodolojisi ile, matematik eğitimcileri ise, geliştirdikleri öğrenci kavramalarının temsil edildiği teorik model yani cK¢ modeli ile bu araştırmada bir araya gelmişlerdir. Burada öğrencilerin oluşturdukları hatalı kavramalar "paralellik kavraması" ve "merkezi simetri kavraması" olarak isimlendirilmiştir. Öğrencilerin kavramaları, bu eksende değerlendirilmiştir (Webber, Pesty, Balacheff, 2002).

Miyakawa (2004) tarafından yapılan bir araştırmada, yine cK¢ modeli, çizimde ve ispatta öğrencilerin sahip oldukları yansıma simetrisi (reflective symmetry) ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Bu araştırmada, matematiksel bilginin, geometri derslerinde yapılan ispatlarda nasıl bir işlevinin olduğu araştırılmıştır. Yaşları yaklaşık 14 olan Fransa eğitim sisteminde 9. sınıfta okuyan, gönüllü 25 öğrenci ile çalışmıştır. Öğrencilerin kavramalarının daha açık bir şekilde ortaya çıkması için bu öğrencilerden, 11 grup oluşturulmuştur. Sadece bir grup üç öğrenciden oluşmaktadır. Her bir grup için öğrenci davranışları not alınmıştır. Öğrencilere teorik açıdan aynı olan ve aynı kuralı kullanan iki problem yöneltilmiştir. Bu problemlerden birincisi, çizim ile diğeri de, ispat ile ilgilidir. Daha

sonrasında bu problemlerin çözümleri yardımıyla, öğrencilerin kavramaları cK¢ modeline göre incelenmiştir.

cK¢ modelinin kullanıldığı bir başka araştırma da Maracci, lineer cebir problemlerinde öğrencilerin karşılaştıkları güçlükleri ve hatalı belirlemek için yapılmıştır. Öğrencilerin kavramalarının analizi yöntemlerinden birisi olarak kullanılan cK¢ modeli, özellikle öğrencilere ait problem çözümlerinde kullandıkları işlemler (operatörler) ve kontrollerin analizi için kullanılmıştır(16).

3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın evreni, örneklemi, veri toplama tekniği ve verilerin analizi anlatılacaktır

3.1. Evren ve Örneklem

Araştırmanın evrenini, 2004-2005 öğretim yılında Ankara'da özel bir dershanede eğitim alan, 10. sınıfa devam etmekte olan 12 öğrenci oluşturmaktadır. Öğrencilerden iki tanesi Fen Lisesi, dört tanesi Anadolu Lisesi, dört tanesi Süper Lise, iki tanesi de Düz Lise öğrencisidir.

3.2. Veri Toplama Tekniği

Bu araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden, Gözlem Yöntemi kullanılmıştır.

Öğrencilere çözmeleri için verilen sorular, belirli bir sıra ile verilmiştir. Bu sorular genellikle açık uçlu olarak hazırlanmıştır. Böylece görüşülen öğrencilerin, konu hakkında daha ayrıntılı yanıtlar vermesi amaçlanmıştır. Sorular, istenen bilgileri açıkça belirtecek ve gözlemlenen öğrenciler tarafından kolayca anlaşılacak nitelikte hazırlanmıştır. Öğrenciler, ikişerli gruplar halinde gözlemlenmiştir. Öğrencilerin ikişerli gruplar halinde gözlemlenmesi durumunda, aşağıdaki araştırmalardan yararlanılmıştır:

- Gaudin N. (1999) *Caractérisation des conceptions du concept de fonction*. Mémoire de DEA, Laboratoire Leibniz, Grenoble

- MIYAKAWA T. (2004) *Reflective symmetry in construction and proving* Laboratoire LEIBNIZ – IMAG (France) & University of Tsukuba (Japan)

Bu araştırmalardan yola çıkarak, ikili öğrenci grupları oluşturulmuştur. Araştırmaya sadece gönüllü öğrenciler alınmıştır. Bu gönüllü öğrencilerden oluşturulan gruplarda yine öğrencilerin isteklerine göre belirlenmiştir. Öğrencilerin böylesi bir seçimindeki ve öğrencilerden böylesi grupların oluşturulmasındaki amaç öğrenci kavramalarını en verimli şekilde elde etmektir.

Gözlem sürecinde, öğrencilerin soruları rahat bir şekilde cevaplayabilecekleri bir gözlem ortamı hazırlamak hedeflenmiştir. Araştırmacı, her bir grubu 40-60 dakika boyunca gözlemlemiştir. Öğrencilerin konuşmaları, ses kayıt cihazı kullanılarak kaydedilmiştir. Bunun yanında araştırmacı da süreç boyunca kendi gözlemlerini not almıştır. Gözlemlenen öğrencilerin sorulara samimi olarak cevap verdiği düşüncesine ulaşılmıştır.

3.3. Verilerin Analizi

Bu araştırmada iki kişiden oluşan her gruba beş soru yöneltilmiştir. Araştırmacı ve araştırmacının danışmanı tarafından, her bir sorunun matematiksel analizi yapılmış ve çözümü elde edilmiştir. Matematiksel analizi ve çözümü elde edilen her bir sorunun cK¢ modeline göre (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü oluşturmuştur. Öğrencilerden alınan yazılı ve sözlü verilerin yardımıyla grupların, cK¢ modeline göre her bir soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüleri çıkartılmıştır.

Gruplardan elde edilen (P,İ,T,K) kavrama dörtlüleri, araştırmacı ve araştırmacının danışmanı tarafından oluşturulan (P,İ,T,K) kavrama dörtlüleri ile kıyaslanmıştır.

Her bir soru için, uzman görüşleri dikkate alınarak yapılan çözümleri ve bu çözümlerin anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüleri aşağıda verilmektedir:

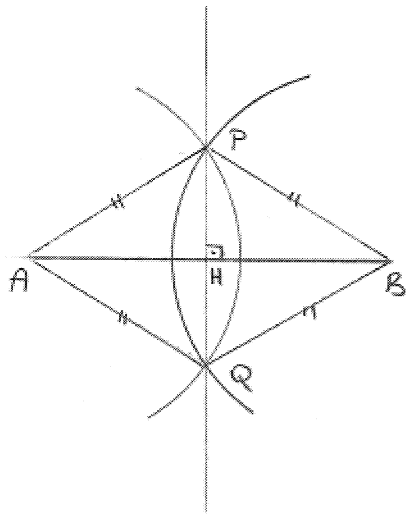
1. soru: Düzlemde verilen bir AB doğru parçasının uç noktalarının her ikisine de eşit uzaklıkta bulunan noktaların yerlerini belirlemeye çalışınız. Belirleyebildiyseniz bu yerin özelliklerini yazınız.

Pergeli belli bir miktar açıp, A noktasına batırarak bir yay çizelim. Pergelin açıklığı bozulmayacak şekilde iğneyi B noktasına batırıp başka bir yay çizelim. Pergelin açıklığı, bu iki yayın iki noktada kesişmesini sağlamalıdır. Diyelim ki bu yayların kesiştiği noktalar P ve Q ile gösterilsin. Pergelin açıklığı aynı kaldığından her iki yay üzerindeki noktaların A ve B noktalarına olan uzaklıkları aynı olmak durumundadır. Çünkü $|AP|$, $|AQ|$, $|BP|$, $|BQ|$ uzunlukları aynı yarıçaptır. Böylece $\overset{\Delta}{PAB}$ ve $\overset{\Delta}{QAB}$ üçgenlerinin her ikisi de ikizkenardır. $\overset{\Delta}{PAB}$ ikizkenar üçgen ise ikizkenar üçgenlerin özelliğinden, P noktasından $[AB]$na indireceğim dikme $[AB]$nı iki eş parçaya ayırmak durumundadır. Dikmenin, bu doğru parçasını kestiği noktayı H harfi ile gösterelim. Bu durumda;

$$[PH] \perp [AB] \text{ ve } |AH| = |HB|$$

olmalıdır. P, Q ve H noktaları aynı doğru üzerindedir. PQ doğrusu üzerinde P, Q ve H noktalarından farklı seçeceğim her R noktası için $|RA| = |RB|$ olacaktır. Çünkü $\overset{\Delta}{RAH}$ ile $\overset{\Delta}{RBH}$ üçgenleri, K.A.K. teoreminden eş üçgenlerdir .Sonuç olarak, R noktasını PQ doğrusu üzerinde şartsız seçişimden dolayı, PQ doğrusu üzerindeki noktalar, A ve B uç noktalarına uzaklığı eşit olacaktır. Eğer R noktasını, PQ doğrusu üzerinde olmayacak şekilde seçersem, $\hat{RAH}$ ve $\hat{RBH}$ açılarının eşliği bozulacaktır. Dolayısıyla $\overset{\Delta}{RAB}$ üçgeninde $|RA| = |RB|$ olmayacaktır ve böylece R noktası istediğimiz şart olan (*) denklemini sağlamayacaktır.

Sonuç olarak, istenilen şartı sağlayan noktaların tamamı, PQ doğrusu üzerindeki noktaların tamamıdır. Dolayısıyla bu noktaların geometrik yeri, PQ doğrusudur.



Şekil 1-1. sorunun, anahtar kavrama (P,İ,T,K) dörtlüsüne göre çizimi

1. soruya ait Problem Kümesi:

1. Bir düzlem nedir?
2. Bir doğrunun parçası olmak ne demektir?
3. İki doğru parçasının uzunluklarının eşit olması ne demektir?
4. Yarıçapları eşit kesişen iki çemberin kesim noktalarının sağladığı özellikler nelerdir?
5. Bir çemberin yarıçapı nedir?
6. Üçgenlerin ikizkenar olması ne demektir?
7. Dikme ne demektir?
8. Bir doğru parçasını iki eş parçaya ayırmanın anlamı nedir?
9. Üçgenlerin eş olması ne demektir?
10. Üçgenlerdeki eşlik teoremlerinden K.A.K. teoremi neyi iddia etmektedir?
11. İki açının eş olması ne demektir?

1. soruya ait İşlem Kümesi:

1. P ve Q yayların kesim noktaları olmak üzere $|AP|$, $|AQ|$, $|BP|$ ve $|BQ|$ yarıçaplar olduğundan P ve Q noktalarının, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta oluşu.

2. $|AP| = |AQ|$ ise $\overset{\Delta}{PAB}$ üçgeni ikizkenar üçgendir.

3. $|BP| = |BQ|$ ise $\overset{\Delta}{QAB}$ üçgeni ikizkenar üçgendir.

4. $\overset{\Delta}{PAB}$ üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan P ve Q noktalarından geçen doğrunun $[AB]$nı iki eş parçaya ayırması.

5. $\overset{\Delta}{PAB}$ üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan PQ doğrusunun $[AB]$na dik olması

6. $\overset{\Delta}{PAB}$ üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan $\overset{\Delta}{PAH} \cong \overset{\Delta}{PBH}$ dir.

7. PQ doğrusu üzerinde, P, Q ve H noktalarından farklı seçilen her R noktası için $\overset{\Delta}{RAH}$ ve $\overset{\Delta}{RBH}$ üçgenlerinin K.A.K. teoreminden eş üçgenler olması.

8. $\overset{\Delta}{RAH} \cong \overset{\Delta}{RBH} \Rightarrow |RA| = |RB|$

9. $R \notin PQ \Rightarrow \hat{RAH}$ ve $\hat{RBH}$ açıları eş değildir.

10. $\hat{RAH}$ ve $\hat{RBH}$ açıları eş değil ise $|RA| \neq |RB|$ dir.

1. soruya ait Temsil Kümesi:

1. Bir doğru parçası çizme
2. Doğru parçasının uç noktalarını A ve B ile isimlendirme
3. Pergel yardımıyla A ve B merkezli çember yayları çizme
4. Çizilen eş çemberlerin kesim noktalarını P ve Q harfleriyle isimlendirme
5. A ve B noktalarını, P ve Q noktaları ile birleştirme
6. $|AP|$, $|AQ|$, $|BP|$ ve $|BQ|$ uzunluklarının yarıçap olduğunu belirtme
7. Yarıçap uzunluklarının birbirine eşit olduklarını sembollerle gösterme ve r harfiyle gösterme
8. PAB ve QAB üçgenlerini sırasıyla, $\overset{\Delta}{PAB}$ ve $\overset{\Delta}{QAB}$ ile gösterme

9. $P\hat{A}B$ ve $Q\hat{A}B$ nin ikizkenar olduklarını belirtme
10. P noktasından $[AB]$na dikme çizme
11. Dikliği sembollerle gösterme
12. $[AB]$nın iki eş parçaya ayrıldığını sembollerle gösterme
13. $[AB]$nın orta noktasını H harfi ile isimlendirme
14. $[PH] \perp [AB]$ ifadesini yazma
15. $|AH| = |HB|$ eşitliğini yazma
16. PQ doğrusu üzerinde bir R noktası seçme
17. PQ doğrusu üzerinde seçilen R noktası için $|R\,A| = |R\,B|$ eşitliğini kullanma

1. soruya ait Kontrol Kümesi:

1. İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
2. Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar bir çember belirtir.
3. Çemberin herhangi bir parçası "yay"dır.
4. Yarıçapları eşit olan çemberler, "eş çemberler"dir.
5. Bir üçgende iki kenar birbirine eşit ise üçgen ikizkenardır.
6. Bir ikizkenar üçgende $|AP| = |PB|$ ise P noktasından $[AB]$na çizilen dikme $[AB]$nı iki eş parçaya ayırır.
7. Bir ikizkenar üçgende $|AP| = |PB|$ ise P noktasından $[AB]$na çizilen dikme üzerindeki her nokta, K.A.K. teoreminden $[AB]$ nın uç noktalarına eşit uzaklıktadır.
8. İki üçgende eşit açıları oluşturan kenarlar orantılı ise bu iki üçgen eştir. (K.A.K. teoremi)

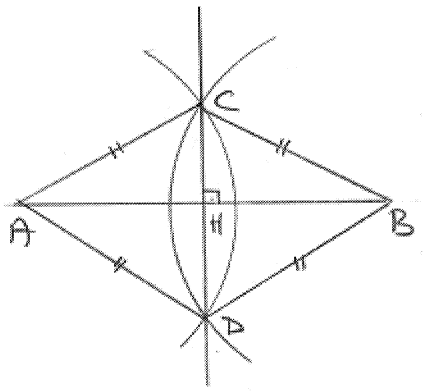
2. soru: Düzlemde bir AB doğru parçası veriliyor. $|AC| = |CB|$ eşitliğini sağlayan C noktalarının yerlerini düzlemde gösterebilir misiniz? Gösterebildiyseniz, gösterdiğiniz şeklin bir geometrik adı var mıdır? Bu geometrik şekli göstermede kullandığınız yolları yazınız ve açıklayınız.

Pergeli belli bir miktar açıp, A noktasına batırarak bir yay çizelim. Pergelin açıklığı bozulmayacak şekilde iğneyi B noktasına batırıp başka bir yay çizelim. Pergelin açıklığı, bu iki yayın iki noktada kesişmesini sağlamalıdır. Diyelim ki bu yayların kesiştiği noktalar C ve D ile gösterilsin. Pergelin açıklığı aynı kaldığından her iki yay üzerindeki noktaların A ve B noktalarına olan uzaklıkları aynı olmak durumundadır. Çünkü $|CB|$, $|DB|$, $|AC|$, $|AD|$ uzunlukları aynı yarıçaptır. Böylece $C\hat{A}B$ ve $D\hat{A}B$ üçgenlerinin her ikisi de ikizkenardır. $C\hat{A}B$ ikizkenar üçgen ise ikizkenar üçgenlerin özelliğinden C noktasından $[AB]$na indireceğim dikme $[AB]$nı iki eş parçaya ayırmak durumundadır. Dikmenin bu doğru parçasını kestiği noktayı H harfi ile gösterelim. Bu durumda;

$$[CH] \perp [AB] \text{ ve } |AH| = |HB|$$

olmalıdır. C, D ve H noktaları aynı doğru üzerindedir. CD doğrusu üzerinde C, D ve H noktalarından farklı seçeceğim her R noktası için $|RA| = |RB|$ olacaktır. Çünkü $R\hat{A}H$ ile $R\hat{B}H$ üçgenleri K.A.K. teoreminden eş üçgenlerdir. Sonuç olarak, R noktasını CD doğrusu üzerinde şartsız seçişimden dolayı CD doğrusu üzerindeki noktalar, A ve B uç noktalarına uzaklığı eşit olacaktır. Eğer R noktasını, CD doğrusu üzerinde olmayacak şekilde seçersem, $R\hat{A}H$ ve $R\hat{B}H$ açılarının eşliği bozulacaktır. Dolayısıyla $R\hat{A}B$ üçgeninde $|RA| = |RB|$ olmayacaktır ve böylece R noktası istediğimiz şart olan (*) denklemini sağlamayacaktır.

Sonuç olarak, istenilen şartı sağlayan noktaların tamamı, CD doğrusu üzerindeki noktaların tamamıdır. Dolayısıyla bu noktaların geometrik yeri CD doğrusudur.



Şekil 2-2. sorunun, anahtar kavrama (P,İ,T,K) dörtlüsüne göre çizimi

2. soruya ait Problem Kümesi:

1. Bir düzlem nedir?
2. Bir doğrunun parçası olmak ne demektir?
3. İki doğru parçasının uzunluklarının eşit olması ne demektir?
4. Yarıçapları eşit kesişen iki çemberin kesim noktalarının sağladığı özellikler nelerdir?
5. Bir çemberin yarıçapı nedir?
6. Üçgenlerin ikizkenar olması ne demektir?
7. Dikme ne demektir?
8. Bir doğru parçasını iki eş parçaya ayırmanın anlamı nedir?
9. Üçgenlerin eş olması ne demektir?
10. Üçgenlerdeki eşlik teoremlerinden K.A.K. teoremi neyi iddia etmektedir?
11. İki açının eş olması ne demektir?

2. soruya ait İşlem Kümesi:

1. C ve D yayların kesim noktaları olmak üzere $|CB|$, $|DB|$, $|AC|$ ve $|AD|$ yarıçaplar olduğundan C ve D noktalarının, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta oluşu.
2. $|AC|=|CB|$ ise $\overset{\Delta}{CAB}$ üçgeni ikizkenar üçgendir.

3. $|AD|=|DB|$ ise $D\hat{A}B$ üçgeni ikizkenar üçgendir.

4. $C\hat{A}B$ üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan C ve D noktalarından geçen doğrunun $[AB]$nı iki eş parçaya ayırması.

5. $C\hat{A}B$ üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan CD doğrusunun $[AB]$na dik olması

6. $C\hat{A}B$ üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan $C\hat{A}H \cong C\hat{B}H$ dir.

7. CD doğrusu üzerinde, C, D ve H noktalarından farklı seçilen her R noktası için $R\hat{A}H$ ve $R\hat{B}H$ üçgenlerinin K.A.K. teoreminden eş üçgenler olması.

8. $R\hat{A}H \cong R\hat{B}H \Rightarrow |RA|=|RB|$

9. $R \notin PQ \Rightarrow \hat{RAH}$ ve $\hat{RBH}$ açıları eş değildir.

10. $\hat{RAH}$ ve $\hat{RBH}$ açıları eş değil ise $|RA| \neq |RB|$ dir.

2. soruya ait Temsil Kümesi:

1. Bir doğru parçası çizme
2. Doğru parçasının uç noktalarını A ve B ile isimlendirme
3. Pergel yardımıyla A ve B merkezli çember yayları çizme
4. Çizilen eş çemberlerin kesim noktalarını C ve D harfleriyle isimlendirme
5. A ve B noktalarını, C ve D noktaları ile birleştirme
6. $|CB|$, $|DB|$, $|AC|$ ve $|AD|$ uzunluklarının yarıçap olduğunu belirtme
7. Yarıçap uzunluklarının birbirine eşit olduklarını sembollerle gösterme ve r harfiyle gösterme
8. CAB ve DAB üçgenlerini sırasıyla, $C\hat{A}B$ ve $D\hat{A}B$ ile gösterme
9. $C\hat{A}B$ ve $D\hat{A}B$ nin ikizkenar olduklarını söyleme
10. C noktasından $[AB]$ na dikme çizme
11. Dikliği sembollerle gösterme
12. $[AB]$nın iki eş parçaya ayrıldığını sembollerle gösterme
13. $[AB]$nın orta noktasını H harfi ile isimlendirme

14. $[CH] \perp [AB]$ ifadesini yazma

15. $|AH| = |HB|$ eşitliğini yazma

16. CH doğrusu üzerinde bir Q noktası seçme

17. CH doğrusu üzerinde seçilen Q noktası için $|QA| = |QB|$ eşitliğini kullanma

2. soruya ait Kontrol Kümesi:

1. İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
2. Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar bir çember belirtir.
3. Çemberin herhangi bir parçası "yay"dır.
4. Yarıçapları eşit olan çemberler, "eş çemberler"dir.
5. Bir üçgende iki kenar birbirine eşit ise üçgen ikizkenardır.
6. Bir ikizkenar üçgende $|AC| = |CB|$ ise C noktasından $[AB]$na çizilen dikme, $[AB]$nı iki eş parçaya ayırır.
7. Bir ikizkenar üçgende $|AC| = |CB|$ ise C noktasından $[AB]$na çizilen dikme, üzerindeki her nokta, K.A.K. teoreminden $[AB]$ nın uç noktalarına eşit uzaklıktadır.
8. İki üçgende eşit açıları oluşturan kenarlar orantılı ise bu iki üçgen eştir. (K.A.K. teoremi)

3.soru: Düzlemde AB doğru parçası, CD doğru parçasının orta dikmesinin bir parçası ise CD doğru parçası, AB doğru parçasının orta dikmesinin parçası olur mu? Cevaplarınızın gerekçelerini yazınız.

Düzlemde bir CD doğru parçası alalım. Bir doğru parçası orta dikmesi;

a) Bir doğrudur.

b) Bu doğru, doğru parçasının orta noktasından geçer veya doğru parçasının orta noktası bu doğru üzerinde bulunur.

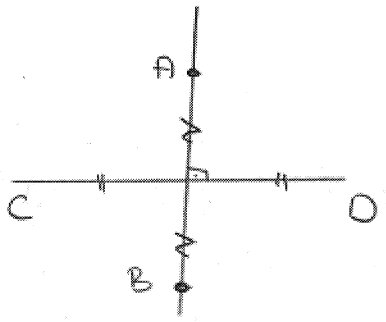
c) Bu doğrunun doğru parçası ile yaptığı açı 90^0 dir.

O halde, [CD]nın orta dikmesi, [CD]nın orta noktasından geçmelidir. Öyleyse [CD]nın orta noktasını seçelim. Bu noktayı, H harfi ile gösterelim. Burada $|CH| = |HD|$ olur. Aynı zamanda [CD]nın orta dikmesi, [CD]na dik olmalıdır. [CD] nın orta dikmesi d harfi ile gösterilecek olursa, d doğrusu [CD]na dik olduğundan $d \perp [CD]$ şeklinde gösterilebilir.

[CD]nın orta dikmesi (d doğrusu) üzerine [AB] yerleştirilsin. Yani A ve B noktalarını işaretlensin. Eğer,

i) [AB]nın orta noktası ile [CD]nın orta noktası aynı nokta ise kesişme noktalarında (H noktasında) [AB], [CD]nın orta dikmesinin bir parçası olduğundan, bu iki doğru parçası birbirine dik olmalıdır. Aynı zamanda bu nokta, her ikisinin de orta noktası olduğundan, [CD]nı içeren doğru da [AB]nın orta dikmesi olmalıdır.

ii) [AB]nın orta noktası ile [CD]nın orta noktası aynı değilse [CD]nı içeren doğru orta noktasından (H noktasından) geçmeyecektir. Bu durumda, elde aynı doğruya dik olan iki doğru bulunmaktadır. Düzlemde bunun anlamı, iki doğrunun birbirine paralel olduğudur. Paralel iki doğrunun ortak noktaları bulunmayacağından, [AB]nın orta dikmesi, [CD]nı içermeyecektir. Böylece [CD], [AB]nın orta dikmesinin bir parçası değildir.



Şekil 3-3. sorunun, anahtar kavrama (P,İ,T,K) dörtlüsüne göre çizimi

3. soruya ait Problem Kümesi:

1. Bir düzlem nedir?
2. Bir doğrunun parçası olmak ne demektir?
3. Bir doğru parçasının orta noktası nedir?
4. İki doğrunun dik kesişmesi ne demektir?
5. Bir doğrunun bir noktadan geçmesi ne demektir?
6. İki doğrunun paralel olması ne demektir?
7. Paralel doğruların özellikleri nelerdir?

3. soruya ait İşlem Kümesi:

1. d doğrusu, [CD]nın orta dikmesi ise [CD]nın orta noktasından geçmesi.
2. d doğrusu, [CD]nın orta dikmesi ise [CD]na dik olması.
3. [AB]nın orta noktası ile [CD]nın orta noktası aynı nokta ise kesişme noktalarında (H noktasında) [AB], [CD]nın orta dikmesinin bir parçası olduğundan bu iki doğru parçası birbirine dik olması.
4. H noktası, her ikisinin de orta noktası olduğundan [CD]nı içeren doğru da [AB] nın orta dikmesi olmalıdır.

5. [AB]nın orta noktası ile [CD]nın orta noktası aynı değilse [CD]nı içeren doğru orta noktasından (H noktasından) geçmemesi.

6. [AB]nın orta noktası ile [CD]nın orta noktası aynı değilse aynı doğruya dik olan iki doğrunun olması.

7. Paralel iki doğrunun ortak noktaları bulunmayacağından [AB]nın orta dikmesi, [CD]nı içermediğinden [CD]nın, [AB]nın orta dikmesinin bir parçası olmaması.

3. soruya ait Temsil Kümesi:

1. Bir doğru parçası çizme
2. Doğru parçasının uç noktalarını C ve D harfleri ile isimlendirme
3. [CD]nın orta noktasını işaretleme
4. [CD]nın orta noktasını H harfi ile isimlendirme
5. [CD]nın orta dikmesini çizme
6. [CD]nın orta dikmesini d harfi ile isimlendirme
7. [CD] ile d doğrusunun dik kesiştiklerini, d⊥ [CD] şeklinde gösterme
8. d doğrusu üzerinde, orta noktası H noktası olacak şekilde bir [AB] yerleştirme
9. [AB]nın iki eş parçaya ayrıldığını sembollerle gösterme
10. d doğrusu üzerinde, orta noktası H noktası olmayacak şekilde bir [AB] yerleştirme
11. [AB]nın orta dikme doğrusunu çizme

3. soruya ait Kontrol Kümesi:

1. İki noktadan bir ve yalnız bir nokta geçer.
2. Bir doğru parçası orta dikmesi,

a) Bir doğrudur.

b) Bu doğru, doğru parçasının orta noktasından geçer veya doğru parçasının orta noktası bu doğru üzerinde bulunur.

c) Bu doğrunun doğru parçası ile yaptığı açı 90^0 dir.

3. Paralel doğruların ortak noktaları yoktur.

4. soru: Düzlemde doğrusal olmayan A, B, C noktaları verilmektedir. Bu üç noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini belirleyiniz. Belirleme aşamasında kullandığınız düşüncelerinizi yazınız.

Amacımız düzlemde doğrusal olmayan A,B ve C noktalarının her birine eşit uzaklıkta bulunan noktaları tespit etmek olduğuna göre, öncelikle doğrusal olmayan bu noktaların herhangi ikisine eşit uzaklıkta bulunan noktaların yerlerini bulmaya çalışalım.

A ve B noktalarını alalım. $[AB]$nın orta dikmesini çizecek olursak, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta bulunan bütün noktalar $[AB]$nın orta dikmesi üzerinde olmalıdır. $[AB]$nın orta noktasını da D harfi ile gösterelim. $[AB]$nın orta dikmesini çizelim. Bu doğruyu d_1 doğrusu olarak isimlendirelim. d_1 doğrusu, $[AB]$nın orta dikmesi olduğundan;

$$[AB] \perp d_1 \text{ ve } |AD| = |DB| \text{ dir.}$$

Benzer şekilde B ve C noktalarını alacak olursak yine B ve C noktalarına eşit uzaklıkta bulunan bütün noktalar, $[BC]$nın orta dikmesi üzerinde olmalıdır. $[BC]$nın orta noktasını da E harfi ile gösterelim. $[BC]$nın orta dikmesini çizelim. Bu doğruyu da d_2 doğrusu olarak isimlendirelim. d_2 doğrusu, $[BC]$nın orta dikmesi olduğundan,

$$[BC] \perp d_2 \text{ ve } |BE| = |EC| \text{ dir.}$$

d_1 ve d_2 doğrularının kesim noktası O noktası olsun.

$$d_1 \cap d_2 = \{O\} \text{ olur.}$$

O noktası, $[AB]$nın üzerinde olduğundan, O noktasını, A ve B noktalarıyla birleştirirsek, oluşan $[AO]$ ve $[BO]$nın uzunlukları birbirine eşit olacaktır.

$$|AO| = |BO| \text{ .....(1)}$$

O noktası aynı zamanda $[BC]$nın orta dikmesi üzerinde olduğundan O noktasını C noktasıyla birleştirirsek $[BO]$ ve $[CO]$nın uzunlukları birbirine eşit olacaktır.

$$|BO| = |CO| \text{ .....(2)}$$

(1) ve (2) eşitlikleri göz önüne alındığında, eşitlik bağıntısının geçişken oluşundan O noktası, A, B ve C noktalarına eşit uzaklıktadır.

Dolayısıyla O noktası hem A noktasına hem C noktasına eşit uzaklıkta olduğundan, $[AC]$nın orta dikmesini çizecek olursak, bu doğru O noktasından geçmelidir. Sonuç olarak, O noktası aradığımız şartı sağlayan noktalardan birisidir. Şimdi bu şartları sağlayan başka noktaların varolup olmadığını araştırmalıyız:

Bir başka Q noktası daha varolsun. Bu durumda, Q noktasının A, B ve C noktalarına olan uzaklıkları eşit olacaktır. Dolayısıyla,

$$|QA| = |QB| = |QC| \text{ olur.}$$

$|QA| = |QB|$ ise Q noktası $[AB]$nın orta dikmesi üzerindedir.

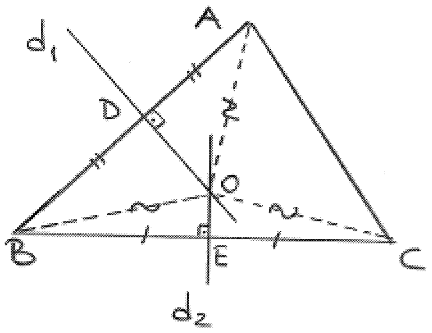
$|QA| = |QC|$ ise Q noktası $[AC]$nın orta dikmesi üzerindedir.

$|QB| = |QC|$ ise Q noktası $[BC]$nın orta dikmesi üzerindedir.

Böylece eşitlik bağıntısının geçişme özelliğinden Q noktası, aynı O noktası gibi bu üç dikmenin üzerinde olacaktır.

Bu üç orta dikmeden herhangi ikisini alırsak alalım bu iki nokta, bu orta dikmelerin her ikisinin üzerinde bulunacağından bu doğruların iki ortak noktası olur. Bunun anlamı da, bu dikmelerin çakışık olmasıdır. Geçişme özelliğinden de bu üç dikme çakışık olur. Fakat, A, B ve C noktaları doğrusal olmadığından, bu dikmeler birbirlerinden farklı olacaktır. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. O halde O noktası bu şartı sağlayan tek noktadır.

Sonuç olarak, O noktası düzlemde doğrusal olmayan A, B ve C noktalarına eşit uzaklıktadır. Bu nokta, $\overset{\Delta}{ABC}$ nin kenar orta dikmelerin kesim noktasıdır ve $\overset{\Delta}{ABC}$ nin çevrel çemberinin merkezidir.



Şekil 4-4. sorunun, anahtar kavrama (P,İ,T,K) dörtlüsüne göre çizimi

4. soruya ait Problem Kümesi:

1. Bir düzlem nedir?
2. Düzlemde doğrusal olmama ne demektir?
3. İki noktaya eşit uzaklıkta olmak ne demektir?

4. Bir doğru parçasının orta dikmesi nedir?

5. İki doğrunun kesim noktası ne demektir?

6. Bir noktanın bir doğru üzerinde olması ne demektir?

7. Eşitlik bağıntısının geçişken olması ne demektir?

8. Bir noktanın bir doğrudan geçmesi ne demektir?

9. Ortak iki noktaya sahip doğruların birbirine göre durumları nedir?

4. soruya ait İşlem Kümesi:

1. Amaç, düzlemde doğrusal olmayan A, B ve C noktalarının her birine eşit uzaklıkta bulunan noktaları tespit etmek olduğuna göre, öncelikle doğrusal olmayan bu noktaların herhangi ikisine eşit uzaklıkta bulunan noktaların yerlerin bulunması.

2. $[AB]$nın orta dikmesi çizilecek olunursa, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta bulunan bütün noktaların, $[AB]$nın orta dikmesi üzerinde olması.

3. d_1 doğrusu, $[AB]$nın orta dikmesi olduğundan $[AB] \perp d_1$ ve $|AD| = |DB|$ olması.

4. $[BC]$nın orta dikmesi çizilecek olunursa, B ve C noktalarına eşit uzaklıkta bulunan bütün noktaların $[BC]$nın orta dikmesi üzerinde olması.

5. d_2 doğrusu, $[BC]$nın orta dikmesi olduğundan $[BC] \perp d_2$ ve $|BE| = |EC|$ olması.

6. O noktası, $[AB]$ nın üzerinde olduğundan, O noktası, A ve B noktalarıyla birleştirilirse, oluşan $[AO]$ ve $[BO]$nın uzunluklarının birbirine eşit olması.

7. O noktası, aynı zamanda $[BC]$nın orta dikmesi üzerinde olduğundan O noktası, C noktasıyla birleştirilirse, $[BO]$ ve $[CO]$nın uzunluklarının birbirine eşit olacaktır.

8. Eşitlik bağıntısı geçişken olduğundan O noktasının, A, B ve C noktalarına eşit uzaklıkta olması.

9. O noktası, hem A noktasına hem C noktasına eşit uzaklıkta olduğundan $[AC]$nın orta dikmesi çizilecek olunursa, bu doğrunun O noktasından geçmesi.

10. $|QA| = |QB|$ ise Q noktasının, $[AB]$nın orta dikmesi üzerinde olması.

11. $|QA| = |QC|$ ise Q noktasının, $[AC]$nın orta dikmesi üzerinde olması.

12. $|QB| = |QC|$ ise Q noktasının, $[BC]$nın orta dikmesi üzerinde olması.

13. Üç orta dikmeden herhangi ikisi alınacak olunursa, bu iki nokta [*O ve Q noktaları*] orta dikmelerin her ikisinin üzerinde bulunacağından bu doğruların [*orta dikmelerin*]iki ortak noktasının olması.

14. Geçişme özelliğinden bu üç dikme çakışık olması.

15. A, B ve C noktaları doğrusal olmadığından, bu dikmelerin birbirlerinden farklı olması.

4. soruya ait Temsil Kümesi:

1. Düzlemde doğrusal olmayan üç nokta işaretleme
2. Doğrusal olmayan noktaları A,B ve C harfleri ile isimlendirme
3. A, B ve C noktalarını ikişerli olarak birleştirme ve $\overset{\Delta}{ABC}$ oluşturma
4. $[AB]$nın orta noktasını işaretleme
5. $[AB]$nın orta noktasını D harfi ile isimlendirme
6. $[AB]$nın orta dikmesini çizme
7. $[AB]$nın orta dikmesini d_1 ile isimlendirme
8. $[AB]$nın d_1 doğrusuna dik olduğunu "$[AB] \perp d_1$" şeklinde gösterme
9. $[AD]$ ile $[DB]$nın uzunluklarının birbirine eşit olduklarını "$|AD| = |DB|$" şeklinde gösterme
10. $[BC]$nın orta noktasını işaretleme
11. $[BC]$nın orta noktasını E harfi ile isimlendirme

12. $[BC]$nın orta dikmesini çizme

13. $[BC]$nın orta dikmesini d_2 ile isimlendirme

14. $[BC]$nın d_2 doğrusuna dik olduğunu "$[BC] \perp d_2$" şeklinde gösterme

15. $[BE]$ ile $[EC]$nın uzunluklarının birbirine eşit olduklarını "$|BE| = |EC|$" şeklinde gösterme

16. d_1 ve d_2 doğrularının kesim noktasını O harfi ile isimlendirme

17. "$d_1 \cap d_2 = \{O\}$" şeklinde gösterme

18. O noktasıyla A ve B noktalarını birleştirme

19. $[AO]$ ve $[BO]$nın uzunlukları birbirine eşit olduğunu sembollerle gösterme

20. "$|AO| = |BO|$" ifadesini yazma

21. O noktasıyla C noktasını birleştirme

22. $[BO]$ ve $[CO]$nın uzunlukları birbirine eşit olduğunu sembollerle gösterme

23. "$|BO| = |CO|$"ifadesini yazma

24. $[AC]$nın orta dikmesini, O noktasından geçecek şekilde çizme

4. soruya ait Kontrol Kümesi:

1. İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
2. Bir doğru parçası orta dikmesi;

a) Bir doğrudur.

b) Bu doğru, doğru parçasının orta noktasından geçer veya doğru parçasının orta noktası bu doğru üzerinde bulunur.

c) Bu doğrunun doğru parçası ile yaptığı açı 90^0 dir.

3. Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerindeki her nokta, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır.

4. Eşitlik bağıntısı geçişkendir.

5. İki ortak noktaya sahip doğrular çakışıktır.

6. Doğrusal olmayan noktalarının birleştirilmesiyle oluşturulan doğru parçalarının orta dikmeleri çakışık olamazlar.

5. soru: Düzlemde verilen bir çemberin merkezi ile çemberin üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçalarının orta noktalarının olası geometrik yeri nedir? Bu çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ olsaydı, aradığımız geometrik yerin denklemini yazabilir misiniz? Denklemi yazabilseydiniz, bu denklemin grafiğini çizmeye çalışınız. Çizdiğiniz grafiğin bir adı var mıdır? Varsa yazınız.

Düzlemde sabit bir M noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesine "çember" denir. Bu aynı zamanda istenen şartı sağlayan noktaların geometrik yeridir.

O halde düzlemde sabit bir M(a,b) noktası seçmeliyim. Bu sabit M(a,b) noktası, çemberin merkezi olmalıdır. M(a,b) noktası ile çemberin üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçalarının uzunlukları yarıçap olacaktır.

Çember üzerinde herhangi bir P(x,y) noktası alalım. P(x,y) noktasını, merkeze birleştirdiğimizde oluşan $[PM]$nın uzunluğu çemberin yarıçapıdır. Bu uzunluğun temsili için yaygın gösterimlerinden r yi kullanalım. Burada

$$|PM| = r \text{ dir.}$$

İki nokta arasındaki uzaklık formülünden;

$$|PM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \text{ dir.}$$

$|PM| = r$ yazılırsa ve yukarıdaki denklemde her iki tarafın karesi alınırsa;

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ denklemi elde edilir. Bu denklemde M(a,b) merkez ve r birim yarıçap olacaktır.

$[PM]$nın orta noktasını K(u,v) ile gösterelim. $[PM]$nın uzunluğu r birim olduğundan orta nokta kavramı gereği $[PK]$ ve $[MK]$nın uzunlukları $\frac{r}{2}$ birim olmalıdır. Bu durum sembolik olarak;

$|PM| = r \Rightarrow |PK| = |MK| = \frac{r}{2}$ şeklinde de ifade edilebilir.

Yine iki nokta arasındaki uzaklık formülünden;

$|MK| = \frac{r}{2} \Rightarrow \sqrt{(u-a)^2 + (v-b)^2} = \frac{r}{2}$ dir.

Yukarıdaki denklemde her iki tarafın karesi alınırsa;

$(u-a)^2 + (v-b)^2 = \frac{r^2}{4}$ denklemi elde edilir. Elde edilen bu denklemden, istenilen noktalarının geometrik yerinin yine bir çember olduğu görülmektedir.

Çemberin denklemi, $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ olduğunda, gerekli işlemler yapılırsa,

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 - 1 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$$

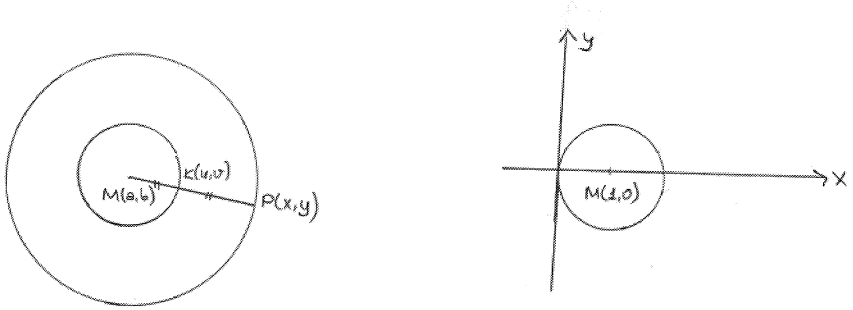
$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4 \text{ denklemi elde edilir.}$$

Bu denklem de, $(x-1)^2 + y^2 = 2^2$ şeklinde düzenlenirse, verilen çemberin merkezinin M(1,0) ve yarıçapının 2 birim olduğu görülür. O halde istenen yerin denklemi, merkezi M(1,0) ve yarıçapı 1 birim olan çember denklemidir. Böylece istenen çemberin denklemi,

$(x-1)^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$ olarak bulunur.

Bir denklemin grafiği, o denklemi sağlayan noktaların dik koordinat sisteminde geometrik olarak gösterilmesi ile elde edilir.

Dik koordinat sistemi çizmeliyim. Dik koordinat sisteminde merkezi yani M(1,0) noktasını göstermeliyim. Pergeli 1 birim açmalıyım ve iğnesini M(1,0) noktasına batırmalıyım ve bir tam açı kadar pergeli döndürmeliyim. Burada, M(1,0) noktasına 1 birim uzaklıkta bulunan noktalar, bir çember belirtirler. Yani grafiğin adı "çember" dir.



Şekil 5-5. sorunun, anahtar kavrama (P,İ,T,K) dörtlüsüne göre çizimi

5. soruya ait Problem Kümesi:

1. Bir çember nedir?
2. Bir çemberin merkezi nedir?
3. Bir çemberin yarıçapı nedir?
4. İki nokta arasındaki uzaklık nasıl bulunur?
5. Çemberin denklemi nedir?
6. Çemberin denklemi nasıl elde edilir?
7. Bir doğru parçasının orta noktası nasıl bulunur?
8. Bir denklemin grafiği ne demektir? Nasıl çizilir?

5. soruya ait İşlem Kümesi:

1. Çemberin merkezi M(a,b) ve çemberin üzerindeki nokta P(x,y) noktası ise bu noktalar arasındaki uzaklık, iki nokta arasındaki uzaklık formülünden,

$|PM| = r \Rightarrow r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ olması.

2. Çemberin denklemi, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ise çemberin merkezinin M(a,b) ve yarıçapının, r birim yarıçap olması.

3. $[PM]$nın uzunluğu r birim olduğundan orta nokta kavramı gereği $[MK]$nın uzunluğu $\frac{r}{2}$ birim olması.

4. Çemberin merkezi M(a,b) ve $[PM]$nın orta noktası K(u,v) olmak üzere, iki nokta arasındaki uzaklık formülünden;

$|MK| = \frac{r}{2} \Rightarrow \sqrt{(u-a)^2 + (v-b)^2} = \frac{r}{2}$ olması.

5. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ olan çemberin denklemi, $(x-1)^2 + y^2 = 2^2$ şeklinde düzenlenirse, verilen çemberin merkezinin M(1,0) ve yarıçapının 2 birim olması.

6. İstenen çemberin merkezi M(1,0) ve yarıçapı 1 birim ise denklemi $(x-1)^2 + y^2 = 1^2$ yani $x^2 + y^2 - 2x = 0$ olarak bulunması.

7. Dik koordinat sisteminde pergelin 1 birim açılıp, iğnesinin M(1,0) noktasına batırılmasıyla, istenen yerin grafiğinin elde edilmesi

5. soruya ait Temsil Kümesi:

1. Düzlemde sabit bir nokta işaretleme
2. Sabit noktayı M(a,b) olarak isimlendirme
3. M(a,b) merkezli bir çember çizme
4. Çember üzerinde rasgele bir nokta işaretleme
5. Rasgele noktayı P(x,y) ile isimlendirme

6. P ve M noktalarını birleştirme

7. $[PM]$ nın çemberin yarıçapı olduğunu söyleme ve yazma

8. $[PM]$nın uzunluğunu r harfi ile isimlendirme ve "$|PM| = r$" şeklinde gösterme

9. $[PM]$nın uzunluğunu iki nokta arasındaki uzaklık formülünden,

$|PM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ şeklinde yazma

10. $[PM]$nın orta noktasını işaretleme

11. $[PM]$nın orta noktasını K(u,v) ile gösterme

12. "$|PM| = r \Rightarrow |PK| = |MK| = \frac{r}{2}$" şeklinde gösterme

13. $[MK]$nın uzunluğunu iki nokta arasındaki uzaklık formülünden,

$|MK| = \frac{r}{2} \Rightarrow \sqrt{(u-a)^2 + (v-b)^2} = \frac{r}{2} \Rightarrow (u-a)^2 + (v-b)^2 = \frac{r^2}{4}$ şeklinde yazma

14. $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ denklemini, gerekli düzenlemeler yaparak, $(x-1)^2 + y^2 = 2^2$ şeklinde yazma

15. $(x-1)^2 + y^2 = 1^2$ denklemini, gerekli düzenlemeler yaparak, $x^2 + y^2 - 2x = 0$ şeklinde yazma

16. Dik koordinat düzlemi çizme

17. Düzlemde M(1,0) noktasını işaretleme

18. Pergeli 1 birim açma

19. Pergelin iğnesini M(1,0) noktasına batırma

20. Merkezi M(1,0) olan ve yarıçapı 1 birim olan çemberi çizme

5. soruya ait Kontrol Kümesi:

1. Düzlemde sabit bir M noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesi, çemberdir.

2. Düzlemde M(a,b) noktası çemberin merkezi ve P(x,y) noktası çemberin üzerinde rasgele bir nokta ise M ve P noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu yarıçaptır ve $|PM| = r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ dir.

3. Bir doğru parçasının orta noktası, doğru parçasını iki eş parçaya ayırır.

4. Bir çemberin grafiği, o denklemi sağlayan noktaların dik koordinat düzleminde geometrik olarak temsil edilmesidir.

4. BULGULAR VE YORUMLAR

Araştırmada öğrencilere yöneltilen 1. ve 2. sorular, öğrencilerin bir geometrik yer problem durumu olan "orta dikme" kavramı ile ilgili olan kavramalarını ortaya çıkarabilmek amacıyla öğrencilere yöneltilmiştir. Yine bu araştırmada yer alan 3. ve 4. sorular ise "orta dikme" kavramının kullanıldığı problem durumları olarak öğrencilere yöneltilmiştir. Son olarak, öğrencilere yöneltilen 5. soru, çember için bir "geometrik yer" problem durumudur. Bu bağlamda, öğrencilerin verdikleri cevaplar doğrultusunda ortaya konan kavramaların bulguları ve yorumları aşağıda verilmiştir.

Bu araştırmada yer alan 1. grup, Fen Lisesi öğrencileri olan, Burak ve Batuhan'dan oluşmaktadır. Diğer bir grup olan 2. grup öğrencileri olan Berre ve Meriç, 3. grup öğrencileri olan Buğra ve Güldane ise Anadolu Lisesi öğrencileridir. Kadir ve Didem ise 4. grup öğrencileridir ve Süper Liseye devam etmektedirler. Benzer şekilde, 5. grup öğrencileri olan Sercan ve Damla da Süper Lise öğrencileridir. Araştırmada yer alan son grup olan 6. grup öğrencileri Gizem ve Serkan ise Düz Lise öğrencileridir.

Bu bölümde verilen tablolarda yer almakta olan en sol sütunlar, sırasıyla 1. ,2. ,3. ,4. ve 5. sorular için oluşturulan ve anahtar kavramada yer alan problem kümesi, işlem kümesi, temsil kümesi ve kontrol kümesi elemanları, diğer sütunlar ise grupların bu problem kümesi, işlem kümesi, temsil kümesi ve kontrol kümesi elemanlarına yaklaşımlarından oluşmaktadır. "+" sembolü ile bu elemanların varlığı, "–" sembolü ile bu elemanların yokluğu kastedilmektedir.

4.1. 1.soruya ait bulgular

Tablo 1. 1. soruya ait Problem Kümesi

Anahtar Kavrama Problem Kümesi	1.grup	2.grup	3.grup	4.grup	5.grup	6.grup
1. Bir düzlem nedir?	+	+	+	+	+	+
2. Bir doğrunun parçası olmak ne demektir?	+	+	+	+	+	+
3. İki doğru parçasının uzunluklarının eşit olması ne demektir?	+	–	–	–	–	–
4. Yarıçapları eşit kesişen iki çemberin kesim noktalarının sağladığı özellikler nelerdir?	+	–	–	–	–	–
5. Bir çemberin yarıçapı nedir?	+	–	–	–	–	–
6. Üçgenlerin ikizkenar olması ne demektir?	+	–	–	–	–	+
7. Dikme ne demektir?	+	–	–	–	–	–
8. Bir doğru parçasını iki eş parçaya ayırmanın anlamı nedir?	+	+	+	+	+	+
9. Üçgenlerin eş olması ne demektir?	–	–	–	–	–	–
10. Üçgenlerdeki eşlik teoremlerinden K.A.K. teoremi neyi iddia etmektedir?	–	–	–	–	–	–
11. İki açının eş olması ne demektir?	–	–	–	–	–	–

Tablo 1 e bakıldığında, $P_{1.1}$, $P_{1.2}$ ve $P_{1.8}$ problem cümleleri, ortak olarak tüm gruplarda gözükmektedir. Bunun nedeninin de 1. soru içinde "*düzlem*", "*doğru parçası*" ve "*eşit uzaklıkta olma* " kavramlarının kullanılmasından kaynaklandığı gözlemlenmiştir. Bütün gruplar, kağıt üzerinde çalıştıkları için $P_{1.1}$, problem cümlesine sahip oldukları ve yine grupların hepsi bir doğru parçası çizdikleri için, $P_{1.2}$ problem cümlesine ve bu doğru parçasının iki eşit parçaya ayrıldığını gösterdikleri için de $P_{1.8}$ problem cümlesine sahip oldukları düşünülmektedir. $P_{1.3}$, $P_{1.4}$, $P_{1.5}$, $P_{1.6}$, $P_{1.7}$ ve $P_{1.8}$ problem cümleleri ise sadece 1.grupta yer almaktadır. 1.gruba ait:

> "*M_1 ve M_2 noktaları olacak, şu uzunluklar* [düzlemde seçilen bir noktayı, M_1 ve M_2 noktalarına birleştiren doğru parçalarının uzunlukları] *eşit olacak.* […] *ikizkenar üçgen oluşturacağız.*"

cümlesi analiz edildiğinde, öğrencilerin $P_{1.1}$, $P_{1.2}$ ve $P_{1.3}$ problemlerinin olduğu görülmektedir. İkizkenar üçgen oluşturdukları için, $P_{1.6}$ problem cümlesine sahip oldukları araştırmacı tarafından düşünülmektedir. Yine benzer şekilde 1. gruba ait:

> *"*[…] *şöyle dik olacak. Bu diki* [düzlemde rasgele işaretlenen bir noktadan, $[M_1M_2]$nın indirilen dikmeyi] *indirdiğimizde şuralar eşit olacak.* [$[M_1M_2]$nın iki eş parçaya ayrılacak]"

cümlesi incelendiğinde, 1. grubun, $P_{1.7}$ ve $P_{1.8}$ problem cümlelerine sahip olduğu görülmektedir. Son olarak yine 1. gruba ait:

> *"İki tane çember çizeceğiz.* [Yarıçapı] *3 cm olsun* [pergelin açıklığı 3cm] *Şöyle bir çember çizeceğiz."*

cümlesinden de anlaşıldığı üzere, eşit yarıçaplı iki çember çizdiklerinden $P_{1.4}$ ve $P_{1.5}$ problem cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir.

Yukarıdaki Tablo 1 incelendiğinde, 2. grubun $P_{1.1}$, $P_{1.2}$ ve $P_{1.8}$ problem cümlelerine sahip olduğu düşünülmektedir. Bu görüşü destekleyen cümle aşağıda verilmiştir:

> *"Şimdi bunun* [$[AB]$nın] *ortasından çizdiğimiz zaman, eşit uzaklıktaki noktaları bulabiliriz. ve hepsi aynı doğru parçası üzerinde olur.. Şurası ortası olsun... Bu eşit uzaklıktaki noktaların hepsi bu doğru parçası üzerinde olur."*

Ayrıca bu gruba ait diğer ifade:

> *"Diktir.* [$[AB]$nın orta noktasından çizilen doğru, $[AB]$na diktir.]"

olarak görülmektedir ve buradaki problem cümlesi ise, aşağıdaki gibi olarak belirlenmiştir:

" İki doğrunun dik kesişmesi ne demektir?"

3. gruptaki öğrencilerin, soruyu çözme süreçlerini gözlemleyen araştırmacının topladığı verilerin ve onların sormuş olduğu aşağıdaki soru yardımıyla:

"Buradan [[AB]nın orta noktası] *başka ne olabilir?"*

$P_{1.1}$, $P_{1.2}$, ve $P_{1.8}$ problem cümleleri belirlenmiştir.

Yine bir diğer grup olan 4. grup için $P_{1.1}$, $P_{1.2}$, ve $P_{1.8}$ problem cümlelerinin varlığı aşağıdaki cümleden anlaşılmaktadır:

"Her ikisine de [A ve B noktaları] *eşit uzaklıktaysa bu doğru parçasının* [[AB]nın] *orta noktası olmuyor mu?... Doğru parçasının orta noktası olur."*

4.grubun bu problem cümlelerinin dışında:

" İki doğrunun dik kesişmesi ne demektir?"

problem cümlesine de sahip oldukları görülmüştür. Bu problem cümlesi, aşağıda verilen öğrenci görüşüne dayanmaktadır:

"Bence doğrunun tam ortasından geçen dik bir doğrunun üzerinde bulunan noktalardır..."

5.grup göze alındığında $P_{1.1}$, $P_{1.2}$ ve $P_{1.8}$ problem cümlelerinin varlığının anlaşıldığı cümle şu şekilde belirtilmiştir:

"Bu iki uca da [A ve B noktaları]*eşit uzaklıkta olması için şuradan* [[AB] nin orta noktasından] *bir* [dik] *doğru çizeceğiz.*"

Yine bu cümle ile birlikte öğrencilerin:

" İki doğrunun dik kesişmesi ne demektir?"

problem cümlesine sahip oldukları görülmektedir. Ayrıca sahip oldukları bir başka problem cümlesi:

"Bir üçgenin hipotenüsü ne demektir?"

olarak belirlenmiştir. Bu problem cümlesinin yer aldığı ifade ise aşağıda verilmiştir:

"Böyle buradan [[AB]nın orta noktasından çizilen ve [AB]na dik olan doğru üzerindeki bir noktadan uç noktalara] *çizdiğimizde elde ettiğimiz doğrular* [doğru parçaları] *bir üçgenin hipotenüsü olacak."*

Tablo 1 de bulunan son grup olan 6. grup için aşağıdaki konuşma incelenerek:

*"*Gizem: [Problemde istenen]*Orta noktadır bence..*

Serkan: *Uç noktalarına aynı mı?*

Gizem: *Hı hı.. uç noktalarına eşit uzaklıkta..*

Serkan: *Evet.. doğru..*

Gizem: *Şöyle yaparsak ta* [[AB]nın orta noktasından geçen dik doğru çizilirse] *yine aynı* [uzaklıkta] *olur. Dik çünkü... Şöyle yaparsak* [[AB]na dik doğru üzerindeki bir nokta A ve B noktalarıyla birleştirilirse] *ikizkenar üçgen gibi olur."*

bu grubun $P_{1.1}$, $P_{1.2}$ ve $P_{1.8}$ problem cümleleri belirlenmiştir. Yine bu konuşmada, 6. grubun $P_{1.6}$ problem cümlesi görülmektedir. Ayrıca bu grubun:

" İki doğrunun dik kesişmesi ne demektir?"

problem cümlesine sahip olduğu, yukarıda verilen konuşmada görülmektedir.

Tablo 2. 1. soruya ait İşlem Kümesi

Anahtar Kavrama İşlem Kümesi	1.grup	2.grup	3.grup	4.grup	5.grup	6.grup
1.P ve Q yayların kesim noktaları olmak üzere $\|AP\|, \|AQ\|, \|BP\|$ ve $\|BQ\|$ yarıçaplar olduğundan P ve Q noktalarının, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta oluşu.	+	–	–	–	–	–
2. $\|AP\| = \|AQ\|$ ise $\overset{\Delta}{PAB}$ üçgeni ikizkenar üçgendir.	–	–	–	–	–	–
3. $\|BP\| = \|BQ\|$ ise $\overset{\Delta}{QAB}$ üçgeni ikizkenar üçgendir.	–	–	–	–	–	–
4. $\overset{\Delta}{PAB}$ üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan P ve Q noktalarından geçen doğrunun $[AB]$nı iki eş parçaya ayırması.	–	–	–	–	–	–
5. $\overset{\Delta}{PAB}$ üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan PQ doğrusunun $[AB]$na dik olması.	–	–	–	–	–	–
6. $\overset{\Delta}{PAB}$ üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan $\overset{\Delta}{PAH} \cong \overset{\Delta}{PBH}$ dir.	–	–	–	–	–	–
7. PQ doğrusu üzerinde, P, Q ve H noktalarından farklı seçilen her R noktası. için $\overset{\Delta}{RAH}$ ve $\overset{\Delta}{RBH}$ üçgenlerinin K.A.K. teoreminden eş üçgenler olması.	–	–	–	–	–	–
8. $\overset{\Delta}{RAH} \cong \overset{\Delta}{RBH} \Rightarrow \|RA\| = \|RB\|$	–	–	–	–	–	–
9. $R \notin PQ \Rightarrow \hat{RAH}$ ve $\hat{RBH}$ açıları eş değildir.	–	–	–	–	–	–
10. $\hat{RAH}$ ve $\hat{RBH}$ açıları eş değil ise $\|RA\| \neq \|RB\|$ dir.	–	–	–	–	–	–

Tablo 2 incelendiğinde, 1. grup dışındaki bütün gruplar, $[AB]$nın orta dikmesini bulmaya çalışırken anahtar kavramada belirtilen işlem cümlelerinden hiçbirini kullanmadıkları görülmüştür. Aşağıda verilen cümle 1.gruba aittir:

> *"*M_1 *ve* M_2 *noktaları olacak, şu uzunluklar* [düzlemde seçilen bir noktayı, M_1 ve M_2 noktalarına birleştiren doğru parçalarının uzunlukları] *eşit olacak.* […] *ikizkenar üçgen oluşturacağız."*

Yukarıda verilen cümlede, grup Tablo 2 de yer almayan bir işlem cümlesi oluşturmuşlardır. Buradaki işlem cümlesini aşağıdaki gibi ifade etmenin mümkün olduğu düşünülmektedir:

> "Düzlemde işaretlenen nokta, M_1 ve M_2 noktalarıyla birleştirilirse oluşan şeklin bir ikizkenar üçgen olması."

Benzer şekilde, yine 1.gruba ait:

> *"*[…] *şöyle dik olacak. Bu diki* [düzlemde rasgele işaretlenen bir noktadan, $[M_1M_2]$na indirilen dikmeyi] *indirdiğimizde şuralar eşit olacak.* [[M_1M_2]nın iki eş parçaya ayrılacak] *Dolayısıyla şu noktayı* [düzlemde rasgele işaretlenen noktayı] *bulacağız. Şu noktadan* [düzlemde rasgele işaretlenen noktadan] *bir dik çıkaracağız. Şu doğru* [rasgele işaretlenen noktayla $[M_1M_2]$nın orta noktasından geçen doğru] *bizim istediğimiz doğru olacak."*

cümlesi göz önüne alındığında, burada ifade edildiği düşünülen işlem cümlesinin de Tablo 2 de yer almayan bir işlem cümlesi olduğu düşünülmektedir. Araştırmacı tarafından, bu işlem cümlesini aşağıdaki gibi ortaya konulabileceği belirtilmiştir:

> "Oluşan üçgen ikizkenar olduğundan, düzlemde işaretlenen noktadan $[M_1M_2]$na indirilen dikmenin, $[M_1M_2]$nı iki eş parçaya ayırması."

1.grubun aşağıdaki cümlesinde de bir işlem cümlesi bulundurdukları düşünülmektedir:

"Batuhan: İşte o [düzlemde rasgele işaretlenen noktayı] *noktayı bulmak içinde bir tane iki tane çember çizeceğiz.* [Yarıçapı] *3 cm olsun* [pergeli açıklığı 3cm] *Şöyle bir çember çizeceğiz.* [M_2 merkezli] *Aynı şekilde buraya da çizeceğiz* [M_1 merkezli]

Burak: Kesim noktalarını [M_1 ve M_2 merkezli çemberlerin kesim noktalarını] *birleştireceğiz..*

Batuhan: Kesim noktalarını [M_1 ve M_2 merkezli çemberlerin kesim noktalarını] *birleştireceğiz.. Kesim noktalarını birleştirdiğimiz zaman işte eş çemberlerin özelliğinden bunlar* [M_1 ve M_2 noktaları] *şey olduğu için.. merkez olduğu için şurayı* [çemberlerin kesim noktaları ile [$M_1 M_2$]nı] *birleştirdiğimizde burası buraya* [çemberlerin kesim noktasını birleştiren doğru ile [$M_1 M_2$]] *dik olacak. Şurasıyla şurası eşit olacak.* [Çemberlerin kesim noktasıyla, M_1 ve M_2 noktalarını birleştiren doğru parçalarının yani yarıçapların eşitliği] *Dolayısıyla şuradan çıktığımız dik işte şu doğru.. bizim istediğimiz noktalar olur."*

Yukarıda öğrencilerin yaptıkları açıklamada, yine Tablo 2 de yer alan bir işlem cümlesine rastlanılmadığı düşünülmektedir. Bu açıklamada öğrencilerin kullandığı işlem cümlesinin:

"Eş çemberlerin kesim noktaları birleştirilirse, eş çemberlerin özelliğinden çemberlerin kesim noktalarını birleştiren doğrunun [$M_1 M_2$]na dik olması ve [$M_1 M_2$]nı iki eş parçaya ayırması."

olduğu araştırmacı tarafından düşünülmektedir.

Gözlemlenen bir diğer grup olan 2. grubun, 1.soruyla ilgili işlem cümlesi kullanmadıkları düşünülmektedir. Soruyla ilgili bu gruba ait açıklama aşağıda verilmiştir:

"Şimdi bunun [[AB]nın] *ortasından çizdiğimiz zaman, eşit uzaklıktaki noktaları bulabiliriz. ve hepsi aynı doğru parçası,* [doğru] *üzerinde olur.. Şurası* [[AB]nın] *ortası olsun... Bu eşit uzaklıktaki noktaların hepsi bu doğru parçası* [doğru] *üzerinde olur."*

2. grubun, 1.soru için yaptıkları açıklama incelendiğinde, öğrencilerin her hangi bir işlem cümlesi kullanma gereği duymaksızın [AB]na eşit uzaklıkta bulunan noktaların yerini belirttikleri gözlemlenmiştir. Grup, istenen noktaların yerini sezgisel olarak belirttikten sonra istenen noktaların neden [AB]na dik olan ve [AB]nın orta noktasından geçen bir doğru olduğunu açıklamaya çalıştıkları düşünülmektedir:

"Diktir. [[AB]nın orta noktasından çizilen doğru,[AB]na diktir.] *Çünkü dik olmazsa böyle çizdikmi* [[AB] ile [AB]nın orta noktasından çizilen doğrunun dik açıdan farklı bir açı yapması durumunda] *eşit olmaz. Mesela şuraya C dedik mi* [[AB]nın orta noktasından çizilen dik doğru üzerinde bir nokta] *AC, CB ye eşit olmaz. Burası* [[AB] ile [AB]nın orta noktasından geçen doğrunun kesim noktası] *dik olamazsa."*

Öğrencilerin yukarıda verilen ifadelerinde, bir işlem cümlesi kullandıkları düşünülmektedir ve işlem cümlesi şu şekildedir:

"Çizilen doğru, [AB]na dik değilse, doğru üzerinde bulunan bir C noktasının, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olmaması."

Ayrıca 2.grup, sorunun çözümüyle ilgili olmayan fakat elde ettikleri çizim özellikleri ile ilgili olan düşüncelerini belirttikleri gözlemlenmiştir. Bunlardan birisi:

> "[[AB]nın orta noktasından çizilen ve [AB]na dik olan doğru üzerindeki her nokta] *İkizkenar üçgen oluşturuyor her yerde."*

şeklindedir. Belirtilen bu düşünce yardımıyla araştırmacı, aşağıdaki işlem cümlesinin öğrenciler tarafından kullanıldığını düşünmektedir:

> "Çizilen doğru üzerinde işaretlenen noktalar A ve B noktaları ile birleştirilirse ikizkenar bir üçgenin oluşması."

Benzer şekilde öğrencilerin çizdikleri şekil ile ilgili bir başka fikri şöyledir:

> *"Ben şöyle düşündüm. Bunların oluşturduğu doğrunun* [[AB]nın orta noktasından çizilen ve [AB]na dik olan doğrunun] *eğimi şunun* [[AB]nın] *eğimleri çarpımı -1 falan."*

Bu cümle incelendiğinde bir işlem cümlesi:

> "Çizilen doğru ile [AB] birbirine dik olduğundan eğimleri çarpımı -1 dir."

olarak görülmektedir. Burada belirtilen işlem cümlesinin, analitik geometri bilgisi ile ilgili olduğu düşünülmektedir. Yine analitik geometri bilgisiyle ilgili olan bir başka düşüncelerinden bahsedilecek olunursa:

> *"Eğer analitik düzlemde olsaydı şu* [[AB]], *x yönünde olsaydı y de şu* [[AB]nın orta noktasından çizilen ve [AB]na dik olan doğru] *yönde, bu* [[AB]nın orta noktasından çizilen ve [AB]na dik olan doğru] *y eşittir bir sayı doğru olur yani."*

bu ifade de olduğu düşünülen işlem cümlesi:

"Çizilen doğru ve [AB] dik koordinat sistemindeki doğrular olarak alınırsa çizilen doğrunun denkleminin y = b şeklinde olması."

Tablo 2 ye 3.grup için bakıldığında bu grubun, anahtar kavrama işlem cümlelerinden hiç birine sahip olmadıkları görülmektedir. 3.gruptaki öğrenciler arasında geçen konuşma aşağıda verilmiştir:

"Güldane: Buradan başka [[AB]nın orta noktasından çizilen doğrudan başka] *ne olabilir?*

Buğra: Orta nokta olduğunu göstersene..

Güldane: Bu yerin özelliklerinden bahsedecektik. Bu da bir doğrudur."

3. grubun, 1. sorunun çözümü için düşüncelerini sezgisel olarak ifade ettikleri düşünülmektedir. Bu sorunun çözümü sırasında, herhangi bir işlem cümlesi kullanmadıkları gözlemlenmiştir. [AB]nın orta noktasından çizilen doğrunun, neden A ve B noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktaların yeri olduğunu da açıklamamışlardır.

Bunun yanında, 3. grup öğrencileri, soruda istenen çözümün dışında oluşan şekille ilgili özellikleri şöyle belirtmişlerdir:

"Buğra: Bir doğru oluşturur. Üçgen oluşturur. Üçgenin kenarları da tabanın yarısı kadardır.

Güldane: Bunun uzunlukları [[AB]nın orta noktasından çizilen doğru üzerindeki noktaların A ve B noktalarına olan uzunlukları] *hep değişir ki. Yani şöyle giderse* [[AB]nın orta noktasından çizilen doğru üzerinde farklı noktalar] *her zaman değişir ki."*

Çizilen şeklin tamamı ile ilgili Buğra'nın "*Üçgenin kenarları da tabanın yarısı kadardır.*" şeklindeki düşüncesine, Güldane'nin verdiği cevapta, aşağıdaki işlem cümlesi yer aldığı düşünülmektedir:

> "[AB]nın orta noktasından çizilen doğru üzerinde farklı noktalar seçilirse, bu noktaların her birinin [AB]nın orta noktasına farklı uzaklıklarda olması."

Tablo 2, 4. grup göz önüne alınarak incelendiğinde yine sorunun çözümü için işlem cümleleri kullanmadıkları görülmektedir. Soruda istenen noktaların, [AB]nın orta noktasından geçen ve [AB]na dik olan doğru üzerindeki noktalar oluşunu açıklama yapmadan belirtmişlerdir. Aşağıda da, bu gruptaki öğrencilerin arasında geçen ve soruda istenen noktaları belirttikleri konuşma verilmiştir:

> *"Didem: Her ikisine de* [A ve B noktaları] *eşit uzaklıktaysa bu doğru parçasının* [[AB]nın] *orta noktası olmuyor mu? Doğru parçasının orta noktası olur.*
>
> *Kadir: Iıuı... Bakıyoruz... uç noktalarının her ikisine de eşit uzaklıkta bulunan... Yooo... Bence doğrunun* [[AB]nın] *tam ortasından geçen dik bir doğrunun üzerinde bulunan noktalardır."*

4.gruptaki öğrenciler, hiçbir işlem cümlesi kullanmadan belirledikleri doğrunun neden [AB]na dik olduğunu açıklamaya çalıştıkları gözlemlenmiştir. Öğrenciler arasında:

> *"Didem: Sorunun başka bir yerinde olsaydı* [nokta, [AB]nın tam ortasından geçen dik bir doğrunun üzerinde olmasaydı].. *Yani farklı uzaklıklarda olurdu...Ya.. Sayı vererek yaparsak.. Dik üçgenden.. 5.. 12... 13 falan... İfade edilebilir.. Buraya* [doğru üzerindeki nokta, A ve B noktalarına] *eşit uzaklıkta.. Buraya* [A ve B noktaları [AB]nın orta noktasına] *5 birim*

uzaklıkta.. Öyle yani... Zaten burası noktalar kümesi değil mi? Onun için... Aynı uzaklıkta olan noktaların oluşturduğu doğru. [[AB]nın tam ortasından geçen doğrunun [AB]na] *Dik olmasının sebebi.. Eğer dik olmasaydı başka bir açıyla olsaydı farklı uzaklıklarda olurdu... Yani..*

Kadir: Zaten çokta mantıklı bir çizim oldu. Tam ortasındaki doğru üzerindeki.. tamda ortasında olacaktır. Ama [eşit uzaklıkta olan noktalar] *doğrunun üstünde olmadıysa yani.. tam dik bir doğru olarak geçecek.. çünkü dik olmasa açı sapması olurdu bu sefer.. Yani..*"

şeklinde bir konuşma geçmiştir. Burada öğrencilerin kullandığı düşünülen işlem cümlelerinden birisi aşağıda verilmiştir:

"Seçilen nokta, [AB]nın orta noktasından geçen dik bir doğrunun üzerinde değilse, seçilen nokta A ve B noktalarına farklı uzaklıklarda olması."

Yine öğrencilerin, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktalardan oluşan doğrunun [AB]na dik olmasını açıklarken kullandıkları düşünülen bir başka işlem cümlesi de:

"Çizilen doğru, [AB] ile dik açıdan farklı bir açı yaparsa doğru üzerindeki noktaların A ve B noktalarına farklı uzaklıklarda olması."

olarak ifade edilebilir.

5. grup için Tablo 2 değerlendirildiğinde, bu grubun da sorunun çözüm aşamasında kullanılması gereken işlem cümlelerinden hiçbirinin kullanılmadığı görülmüştür:

"Her ikisine eşit uzaklıkta bulunan noktalar..Bence bu doğruya [[AB]na] *dik olan bir doğru çizeceğiz.Bu iki uca da* [A ve B noktalarına da] *eşit uzaklıkta olması için şuradan* [[AB]nın orta noktasından] *bir doğru çizeceğiz ve de o doğru üzerinde bulunan her nokta bu iki uca da* [A ve B noktalarına da] *eşit uzaklıkta."*

Yukarıdaki ifade de, sadece [AB]nın orta noktasından geçen ve [AB] na dik olan doğrunun, soruda istenen noktaların yeri olduğu belirtilmektedir. Fakat bu noktaların yeri belirlenirken, hangi nedenlerle bir doğrunun elde edildiği öğrenciler tarafından açıklanmamıştır. 5. gruptaki öğrenciler arasında şöyle bir konuşma geçmiştir:

"Sercan: Eğer dik olmasaydı uzunluklar eşit olmazdı. İki..A ve B noktalarına olan eşit olmazdı..

Damla: O zaman [[AB]nın orta noktasından çizilen ve [AB]na dik olan doğru üzerindeki bir noktanın, uç noktalara olan uzaklıklarından] *biri A ya yakın olurdu, biri B ye yakın olurdu.*

Sercan: Böyle buradan [[AB]nın orta noktasından çizilen ve [AB]na dik olan doğru üzerindeki bir noktadan uç noktalara] *çizdiğimizde elde ettiğimiz doğrular* [doğru parçaları] *bir üçgenin hipotenüsü olacak.* [Doğruyu, üçgenin bir kenarının] *Ortasından çizdiğimiz için kenarlar eşit.. Yükseklik... Yükseklik demeyelim.. O zaman şu orta kenar da* [oluşan iki dik üçgenin ortak kenarı da] *eşit.. O zaman hipotenüs.. eşit olur.."*

Verilen konuşma boyunca öğrenciler, çizilen doğrunun [AB]na dik oluşunu açıklamaya çalıştıkları gözlemlenmiştir. Öğrencilerin, dikliği açıklamak için kullandıkları işlem cümlelerinden birisi şöyledir:

"Çizilen doğru [AB]na dik olmazsa doğru üzerinde alınan noktaların A ve B noktalarına uzaklıklarının eşit olmaması."

Benzer şekilde, çizilen dik doğru üzerindeki noktaların neden uç noktalara eşit uzaklıkta olduğunu aşağıdaki işlem cümlesiyle ortaya koydukları düşünülmektedir:

"İki dik üçgenin dik kenarları birbirine eşitse, bu üçgenlerin hipotenüslerinin de birbirine eşit olması."

Tablo 2, 6. grubun da yine 2., 3., 4. ve 5. gruplar gibi bir işlem kümesine sahip olmadığını söylemektedir. Bu gruptaki öğrenciler arasında geçen bir konuşma aşağıda yer almaktadır:

"Gizem: [Problemde istenen]*Orta noktadır bence..*
Serkan: Uç noktalarına aynı mı?
Gizem: Hı hı.. uç noktalarına eşit uzaklıkta..
Serkan: Evet.. doğru..
Gizem: Şöyle yaparsak da [[AB]na dik olan ve [AB]nın orta noktasından geçen doğru çizilirse] *yine aynı* [uzaklıkta] *olur. Dik çünkü... Şöyle yaparsak* [[AB]na dik doğru üzerindeki bir nokta A ve B noktalarıyla birleştirilirse] *ikizkenar üçgen gibi olur. Yine mesela yani... Bu doğru tamamen uç noktalara uzaktır.*
Serkan: Kenarortay... Açıortay... Yükseklik...
Gizem: Hı hı. Bu doğrunun üzerindeki tüm noktalar o noktadır.."

Bu konuşmada Gizem, [AB]na dik olan ve [AB]nın orta noktasından geçen doğrunun, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olan noktaların yeri olduğunu, sezgisel olarak söylediği düşünülmektedir. Soruda istenen noktaların, [AB]na dik olan ve [AB]nın orta noktasından geçen doğru üzerindeki noktalar oluşunun nedenlerini

belirtmeden ifade ettikleri gözlemlenmiştir. Bunun dışında, çizilen doğrunun [AB]na dik oluşunu aşağıdaki işlemle açıklamaya çalıştığı düşünülmektedir:

> "Çizilen doğru üzerindeki bir nokta, A ve B noktalarına birleştirildiğinde ikizkenar üçgen oluştuğundan, çizilen doğrunun [AB]na dik olması."

şeklinde işlem cümlesi kullandığı düşünülmektedir. Ayrıca öğrenciler çizdikleri şeklin özelliklerini sıralamışlardır. Sıraladıkları özelliklerden biri ile ilgili olarak, aşağıda öğrenciler arasında geçen bir konuşma yer almaktadır:

> *"Serkan:* [Oluşan ikizkenar üçgenin, [AB] nin orta noktasından çizilen doğru üzerindeki açısının açıortayı]*45... 45...*
>
> *Gizem: Bence 45 değil... Nerden biliyoruz? Belki 30 30...*
> *Serkan:...*
> *Gizem: Yani olabilir..Mesela şurası* [A,B noktaları ve doğru üzerinde alınan bir noktanın köşelerini oluşturduğu ikizkenar üçgende, [AB]na çizilen dikme ile oluşan üçgen] *ikizkenar olsa bu da* [A,B noktaları ve doğru üzerinde alınan bir noktanın köşelerini oluşturduğu ikizkenar üçgende, [AB]na çizilen dikme ile oluşan diğer üçgen] *ikizkenar üçgen gene. Bu açı* [ikizkenar üçgenin A açısı] *45 ise bu açıda* [ikizkenar üçgenin B açısı] *45 dir diyeceksin. Yani bilemezsin* [açıortayın] *45 olduğunu...*
> *Serkan: Doğru..."*

Burada Serkan 'ın "*45 45*" demesi üzerine Gizem'in,

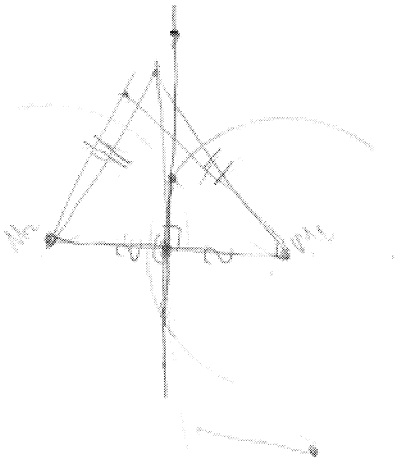
> "Çizilen doğrunun üzerinde alınan noktanın [AB]na uzaklığı [AB]nın ayrılan iki eş parçasının uzunluğuna eşitse açıortayların 45^0, 45^0 oluşu."

işlem cümlesini kullandığı gözlemlenmiştir.

Tablo 3. 1.soruya ait Temsil Kümesi

Anahtar Kavrama Temsil Kümesi	1.grup	2.grup	3.grup	4.grup	5.grup	6.grup
1.Bir doğru parçası çizme	+	+	+	+	+	+
2.Doğru parçasının uç noktalarını A ve B ile isimlendirme	+	+	+	+	+	+
3.Pergel yardımıyla A ve B merkezli çember yayları çizme	+	–	–	–	–	–
4. Çizilen eş çemberlerin kesim noktalarını P ve Q harfleriyle isimlendirme	–	–	–	–	–	–
5.A ve B noktalarını, P ve Q noktaları ile birleştirme	–	–	–	–	–	–
6. $\|AP\|, \|AQ\|, \|BP\|$ ve $\|BQ\|$ uzunluklarının yarıçap olduğunu belirtme	–	–	–	–	–	–
7. Yarıçap uzunluklarının birbirine eşit olduklarını sembollerle gösterme ve r harfiyle gösterme	–	–	–	–	–	–
8.PAB ve QAB üçgenlerini sırasıyla, $\overset{\Delta}{PAB}$ ve $\overset{\Delta}{QAB}$ ile gösterme	–	–	–	–	–	–
9. $\overset{\Delta}{PAB}$ ve $\overset{\Delta}{QAB}$ nin ikizkenar olduklarını belirtme	–	–	–	–	–	–
10.P noktasından $[AB]$na dikme çizme	+	–	–	–	–	–
11. Dikliği sembollerle gösterme	+	+	–	+	+	+
12. $[AB]$nın iki eş parçaya +ayrıldığını sembollerle gösterme	+	+	+	+	+	+
13. $[AB]$nın orta noktasını H harfi ile isimlendirme	–	–	–	–	–	–
14. $[PH] \perp [AB]$ ifadesini yazma	+	–	–	–	–	–
15. $\|AH\| = \|HB\|$ eşitliğini yazma	–	–	–	–	–	–
16.PQ doğrusu üzerinde bir R noktası seçme	–	–	–	–	–	–
17.PQ doğrusu üzerinde seçilen R noktası için $\|RA\| = \|RB\|$ eşitliğini kullanma	–	–	–	–	–	–

Tablo 3, grupların kullandıkları temsil cümlelerini ifade etmektedir. Bütün grupların $T_{1.1}$, $T_{1.2}$, ve $T_{1.12}$, temsil cümlelerine sahip oldukları ve 3.grup dışındaki diğer grupların da $T_{1.12}$ temsil cümlesine sahip oldukları, Tablo 3 incelendiğinde görülmektedir. Bu temsil cümlelerinin bütün gruplarda görülmesinin, 1. soru içinde "*AB doğru parçası*" ve "*eşit uzaklıkta olma* " kavramlarının kullanılmasından kaynaklandığı, araştırmacı tarafından düşünülmektedir. Aşağıda 1. gruba ait çizim verilmiştir:



Şekil 6- 1. grubun 1. soruya ait çizimi

Şekil 6 dan da görüldüğü gibi, öğrenciler doğru parçasının uç noktalarını A ve B harfleri yerine M_1 ve M_2 harflerini kullanmıştır. Tabloda yer almayan diğer temsil cümleleri şöyledir:

"Düzlemde bir nokta belirleme
Düzlemde seçilen nokta ile M_1 ve M_2 noktalarını birleştirme
İki doğru parçasının uzunluklarının birbirine eşit olduğunu sembollerle gösterme
İki doğruyu dik kesiştirme"

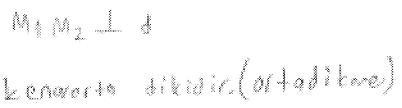
Düzlemde işaretlenen noktadan $[M_1 M_2]$na dikme çizdikleri için, 1. grubun $T_{1.10}$ temsil cümlesine sahip olduğu görülmektedir. M_1 ve M_2 merkezli ve 3 cm yarıçapında eş çemberler çizdiklerinden, $T_{1.3}$, temsil cümlesi bu grubun temsil kümesinde yer almaktadır. Ayrıca, gruba ait:

"Kesim noktalarını [M_1 ve M_2 merkezli çemberlerin kesim noktalarını] *birleştireceğiz..."*

açıklamasından anlaşıldığı üzere 1. grubun:

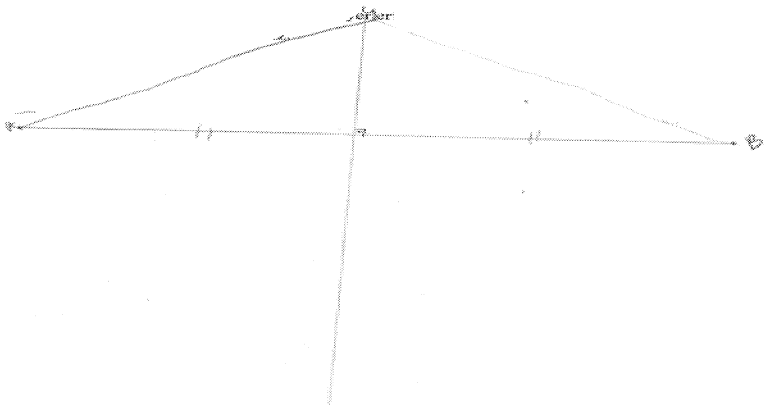
"Eş çemberlerin kesim noktalarını birleştirme"

temsil cümlesine de sahip oldukları düşünülmektedir. Yine tabloya bakıldığında, bu grubun $T_{1.14}$ işlem cümlesini kullandıkları gözlemlenmiştir. Fakat öğrencilerin yazdıklarına bakıldığında:



"$M_1 M_2$" gösterimiyle "$M_1 M_2$ doğru parçası" nı yani "$[M_1 M_2]$" kastettikleri düşünülmektedir.

Tablo 3 de verilen temsil cümlelerine bakıldığında, 2. grubun $T_{1.1}$, $T_{1.2}$, $T_{1.11}$ ve $T_{1.12}$ temsil cümlelerine sahip oldukları görülmektedir:



Şekil 7- 2. grubun 1. soruya ait çizimi

Ayrıca, Şekil 7 de verilen 2. gruba ait çizim göz önüne alındığında, bu grubun aşağıdaki temsil cümlelerini de kullandıkları düşünülmektedir:

"Doğru parçasının orta noktasını işaretleme

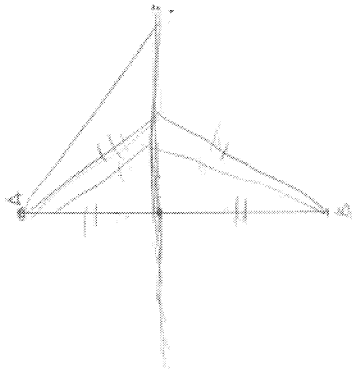
Doğru parçasının iki eş parçaya ayrıldığını sembollerle gösterme

Doğru parçasına dik bir doğru çizme

Doğru üzerinde bir C noktası işaretleme

C noktasını, A ve B noktalarıyla birleştirme"

Benzer şekilde, 3. grubun çizimi incelendiğinde $T_{1.1}$, $T_{1.2}$, ve $T_{1.12}$ temsil cümleleri görülmektedir:



Şekil 8- 3. grubun 1. soruya ait çizimi

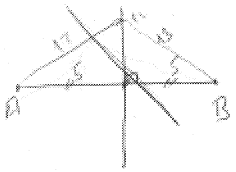
Tablodaki gruplardan farklı olarak, Şekil 8 den de görüldüğü gibi 3. grup $T_{1.11}$ temsil cümlesini kullanmamışlardır. Bunun yanında, kullanılan diğer temsil cümlelerinin şu şekilde olduğu düşünülmektedir:

"Doğru parçasının orta noktasını işaretleme

Doğru parçasının iki eş parçaya ayrıldığını sembollerle gösterme

Doğru parçasının orta noktasından geçen bir doğru çizme"

4. grubun çizimi Şekil 9 da verilmiştir:



Şekil 9- 4. grubun 1. soruya ait çizimi

Bu grubun Tablo 3 de belirtilen $T_{1.1}$, $T_{1.2}$, $T_{1.11}$ ve $T_{1.12}$ temsil cümlelerinin yanında:

"Doğru parçasının orta noktasını işaretleme

Doğru parçasının orta noktasından dik bir doğu çizme

Doğru üzerinde bir nokta belirleme

Doğru üzerinde alınan noktayı A ve B noktaları ile birleştirme

Oluşan dik üçgenin dik kenarlarına 5 ve 12, hipotenüsüne de 13 yazma

Doğru parçasının orta noktasından geçen ve doğru parçasıyla 90^0den farklı bir açı yapan doğruyu çizme"

temsil cümlelerini de kullandıkları Şekil 9 incelendiğinde görülmektedir.

5. grup Tablo 3 de verilen $T_{1.1}$, $T_{1.2}$, $T_{1.11}$ ve $T_{1.12}$ temsil cümlelerine sahip oldukları gözlemlenmiştir.

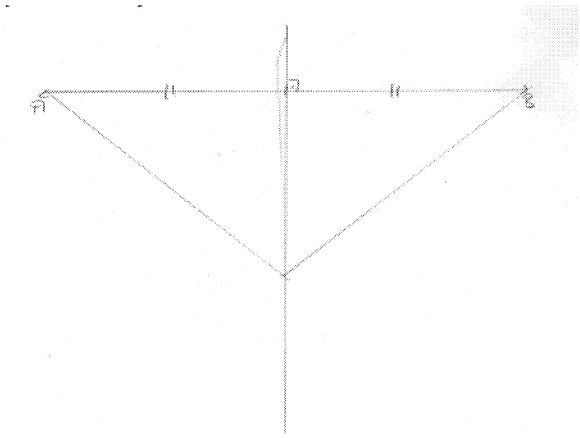
"Doğru parçasının orta noktasını işaretleme

Doğru parçasının orta noktasından dik bir doğu çizme

Doğru üzerinde bir nokta belirleme

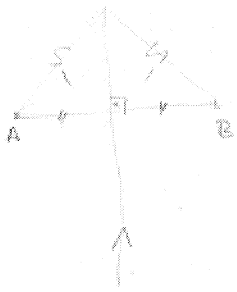
Doğru üzerinde alınan noktayı A ve B noktaları ile birleştirme"

Şekil 10 a bakıldığında bu grubun elde ettiği çizim yardımıyla, yukarıda yer alan temsil cümlelerinin 5.gruba ait olduğu düşünülmektedir:



Şekil 10-5. grubun 1. soruya ait çizimi

İncelenecek son grup 6. grup olmakla birlikte, bu grubun da $T_{1.1}$, $T_{1.2}$, $T_{1.11}$ ve $T_{1.12}$ temsil cümlelerini kullandıkları görülmektedir. 6. gruba ait çizim aşağıda yer almaktadır:



Şekil 11-6. grubun 1. soruya ait çizimi

Yine öğrencilerin yaptıkları çizim incelendiğinde:

"Doğru parçasının orta noktasını işaretleme
Doğru parçasının orta noktasından dik bir doğu çizme
Doğru üzerinde birkaç nokta belirleme
Doğru üzerinde alınan noktaları A ve B noktaları ile birleştirme
İkizkenar üçgen oluştuğunu belirtme"

temsil cümlelerine sahip oldukları görülmektedir.

Tablo 4. 1.soruya ait Kontrol Kümesi

Anahtar Kavrama Kontrol Kümesi	**1.grup**	**2.grup**	**3.grup**	**4.grup**	**5.grup**	**6.grup**
1.İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.	+	+	+	+	+	+
2.Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar bir çember belirtir.	+	–	–	–	–	–
3.Çemberin herhangi bir parçası "yay"dır.	–	–	–	–	–	–
4.Yarıçapları eşit olan çemberler, "eş çemberler"dir.	+	–	–	–	–	–
5.İki kenarı birbirine eşit olan üçgen ikizkenar üçgendir.	+	–	–	–	–	–
6.Bir ikizkenar üçgende $\|AP\| = \|PB\|$ olsun. P noktasından $[AB]$na çizilen dikme, $[AB]$ nı iki eş parçaya ayırır.	+	–	–	–	–	–
7.Bir ikizkenar üçgende $\|AP\| = \|PB\|$ olsun. P noktasından $[AB]$na çizilen dikme üzerindeki her nokta K.A.K. teoreminden $[AB]$ nın uç noktalarına eşit uzaklıktadır.	–	–	–	–	–	–
8.İki üçgende eşit açıları oluşturan kenarlar orantılı olduğunda bu iki üçgen eştir. (K.A.K. teoremi)	–	–	–	–	–	–

Yukarıda verilen Tablo 4 de, 1. soru için kontrol kümesinde yer alması gereken kontrol cümleleri görülmektedir. Araştırmacı, $K_{1.1}$ kontrol cümlesinin bütün gruplarda görülmesinin nedeni olarak, öğrencilerin yaptıkları çizimleri göstermektedir. Bütün gruplar, A ve B noktalarından geçen bir ve yalnız bir doğru parçası çizmişleridir. Bunun sonucu olarak da, öğrencilerin bu kontrol cümlesine sahip oldukları belirlenmiştir. 1. grubun aşağıdaki ifadesine bakıldığında,

"M_1 *ve* M_2 *noktaları olacak, şu uzunluklar* [düzlemde seçilen bir noktayı, M_1 ve M_2 noktalarına birleştiren doğru parçalarının uzunlukları] *eşit olacak.* [...] *ikizkenar üçgen oluşturacağız."*

$K_{1.5}$ kontrol cümlesini kullandıkları düşünülmektedir. Tabloda yer alan ve 1. gruba ait $K_{1.6}$ kontrol cümlesi ise yine gruba ait olan:

"[...] *şöyle dik olacak. Bu diki* [düzlemde rasgele işaretlenen bir noktadan, [M_1M_2]na indirilen dikmeyi] *indirdiğimizde şuralar eşit olacak.* [[M_1M_2]nın iki eş parçaya ayrılacak]"

ifadesinden anlaşılmaktadır. Yine bu gruba ait bir diğer ifade şu şekildedir:

"İşte o [düzlemde rasgele işaretlenen noktayı] *noktayı bulmak içinde bir tane iki tane çember çizeceğiz.* [Yarıçapı] *3 cm olsun* [pergeli açıklığı 3cm] *Şöyle bir çember çizeceğiz.* [M_2 merkezli] *Aynı şekilde buraya da çizeceğiz* [M_1 merkezli] *".*

Yukarıda verilen ifade incelendiğinde, 1.grup, düzlemde rasgele işaretlenen bu noktayı, tam olarak belirleyebilmek için çemberlerin kesişmelerini garanti edecek şekilde, pergeli 3 cm açarak düzlemde M_1 ve M_2 merkezli eş çemberler çizmişlerdir. Böylece bu grubun, $K_{1.2}$, $K_{1.3}$ ve $K_{1.4}$ kontrol cümlelerine sahip oldukları belirlenmiştir. Son olarak, 1. grubun kontrol kümesi için aşağıdaki konuşma ele alınmıştır:

"Burak: Kesim noktalarını [M_1 ve M_2 merkezli çemberlerin kesim noktalarını] *birleştireceğiz..*

Batuhan: Kesim noktalarını [M_1 ve M_2 merkezli çemberlerin kesim noktalarını] *birleştireceğiz.. Kesim noktalarını birleştirdiğimiz zaman işte eş çemberlerin özelliğinden bunlar* [M_1 ve M_2 noktaları] *şey olduğu için.. merkez olduğu için şurayı* [çemberlerin kesim noktaları ile [$M_1 M_2$]nı] *birleştirdiğimizde burası buraya* [çemberlerin kesim noktasını birleştiren doğru ile [$M_1 M_2$]] *dik olacak. Şurasıyla şurası eşit olacak.* [çemberim kesim noktasıyla M_1 ve M_2 noktalarını birleştiren doğru parçaları yani yarıçapların eşitliği] *Dolayısıyla şuradan çıktığımız dik işte şu doğru.. bizim istediğimiz noktalar olur."*

Burada öğrenciler, Tablo 4 de yer almayan bir kontrol kullanmışlardır:

"Eş çemberlerin özelliğinden kesim noktalarını birleştiren doğru, eş çemberlerin merkezlerini birleştiren doğru parçasını ortalar ve bu doğru parçasıyla dik kesişir."

Gözlemlenen bir diğer grup olan 2. grup için Tablo 4 incelendiğinde, $K_{1.1}$ dışında bir kontrol cümlesine sahip olmadıkları gözükmektedir. Grubun, çözüm aşamasında kullandıkları bir kontrol cümlesinin şöyle ifade edilebileceği düşünülmektedir:

"Çizilen doğrunun $[AB]$ ile dik açıdan farklı bir açı yapması, doğru üzerindeki noktanın A ve B noktalarına uzaklıklarının değişmesi demektir. "

Bu kontrol cümlesini içerdiği düşünülen öğrenci görüşü de aşağıda verilmiştir:

"Diktir. [[AB]nın orta noktasından çizilen doğru,[AB]na diktir.] *Çünkü dik olmazsa böyle çizdik mi* [[AB] ile [AB]nın orta noktasından çizilen doğrunun dik açıdan farklı bir açı yapması durumunda] *eşit olmaz."*

Öğrenciler sorunun çözümüyle ilgili olmayan, fakat çizim özellikleri ile ilgili olan kontrollerinin de olduğu görülmüştür. 2.gruba ait:

" [[AB]nın orta noktasından çizilen ve [AB]na dik olan doğru üzerindeki her nokta] *İkizkenar üçgen oluşturuyor her yerde."*

ifadesinde ortaya çıktığı düşünülen kontrol cümlesi aşağıdaki gibidir:

"İki kenarı birbirine eşit olan üçgen ikizkenar üçgendir"

Yine 2. grup yaptıkları çizimin özellikleri ile ilgili olan bir başka kontrol cümlesi:

"Düzlemde birbirine dik olan doğruların eğimleri çarpımı -1 dir."

şeklindedir. Bu belirtilen kontrol cümlesinin, öğrenciler tarafından aşağıdaki ifadede kullanıldığı araştırmacı tarafından düşünülmüştür:

"Ben şöyle düşündüm. Bunların oluşturduğu doğrunun [[AB]nın orta noktasından çizilen ve [AB]na dik olan doğrunun] *eğimi şunun* [[AB]nın] *eğimleri çarpımı -1 falan."*

Ayrıca 2.gruba ait:

"Eğer analitik düzlemde olsaydı şu [[AB]], *x yönünde olsaydı y de şu* [[AB]nın orta noktasından çizilen ve [AB]na dik olan doğru] *yönde, bu* [[AB]nın orta noktasından çizilen ve [AB]na dik olan doğru] *y eşittir bir sayı doğru olur yani."*

ifadesi göz önüne alındığında burada kullandıkları kontrol cümlesinin:

"y eksenine paralel olan doğrular y=b şeklindedir. "

olduğu düşünülmektedir.

3.grubun, Tablo 4 de belirtilen kontrol cümlelerinden sadece, $K_{1.1}$ kontrol cümlesine sahip oldukları gözükmektedir. Bunun yanında, 3. grup öğrencileri, soruda istenilen çözümün dışında, oluşan şekille ilgili bir kontrol cümlesi daha kullanmıştır:

"Bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde, A köşesinden [BC]na çizilen kenarortay, [BC]nın yarısı kadardır."

Bu kontrol cümlesinin yer aldığı düşünülen konuşma, aşağıda verilmiştir:

"Buğra: Bir doğru oluşturur. Üçgen oluşturur. Üçgenin kenarları da tabanın yarısı kadardır.

Güldane: Bunun uzunlukları [[AB]nın orta noktasından çizilen doğru üzerindeki noktaların A ve B noktalarına olan uzunlukları] *hep değişir ki. Yani şöyle giderse* [[AB]nın orta noktasından çizilen doğru üzerinde farklı noktalar] *her zaman değişir ki."*

Gözlemlenen gruplardan bir diğeri 4. grup olmakla birlikte, Tablo 4 deki $K_{1.1}$ kontrol cümlesini kullandıkları gözükmektedir. Aşağıda, bu gruba ait çizilen doğrunun neden [AB]na dik olduğunu açıklayan bir konuşma verilmiştir:

> *"Sorunun başka bir yerinde olsaydı* [nokta, [AB]nın tam ortasından geçen dik bir doğrunun üzerinde olmasaydı].. *Yani farklı uzaklıklarda olurdu...Ya.. Sayı vererek yaparsak.. Dik üçgenden.. 5.. 12... 13 falan... İfade edilebilir.. Buraya* [doğru üzerindeki nokta, A ve B noktalarına] *eşit uzaklıkta.. Buraya* [A ve B noktaları [AB]nın orta noktasına] *5 birim uzaklıkta.. Öyle yani... Zaten burası noktalar kümesi değil mi? Onun için... Aynı uzaklıkta olan noktaların oluşturduğu doğru.* [[AB]nın tam ortasından geçen doğrunun [AB]na] *Dik olmasının sebebi.. Eğer dik olmasaydı başka bir açıyla olsaydı farklı uzaklıklarda olurdu... Yani.."*

Burada grup tarafından kullanıldığı düşünülen kontrol cümlelerinden bir tanesi:

> "Noktanın, çizilen doğru üzerinde alınmaması, bu noktanın A ve B noktaların uzaklığının farklı olması demektir."

şeklindedir ve bir diğer kontrol cümlesi ise:

> "Dik kenarları 5 cm ve 12 cm olan bir dik üçgenin hipotenüsü 13 cm dir."

olarak belirlenmiştir. Son olarak, yine yukarıda verilen öğrenci görüşünden 4.grubun:

"Çizilen doğrunun [AB] ile dik açıdan farklı bir açı yapması, doğru üzerindeki noktanın A ve B noktalarına uzaklıklarının değişmesi demektir. "

kontrol cümlesine sahip oldukları gözlemlenmiştir.

Tablo 4 e, 5.grup için göz atıldığında, sorunun çözümü için kullanılması gereken kontrol cümlelerinden sadece $K_{1.1}$ kontrol cümlesini kullandıkları görülmektedir. 5. gruba ait konuşma aşağıdaki gibidir:

"Eğer dik olmasaydı uzunluklar eşit olmazdı. İki..A ve B noktalarına olan eşit olmazdı..

Bu konuşmada öğrenciler çizilen doğrunun, [AB]na dik olma nedenini açıklamaya çalıştıklarından, kontrol cümleleri de dik olma ile ilgilidir:

"Çizilen doğrunun [AB] ile dik olmaması, doğru üzerindeki noktaların A ve B noktalarına farklı uzaklıklarda olması demektir. "

Noktaların A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olmasını, dik üçgen ile açıklamaya çalıştıkları gözlemlenmiştir:

"Böyle buradan [[AB]nın orta noktasından çizilen ve [AB]na dik olan doğru üzerindeki bir noktadan uç noktalara] *çizdiğimizde elde ettiğimiz doğrular* [doğru parçaları] *bir üçgenin hipotenüsü olacak.* [Doğruyu, üçgenin bir kenarının] *Ortasından çizdiğimiz için kenarlar eşit.. Yükseklik... Yükseklik demeyelim.. O zaman şu orta kenar da* [oluşan iki dik üçgenin ortak kenarı da] *eşit.. O zaman hipotenüs.. eşit olur.."*

Burada 5. grup tarafından kullanılan kontrol cümlesi:

"İki dik üçgenin dik kenarlarının eşit olması, bu dik üçgenlerin hipotenüslerinin eşit olması demektir."

İncelenen son grup olan 6.grup için, Tablo 4 değerlendirildiğinde bu grubun, diğer gruplar gibi $K_{1.1}$ kontrol cümlesine sahip oldukları görülmüştür. Çizilen doğrunun, [AB]na dik oluşu ile ilgili kontrol cümlesi kullandıkları düşünülmektedir. Bu gruba ait ifade aşağıda verilmiştir:

"Şöyle yaparsak da [[AB]na dik olan ve [AB]nın orta noktasından geçen doğru çizilirse] *yine aynı* [uzaklıkta] *olur. Dik çünkü... Şöyle yaparsak* [[AB]na dik doğru üzerindeki bir nokta A ve B noktalarıyla birleştirilirse] *ikizkenar üçgen gibi olur. Yine mesela yani... Bu doğru tamamen uç noktalara uzaktır."*

Öğrencilerin bu ifade de kullandıkları düşünülen kontrol cümlesi şöyledir:

"Çizilen doğru üzerinde alınan bir nokta A ve B noktalarıyla birleştirilmesiyle oluşan üçgenin ikizkenar üçgen olması demek doğrunun [AB]na dik olması demektir."

Ayrıca 6. grup öğrencileri arasında, çizilen şeklin özellikleriyle ilgili bir konuşma geçmiştir:

"Serkan: [Oluşan ikizkenar üçgenin, [AB]nın orta noktasından çizilen doğru üzerindeki açısının açıortayı]*45... 45...*

Gizem: Bence 45 değil... Nerden biliyoruz? Belki 30 30...
Serkan:...
Gizem: Yani olabilir..Mesela şurası [A,B noktaları ve doğru üzerinde alınan bir noktanın köşelerini oluşturduğu ikizkenar üçgende, $[AB]$na çizilen dikme ile oluşan üçgen] *ikizkenar olsa bu da* [A,B noktaları ve doğru üzerinde alınan bir noktanın köşelerini oluşturduğu ikizkenar üçgende, $[AB]$na çizilen dikme ile oluşan diğer üçgen] ikizkenar üçgen gene. Bu açı [ikizkenar üçgenin A açısı] *45 ise bu açıda* [ikizkenar üçgenin B açısı] *45 dir diyeceksin. Yani bilemezsin* [açıortayın] *45 olduğunu...*"

Burada Serkan'ın kullandığı düşünülen kontrol cümlesi, aşağıda verilmiştir:

"Bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde, $|AB|=|AC|$ ise A köşesinin açıortayı, açıyı 45^0 ve 45^0 olarak ayırır."

Yine 6. gruptaki Gizem Serkan'ın söylediklerine karşılık kullandığı kontrol cümlesi ise:

"Çizilen doğrunun üzerinde alınan noktanın $[AB]$na uzaklığı ile $[AB]$nın ayrılan iki eş parçasının uzunluğuna eşit olması açıortayların 45^0, 45^0 olması demektir."

Bu noktadan sonra bütün grupların 1. soruya ait bulgularını toparlamak adına ve bütün grupların 1. soruya ait problem, işlem, temsil ve kontrol kümelerine dair genel bir izlenim edinilmesi açısından, her bir gruba ait kümeler bir arada verilmiştir. Aşağıda verilen Tablo 1.1 de anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde ve 1. grubun (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde ortak olarak yer alan öğeler yer almaktadır:

Tablo 1.1. 1. grubun 1. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

1. grup	Problem Kümesi	$P_{1.1}, P_{1.2}, P_{1.3}, P_{1.4}, P_{1.5}, P_{1.6}, P_{1.7}, P_{1.8}$
	İşlem Kümesi	$İ_{1.1}$
	Temsil Kümesi	$T_{1.1}, T_{1.2}, T_{1.3}, T_{1.10}, T_{1.11}, T_{1.12}, T_{1.14}$
	Kontrol Kümesi	$K_{1.1}, K_{1.2}, K_{1.3}, K_{1.4}, K_{1.5}, K_{1.6}$

Ayrıca, 1.gruba ait olan ve anahtar kavrama (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde yer almayan, diğer öğeleri ise şu şekilde sıralanabilir:

İşlem Kümesi:

"Düzlemde işaretlenen nokta, M_1 ve M_2 noktalarıyla birleştirilirse, oluşan şeklin bir ikizkenar üçgen olması."

"Oluşan üçgen ikizkenar olduğundan düzlemde işaretlenen noktadan $[M_1M_2]$na indirilen dikmenin, $[M_1M_2]$nı iki eş parçaya ayırması."

"Eş çemberlerin kesim noktaları birleştirilirse, eş çemberlerin özelliğinden çemberlerin kesim noktalarını birleştiren doğrunun $[M_1 M_2]$na dik olması ve $[M_1 M_2]$nı iki eş parçaya ayırması."

Temsil Kümesi:

"Düzlemde bir nokta belirleme"

"Düzlemde seçilen nokta ile M_1 ve M_2 noktalarını birleştirme"

"İki doğru parçasının uzunluklarının birbirine eşit olduğunu sembollerle gösterme"

"İki doğruyu dik kesiştirme"

"Eş çemberlerin kesim noktalarını birleştirme"

Kontrol Kümesi:

"Eş çemberlerin özelliğinden kesim noktalarını birleştiren doğru, eş çemberlerin merkezlerini birleştiren doğru parçasını ortalar ve bu doğru parçasıyla dik kesişir."

1. grubun, 1. sorunun çözümünde sahip olduğu problem kümesi, bu sorunun istenen çözümü için yeterli görülmektedir. 1. grup, daha önceden sahip olduğu ikizkenar üçgen ve çember bilmelerini kullanarak, 1. sorunun çözümüne yaklaşmışlardır. İstenen noktaların olası yerlerini belirlemek için, düzlemde rasgele noktalar işaretlediklerinde, ikizkenar üçgen bilmelerini kullanmışlardır. Bununla birlikte, yukarıda ikizkenar üçgen ile ilgili belirtilen kavrama öğeleri göz önüne alındığında, bu grupta yer alan öğrencilerin, ikizkenar üçgen bilmelerinin, bu sorunun çözümü için yeterli düzeyde olduğu, araştırmacı tarafından düşünülmektedir. Bunun yanında, öğrenciler düzlemde rasgele işaretlenen bu noktayı, tam olarak belirleyebilmek için de çemberlerin kesişmelerini garanti edecek şekilde, pergeli açarak düzlemde M_1 ve M_2 merkezli eş çemberler çizmişlerdir. Çizdikleri M_1 ve M_2 merkezli eş çemberlerin kesim noktalarını birleştirerek çözüme ulaşmaya çalışmışlardır.

Tabloda yer almayan, fakat 1. sorunun çözümü ile ilgili olan işlem ve kontrol cümleleri, bu grup için bulunmaktadır. Grup, kullanılan işlem cümlesi ile eş çemberlerin özelliğinden, çemberlerin kesim noktalarını birleştiren doğru ile $[M_1 M_2]$nın birbirine dik olduğunu belirtmişlerdir. Fakat burada, "eş çemberlerin özelliği" ile ne kastedildiği net değildir, çemberlerin kesim noktalarını birleştiren doğru ile $[M_1 M_2]$nın neden dik oldukları, tam olarak ortaya konulamamıştır. Anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü göz önüne alındığında, dik kesişmenin, eşit yarıçaplarla oluşan ikizkenar üçgendeki K.A.K. eşlik teoremi kullanılarak ifade edilmesi gerekirken "eş çemberlerin özelliği"ni kullanmışlardır. Fakat ne kast edilmek istendiği, tam olarak ortaya konulamamıştır. Bir başka deyişle, 1. grup, üçgenlerin eş olma fikrini hiç kullanmamışlardır.

Sezgisel olarak, eş çemberlerin kesim noktalarının birleştirilmesiyle oluşan doğrunun üzerindeki noktaların, problemde istenen noktalar olduğunu belirtmişlerdir. 1. grup, eş çemberlerin kesim noktaları dışında, oluşan doğru üzerinde başka noktaların M_1 ve M_2 noktalarına eşit uzaklıkta olup olmadığını kontrol

etmemişlerdir. Yani sezgisel olarak söylediklerini, cebirsel olarak doğrulamamışlardır. Ayrıca bu doğru üzerinde olmayan düzlemdeki başka noktaların, M_1 ve M_2 noktalarına eşit uzaklıkta olup olmadığını da araştırmadıkları görülmüştür.

1.grup için oluşturulan temsil kümesi, bu grubun problem çözümünde yeterli düzeyde geometrik, sembolik ve cebirsel gösterimlere sahip olduklarını ortaya koymaktadır. Bunun yanında, "$M_1 M_2 \perp d$" ifadesinde, "$M_1 M_2$" gösterimiyle "$M_1 M_2$ doğru parçası"nı yani "$[M_1 M_2]$" kastetmişleridir.

1.grubun, 1. problem için yukarıda belirtilen düşüncelere sahip olduğu söylenebilir. Genel olarak bakıldığında, bu gruptaki öğrencilerin, güçlü sezgilere sahip oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerin, 1. problemin çözümüne ilişkin sezgisel olarak, ifade ettiklerini cebirsel olarak ifade etmede de zorlandıkları söylenilebilir. Kullandıkları işlem cümleleri ve kontrol cümleleri göz önüne alındığında, tam olmasa da doğru bir "orta dikme" kavramasına sahip oldukları, araştırmacı tarafından düşünülmektedir.

Bir diğer grup olan 2. grubun sahip oldukları (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü ile anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü kıyaslandığında Tablo 1.2 ortaya çıkmaktadır:

Tablo 1.2. 2. grubun 1. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

2. grup	Problem Kümesi	$P_{1.1}, P_{1.2}, P_{1.8}$
	İşlem Kümesi	–
	Temsil Kümesi	$T_{1.1}, T_{1.2}, T_{1.11}, T_{1.12}$
	Kontrol Kümesi	$K_{1.1}$

Bunun yanı sıra, 2. gruba ait olan fakat Tablo 1.2 de bulunmayan kavrama öğeleri, aşağıdaki şekilde belirtilebilir:

Problem Kümesi:

" İki doğrunun dik kesişmesi ne demektir?"

İşlem Kümesi:

"Çizilen doğru, [AB]na dik değilse, doğru üzerinde bulunan bir C noktasının A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olmaması."

Temsil Kümesi:

"Doğru parçasının orta noktasını işaretleme"

"Doğru parçasının iki eş parçaya ayrıldığını sembollerle gösterme"

"Doğru parçasına dik bir doğru çizme"

"Doğru üzerinde bir C noktası işaretleme"

"C noktasını, A ve B noktalarıyla birleştirme"

Kontrol Kümesi:

"Çizilen doğrunun [AB] ile dik açıdan farklı bir açı yapması, doğru üzerindeki noktanın A ve B noktalarına uzaklıklarının değişmesi demektir. "

2. grubun (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde yer alan problem kümesi göz önüne alındığında, sadece sorunun içinde geçen "düzlem","doğru parçası" ve "eşit uzaklıkta olma" gibi kavramlarından dolayı, anahtar (P,İ,T,K) kavramasında yer alan bu öğelere sahip oldukları, araştırmacı tarafından düşünülmektedir. 1. soruda öğrencilerden beklenen, öncelikle düzlemde rasgele bir nokta için, problemde istenen şartı araştırmaları iken, bu gruptaki öğrenciler, istenen şartı sağlayan noktaların [AB]nın ortasından geçen dik doğru üzerinde olduğunu, sezgisel olarak belirtmişlerdir. Soru çözümünün bundan sonraki kısmında, istenen noktaların neden bu doğru üzerinde olduğunu, sahip oldukları her türlü cebirsel bilmelerini kullanarak

açıklamaları beklenirken, sezgisel olarak ve araştırmacı tarafından önceki derslerinde gördükleri tahmin edilen problemlere dayandırarak açıklamaya çalışmışlardır.

2. grupta yer alan Meriç, [AB] ile [AB]nın orta noktasından geçen doğrunun dik olması halinde, [AC] ile [CB]nın uzunluklarının eşit olacağını açıklamaya çalışmıştır. Ancak burada, [AB] ile [AB]nın orta noktasından geçen doğrunun dik oluşunu, tam olarak ortaya koyamadığı düşünülmektedir. Meriç'in, dik olmayı, sezgisel olarak ifade ettiği düşünülmektedir.

2.grubun 1.problem çözümüne genel olarak bakıldığında, kullandıkları işlem cümlelerinin gerekçelerini açıklama konusunda zorlandıkları görülmektedir. Sorunun çözümüne sezgisel yaklaşımları doğru olduğu halde, herhangi bir nedene dayandıramadıkları gözlemlenmiştir.

2.grubun temsil kümesine bakılacak olursa, cebirsel gösterimlerden çok, geometrik gösterimlerden yararlanarak ve sözel olarak istenen çözümü yapmaya çalışmışlardır.

Anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü düşünüldüğünde, anahtar kavramada yer alan işlem ve kontrol kümesi ile 2.gruba ait işlem ve kontrol kümesi arasında örtüşen yerler, oldukça azdır. Grup tarafından, ikizkenar üçgen özelliklerinin, istenen noktaların yerlerini belirleme aşamasında kullanılmadığı görülmüştür. Bunun yanında, istenilen şartı sağlayan noktaların oluşturduğu doğrunun, neden [AB]na dik olduğu net bir şekilde bu öğrenciler tarafından ortaya konulamamıştır. Bunun doğal sonucu olarak ta, doğru üzerindeki her noktanın, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olup olmadığı ya da düzlemde başka noktaların istenen şartı sağlayıp sağlamadığı araştırılmamıştır. Genel olarak, geometrik şekilde ortaya çıkan olası özellikler ve durumlar ortaya konulmaya çalışılmıştır. Bu edinilen bilgilerin ışığı altında, araştırmacı tarafından, bu gruptaki öğrencilerin "orta dikme" kavramasına tam olarak sahip oldukları düşünülmemektedir.

Öğrencilerin bu sorunun çözümü sırasında, çizdikleri şekli göz önüne alarak da bazı işlem ve kontrol cümleleri kullanmışlardır. Bu cümleler, öğrencilerin sahip oldukları analitik geometri bilmeleri ile ilgili oldukları araştırmacı tarafından düşünülmektedir. Gözlemlenen durumlar ele alındığında, dik doğruların eğimleri çarpımının -1 oluşu, doğru bir işlem cümlesidir. Bunun yanında Meriç, oluşan şekli bir dik koordinat sisteminde benzetmiştir. Meriç'in kullanmış olduğu bu işlem cümlesinin, hatalı olduğu düşünülmektedir. Dik koordinat sisteminde, x eksenine paralel olan doğrular y = a ve y eksenine paralel olan doğrular x = b denklemleri ile ifade edilmesine rağmen, Meriç elde edilen doğrunun, y ekseni yönünde ve "*...y eşittir bir sayı...*" ile belirtmiştir. Oysaki dik koordinat düzleminde böylesi bir doğru, x = b şeklinde olmalıydı. Ayrıca 2. grupta yer alan Berre, A noktasının $[AB]$na göre simetriğinin B noktası olduğunu belirterek, sahip olduğu simetri bilmesi ile ilgili bir açıklamada bulunmuştur. Fakat Berre'nin kullandığı bu işlem ile onun sahip olduğu simetri kavraması hakkında çok fazla yorum yapılamamaktadır. Ancak bunun yanı sıra, simetri kavramı içinde geçen "eşit uzaklığın korunması gerektiğinin" farkında olduğu söylenilebilir.

Gözlemlenen gruplardan biriside 3. gruptur. Bu grubun kavraması ile anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü arasında kurulan ilişki, Tablo 1.3 de verilmiştir:

Tablo 1.3. 3. grubun 1. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

3. grup	Problem Kümesi	$P_{1.1}, P_{1.2}, P_{1.8}$
	İşlem Kümesi	–
	Temsil Kümesi	$T_{1.1}, T_{1.2}, T_{1.12}$
	Kontrol Kümesi	$K_{1.1}$

Yukarıda belirtilen öğelerin dışında, 3. gruba ait olan diğer kavrama öğeleri şu şekildedir:

Temsil Kümesi:

"Doğru parçasının orta noktasını işaretleme"

"Doğru parçasının iki eş parçaya ayrıldığını sembollerle gösterme"

"Doğru parçasının orta noktasından geçen bir doğru çizme"

Gözlemlenen bir diğer grup olan 3. grubun (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde yer alan problem kümesi göz önüne alındığında, sadece sorunun içinde geçen "düzlem", "doğru parçası" ve "eşit uzaklıkta olma" gibi kavramlarından dolayı, anahtar (P,İ,T,K) kavramasında yer alan bu öğelere sahip oldukları görülmektedir. 3. grubun, 1. sorunun çözümü için düşüncelerini sezgisel olarak ifade ettikleri, araştırmacı tarafından düşünülmektedir. Çünkü bu sorunun çözümü sırasında, herhangi bir işlem cümlesi ya da kontrol cümlesi kullanmadıkları gözlemlenmiştir. $[AB]$nın orta noktasından çizilen doğrunun, neden A ve B noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktaların yeri olduğunu da açıklamamışlardır.

3. gruba ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde yer almakta olan temsil kümesine bakıldığında, sadece geometrik gösterimler kullanarak çözüme ulaşmaya çalışmışlardır. Bunun yanında, soruda istenen noktalar kümesinin $[AB]$na dik olması durumunu, ne kullandıkları dil temsillerinde ne de geometrik temsillerinde belirtmişlerdir. Ayrıca kullandıkları temsil cümleleri düşünüldüğünde, ikizkenar üçgen bilmelerini ortaya koydukları düşünülebilir. Ancak problem cümleleri, işlem cümleleri ve kontrol cümleleri göz önüne alındığında bu bilmelerine dair hiçbir kullanım görülmemektedir.

Yukarıda bahsedilenlerin ardından, anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü göz önüne alındığında, öğrencilerin A ve B noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktaların yerlerini tamamen sezgisel olarak ve açıklama gereği duymadan ifade ettikleri düşünülmektedir. Araştırmacıya göre öğrenciler, bu soruda istenen geometrik yeri bir "kural", bir "kaide" gibi ortaya koymuşlardır. Bu noktaların yerlerinin neden bir "doğru" olabileceğini, 3. grup açıklama gereği bile duymadıkları gözlemlenmiştir.

Bu açıdan, anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü ile karşılaştırıldığında ne ikizkenar üçgen hakkında ne de soruda istenen noktaların sağladığı şartlar hakkında beklenen işlem ve kontrol cümleleri ortaya koyamadıkları görülmektedir. Bu bağlamda öğrencilerin "orta dikme" kavramasını, net ve eksiksiz olarak yapılandırdıkları düşünülmemektedir.

Asıl odaklanılması gerekenin, doğru üzerindeki noktalar olması beklenirken, bu grupta yer alan Buğra, soruda istenen noktalar ile ilgili olarak; "*Bir doğru oluşturur. Üçgen oluşturur.*" Diyerek, problemde istenen noktalar hakkında değil de, yine sorunun çözümü için çizdikleri şeklin tamamına ait özellikler sıralamaktadır. Çizilen şeklin tamamı ile ilgili Buğra'nın "*Üçgenin kenarları da tabanın yarısı kadardır.*" şeklindeki ifadesi Güldane'nin sahip olduğu bilmelerle örtüşmediği, Güldane'nin ortaya koyduğu işleminden anlaşılmaktadır. Güldane, doğru üzerinde seçilen noktaların, $[AB]$nın orta noktasına olan uzaklıklarının değişeceğini ve böylece Buğra'nın "*Üçgenin kenarları da tabanın yarısı kadardır.*" şeklindeki ifadesinin doğru bir ifade olmadığını belirtmiştir. Sonrasında, Buğra'nın da Güldane'nin açıklamasına onay verdiği gözlemlemiştir.

4. grup göz önüne alındığında anahtar (P,İ,T,K) kavramada sahip oldukları kavrama öğeleri Tablo 1.4 de verilmiştir:

Tablo 1.4. 4. grubun 1. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

4. grup	Problem Kümesi	$P_{1.1}, P_{1.2}, P_{1.8}$
	İşlem Kümesi	–
	Temsil Kümesi	$T_{1.1}, T_{1.2}, T_{1.11}, T_{1.12}$
	Kontrol Kümesi	$K_{1.1}$

Yine 4. gruba ait olan fakat yukarıdaki tabloda yer almayan diğer kavrama elemanları ise aşağıda verilmiştir:

Problem Kümesi:

" İki doğrunun dik kesişmesi ne demektir?"

İşlem Kümesi:

"Seçilen nokta, [AB]nın orta noktasından geçen dik bir doğrunun üzerinde değilse, seçilen nokta A ve B noktalarına farklı uzaklıklarda olması."

"Çizilen doğru, [AB] ile dik açıdan farklı bir açı yaparsa doğru üzerindeki noktaların A ve B noktalarına farklı uzaklıklarda olması."

Temsil Kümesi:

"Doğru parçasının orta noktasını işaretleme"

"Doğru parçasının orta noktasından dik bir doğu çizme"

"Doğru üzerinde bir nokta belirleme"

"Doğru üzerinde alınan noktayı A ve B noktaları ile birleştirme"

"Oluşan dik üçgenin dik kenarlarına 5 ve 12, hipotenüsüne de 13 yazma"

"Doğru parçasının orta noktasından geçen ve doğru parçasıyla 90^0den farklı bir açı yapan doğruyu çizme"

Kontrol Kümesi:

"Noktanın, çizilen doğru üzerinde alınmaması, bu noktanın A ve B noktaların uzaklığının farklı olması demektir."

"Dik kenarları 5cm ve 12 cm olan bir dik üçgenin hipotenüsü 13 cm dir."

"Çizilen doğrunun [AB] ile dik açıdan farklı bir açı yapması, doğru üzerindeki noktanın A ve B noktalarına uzaklıklarının değişmesi demektir. "

Araştırmada yer alan gruplardan birisi de 4. gruptur. "Düzlem","doğru parçası" ve "eşit uzaklıkta" olma ifadeleri, sorunun içinde geçtiğinden, grubun anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsüne ait problem kümesinde yer alan öğelere sahip oldukları düşünülmektedir. Sorunun çözümü için işlem cümleleri kullanmadıkları görülmektedir.

4. grupta bulunan Kadir, soruda istenen noktaların, [AB]nın orta noktasından geçen ve [AB]na dik olan doğru üzerindeki noktalar olduğunu açıklama yapmadan belirtmiştir. İstenen noktaların, neden çizdikleri doğru üzerinde olduğu üzerinde açıklamaya çalışırlarken, işlem ve kontrol cümleleri kullandıkları görülmektedir. Didem ise *"Sorunun başka bir yerinde olsaydı yani farklı uzaklıklarda olurdu..."* diyerek, istenen noktaların neden [AB]nın tam ortasından dik geçen bir doğru üzerindeki noktalar olduğunu, açıklamaya çalışmıştır. İstenen noktaların nasıl bir "doğru" oluşturduğundan ziyade, çizilen doğrunun "istenen" şartı nasıl sağladığı üzerinde durmuşlardır. Sezgisel olarak ve herhangi bir gerekçeye dayandırmadan istenen noktaların yerlerini belirledikleri, araştırmacı tarafından düşünülmektedir.

Yine kullanılan temsil cümlelerine de bakıldığında, dik kenarları 5 cm, 12 cm olan bir dik üçgenin hipotenüsünün 13 cm olduğunu kullanarak çizdikleri doğru üzerindeki noktaların A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olduğunu da ayrıca belirtmişlerdir. 4.grup sorunun çözümünde ikizkenar üçgen özelliklerini hiç kullanmadıkları bunun yerine, [AB]nın tam ortasından geçen doğrunun neden [AB]na dik olduğuyla ilgili açıklama yaparken, dik üçgen özelliklerini kullandıkları düşünülmektedir.

Genel olarak 4. grubun (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü göz önüne alındığında, soruda istenen noktaların yerlerini belirlerken, geçerli bir işlem yada kontrol cümlesi kullanmadıkları araştırmacı tarafından düşünülmektedir. Sorunun cevabını sezgisel olarak vermişlerdir. Öğrenciler, daha önceki yaşantılarında sahip oldukları ve ezberledikleri düşünülen bir takım bilgileri, bu sorunun çözümünde tekrarlar gibi görünmektedirler. Böylesi bir durumda, öğrencilerin "orta dikme" kavramasını tam olarak yapılandırmadıkları, araştırmacı tarafından düşünülmektedir.

Araştırmada kavramaları incelenen bir diğer grup, 5. gruptur. Bu grubun (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü ile anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü karşılaştırıldığında, aşağıda verilen Tablo 1.5 yer alan veriler elde edilmiştir:

Tablo 1.5. 5. grubun 1. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

5. grup	Problem Kümesi	$P_{1.1}, P_{1.2}, P_{1.8}$
	İşlem Kümesi	–
	Temsil Kümesi	$T_{1.1}, T_{1.2}, T_{1.11}, T_{1.12}$
	Kontrol Kümesi	$K_{1.1}$

Ayrıca 5. gruba ait olan, fakat Tablo1.5 de gözükmeyen ve yine bu grubun kavramalarının öğeleri şu şekildedir:

Problem Kümesi:

" İki doğrunun dik kesişmesi ne demektir?"

"Bir üçgenin hipotenüsü ne demektir?"

İşlem Kümesi:

"Çizilen doğru $[AB]$na dik olmazsa doğru üzerinde alınan noktaların, A ve B noktalarına uzaklıklarının eşit olmaması."

"İki dik üçgenin dik kenarları birbirine eşitse, bu üçgenlerin hipotenüsleri de birbirine eşit olması"

Temsil Kümesi:

"Doğru parçasının orta noktasını işaretleme"

"Doğru parçasının orta noktasından dik bir doğu çizme"

"Doğru üzerinde bir nokta belirleme"

"Doğru üzerinde alınan noktayı A ve B noktaları ile birleştirme"

Kontrol Kümesi:

"Çizilen doğrunun $[AB]$ ile dik olmaması, doğru üzerindeki noktaların A ve B noktalarına farklı uzaklıklarda olması demektir. "

"İki dik üçgenin dik kenarlarının eşit olması, bu dik üçgenlerin hipotenüslerinin eşit olması demektir."

5. grup da yine soruda istenen noktaların yerini belirleme aşamasında, işlem cümlesi yada kontrol cümlesi kullanmamışlardır. Kullandıkları problem cümleleri, sorunun içinde geçen "düzlem","doğru parçası" ve "eşit uzaklıkta olma" kavramlarıyla ilgilidir. Anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsüne ait problem kümesi göz önüne alındığında, gerekli olan problem cümlelerine sahip olmadıkları, araştırmacı tarafından tespit edilmiştir.

Bu gruptaki öğrencilerin, 1. soruda istenen noktaların yerlerini belirlerken kullanılması gereken hiçbir işlem ve kontrol cümleleri kullanmadıkları görülmüştür. 5. grup, soruya sezgileriyle cevap vermişlerdir. $[AB]$nın orta noktasından geçen ve $[AB]$na dik olan doğrunun, soruda istenen noktaların yeri olduğu belirtilmiştir. Fakat bu noktaların yeri olan doğrunun, neden istenen noktalar kümesi olduğunu açıklamaya çalışmışladır. Bunu yaparken de, dik üçgen bilmelerinden yararlanmışlardır. Dik kenarları eşit uzunlukta olan dik üçgenlerin, hipotenüslerinin eşit olacağını belirtmişleridir.

Temsil kümelerinde yer alan öğeler, çözümlerini geometrik olarak desteklemektedir. Sorunun çözümünde cebirsel gösterimlerden yararlanılmamıştır.

5. grubun (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü ile anahtar kavrama dörtlüsü karşılaştırıldığında, grubun sorunun çözümü için beklenilen problem kümesi, işlem kümesi ve kontrol kümesi elemanlarını ortaya koymadıkları görülmüştür. Sezgisel olarak, istenilen noktaların yerlerini belirlemişlerdir. İstenilen noktaların, neden

$[AB]$nın orta noktasından geçen ve $[AB]$na dik olan bir doğru olduğunu açıklamaya çalışmışlardır. Bu açıklamayı yaparken kullandıkları işlem ve kontrol cümleleri, araştırmacı tarafından yeterli görülmektedir. Bu bağlamda, öğrencilerin "orta dikme" kavramasını tam olarak yapılandırmadıkları düşünülmektedir.

Gözlemlenen son grup olan 6. grubun, anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü göz önüne alındığında bu grubun 1. soru için kavrama dörtlüsü şu şekildedir:

Tablo 1.6. 6. grubun 1. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

6. grup	Problem Kümesi	$P_{1.1}, P_{1.2}, P_{1.6}, P_{1.8}$
	İşlem Kümesi	–
	Temsil Kümesi	$T_{1.1}, T_{1.2}, T_{1.11}, T_{1.12}$
	Kontrol Kümesi	$K_{1.1}$

Bunların yanında, 6. grubun sahip olduğu, fakat tabloda görülmeyen diğer kavrama elemanları aşağıda belirtilmiştir:

Problem Kümesi:

" İki doğrunun dik kesişmesi ne demektir?"

İşlem Kümesi:

"Çizilen doğru üzerindeki bir nokta, A ve B noktalarına birleştirildiğinde ikizkenar üçgen oluştuğundan çizilen doğrunun $[AB]$na dik olması."

Temsil Kümesi:

"Doğru parçasının orta noktasını işaretleme"

"Doğru parçasının orta noktasından dik bir doğu çizme"

"Doğru üzerinde birkaç nokta belirleme"

"Doğru üzerinde alınan noktaları A ve B noktaları ile birleştirme"

Kontrol Kümesi:

> "Çizilen doğru üzerinde alınan bir nokta A ve B noktalarıyla birleştirilmesiyle oluşan üçgenin ikizkenar üçgen olması demek doğrunun [AB]na dik olması demektir."

Araştırmada gözlemlen son grup olan 6. grubun için (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü düşünüldüğünde, anahtar (P,İ,T,K) kavramasında yer alan problem cümlelerine yeteri kadar sahip olmadıkları görülmüştür.

Grubun, bu soruya sezgisel olarak yaklaştıkları düşünülmektedir. 6. grupta yer alan Gizem, [AB]na dik olan ve [AB]nın orta noktasından geçen doğrunun, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olan noktaların yeri olduğunu söylemiştir. Bu durumu belirtirken, herhangi bir işlem cümlesi kullanmadığı tespit edilmiştir. Sonrasında bu doğrunun üzerindeki noktaların, neden A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olduğunu açıklamıştır ve bunun için ikizkenar üçgen ile ilgili işlem cümlesi kullanmıştır. Burada dikkat edilmesi gereken bu işlem cümlesinin, istenen noktaların belirlenmesi aşamasında değil de istenen noktaların neden çizdikleri doğru üzerinde olduğu hususunda kullanılmış olmasıdır.

Öğrencilerin soru için yaptıkları çizimler göz önüne alındığında, yani temsil kümesine bakılacak olunursa, sorunun çözümü için ikizkenar üçgen özelliklerinin, 6. grup tarafından kullanıldığı düşünülebilir. Fakat ikizkenar üçgen oluşması, istenen noktaların neden A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olduğu açıklanırken grup tarafından kullanılmıştır.

6. grubun (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü ile anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü karşılaştırıldığında, 6. grubun kavrama için gerekli olan problem kümesi, işlem kümesi ve kontrol kümesi öğelerine sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Grup, soruda istenen noktaların yerlerini belirlerken sezgisel hareket etmişlerdir.

Bunların yanında öğrencilerin oluşan şekil ile ilgili olarak işlem ve kontrol öğeleri kullandıkları gözlemlenmiştir. Serkan, çizilen şekil üzerinde oluşan üçgende, $[AB]$nın orta noktasından çizilen doğru üzerindeki açının açıortayının, 45^0 olduğunu belirtmiştir. Burada Serkan'ın, ikizkenar üçgen ile ilgili kavram yanılgısına sahip olduğu düşünülmektedir., Serkan'ın oluşan üçgen ile ilgili söylediği açıortay özelliği, Gizem'in ikizkenar üçgen bilmesiyle örtüşmediğinden, Gizem, bu açıortay özelliğini onaylamamıştır.

4.2. 2. soruya ait bulgular

Bu sorunun beklenilen çözümü, 1. soruda beklenilen çözümle aynıdır. Öğrencilerden toplanan veriler göz önüne alındığında, grupların da 2. sorunun, 1. soru ile aynı olduğunu belirttikleri gözlemlenmiştir:

1.grup:

"Burak: Aynı...

Batuhan: [1. problem ile] *Aynı şey oldu... C var..* $|AC| = |CB|$ *var... Aynısı oldu.."*

2.grup:

"Meriç:Bir öncekiyle aynı..

Berre: Evet. Oradaki özellikler çıkacak."

3.grup:

"Güldane: Yine aynısı oldu.."

4.grup:

"Kadir: Biraz öncekinden pek bir farklı değil ama... Biraz önce adına nokta demişlerdi şimdi C demişler fark etmez ki..."

5.grup:

"Sercan: C sadece doğrunun [[AB]nın] *üzerinde olmak zorunda değil... Yine aynı şey geliyor aklıma.*

Damla: Yine aynı oldu bu da! Gayet güzel doğru oldu daha ne olsun!"

6.grup:

"Serkan: Bir önceki sorunun aynısı...

Gizem: Evet, bence de..bir önceki var yine burada.."

Dolayısıyla 1. sorudaki düşüncelerinin, 2. soruda da geçerli olduklarını ifade ettiklerinden, 2. soru için grupların sahip oldukları problem, işlem, temsil ve kontrol kümeleri, 1. soruda sahip oldukları problem, işlem, temsil ve kontrol kümeleri ile aynı olduğu görülmüştür. Burada sadece 2. soruda yapılan çözümde, 1. sorudaki çözümden varsa farklı yapılan açıklamalardan bahsedilecektir. Bu soru için, grupların 1. sorudan farklı problem cümleleri şu şekildedir:

1. grup, istenen C noktalarının yerleri ile ilgili 1. sorudan farklı olan problem cümleleri oluşturmamışlardır. Bunun yanında oluşan şeklin özellikleri ile ilgili olarak aşağıdaki konuşma öğrenciler arasında geçmiştir:

"Batuhan: Benim şimdi aklıma geldi. C nin AB ye göre simetriğini alırsak deltoit diyorum.. Ne onun adı...

Burak: Eşkenar dörtgen oluşur.

Batuhan: Ha evet, eşkenar dörtgen oluşur. C nin simetriğini alınca böyle şekil daha güzel gözüküyor."

1.grubun, yukarıdaki diyalogda kullandıkları düşünülen iki problem cümlesinin olduğu düşünülmektedir:

"Bir noktanın doğruya göre simetriği nedir?

Eşkenar dörtgen nedir?"

2. grup, istenilen yerin 1. soru ile aynı olduğunu belirttikten sonra, grupta yer alan öğrenciler arasında şöyle bir konuşma geçmiştir:

"Meriç: İkizkenar üçgen olur. Mesela bunu daire de görebilir miyiz? Mesela bak şurası C noktası olursa böyle parabolik doğrular...

Berre: Yine bunlar da aynı doğru parçası üzerinde.. Geometrik adı var mıdır?..

Meriç: Geometrik adı işte... İkizkenar dik üçgenler."

Öğrencilerin bu konuşmalarında, şu problem cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir:

"İkizkenar üçgen nedir?

İkizkenar dik üçgenler nedir?"

Bir diğer grup olan 3. grup için, 1. sorudan farklı herhangi bir problem cümlesi gözlemlenmemiştir. Benzer şekilde, 4. 5. ve 6. gruplarında, problem cümlelerinin 1. soruyla aynı olduğu görülmüştür.

İşlem cümleleri için grupların çözümlerine bakıldığında, 3. ,4. ,5. ve 6. gruplarda farklı işlem cümleleri görülmemektedir. 1. grup için çizilen şeklin özelliği ile ilgili olan bir işlem cümlesi aşağıdaki gibidir:

"Çizilen doğru üzerindeki bir C noktasının, [AB]na göre simetriği alınırsa oluşan dörtgenin eşkenar dörtgen olması".

Bu işlemin kullanıldığı düşünülen konuşma şu şekildedir:

"Batuhan: Benim şimdi aklıma geldi.C nin AB ye göre simetriğini alırsak deltoit diyorum.. Ne onun adı...

Burak: Eşkenar dörtgen oluşur.

Batuhan: Ha evet, eşkenar dörtgen oluşur."

1.grup gibi, şeklin özelliklerine bakarak işlem cümlesi kullanan 2. gruba ait bir konuşma şöyledir:

"Berre: Yine bunlar da aynı doğru parçası üzerinde.. Geometrik adı var mıdır?..

Meriç: Geometrik adı işte... İkizkenar dik üçgenler.

Berre: İkizkenar dik değil...

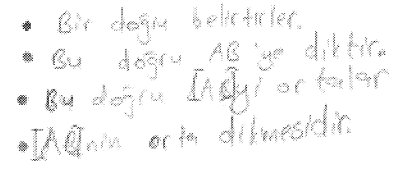
Meriç: Pardon değil. Dik üçgen değil. Mesela bu [düzlemde işaretlenen C noktasından [AB]na çizilen dikme] *şunlara* [[AB]nın orta noktasının ayırdığı iki eş doğru parçası] *eşit olsaydı da olurdu. Buradan ikizkenar olurdu 45 45 olurdu. İkizkenar dik üçgen olurdu."*

Yukarıdaki konuşmada kullandığı düşünülen işlem cümlesi:

"Çizilen doğru üzerinde alınan bir noktanın [AB]na uzaklığı, [AB]nın orta dikmesinin ayırdığı eş parçaların uzunluğuna eşit ise oluşan üçgenin ikizkenar üçgen olması ve açılarının 45^0 olması"

şeklindedir.

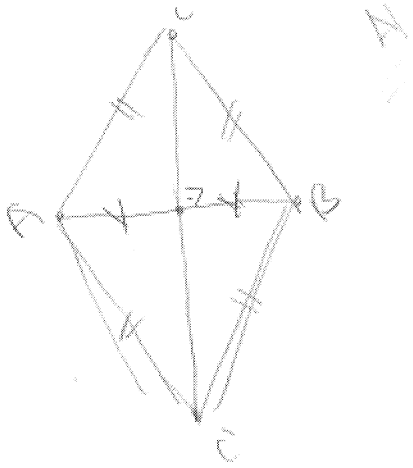
Grupların temsil cümleleri ele alındığında, yine 1. sorudaki temsil cümleleri ile paralellik göstermektedirler. 1. grup, bu soruda 1. sorudan farklı olarak istenen yer özelliklerini sıralamışlardır:



Batuhan "*Bu doğru AB 'ye diktir*" yazdığında, Burak:

"[[AB]]*doğru parçası...*"

demiştir. Bunun üzerine, Batuhan diğer özelliklerin devamında, "*AB*" yerine "[AB]" yazdığı yukarıda görülmektedir. Aşağıda 1. gruba ait çizim verilmiştir:



Şekil12-1. grubun 2. soruya ait çizimi

Öğrencilerin Şekil 12 de de görülen temsil cümleleri, aşağıda verilmiştir:

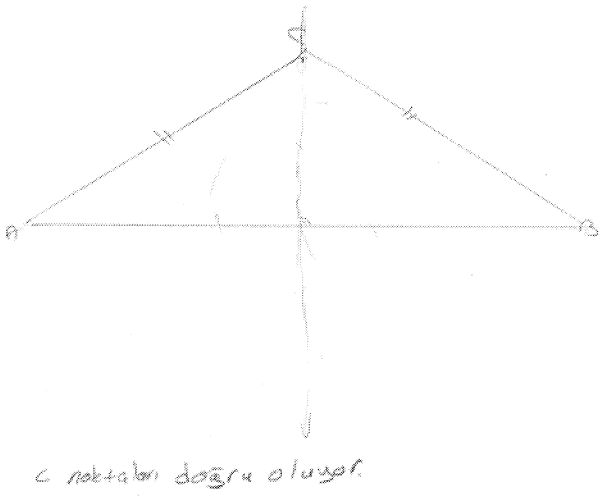
"[AB]nın C noktasına göre diğer tarafında bir C' noktası belirleme

C ve C' noktalarının, [AB]na eşit uzaklıkta olduğunu sembollerle gösterme

C' noktası ile A ve B noktalarını birleştirme

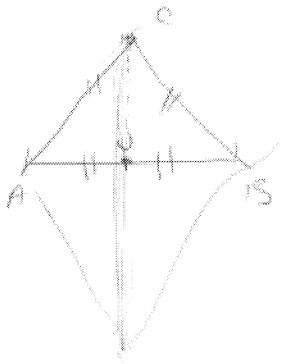
C' noktasının, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta olduğunu sembollerle gösterme"

İncelenen diğer gruplardan olan 2. grup için, farklı bir temsil görülmemiştir. Bu durum, Şekil 13 ile de desteklenmektedir:



Şekil 13-2. grubun 2. soruya ait çizimi

Benzer şekilde 3. grup içinde gözlemlenen temsil cümlelerinin, 1. soruda gözlemlenen temsil cümleleriyle aynı olduğu, Şekil 14 e bakıldığında görülmektedir:

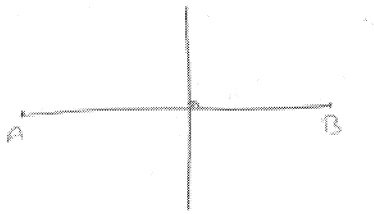


Şekil 14-3. grubun 2. soruya ait çizimi

Bunun yanında 4. grup, aşağıda verilen temsil cümlesini, 1. sorunun çözümünde kullandıkları halde 2. sorunun çözümünde kullanmamışlardır:

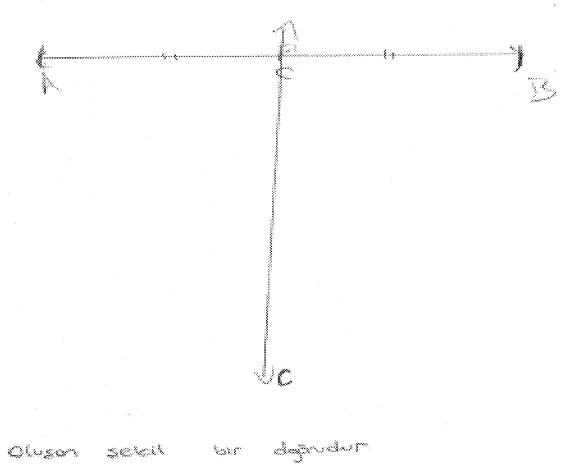
"[AB]nın orta noktasını sembollerle gösterme"

Bu durum Şekil 15 de de görülmektedir:



Şekil 15-4. grubun 2. soruya ait çizimi

2. soru ile ilgili 5. gruba ait çizim aşağıda verilmiştir:



Şekil 16-5. grubun 2. soruya ait çizimi

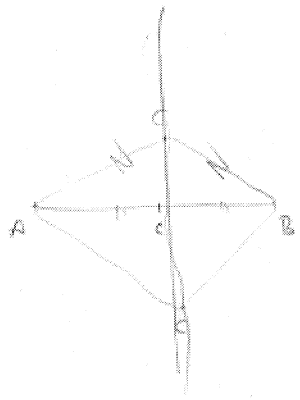
Verilen bu çizime göre, 5. grubun 1.soruya ait temsil kümesinde yer alan:

"Doğru üzerinde alınan noktayı [*C noktası*], A ve B noktaları ile birleştirme"

temsil cümlesini 2. soruda kullanmamışlardır. Bunun yanında, Şekil 16 dan da görüldüğü gibi grup, şu temsil cümlesini kullanmıştır:

"Çizilen doğruyu c harfiyle isimlendirme"

Son grup olan 6. grup, 1. sorunun çözümünde dikliği grafiksel olarak göstermelerine rağmen, 2. sorunun çözümünde çizmemişlerdir. Aşağıda verilen Şekil 17 de bu çizim görülmektedir:



Şekil 17-6. grubun 2. soruya ait çizimi

Grupların 2. soru için kullandıkları kontrol cümlelerinin, 1. soruda kullandıkları kontrol cümleleriyle aynı olduğu görülmektedir. Bunun yanında, oluşan şeklin özelliklerinden bahseden 2. grup için bir kontrol cümlesi şu şekildedir:

"Bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeninde, $|AB|=|AC|$ ve $[AB] \perp [AC]$ ise $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni ikizkenar dik üçgendir ve ayrıca B ve C açıları 45^0 dir."

Bu kontrol cümlesinin kullanıldığı konuşma, aşağıda verilmiştir:

"[…]*bu* [düzlemde işaretlenen C noktasından $[AB]$na çizilen dikme] *şunlara* [$[AB]$nın orta noktasının ayırdığı iki eş doğru parçası] *eşit olsaydı da olurdu. Buradan ikizkenar olurdu 45, 45 olurdu. İkizkenar dik üçgen olurdu."*

2. soru için elde edilen bulguların yardımıyla, öğrencilerin kavramalarına genel olarak bakılacak olunursa, daha net bir tablonun elde edileceği düşünülmektedir.

Burak ve Batuhan'dan oluşan 1. grup, 2.soru için yazılı ve sözlü olarak ortaya koydukları ifadeler göz önüne alındığında, 1. soruda oluşturdukları kavramadan farklı bir kavrama oluşturmadıkları ortaya çıkmıştır.

2. soruda C noktalarının yerlerini pergel kullanmadan ilk sorudaki çözümlerine dayandırarak belirledikten sonra, Batuhan, bu yerin özelliklerini yazarken, *"Bu doğru AB'ye diktir"* ifadesini kullanmıştır. Bunun üzerine Burak ise *"*[[AB]]*doğru parçası..."* diyerek "*AB*" ile kastedilenin "*doğru parçası*" anlamına gelmediğini Batuhan'a belirtmiştir. Sonrasında da Batuhan özellikleri yazarken Burak'ın sözünü ettiği düzeltmeyi yapmıştır. Temsil kümesi açısından bakıldığında, Burak'ın cebirsel ve sembolik gösterimlerde, gerekli dikkati gösterdiği söylenilebilir.

Son olarak, Batuhan oluşan şeklin özellikleri ile ilgili işlem ve kontrol cümleleri kullanmıştır. C noktalarından herhangi birisini seçerek, [AB]na göre simetriğini almıştır. Bu gözlem yardımıyla, Batuhan'ın simetri kavramı içinde geçen "eşit uzaklığın korunması gerektiğinin" farkında olduğu söylenilebilir. Sonrasında, C noktasının simetriğini de alarak bu grup, oluşan şeklin bir eşkenar dörtgen olduğunu da belirtmişlerdir. Buradan da grubun "eşkenar dörtgen" tanımını bildikleri düşünülmektedir.

Araştırmada yer alan 2. grup da yine C noktalarının, 1. soruda istenen noktalar olduğunu belirtmişlerdir. Bu grupta yer alan Berre, oluşan geometrik adın "*ikizkenar üçgen*" olduğunu söylemiştir. Berre, soruda tam olarak istenen noktaların yerine karar vermeliyken, sorunun çözümü için çizilen şeklin tümüne bakarak cevap verdiği düşünülmektedir. Meriç ise oluşan yerin, "*doğru*" olduğunu söylemiştir. C noktalarının, bir doğru oluşturduğunu ifade etmiştir. Burada öğrencilerin verdiği

cevap göz önüne alındığında, bu soruya, yine ilk sorudaki (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde de görüldüğü gibi, sezgisel yaklaştıkları gözlemlenmiştir.

Öğrencilerden her ne kadar 2. soru da istenenin, bir $[AB]$ göz önüne alındığında; "$|AC| = |CB|$ *eşitliğini sağlayan C noktalarının yerlerini düzlemde gösterilmesi*" olsa da, bu gruptaki öğrenciler çizdikleri şekil üzerinde görebildikleri tüm özellikler ile ilgili problem, işlem, temsil ve kontrol cümleleri kullanmışlardır. Meriç, kullandığı geometrik gösterimlerle, C noktasının A ve B noktalarıyla birleştirilmesi sonucunda, bir ikizkenar üçgen oluştuğunu söylemiştir. Fakat bu durum, Meriç'in ikizkenar üçgen özelliklerini, sorunun çözümünde kullandığı anlamına gelmemektedir. Son olarak, Meriç yine çizilen şekilde oluşan ikizkenar üçgenin, ikizkenar dik üçgen olduğunu belirtiştir. Berre, bu durumu onaylamayınca Meriç kendi hatalı bilmesini düzeltmiştir.

Araştırmada yer alan, diğer gruplar olan 3., 4., 5. ve 6. gruplardan elde edilen yazılı ve sözlü ifadeler sonucunda bu grupların 2. soruda istenen C noktalarının, 1. soruda istenen noktalarla aynı olduğunu, yani bir "doğru" oluşturduklarını belirtmişlerdir. Fakat yine 1. sorunun çözümünü hiçbir açıklama yapmadan ortaya koyduklarından, bu soruda da önceden sahip oldukları, sezgileri kullandıkları düşünülmektedir.

Bunun yanında temsil kümelerinde bazı farklılıklar görülmektedir. Örneğin 3. grup, $[AB]$nın orta noktasını ve bu doğru parçasının orta noktasından geçen doğru üzerinde yine bir C noktası işaretlemişlerdir. Burada 3. grubun, sorunun içinde geçen "*C noktaları*"nı çizdikleri şekle taşıdıkları düşünülmektedir. Fakat bu doğrunun dik olması gerektiğini yine sembolik göstermemişlerdir. 4. grup ise 1. sorunu çizimine göre, daha özensiz bir çizim yapmışlardır. $[AB]$na dik olan bir doğru çizmişlerdir. Fakat $[AB]$nın iki eş parçaya ayrıldığını bile göstermemişlerdir. Benzer şekilde 5. grup, $[AB]$nın orta noktasını, C harfi ile göstermişlerdir. Bu C noktasından geçen ve $[AB]$na dik olan doğruyu ise c harfi ile isimlendirmişlerdir. Son grup olan 6. grup ise

ilk soruda [AB]nın orta noktasından geçen ve [AB]na dik çizdikleri doğrudan farklı olarak, bu doğru üzerindeki noktaları C harfi ile göstermişlerdir. Fakat dikliği, sembolik olarak göstermemişlerdir.

4.3. 3. soruya ait bulgular

Tablo 5. 3. soruya ait Problem Kümesi

Anahtar Kavrama Problem Kümesi	1.grup*	2.grup	3.grup	4.grup	5.grup	6.grup
1.Bir düzlem nedir?	+	+	+	+	+	+
2.Bir doğrunun parçası olmak ne demektir?	+	+	+	+	+	+
3.Bir doğru parçasının orta noktası nedir?	+	+	+	+	+	+
4.İki doğrunun dik kesişmesi ne demektir?	+	+	+	+	+	+
5.Bir doğrunun bir noktadan geçmesi ne demektir?	–	–	–	–	–	–
6.İki doğrunun paralel olması ne demektir?	–	+	–	–	–	–
7.Paralel doğruların özellikleri nelerdir?	–	–	–	–	–	–

* 1. grup, 3. sorunun çözümünü yaparken AB doğru parçasını, CD doğru parçası olarak almıştır.

Tablo 5 incelendiğinde, $P_{3.1}$, $P_{3.2}$, $P_{3.3}$ ve $P_{3.4}$ problem cümlelerinin bütün gruplarda yer aldığı gözükmektedir. Sadece 2. grubun, diğer gruplardan farklı olarak $P_{3.6}$ problem cümlesine sahip olduğu görülmektedir. "*Düzlem*", "*doğru parçası*" ve "*orta dikme*" kavramları, 3. sorunun içinde geçtiğinden, $P_{3.1}$, $P_{3.2}$, $P_{3.3}$ ve $P_{3.4}$ problem cümlelerinin bütün gruplarda kullanıldığı düşünülmektedir. Öğrencilerin problem kümelerinde, kağıt üzerinde çalıştıkları için $P_{3.1}$ problem cümlesinin, bir doğru parçası çizdikleri için $P_{3.2}$ problem cümlesinin ve yine doğru parçalarının orta dikmelerini çizdiklerinden $P_{3.3}$ ve $P_{3.4}$ problem cümlelerinin yer aldığı düşünülmektedir.

1. gruba ait düşünce aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

"AB nin orta dikmesi bu olsun. [dikeyde [AB] çizildi, orta dikmenin üzerinde ve [AB]nın sol tarafında kalacak şekilde bir [CD] işaretlendi.] *CD doğru parçası da bu olsun.* [[CD]nın orta dikmesini çizdi.]*"*

Bu ifade incelendiğinde ve öğrencilerin yaptıkları çizim de dikkate alındığında, $P_{3.1}$, $P_{3.2}$, $P_{3.3}$ ve $P_{3.4}$ problem cümlelerinin, 1. grup tarafından kullanıldığı düşünülmektedir.

2. grup için Tablo 5 e bakıldığında, $P_{3.1}$, $P_{3.2}$, $P_{3.3}$, $P_{3.4}$ ve $P_{3.6}$ problem cümleleri gözükmektedir. Bunu destekleyen öğrencilere ait görüş, şu şekildedir:

"CD şöyle [yatayda] *AB de şöyle*[[CD]nın orta dikmesi üzerinde[CD]na göre aynı tarafta] *olsun... AB doğru parçasının orta dikmesinin bir parçası olur mu?.. Olmaz ama paralel olur."*

Burada 2. gruba ait problem cümleleri belirlenirken, öğrencilerin çizimleri de göz önüne alınmıştır.

Gözlemlenen bir diğer grup olan 3. grup soru ile ilgili şu fikri belirtmişlerdir:

" Ya bence bu soruda CD AB nin orta dikmesi de olmayabilir..Çünkü orta dikme bunun [[CD]nın orta dikmesinin] *uç kısmında da alınmış olabilir. Şu şekilde* [[AB]ile[CD]nın birbirini ortalaması] *alınırsa, işte bu şekilde olur ama olmayabilir de yani."*

3. grubun bu soruyu çözme sürecinde, araştırmacı tarafından yapılan gözlemler ve yukarıda belirtilen fikir yardımıyla, bu grubun $P_{3.1}$, $P_{3.2}$, $P_{3.3}$ ve $P_{3.4}$ problem cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir.

Tablo 5 e bakıldığında, 4. grubun da yine $P_{3.1}$, $P_{3.2}$, $P_{3.3}$, $P_{3.4}$ problem cümlelerini içerdikleri gözlemlenmiştir. Öğrencilerin çizimleri ve aşağıda verilen konuşmaları, bu problem cümlelerini kullandıklarının kanıtı olarak görülmektedir:

> *"Kadir: CD doğru parçasının orta dikmesinin bir parçası ise.. yani şurada bir* [uç noktaları yani A ve B noktaları, [CD]nın aynı tarafında olacak şekilde].. *AB parçası olabilir... Bu AB dir diyelim.. Iıı böyle... AB şimdi.. CD nin bir orta dikmesinin parçası oldu ama CD, AB nin orta dikmesinin bir parçası olmadı.. Tamam.*
>
> *Didem: Bence de aynen böyle düşündüm."*

Benzer şekilde Tablo 5, 5. grup için incelendiğinde yine bu grubun:

> *"CD doğru parçasının orta dikmesi diyor. AB de onu* [[CD]nı] *parçalar, CD nin orta dikmesi. AB doğru parçası bu şekilde de* [A ve B noktaları [CD]nın farklı tarafında ve A noktası [CD]nın orta noktasına daha yakın olacak şekilde] *olabilir."*

şeklindeki görüşleri ve grubun gözlemlenmesi sırasında toplanan veriler göz önüne alındığında, $P_{3.1}$, $P_{3.2}$, $P_{3.3}$ ve $P_{3.4}$ problem cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir.

Gözlemlenen son grup olan 6. grup için Tablo 5 e göz atılacak olunursa, yine diğer gruplar gibi bu grubunda $P_{3.1}$, $P_{3.2}$, $P_{3.3}$ ve $P_{3.4}$ problem cümlelerini kullandıkları görülmektedir. Bu durum için aşağıdaki öğrenci görüşü ile birlikte 6.

grubun yaptıkları çizim de incelendiğinde, bu problem cümlelerinin kullanıldığını göstermektedir:

> *"Ya düşünsene, hani çizmiştik yaa..Şu doğru* [[AB]] *işte.Bu doğru üzerinde AB yi vermiş. Bu doğru CD nin orta dikmesi demiş. AB de bu doğru üzerinde bir doğru parçası... Bu doğru parçası dediğin gibi böyle eşitte* [[AB]nın iki eş parçaya ayrılması] *olabilir. Yani şöyle de olabilir... Sonuçta CD yi ikiye ayırıyor, iki eşit parçaya ayırıyor..."*

Tablo 6. 3. soruya ait İşlem Kümesi

Anahtar Kavrama İşlem Kümesi	**1.grup***	**2.grup**	**3.grup**	**4.grup**	**5.grup**	**6.grup**
1.d doğrusu, [CD]nın orta dikmesi ise [CD]nın orta noktasından geçmesi.	+	+	+	+	+	+
2.d doğrusu, [CD]nın orta dikmesi ise [CD] na dik olması.	+	+	+	+	+	+
3. [AB]nın orta noktası ile [CD]nın orta noktası aynı nokta ise kesişme noktalarında (H noktasında) [AB], [CD]nın orta dikmesinin bir parçası olduğundan bu iki doğru parçası birbirine dik olması.	+	+	+	+	+	+
4. [AB]nın orta noktası ile [CD]nın orta noktası aynı nokta ise H noktası, her ikisinin de orta noktası olduğundan [CD]nı içeren doğru da [AB]nın orta dikmesi olması.	+	+	+	+	+	+
5. [AB]nın orta noktası ile [CD]nın orta noktası aynı değilse [CD]nı içeren doğru orta noktasından (H noktasından) geçmemesi.	+	+	+	+	+	+
6. [AB]nın orta noktası ile [CD]nın orta noktası aynı değilse aynı doğruya dik olan iki doğrunun olması.	–	+	–	–	–	–
7.Paralel iki doğrunun ortak noktaları bulunmayacağından [AB]nın orta dikmesi, [CD]nı içermediğinden [CD]nın, [AB]nın orta dikmesinin bir parçası olmaması.	–	–	–	–	–	–

* 1. grup, 3. sorunun çözümünü yaparken AB doğru parçasını CD doğru parçası olarak almıştır.

Tablo 6, grupların 3. soru için kullandıkları işlem cümlelerini ifade etmektedir. Tablo 6 incelendiğinde, $İ_{3.1}$, $İ_{3.2}$, $İ_{3.3}$, $İ_{3.4}$, $İ_{3.5}$ işlem cümlelerine bütün grupların sahip olduğu gözlemlenmiştir. Bunun yanında tablodan da görüldüğü gibi, $İ_{3.6}$ işlem cümlesinin sadece 2. grup tarafından kullanıldığı düşünülmektedir. 1. gruba ait:

> *"AB nin orta dikmesi bu olsun.* [dikeyde [AB] çizildi, orta dikmenin üzerinde ve [AB]nın sol tarafında kalacak şekilde bir [CD] işaretlendi.] *CD doğru parçası da bu olsun.* [[CD]nın orta dikmesini çizdi.]"

ifadesi ve öğrencilerin yaptıkları çizim göz önüne alındığında, bu grubun $İ_{3.1}$, $İ_{3.2}$ ve $İ_{3.5}$ işlem cümlelerini kullandıkları düşünülmektedir. Öğrenciler arasında geçen bir başka konuşma ise:

> *"Batuhan: [...] C burada D buradaysa da...* [C ve D noktaları [AB]na göre aynı tarafta ise]*olmaz...Yani.. Olmaz her zaman..*
>
> *Burak: Sadece şura şuraya.*[C ve D noktalarının [AB]nın orta noktasına uzaklıkları] *eşitse olur.*
> *Batuhan: C ile D, AB ye göre simetrik olması lazım."*

şeklindedir. Yine burada grubun $İ_{3.3}$ ve $İ_{3.4}$ işlem cümlelerine sahip oldukları, araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir. Ayrıca öğrenciler, $İ_{3.3}$ ve $İ_{3.4}$ işlem cümlelerinin bir başka yorumunu da verdikleri düşünülmektedir. Bu işlem cümlesi, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

> "C ve D noktaları[AB]na göre birbirinin simetriği olan noktalar ise [AB], [CD]nın orta dikmesinin bir parçası olması."

2. grubun kullandığı işlem cümleleri $İ_{3.1}$, $İ_{3.2}$, $İ_{3.3}$, $İ_{3.4}$, $İ_{3.5}$ ve $İ_{3.6}$ olarak, öğrencilerin soru çözüm sürecinde ortaya koydukları çizim ve aşağıdaki konuşma sonucunda araştırmacı tarafından belirlenmiştir:

Meriç: Ama AB.. Şimdi CD doğru parçasının orta dikmesinin bir parçası AB imiş... Haa.. Tamam..

Berre: AB şöyle de olabilir. [Orta dikme üzerinde alınan A ve B noktaları,[CD]nın aynı tarafına olacak şekilde] *Yine şuna olabilir şurada eşitte olabilir*

Meriç: Doğru olmaz.

Berre: Olabilirde ama...

Meriç: Nerde olabilir?

Berre: Ama mesela.. A şurada olsa [[AB] ile [CD]nın orta noktası aynı olacak şekilde] bu ikisi [A ve B noktalarının [CD]nın orta noktasına uzaklıkları] *yine birbirine eşit olsa bu da*[[CD] da] *bunun* [[AB]nın] *orta dikmesi oluyor. Ama* [[CD],[AB]nın orta dikmesine] *mutlaka paralel olur."*

Araştırmada gözlemlenen bir diğer grup olan 3. grubun, Tablo 6 incelendiğinde $İ_{3.1}$, $İ_{3.2}$, $İ_{3.3}$, $İ_{3.4}$ ve $İ_{3.5}$ işlem cümlelerine sahip oldukları gözükmektedir. Bu grubun işlem cümlelerine gruba ait:

"Ya bence bu soruda CD, AB nin orta dikmesi de olmayabilir..Çünkü orta dikme bunun [[CD]nın orta dikmesinin] *uç kısmında da alınmış olabilir. Şu şekilde*[[AB]ile[CD] birbirini ortalayacak şekilde] *işte bu şekilde olur ama olmayabilirde yani."*

ifadesinden yola çıkılarak sahip oldukları düşünülmektedir.

4. gruba ait bir konuşma şu şekildedir:

“ Kadir: […]*CD doğru parçasının orta dikmesinin bir parçası ise.. yani şurada bir[uç noktaları yani A ve B noktaları,* [CD]nın aynı tarafında olacak şekilde]..

Didem: AB

Kadir: AB parçası olabilir... Bu AB dir diyelim.. Iıı böyle... AB şimdi..

Didem: CD..

Kadir: CD nin bir orta dikmesinin parçası oldu ama CD, AB nin orta dikmesinin bir parçası olmadı.. Tamam.

Didem: Bence de aynen böyle düşündüm.

Kadir: Ama şimdi AB buradaysa da [[AB] ile [CD] birbirini ortalayacak şekilde A ve B noktaları seçilirse] *olur yani şimdi... Gıcık soru!*

Didem: Şöyle.. Yani CD nin AB doğru parçasının orta dikmesinin bir parçası olması için...AB nin CD nin orta dikmesi

Kadir: CD yi kesmesi..

Didem:..olması gerek yani.. Eşit uzaklıkta olması gerek bunlar [A ve B noktaları]*..AB burada olmalı..”*

Tablo 6 ya bakıldığında, 4. grubun $İ_{3.1}$, $İ_{3.2}$, $İ_{3.3}$, $İ_{3.4}$ ve $İ_{3.5}$ işlem cümlelerini kullandıkları görülmektedir. Yukarıdaki konuşma da bu durumu desteklemektedir.

5. grup yine Tablo 6 ya göz atıldığında, tabloda yer alan $İ_{3.1}$, $İ_{3.2}$, $İ_{3.3}$, $İ_{3.4}$ ve $İ_{3.5}$ işlem cümlelerine sahip oldukları görülmektedir:

"Sercan: [...]CD doğru parçası çizelim.. Onun için bir AB doğru parçası çizelim ki AB onun [[CD]nın] *orta dikmesi* [orta dikmesinin bir parçası] *olsun. Ama bence ikisi de birbirinin orta dikmesidir... O zaman ne diyelim?*

Damla: Yine aynı şey oldu... Sorunun cevabı evet yani..

Sercan: AB doğrusu CD doğrusunun orta dikmesinin... bir parçası ise.. o zaman bize ilk verilen metine göre, CD doğru parçası AB doğru parçası tarafından ikiye parçalanmış. Bu böyle olmak zorunda değil bence! Yani... yana da kayabilir.. yani.. çok daha faklı bir şekilde çizilebilir... Aynı şekilde daha küçük çizelim... Bu amca CD doğru parçası olsaydı. [...] *CD doğru parçasının orta dikmesi diyor. AB de onu* [[CD]nı] *parçalar, CD nin orta dikmesi. AB doğru parçası bu şekilde de*[A ve B noktaları [CD]nın farklı tarafında ve A noktası [CD]nın orta noktasına daha yakın olacak şekilde] *olabilir. Bu durumda CD doğru parçası AB nin orta dikmesi olmak zorunda değil."*

Öğrencilerin sorunun çözümü için yaptıkları çizim ve yukarıda verilen konuşma ile belirtilen işlem cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir.

İncelen son grup olan 6. gruba ait uzun bir konuşma aşağıda verilmiştir:

Gizem: CD doğru parçasının... eşit olacak... Yani olabilirde olmayabilirde..
Serkan: Bence olur.
Gizem: AB orta dikmenin herhangi bir şeyi olduğu için.. parçası... Yani şöyle bir parça da [A ve B noktalarının,[CD]nın orta noktasına uzaklıkları farklı olacak şekilde] *olabilir, eşit yani iki uzaklığı eşit bir parçada olabilir.. yani CD de AB nin orta dikmesi de olabilir.. olmayadabilir...*
Serkan: Orta dikmeyse şunlar eşittir, bunlar da eşittir. [[AB] ile [CD] birbirini ortalaması] *Orta dikme çünkü..*

Gizem: Ama diyor ki; AB doğru parçası, CD nin orta dikmesi.. AB kesin CD nin orta dikmesi yani şunlar [[CD]nın iki eş parçaya ayrılması] *kesin eşit Ama böyle bir şey*[[AB]nın iki eş parçaya ayrılması] *vermemiş.*

Serkan: Tamam. Bu[[AB]] *onun*[[CD]nın] *orta dikmesi ise bunlarda eşit olmak* [[AB]nın iki eş parçaya ayrılması] *zorundadır. Biri uzun olamaz ki..*

Gizem: Niye olmasın?

Serkan: Orta Dikme olmaz ki o zaman!

Gizem:Orta dikme şunun ama.. CD nin..

Serkan: Çizmek lazım..

Gizem: Ya düşünsene, hani çizmiştik yaa..Şu doğru [[AB]] *işte.Bu doğru üzerinde AB yi vermiş. Bu doğru CD nin orta dikmesi demiş. AB de bu doğru üzerinde bir doğru parçası..... Bu doğru parçası dediğin gibi böyle eşitte* [[AB]nın iki eş parçaya ayrılması] *olabilir. Yani şöyle de olabilir... Sonuçta CD yi ikiye ayırıyor, iki eşit parçaya ayırıyor....*

Serkan: Olabilir de tabii. Çünkü bunlar orta dikme ise kenarlar eşit ayrılmalı..."

Yukarıdaki konuşmada 6. grupta yer alan Gizem 'in ifadeleri takip edilecek olunursa, $İ_{3.1}$, $İ_{3.2}$, $İ_{3.3}$, $İ_{3.4}$ ve $İ_{3.5}$ işlem cümleleri gözükmektedir. Serkan'a ait ifadelere bakıldığında ise şu işlemin var olduğu düşünülmektedir:

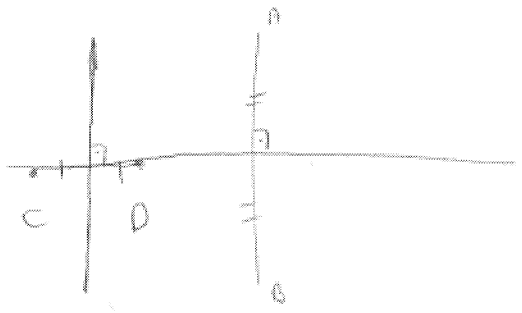
"[AB], [CD]nın orta dikmesi ise [AB] ile [CD] birbirinin orta dikmeleri olması."

Tablo 7.3. soruya ait Temsil Kümesi

Anahtar Kavrama Temsil Kümesi	**1.grup***	**2.grup**	**3.grup**	**4.grup**	**5.grup**	**6.grup**
1.Bir doğru parçası çizme	+	+	+	+	+	+
2.Doğru parçasının uç noktalarını C ve D harfleri ile isimlendirme	+	+	+	+	+	+
3. [CD]nın orta noktasını işaretleme	+	+	+	+	+	+
4. [CD]nın orta noktasını H harfi ile isimlendirme	–	–	–	–	–	+
5. [CD]nın orta dikmesini çizme	+	+	+	+	+	+
6. [CD]nın orta dikmesini d harfi ile isimlendirme	–	–	–	–	–	–
7. [CD] ile d doğrusunun dik kesiştiklerini, d ⊥ [CD] şeklinde gösterme	–	–	–	–	–	–
8. d doğrusu üzerinde, orta noktası H noktası olacak şekilde bir [AB] yerleştirme	+	+	+	+	+	+
9. [AB]nın iki eş parçaya ayrıldığını sembollerle gösterme	+	+	–	+	–	+
10.d doğrusu üzerinde, orta noktası H noktası olmayacak şekilde bir [AB] yerleştirme	+	+	+	+	+	–
11. [AB]nın orta dikme doğrusunu çizme	+	–	–	–	–	–

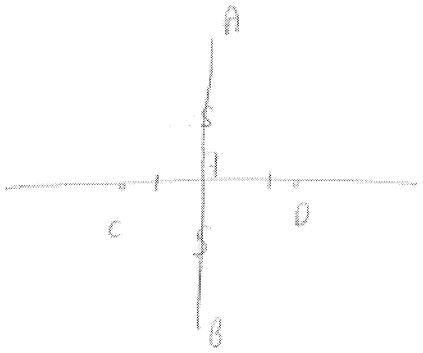
* 1. grup, 3. sorunun çözümünü yaparken AB doğru parçasını CD doğru parçası olarak almıştır.

Tablo 7 de görüldüğü gibi, $T_{3.1}$, $T_{3.2}$, $T_{3.3}$, $T_{3.5}$ ve $T_{3.8}$ temsil cümleleri, bütün gruplarda bulunmaktadır. Yine Tablo 7 incelendiğinde, $T_{3.4}$ temsil cümlesi sadece 6. grupta görülmekteyken, $T_{3.11}$ temsil cümlesi de sadece 1. grupta görülmüştür. $T_{3.10}$ temsil cümlesine bakıldığında ise bu temsil cümlesine, 1. ,2. ,3. ve 4. gruplarının sahip olduğu gözükmektedir. 1. gruba ait iki çizim bulunmaktadır. Bunlardan ilki, [CD]nın, [AB]nın orta dikmesinin bir parçası olmadığı durumdur:



Şekil 18- 1.grubun 3. soruya ait ilk çizimi

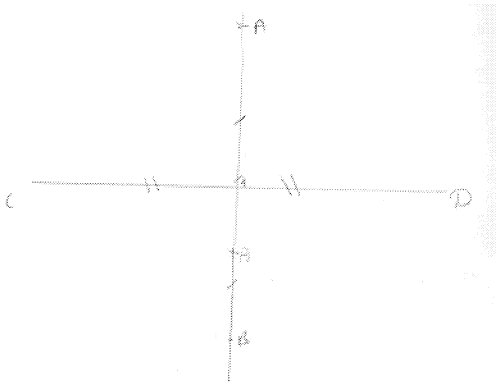
Şekil 18 e bakıldığında, 1. grubun $T_{3.1}$, $T_{3.2}$, $T_{3.3}$, $T_{3.5}$, $T_{3.10}$ ve $T_{3.11}$ temsil cümlelerini kullandıkları gözükmektedir. 1. gruba ait diğer çizim ise $[AB]$ ve $[CD]$nın orta noktalarının aynı nokta olması durumu ile ilgilidir:



Şekil 19- 1.grubun 3. soruya ait ikinci çizimi

Şekil 15 de yani ikinci durumda ise $T_{3.1}$, $T_{3.2}$, $T_{3.3}$, $T_{3.5}$ ve Şekil 14 den farklı olarak $T_{3.8}$ ve $T_{3.9}$ temsil cümlesinin kullanıldığı gözlemlemiştir.

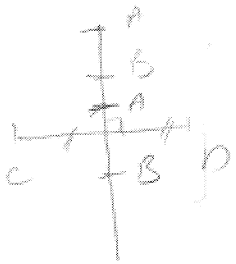
2. grup için Tablo 7 incelendiğinde $T_{3.1}$, $T_{3.2}$, $T_{3.3}$ ve $T_{3.5}$ temsil cümlelerini kullandıkları anlaşılmaktadır. Bunun bir göstergesi olarak, 2. gruba ait çizim aşağıda verilmiştir:



Şekil 20-2.grubun 3. soruya ait çizimi

Bu çizim dikkatle incelendiğinde, öğrencilerin $T_{3.8}$, $T_{3.9}$ ve $T_{3.10}$ temsil cümlelerini de kullandıkları görülmektedir.

Aşağıdaki şekil ise 3. gruba aittir:



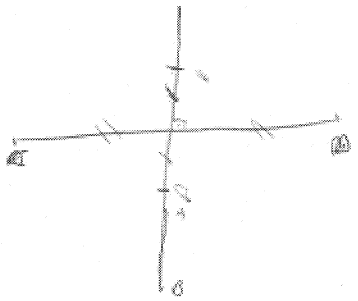
Şekil 21-3.grubun 3. soruya ait çizimi

Şekil 21 e bakıldığında, öğrencilerin $T_{3.1}$, $T_{3.2}$, $T_{3.3}$, $T_{3.5}$ temsil cümlelerine sahip oldukları görülmektedir. Bunun yanında, $T_{3.8}$ ve $T_{3.10}$ temsil cümleleri de bu grupta görülmektedir. Ayrıca $T_{3.8}$ temsil cümlesi:

> *"Ya bence bu soruda CD, AB nin orta dikmesi de olmayabilir..Çünkü orta dikme bunun uç kısmında da alınmış olabilir. Şu şekilde* [$[AB]$ ile$[CD]$ birbirini ortalayacak şekilde] *işte bu şekilde olur ama olmayabilirde yani."*

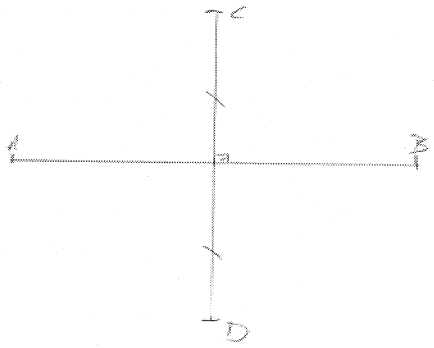
ifadesinde belirtilmiş olmasına rağmen öğrenciler tarafından, çizim üzerinde gösterilmediği gözlemlenmiştir.

4. grubun ise yine Tablo 7 de yer alan, $T_{3.1}$, $T_{3.2}$, $T_{3.3}$, $T_{3.5}$, $T_{3.8}$, $T_{3.9}$ ve $T_{3.10}$ temsil cümlelerine sahip oldukları, aşağıda verilen şekil göz önüne alınarak belirlenmiştir:



Şekil 22-4.grubun 3. soruya ait çizimi

Gözlemlenen bir diğer grup olan 5. grubun, 3. sorunun çözümü için yaptığı iki çizim bulunmaktadır. Bunlardan birisi, aşağıdaki şekilde verilmiştir:



Şekil 23-5.grubun 3. soruya ait ilk çizimi

Şekil 23 e bakılarak 5. grubun kullandığı temsil cümleleri olarak $T_{3.1}$, $T_{3.2}$, $T_{3.3}$, $T_{3.5}$ ve $T_{3.8}$ in kullanıldığı tespit edilmiştir. Fakat burada şunu belirmek gerekir ki, $T_{3.5}$ temsil cümlesinin 5. grup tarafından:

"[CD]nın orta dikmesinin bir parçasını çizme"

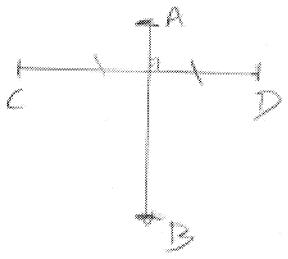
şeklinde kullanıldığı varsayılmıştır. Yine Tablo 7 de, $T_{3.9}$ temsil cümlesinin grup tarafından kullanılmağı görülmüş olmasına rağmen, aşağıdaki konuşmada sözel olarak belirtildiği söylenilebilir:

"Sercan: [...]CD doğru parçası çizelim.. Onun için bir AB doğru parçası çizelim ki AB onun [[CD]nın] *orta dikmesi* [orta dikmesinin bir parçası] *olsun. Ama bence ikisi de birbirinin orta dikmesidir... O zaman ne diyelim?*

Damla: Yine aynı şey oldu... Sorunun cevabı evet yani..

Sercan: AB doğrusu CD doğrusunun orta dikmesinin... bir parçası ise.. o zaman bize ilk verilen metine göre, CD doğru parçası AB doğru parçası tarafından ikiye parçalanmış. Bu böyle olmak zorunda değil bence! [...]"

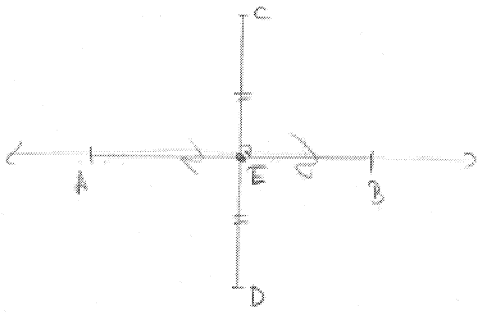
Bu gruba ait olan bir başka çizimde Şekil 24 de verilmiştir:



Şekil 24- 5.grubun 3. soruya ait ikinci çizimi

Bu çizim incelendiğinde ise yine öğrencilerin, $T_{3.1}$, $T_{3.2}$, $T_{3.3}$ ve $T_{3.10}$ temsil cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir.

6. grubun çözüm için yaptıkları çizim, aşağıdaki şekilde verilmiştir:

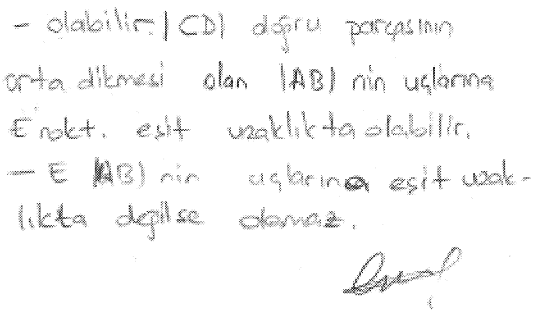


Şekil 25- 6.grubun 3. soruya ait çizimi

Şekil 25 incelendiğinde, bu grubun $T_{3.1}$, $T_{3.2}$, $T_{3.3}$, $T_{3.5}$, $T_{3.8}$ ve $T_{3.9}$ temsil cümlelerine sahip oldukları görülmektedir. Sadece grupta bulunan $T_{3.4}$, aşağıdaki şekilde kullanılmıştır:

"[CD]nın orta noktasını E harfi ile isimlendirme"

Bunun yanında grup, çözüm kağıdına şu açıklamayı yazmıştır:


- olabilir. |CD| doğru parçasının orta dikmesi olan |AB| nin uçlarına E nokt. eşit uzaklıkta olabilir.
- E |AB| nin uçlarına eşit uzaklıkta değilse olamaz.

Yukarıdaki açıklama yardımıyla, öğrencilerin, $T_{3.9}$ temsil cümlesini yazılı olarak ifade ettikleri, fakat şekil üzerinde çizimle göstermedikleri görülmektedir.

Tablo 8. 3. soruya ait Kontrol Kümesi

Anahtar Kavrama Kontrol Kümesi	**1.grup***	**2.grup**	**3.grup**	**4.grup**	**5.grup**	**6.grup**
1. İki noktadan bir ve yalnız bir nokta geçer.	+	+	+	+	+	+
2.Bir doğru parçası orta dikmesi, a) Bir doğrudur. b) Bu doğru, doğru parçasının orta noktasından geçer veya doğru parçasının orta noktası bu doğru üzerinde bulunur. c) Bu doğrunun doğru parçası ile yaptığı açı 90^0 dir.	+	+	+	+	+	+
3.Paralel doğruların ortak noktaları yoktur.	–	–	–	–	–	–

* 1. grup, 3. sorunun çözümünü yaparken AB doğru parçasını CD doğru parçası olarak almıştır.

Yukarıda verilen Tablo 8 de, öğrencilerin 3. soru ile ilgili kontrol cümleleri yer almaktadır. Bütün grupların, $K_{3.1}$ ve $K_{3.2}$ kontrol cümlelerine sahip oldukları görülmektedir. Burada $K_{3.1}$ ve $K_{3.2}$ kontrol cümlelerini aynı zamanda, öğrenci çizimleri de desteklemektedir. Her bir grup bir $[AB]$ çizdiği için, $K_{3.1}$ kontrolünü kullanmışlardır. 1. gruba ait aşağıdaki ifadeye bakılacak olunursa:

> *"AB nin orta dikmesi bu olsun.* [dikeyde $[AB]$ çizildi, orta dikmenin üzerinde ve $[AB]$nın sol tarafında kalacak şekilde bir $[CD]$ işaretlendi.] *CD doğru parçası da bu olsun.* [$[CD]$nın orta dikmesini çizdi.]*"*

Bu belirtilen ifade de $K_{3.2}$ kontrol cümlesinin kullanıldığı düşünülmektedir.

Bir diğer grup olan 2. grup için $K_{3.2}$ kontrol cümlesinin görüldüğü ifade, şu şekildedir:

"CD şöyle [yatayda] *AB de şöyle*[[CD]nın orta dikmesi üzerinde[CD]ye göre aynı tarafta] *olsun... AB doğru parçasının orta dikmesinin bir parçası olur mu?.. Olmaz ama paralel olur."*

Burada 2. grup [AB]nın orta dikmesi ile[CD]nın birbirine paralel olduklarını belirtmişlerdir. Fakat $K_{3.3}$ de yer alan kontrol cümlesini kullanmamışlardır.

3. gruba ait:

"[…]*Orta dikme bunun* [[CD]nın orta dikmesinin] *uç kısmında da alınmış olabilir. Şu şekilde*[[AB]ile[CD] birbirini ortalayacak şekilde] *işte bu şekilde olur ama olmayabilirde yani."*

fikrinden ve özellikle bu soru için yapılan çizimden, bu grubun $K_{3.2}$ kontrol cümlesine sahip olduğu düşünülmektedir.

Gözlemlenen gruplardan biriside 4. gruptur:

"[…]*CD doğru parçasının orta dikmesinin bir parçası ise.. yani şurada bir* [uç noktaları yani A ve B noktaları, [CD]nın aynı tarafında olacak şekilde]*."*

ifadesi göz önüne alındığında ve öğrencilerin sahip oldukları temsil kümesine balkıdığında yine bu grubunda, $K_{3.2}$ kontrol cümlesine sahip oldukları düşünülmektedir.

5. grup ise [CD]nın orta dikmesi yerine [CD]nın orta dikmesinin bir parçasını çizmelerine rağmen, $K_{3.2}$ kontrol cümlesini kullandıkları gözlemlenmiştir. Bu düşünce, öğrencilere ait çizim ve aşağıdaki ifade ile belirlenmiştir:

"AB doğrusu CD doğrusunun orta dikmesinin... bir parçası ise.. o zaman bize ilk verilen metine göre, CD doğru parçası AB doğru parçası tarafından ikiye parçalanmış."

Araştırmada incelenen son grup olan 6. gruba ait aşağıdaki ifadeye bakıldığında:

"AB orta dikmenin herhangi bir şeyi olduğu için.. parçası... Yani şöyle bir parça da [A ve B noktalarının, $[CD]$nın orta noktasına uzaklıkları farklı olacak şekilde] *olabilir, eşit yani iki uzaklığı eşit bir parçada olabilir.. yani CD de AB nin orta dikmesi de olabilir.. olmayadabilir..."*

6. grubun, Tablo 8 de yer alan $K_{3.2}$ kontrol cümlesine sahip olduğu düşünülmektedir. Ayrıca öğrencilerin çizimleri de bu düşünceyi desteklemektedir.

3. soru için gözlemlenen grupların verdikleri yanıtlar doğrultusunda, her bir gruba ait aşağıdaki tablolar ortaya çıkmıştır. Bu tablolar, grupların kavramalarını toparlamak adına düzenlenmiştir. Ayrıca bu tablolarda, gruplara ait olarak görünen (P,İ,T,K) kavrama öğeleri dışında gruplarda kavrama öğelerine rastlanılmamıştır:

Tablo 3.1. 1. grubun 3. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

1. grup	Problem Kümesi	$P_{3.1}, P_{3.2}, P_{3.3}, P_{3.4}$
	İşlem Kümesi	$İ_{3.1}, İ_{3.2}, İ_{3.3}, İ_{3.4}, İ_{3.5}$
	Temsil Kümesi	$T_{3.1}, T_{3.2}, T_{3.3}, T_{3.5}, T_{3.8}, T_{3.9}, T_{3.10}, T_{3.11}$
	Kontrol Kümesi	$K_{3.1}, K_{3.2}$

3. soru için elde edilen yazılı ve sözlü veriler göz önüne alınarak oluşturulan 1. grubun (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsüne bakıldığında, öğrencilerin yeterli problem

kümesi, işlem kümesi, temsil kümesi ve kontrol kümesi öğelerine sahip oldukları düşünülmektedir. Temsil kümesi için ayrıca yorum yapmak gerekirse, grup geometrik çizimlerini cebirsel olarak ifade etmek yerine, sözel olarak belirtmişlerdir. Şunu da belirmek gerekir ki, öğrenciler sorunun çözümünde, [AB]nı, [CD] olarak almışlardır.

Bu soruda, doğru sonuca ulaşmak için "orta dikme" kavramını, araç olarak kullanmışlardır. [AB]nın orta noktasını işaretleyerek, [AB]nın orta dikmesini çizmişlerdir. Öncelikle bu orta dikme üzerinde olan ve [AB] na göre aynı tarafta olan, C ve D noktalarını işaretlemişlerdir. [CD]nın orta dikmesini çizmişlerdir. Fakat işte tam olarak bu noktada, [AB] ile [CD]nın orta dikmesinin birbirine paralel olduğunu belirtmemişlerdir. İşte bu nedenle, öğrenciler anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde yer alan ve bu paralellik durumu ile ilgili olan problem, işlem ve kontrol cümlelerine sahip değildirler. Bunun yanı sıra, 3. soruda istenen şartın, sadece C ve D noktaları [AB]na göre simetrik noktalar ise sağlanabileceğini belirtmişlerdir. Bu işlem cümlesi de, anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünün ilgili işlem kümesindeki öğeye karşılık gelmektedir. Sonuç olarak, 3. soruda istenen çözüm 1. grup tarafından yapılmıştır.

Tablo 3.2. 2. grubun 3. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

2. grup	Problem Kümesi	$P_{3.1}, P_{3.2}, P_{3.3}, P_{3.4}, P_{3.6}$
	İşlem Kümesi	$İ_{3.1}, İ_{3.2}, İ_{3.3}, İ_{3.4}, İ_{3.5}, İ_{3.6}$
	Temsil Kümesi	$T_{3.1}, T_{3.2}, T_{3.3}, T_{3.5}, T_{3.8}, T_{3.9}, T_{3.10}$
	Kontrol Kümesi	$K_{3.1}, K_{3.2}$

2. gruptan toplanan verilerin ışığı altında, 2. grubun bu soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünün, anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü ile hemen hemen örtüştüğü görülmektedir. Bu grubun 2. soru için yaptıkları çözüme, sahip oldukları (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsündeki temsil kümesi açısından bakıldığında, kullandıkları cümlelerin eksik olduğu düşünülmektedir. [CD]nın orta dikmesi üzerinde, A ve B noktalarını aynı şekil üzerinde belirlediklerinden, sözlü olarak ifade ettikleri yardımı ile kavramaları tam olarak ortaya çıkarılabilmiştir.

Öğrenciler, "orta dikme" kavramını sorunun çözümde kullanmışlardır. [AB] ile [CD] nın orta noktalarının aynı olması durumunda , [AB] ile [CD] nın birbirinin orta dikmelerinin parçaları olabileceklerini kullandıkları işlem cümleleriyle belirtmişlerdir. Bunun yanında [AB] ile [CD] nın orta noktalarının aynı nokta olmaması durumunda, [CD] ile [AB] nın orta dikmesinin birbirine paralel olacağını söylemişlerdir. Fakat bunu geometrik çizimleriyle desteklememişlerdir. Bu bağlamda anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü göz önüne alındığında uygun işlem ve kontrol cümlelerini kullandıkları gözlemlenmiştir.

Tablo 3.3. 3. grubun 3. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

3. grup	Problem Kümesi	$P_{3.1}, P_{3.2}, P_{3.3}, P_{3.4}$
	İşlem Kümesi	$İ_{3.1}, İ_{3.2}, İ_{3.3}, İ_{3.4}, İ_{3.5}$
	Temsil Kümesi	$T_{3.1}, T_{3.2}, T_{3.3}, T_{3.5}, T_{3.8}, T_{3.10}$
	Kontrol Kümesi	$K_{3.1}, K_{3.2}$

3. grubun bu soru için yaptıkları çözüm değerlendirildiğinde, anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde yer alan öğelerin büyük bir çoğunluğunu kullanmış oldukları, araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir. Fakat diğer gruplar da olduğu gibi, temsil kümesi öğeleri tam olarak anahtar kavramada yer aldığı şekliyle kullanılmamıştır. Geometrik çizimler, çok açık bir şekilde ifade edilmemişlerdir.

Bu grupta yer alan Buğra, [CD]nın orta dikmesini çizdikten sonra, [CD]nın, [AB]nın orta dikmesi olamayacağını belirtmiştir. 3. grup, A ve B noktalarının, çizilen [CD]nın orta dikmesinin uç kısmında alınmasıyla, yani A ve B noktalarının [CD]na göre aynı tarafta bulunması durumunda, istenen şartın sağlanamayacağını söylemişlerdir. Bu doğrultuda da, gerekli temsil cümlelerini kullanmışlardır. A ve B noktaları, [CD]na göre farklı taraflarda ve [CD]nın orta noktasına eşit uzaklıkta olacak şekilde yerleştirildiğinde, istenen şartın sağlanacağını belirtmişlerdir. Böylece bu grubun eksik ama uygun işlem ve kontrol cümleleri kullandığı düşünülmektedir.

Tablo 3.4. 4.grubun 3. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

4. grup	Problem Kümesi	$P_{3.1}, P_{3.2}, P_{3.3}, P_{3.4}$
	İşlem Kümesi	$İ_{3.1}, İ_{3.2}, İ_{3.3}, İ_{3.4}, İ_{3.5}$
	Temsil Kümesi	$T_{3.1}, T_{3.2}, T_{3.3}, T_{3.5}, T_{3.8}, T_{3.9}, T_{3.10}$
	Kontrol Kümesi	$K_{3.1}, K_{3.2}$

Bu grupta yer alan Kadir ve Didem'in soruyu çözme süreçlerine bakıldığında, bu öğrencilerin (P,İ,T,K) kavrama dörtlüleri ile anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüleri çoğu yerde uyuşmaktadır. Bunun yanında araştırmacı tarafından, temsil kümeleri göz önüne alındığında, kullandıkları geometrik ve sembolik temsiller yeterli görülmemektedir.

Kadir, [CD]nın orta dikmesini çizdikten sonra A ve B noktalarını, [CD]na göre aynı tarafta kalacak şekilde işaretlemiştir. Sonrasında grup, istenen şartın böylesi bir durumda sağlanmadığını belirtmiştir. Temsil kümelerindeki eksikliklerden birisi de, [AB]nın orta dikmesini çizmemiş olmalarıdır. Bunun yanında, A ve B noktaları [CD]nın farklı tarafında ve [CD]nın orta noktasına eşit uzaklıkta olacak şekilde yerleştirilirse, o zaman bu sorunun cevabının evet olduğunu

belirtmişlerdir. Bu bağlamda, 4. grubun istenilen düzeye yakın bir sonuç bulmuş oldukları, araştırmacı tarafından düşünülmektedir.

Tablo 3.5. 5.grubun 3. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

5. grup	Problem Kümesi	$P_{3.1}, P_{3.2}, P_{3.3}, P_{3.4}$
	İşlem Kümesi	$İ_{3.1}, İ_{3.2}, İ_{3.3}, İ_{3.4}, İ_{3.5}$
	Temsil Kümesi	$T_{3.1}, T_{3.2}, T_{3.3}, T_{3.5}, T_{3.8}, T_{3.10}$
	Kontrol Kümesi	$K_{3.1}, K_{3.2}$

3. soru için Sercan ve Damla'dan oluşan 5. gruba ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsüne bakıldığında, bu grubun anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde yer alan öğelerle örtüştüğü görülmektedir. Temsil kümesi düşünüldüğünde, $[CD]$nın orta dikmesini çizmek yerine, $[CD]$nın orta dikmesinin bir parçasını çizdikleri görülmektedir.

Soruyu ilk okuduklarında, $[CD]$ ve $[AB]$nın birbirinin orta dikmelerinin parçası olduklarını söylemişlerdir. Bu durumu, çizimle ifade etmeye başladıklarında Sercan, bu durumun olamayacağını fark etmiştir. Bu şartın $[CD]$nın, $[AB]$nın orta dikmesinin bir parçası olmaması halini, çizimle göstermiştir. Bu süreç içinde, kullanılan işlem ve kontrol cümlelerinin yeterli görülmektedir. Bu grup da, $[AB]$nın orta dikmesi çizimle göstermemişlerdir. Bu elde edilen gözlemler yardımıyla, 5. grubun soruda istenen cevabını, genel olarak verildiği düşünülmektedir.

Tablo 3.6. 6. grubun 3. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

6. grup	Problem Kümesi	$P_{3.1}, P_{3.2}, P_{3.3}, P_{3.4}$
	İşlem Kümesi	$İ_{3.1}, İ_{3.2}, İ_{3.3}, İ_{3.4}, İ_{3.5}$
	Temsil Kümesi	$T_{3.1}, T_{3.2}, T_{3.3}, T_{3.4}, T_{3.5}, T_{3.8}, T_{3.9}$
	Kontrol Kümesi	$K_{3.1}, K_{3.2}$

3. soru için elde edilen yazılı ve sözlü verilerin ışığı altında, 6. grupta bulunan Gizem'in (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsüne bakıldığında yeterli problem kümesi, işlem kümesi, temsil kümesi ve kontrol kümesine sahip olduğu düşünülmektedir. Temsil kümesi için ayrıca yorum yapmak gerekirse, Gizem geometrik çizimlerden ve sembolik gösterimlerden de yararlanmıştır ve bu gösterimlerini, sözel olarak belirtmiştir. Serkan için ise "orta dikme" kavramı ile ilgili olan işlem cümlelerinde, hatalı bilmeler yer almaktadır.

Gizem, [CD]nın orta dikmesini çizdikten sonra, [CD]nın orta noktasını, E harfi ile göstermiştir. Sonrasında E noktası aynı zamanda, [AB]nın da orta noktası olduğu durumda, [CD]nın, [AB]nın orta dikmesinin bir parçası olabileceğini belirtmiştir. Serkan ise her ikisinin birbirinin orta dikmelerinin bir parçası olduğunu belirterek, hatalı işlem ve kontrol cümleleri kullanmıştır. Gizem de, Serkan'a neden bu durumun sağlanmayacağını anlatmaya çalışmıştır. Bu durumdan da, Serkan'ın "orta dikme" kavramı ile ilgili hatalı bilmelere sahip olduğu, araştırmacı tarafından çıkartılmaktadır.

4.4. 4. soruya ait bulgular

Tablo 9. 4. soruya ait Problem Kümesi

Anahtar Kavrama Problem Kümesi	1.grup	2.grup	3.grup	4.grup	5.grup	6.grup
1.Bir düzlem nedir?	+	+	+	+	+	+
2.Düzlemde doğrusal olmama ne demektir?	+	+	+	+	+	+
3.İki noktaya eşit uzaklıkta olmak ne demektir?	+	–	–	+	–	–
4.Bir doğru parçasının orta dikmesi nedir?	+	–	–	+	–	–
5.İki doğrunun kesim noktası ne demektir?	+	–	–	+	–	–
6.Bir noktanın bir doğru üzerinde olması ne demektir?	+	–	–	+	–	–
7.Eşitlik bağıntısının geçişken olması ne demektir?	+	–	–	–	–	–
8.Bir doğrunun bir noktadan geçmesi ne demektir?	–	–	–	–	–	–
9.Ortak iki noktaya sahip doğruların birbirine göre durumları nedir?	–	–	–	–	–	–

Tablo 9, grupların 4. soru için oluşturdukları problem kümelerini göstermektedir. 4. soru içinde, "*düzlem*" ve "*doğrusal olmayan A, B, C noktaları*" ifadeleri yer aldığından, $P_{4.1}$ ve $P_{4.2}$ problem cümlelerini, bütün grupların kullandıkları düşünülmektedir. 1. grubun, 4. sorunun çözümü için çizdikleri ve aşağıdaki açıklamaları dikkate alındığında:

> *"Bu* [nokta] *bir tanedir.. Çünkü böyle bunun* [[AB]nın] *orta dikmesini çizersek. Bununkini de* [[AC]nın] *çizersek.. Bu noktadır.*[d_1 ve d_2 nin kesim noktasıdır.]

grubun, Tablo 9 da yer alan, $P_{4.1}$, $P_{4.2}$, $P_{4.3}$ ve $P_{4.4}$ problem cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir. Yine 1. grubun kullandıkları gözlemlenen $P_{4.5}$ ve $P_{4.6}$ problem cümlelerinin dayandırıldığı ifade, şu şekildedir:

"Şu doğrunun [d_2] *üzerindeki bir D noktası, AD eşit CD olması için yani biz D noktası diyelim, geometrik yeri istenen nokta.. AD eşit CD olması için D noktası şu doğru* [d_2] *üzerinde olmalı. AD eşit BD olması içinde D noktası şu doğru* [d_1] *üzerinde olmalı. D hem* d_1 *in hem* d_2 *nin üzerinde ise yani ortak noktasında olması gerekir. Dolayısıyla D burası* [d_1 ve d_2 nin kesim noktası]*"*

Bu grubun kullandığı son problem cümlesi, $P_{4.7}$ dir. Bunu destekleyen öğrenci görüşü şöyledir:

"Şimdi şu şey olduğu için, şurasıyla şurası eşit [[AD]ve [DB]nın uzunluklarının eşit olması]*, zaten D nin koşulundan. Şurasıyla şurası eşit* [[AB]nın iki eş parçaya ayrılması] [d_1 ve [AB] birbirine] *dik olduğu için. Bu şey oluyor, ABD ikizkenar oluyor. Aynı şekilde AD de DC ye eşittir. Dolayısıyla BD ile DC eşittir zaten."*

2. grup için, Tablo 9 incelendiğinde bu grubun, $P_{4.1}$ ve $P_{4.2}$ problem cümlelerine sahip oldukları görülmektedir:

"Şimdi doğrusal değil noktalar. Orta nokta şu [A, B ve C noktalarının birleştirilmesiyle oluşan üçgenin iç bölgesinde işaretlenen bir nokta] *olsun. Bu* [işaretlenen nokta, A, B ve C noktalarına] *eşit uzaklıkta olacak.. Bunlar... Ağırlık merkezi olabilir burası* [işaretlenen nokta]"

Yukarıda verilen ifadede öğrenciler, $P_{4.1}$ ve $P_{4.2}$ problem cümlelerinin yanında, şu problem cümlesini de kullandıkları gözlemlenmiştir:

"Ağırlık merkezi nedir?"

Bunların yanı sıra, bu gruba ait bir başka ifade:

"Bunlar [oluşan üçgenin iç bölgesinde işaretlenen nokta ile A, B ve C noktalarının birleştirilmesiyle oluşan doğru parçaları] *kenarortay mı? Belki çevrel çemberinin merkezidir.. Belki iç teğet çemberinin merkezidir... Belki hiçbir şeydir. Bunların hepsi farklı şeyler... Birisi kenar orta dikmelerinin miydi neydi? Diğeri açıortayların kesim noktası..."*

şeklindedir. Burada öğrencilerin sahip oldukları düşünülen problem cümleleri ise şöyledir:

"Çevrel çemberin merkezi nedir?

İç teğet çemberin merkezi nedir?"

Son olarak 2. gruba ait bir başka ifade aşağıdaki gibidir:

"Şurası dik olduğunda [$\overset{\Delta}{ABC}$ de A noktasından $[BC]$na çizilen doğru parçası $[BC]$na dik olduğunda] *ikizkenar üçgen şuralar* [$[BC]$nın iki eş parçaya ayrılması] *eşit olur.. da dik olduğunu nerden biliyoruz. Birde üç tane ikizkenar üçgen oluşabilir. Eğer şurası dik olursa eğer kesinlikle ağırlık merkezi olur. "*

Bu ifade de ise kullanılan problem cümlesi, şu şekilde verilebilir:

"İkizkenar üçgenin özellikleri nelerdir?"

Tablo 9 a bakıldığında, 3. grubun $P_{4.1}$ ve $P_{4.2}$ problem cümlelerini kullandıkları düşünülmektedir. Bu destekleyen öğrenci görüşü şöyledir:

"Bir nokta alacağım üçüne de eşit uzaklıkta olacak A B C ye. Herhangi bir nokta."

Burada öğrencilerin kullandıkları problem cümleleri belirlenirken, soru için yapılan çizim de göz önüne alınmıştır. Ayrıca öğrencilere ait bir başka fikir:

"Üçgen.. Çevrel çember... Bütün kenarları düşünürsek eşit uzaklıkta olduğu için r, r, r deriz. Eşit uzaklıkta."

şeklindedir. Burada öğrencilerin sahip oldukları problem cümlesi aşağıdaki gibidir:

"Çevrel çember nedir?

Tablo 9 da 4. grup için, $P_{4.1}$ ve $P_{4.2}$ cümleleri aşağıdaki öğrenci görüşüne dayandırılarak belirlenmiştir:

"Şimdi ben kafama göre A B C çizerimde... Yani bir çemberin merkezi gibi çizerim.. Çemberin üstündeki noktalar olarak çizerim. Çemberin merkezine eşit uzaklıktaki nokta olur. Burası A olur.. burası B olur.. burası C olursa... İşte şöyle bir yaydan geçirsek... İşte bunun düzgün olanını farz etsek.. Bunlara eşit uzaklıkta olan yarıçapı r olur işte.. merkez noktası eşit olur..."

Ayrıca yukarıda verilen öğrenci görüşüyle birlikte, bu grubun tabloda yer almayan problem cümleleri şöyledir:

"Çemberin merkezi nedir?

Çemberin yarıçapı nedir?

Yay nedir?"

4. gruba ait bir başka görüş aşağıdaki gibidir:

"Böyle [B ile C noktasını birleştirme] *yaparsak ta... B ile C nin orta noktasını buluruz. Bu doğruya* [[BC]] *dik bir doğru üzerinde... Bu uzaklığı* [[BC]nın orta dikmesi üzerinde seçilen noktanın, B ve C noktalarına uzaklığı] *AB* [A ve B noktaları] *arasında yakalayamıyorum... Burada* [[BC]nın orta dikmesi üzerinde] *bu* [[BC]nın orta dikmesi üzerinde seçilen noktasının B ve C noktalarına uzaklığı] *eşit böyle..."*

Burada öğrencilerin, $P_{4.3}$ ve $P_{4.4}$ problem cümleleri kullandıkları gözlemlenmektedir. Aşağıdaki ifade de ise $P_{4.6}$ problem cümlesi görülmektedir:

"O dikin [[BC]nın orta dikmesi] *üzerinde B ile C nin* [[BC]nın orta dikmesi üzerinde seçilen noktasının B ve C noktalarına uzaklığı] *sürekli eşit olduğunu farz etsek... Onu A ile B arasında da yapabilirim de... B ile C sürekli eşit.. Zaten mutlaka bu doğrunun üzerinde B ile C eşitliği sağlanacak. Ama birde Anın eşitliğini sağlamamız için de.. Onu da bulacağız işte..."*

Benzer şekilde Tablo 9 da 4. gruba ait olan $P_{4.5}$ problem cümlesi, aşağıdaki ifade yardımıyla belirlenmiştir:

"Aslında biraz önce dik dedim ya.. mesela.. bu doğruya [[BC]na] *dik gelen her yerden B ile C eşit oluyor.. A ile C ye dik gelen her yerden.. Hı şöyle eşit...Bura eşit..* [[AC]nın iki eş parçaya ayrılması] *B ile şu A ya da dik olduğu yerden..* [[AB]nın orta dikmesinden] *Onlar bir noktada kesişirler.*

Şurada kesişsin işte bunlar.. Buda buna [[AB]nın iki eş parçaya ayrılması]*eşit oldu. Bu noktadır."*

Tablo 9, 5. grup için incelendiğinde, bu grubun $P_{4.1}$ ve $P_{4.2}$ problem cümlelerine sahip oldukları gözlemlenmiştir. Bu gözlem, öğrenci çizimleri ve aşağıda verilen ifade ile desteklenmektedir:

"Doğrusal olmayan noktaları belirleyelim.... bunları [A, B, C noktalarını] *belirledik.."*

İncelenen son grup olan 6. grup için problem cümleleri belirlenirken, aşağıdaki öğrenci görüşü ve 4. sorunun çözümü için oluşturdukları şekilde göz önüne alınmıştır:

"Nokta belirledim.. Doğrusal olmayan üç tane nokta belirledim..."

Bu durumda 6. grubun Tablo 9 da yer alan, $P_{4.1}$ ve $P_{4.2}$ problem cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir.

Tablo 10. 4. soruya ait İşlem Kümesi

Anahtar Kavrama İşlem Kümesi	1.grup	2.grup	3.grup	4.grup	5.grup	6.grup
1.Amaç, düzlemde doğrusal olmayan A, B ve C noktalarının her birine eşit uzaklıkta bulunan noktaları tespit etmek olduğuna göre, öncelikle doğrusal olmayan bu noktaların herhangi ikisine eşit uzaklıkta bulunan noktaların yerlerin bulunması	+	–	–	+	–	–
2. $[AB]$nın orta dikmesi çizilecek olunursa, A ve B noktalarına eşit uzaklıkta bulunan bütün noktaların, $[AB]$nın orta dikmesi üzerinde olması.	+	–	–	+	–	–
3.d_1 doğrusu, $[AB]$nın orta dikmesi olduğundan $[AB] \perp d_1$ ve $\|AD\| = \|DB\|$ olması	+	–	–	+	–	–
4. $[BC]$nın orta dikmesi çizilecek olunursa, B ve C noktalarına eşit uzaklıkta bulunan bütün noktaların $[BC]$nın orta dikmesi üzerinde olması.	+	–	–	+	–	–
5.d_2 doğrusu, $[BC]$nın orta dikmesi olduğundan $[BC] \perp d_2$ ve $\|BE\| = \|EC\|$ olması.	+	–	–	+	–	–
6.O noktası, $[AB]$nın orta dikmesi üzerinde olduğundan, O noktası, A ve B noktalarıyla birleştirilirse, oluşan $[AO]$ ve $[BO]$nın uzunluklarının birbirine eşit olması.	+	–	–	–	–	–
7.O noktası, aynı zamanda $[BC]$nın orta dikmesi üzerinde olduğundan O noktası, C noktasıyla birleştirilirse, $[BO]$ ve $[CO]$nın uzunluklarının birbirine eşit olması	+	–	–	–	–	–
8.Eşitlik bağıntısı geçişken olduğundan O noktasının, A, B ve C noktalarına eşit uzaklıkta olması	+	–	–	–	–	–
9. O noktası, hem A noktasına hem C noktasına eşit uzaklıkta olduğundan $[AC]$nın orta dikmesi çizilecek olunursa, bu doğrunun O noktasından geçmesi.	+	–	–	–	–	–
10. $\|QA\| = \|QB\|$ ise Q noktasının, $[AB]$nın orta dikmesi üzerinde olması.	–	–	–	–	–	–
11. $\|QA\| = \|QC\|$ ise Q noktasının, $[AC]$nın orta dikmesi üzerinde olması.	–	–	–	–	–	–
12. $\|QB\| = \|QC\|$ ise Q noktasının, $[BC]$nın orta dikmesi üzerinde olması.	–	–	–	–	–	–

13.Üç orta dikmeden herhangi ikisini alınacak olursa bu iki nokta [*O ve Q noktaları*] orta dikmelerin her ikisinin üzerinde bulunacağından bu doğruların [*orta dikmelerin*] iki ortak noktasının olması.	–	–	–	–	–	–
14.Geçişme özelliğinden bu üç dikmenin çakışık olması.	–	–	–	–	–	–
15.A, B ve C noktaları doğrusal olmadığından, bu dikmelerin birbirlerinden farklı olması.	–	–	–	–	–	–

Tablo 10 a dikkatli bir şekilde bakıldığında, 1. ve 4. gruplar dışında işlem cümlesi kullanan grubun bulunmadığı gözükmektedir. 1. gruba ait:

> *"Bu* [nokta] *bir tanedir.. Çünkü böyle bunun* [[AB]nın] *orta dikmesini çizersek. Bununkini de* [[AC]nin] *çizersek.. Bu noktadır.* [d_1 ve d_2 nin kesim noktasıdır.]

ifadesi göze alındığında bu grubun $İ_{4.1}$, $İ_{4.3}$ ve $İ_{4.5}$ işlem cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir. 1. grubun sahip olduğu $İ_{4.2}$ ve $İ_{4.4}$ işlem cümleleri:

> *"Şu doğrunun* [d_2] *üzerindeki bir D noktası, AD eşit CD olması için yani biz D noktası diyelim, geometrik yeri istenen nokta.. AD eşit CD olması için D noktası şu doğru* [d_2] *üzerinde olmalı. AD eşit BD olması içinde D noktası şu doğru* [d_1] *üzerinde olmalı. D hem* d_1 *in hem* d_2 *nin üzerinde ise yani ortak noktasında olması gerekir. Dolayısıyla D burası* [d_1 ve d_2 nin kesim noktası]"

ifadesinden çıkartılmıştır. Yine bu grubun kullandığı düşünülen bir diğer işlem cümleleri olan $İ_{4.6}$, $İ_{4.7}$, $İ_{4.8}$ ve $İ_{4.9}$ aşağıdaki ifade yardımıyla ortaya atılmıştır:

> *"Şimdi şu şey olduğu için, şurasıyla şurası eşit* [[AD]ve [DB]nın uzunluklarının eşit olması], *zaten D nin koşulundan. Şurasıyla şurası eşit*

[[AB]nın iki eş parçaya ayrılması] [d_1 ve [AB] birbirine] *dik olduğu için. Bu şey oluyor, ABD ikizkenar oluyor. Aynı şekilde AD de DC ye eşittir. Dolayısıyla BD ile DC eşittir zaten."*

Tablo 10 dan da görüldüğü gibi, gruplardan beklenilen işlem cümleleri 2. grupta yer almamaktadır. 2. grup sezgisel olarak, soruda sadece bir nokta istendiğini şu şekilde belirtmişlerdir:

"Meriç: Geometrik yeri bir tek nokta bence.

Berre: Hayır.

Meriç: Yani eşit uzaklıkta bulunan noktalar bir tektir. Noktalar değil nokta.

Berre: Evet nokta bir tane olması lazım.

Meriç: Noktayı şöyle çizelim.

Berre: Bu ağırlık merkezi oluyor."

Yukarıda belirtildiği gibi, hiçbir işlem cümlesi kullanılmadan, istenen yerin "*ağırlık merkezi*" olduğu öğrenciler tarafından dile getirilmiştir. Daha sonrasında, yine sezgisel olarak istenen yerin, neden "*ağırlık merkezi*" olmadığı üzerinde durdukları görülmüştür:

"Meriç: Bunlar [oluşan üçgenin iç bölgesinde işaretlenen nokta ile A, B ve C noktalarının birleştirilmesiyle oluşan doğru parçaları] *kenarortay mı? Belki çevrel çemberinin merkezidir. Belki iç teğet çemberinin merkezidir. Belki hiçbir şeydir. Bunların hepsi farklı şeyler. Birisi kenar orta dikmelerinin miydi neydi? Diğeri açıortayların kesim noktası. Normal düzlemdeyse tek bir nokta. Üçgen olarak tanımlarsak yapamadım. Ya üçgende işte rasgele alınmış bir nokta bunlara* [A, B, C noktalarına] *eşit olmuş. Alanla falan bir alakası var mı acaba?*

Berre: Emin değilim ama bence ağırlık merkezi olabilir... Şurası dik olduğunda [$\overset{\Delta}{A}BC$ de A noktasından $[BC]$na çizilen doğru parçası] *ikizkenar üçgen şuralar* [$[BC]$nın iki eş parçaya ayrılması] *eşit olur.. da dik olduğunu nerden biliyoruz. Birde üç tane ikizkenar üçgen oluşabilir. Eğer şurası dik olursa eğer kesinlikle ağırlık merkezi olur."*

Yukarıdaki konuşmada, iki işlem cümlesinin olduğu düşünülmektedir. Bunlardan ilki Meriç'e aittir:

"A, B, C noktaları, bir üçgenin köşeleri olacak şekilde ikişerli birleştirilmezse istenen yerin tek bir nokta olması."

Berre 'ye ait olan bir diğer işlem cümlesinin ise:

"$\overset{\Delta}{A}BC$ de A noktasından ve iç bölgesinde alınan noktayı birleştiren doğru parçası, $[BC]$na dik olduğunda istenen yerin ağılık merkezi oluşu."

şeklinde düşünülmektedir. Bu işlem cümlelerinden sonra, yine gruptaki öğrenciler arasında şöyle bir konuşma geçmiştir:

"Meriç: Bence değil... Bunların [oluşan üçgenin iç bölgesinde işaretlenen nokta ile A, B ve C noktalarının birleştirilmesiyle oluşan doğru parçaları] *kenarortay olduğunu bilmiyoruz ki... Yani mesela diyelim. Noktalar şu şekilde* [doğrusal olmayan A, B, C noktaları olacak şekilde]*olsun. Mesela geometri sorusu çözerken ağırlık merkezi verilirse o zaman hepsine eşit diyeceğiz o zaman...*

Berre: Aaa evet olmaz o zaman.."

Burada Meriç tarafından kullanılan işlem cümlesi şu şekildedir:

"Geometri sorularında bir $\overset{\Delta}{ABC}$ nin ağılık merkezi verilirse, A, B, C noktalarını ağırlık merkezine birleştiren doğru parçalarının uzunluklarına eşit denmesi"

Tablo 10, 3. grup için incelendiğinde, bu gruba ait hiçbir işlem olmadığı görülmektedir. Bunun yanında, öğrencilere ait aşağıdaki ifadeye bakılacak olunursa:

"Üçgen.. Çevrel çember... Bütün kenarları [üçgenin bütün köşeleri] *düşünürsek* [işaretlenen noktaya] *eşit uzaklıkta olduğu için r, r, r deriz. Eşit uzaklıkta."*

Öğrencilerin bu ifadelerinde olduğu düşünülen işlem cümlesi şu şekildedir:

"Üçgenin çevrel çemberinin merkezi A,B ve C noktalarıyla birleştirilirse,oluşan uzunlukların birbirine eşit olması."

4. grup, Tablo 10 da adına belirtilmeyen diğer işlem cümlelerine de sahip oldukları düşünülmektedir. Aşağıda verilen öğrenci görüşüne bakılacak olunursa:

"Şimdi ben kafama göre A B C çizerimde... Yani bir çemberin merkezi gibi çizerim.. Çemberin üstündeki noktalar olarak çizerim. Çemberin merkezine eşit uzaklıktaki nokta olur. Burası A olur.. burası B olur.. burası C olursa... İşte şöyle bir yaydan geçirsek... İşte bunun düzgün olanını farz etsek.. Bunlara eşit uzaklıkta olan yarıçapı r olur işte.. merkez noktası eşit olur..."

Burada öğrencilerin kullandıkları düşünülen işlem cümlesi şu şekildedir:

"A, B, C noktaları bir çemberin üzerindeki noktalar ise bu noktaların çizilen çemberin merkezine eşit uzaklıkta olması."

4. grubun, $İ_{4.1}$, $İ_{4.4}$ ve $İ_{4.5}$ işlem cümlelerini aşağıdaki ifade de kullandıkları düşünülmektedir:

"Böyle [B ile C noktasını birleştirme] *yaparsak ta... B ile C nin orta noktasını buluruz. Bu doğruya* [[BC]] *dik bir doğru üzerinde... Bu uzaklığı* [[BC]nın orta dikmesi üzerinde seçilen noktanın, B ve C noktalarına uzaklığı] *AB* [A ve B noktaları] *arasında yakalayamıyorum... Burada* [[BC]nın orta dikmesi üzerinde] *bu* [[BC]nın orta dikmesi üzerinde seçilen noktasının B ve C noktalarına uzaklığı] *eşit böyle..* […] *Biraz önce ne biliyim birinci ve ikinci sorulardaki gibi… Ama bu seferde A nın eşitliğini sağlamamız lazım... Bu* [nokta] *her yerde olabilir* [[BC]nın orta dikmesi üzerinde herhangi bir yerde] *diye düşünüyorum… Nerde denk gelirse artık! Yaa..şurada da .. burada da* [[BC]nın orta dikmesi üzerinde rasgele noktalar] *sağlayabilir B C ve A eşitliğini.. Başka bir yerde de sağlayabilir... Aydınlatıcı olmadı mı? Eksik... Biraz düşünelim... Ama cevabı bulamadım!."*

Aşağıda yine 4 gruba ait bir konuşma verilmiştir:

Didem: Yani şöyle bir şey... dik üçgende kenarortayı indirdiğimizde… şunlar eşit.. [kenarortayın hipotenüste ayırdığı parçalara eşit olması]
Kadir: Ne?
Didem: Yani aynı uzaklıkta oluşu…
Kadir: Doğru.. Ama bura [kenarortayın hipotenüsü kestiği nokta] *dik çıkmıyor. Dik değil.*
Didem: Ama dik olmaması şart değil ki!

Kadir: İşte dik değilse nasıl bulacağız onu? Dikse bulabiliriz de.. Bunu doksan tane açısı var yani.. Hatta daha fazla var...”

Burada Didem ’in kullandığı işlem cümlesi şu şekildedir:

“Dik üçgende dik açının karşısındaki kenara ait kenarortay çizilirse bu kenarın orta noktası A,B ve C noktalarına eşit uzaklıkta olması”

Son olarak 4. gruba ait aşağıdaki ifade yardımıyla, grubun $\dot{I}_{4.2}$ ve $\dot{I}_{4.3}$ işlem cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir:

“*Kadir:Aslında biraz önce dik dedim ya.. mesela.. bu doğruya* [[BC]na] *dik gelen her yerden B ile C eşit oluyor.. A ile C ye dik gelen her yerden.. Şöyle eşit...Bura eşit..* [[AC]nın iki eş parçaya ayrılması] *B ile şu A ya da dik olduğu yerden..* [[AB]nın orta dikmesinden] *Onlar bir noktada kesişirler. Şurada kesişsin işte bunlar.. Buda buna* [[AB]nın iki eş parçaya ayrılması] *eşit oldu. Bu noktadır. Bu diklikler bir noktada kesişir mi? Kesişmez gibi sanki! Yani hani iki tanesi kesişirde, üçüncüsü aynı noktadan geçmez.... Geçer mi?*
Didem: Her üçgende geçerli olmaz..”

Gözlemlenen bir diğer grup olan 5. grup, Tablo 10 da yer alan işlem cümlelerinden, hiç birini kullanmadıkları gözlemlenmiştir. Sezgisel olarak, istenen noktanın yerine karar verdikleri düşünülmektedir:

“Sercan: Bence eşit uzaklıkta bulunan noktalar yoktur, sadece bir nokta vardır.

Damla: Sadece bir nokta vardır.”

5. grubun, bu sorunun çözümünde kullandığı işlem olmadığı görülmüştür.

Benzer şekilde Tablo 10 da, 6. grup içinde bir işlem cümlesi yer almamaktadır:

"Üçüne de eşit uzaklıkta olacak... Bence yine bir noktadır. Yani üç noktaya eşit uzaklıkta olan ne olabilir ki?"

Yukarıda belirtilen ifadelerinde 6. grup, sezgisel olarak cevap verdikleri düşünülmektedir. Ayrıca bu grupta yer alan Serkan, aşağıdaki ifadeyi kullanmışlardır:

"Nokta belirledim.. Doğrusal olmayan üç tane nokta belirledim... Şimdi bir noktanın eşit uzaklıkta olması için bunların arasındaki.. ne kadar olduğunu bulmaya çalıştım. Şimdi bulacağım.. yani yapacağım nokta da onlara eşit uzaklıkta olması için birbirinden çıkaracağım şeyleri.. cm leri... Eşit nokta elde etmeye çalışacağım."

Burada Serkan'ın ifade etmeye çalıştığı durum, tam olarak ortaya konulamamıştır. Bu ifade de her hangi bir işlem cümlesi çıkartılamamaktadır.

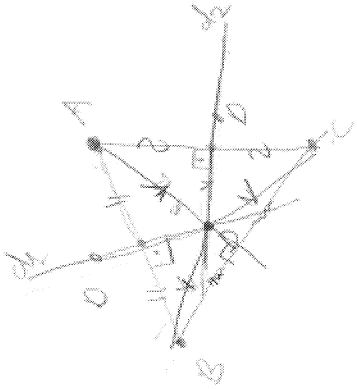
Tablo 11. 4. soruya ait Temsil Kümesi

Anahtar Kavrama Temsil Kümesi	**1.grup**	**2.grup**	**3.grup**	**4.grup**	**5.grup**	**6.grup**
1.Düzlemde doğrusal olmayan üç nokta işaretleme	+	+	+	+	+	+
2.Doğrusal olmayan noktaları A,B ve C harfleri ile isimlendirme	+	+	+	+	+	+
3.A, B ve C noktalarını ikişerli olarak birleştirme ve $\overset{\Delta}{ABC}$ oluşturma	+	+	+	+	–	–
4. [AB]nın orta noktasını işaretleme	+	–	–	+	–	–
5. [AB] nın orta noktasını D harfi ile isimlendirme	–	–	–	–	–	–

6. $[AB]$nın orta dikmesini çizme	+	–	–	+	–	–
7. $[AB]$nın orta dikmesini d_1 ile isimlendirme	+	–	–	–	–	–
8. $[AB]$ nın d_1 doğrusuna dik olduğunu "$[AB] \perp d_1$" şeklinde gösterme	–	–	–	–	–	–
9. $[AD]$ ile $[DB]$nın uzunluklarının birbirine eşit olduklarını "$\|AD\| = \|DB\|$" şeklinde gösterme	–	–	–	–	–	–
10. $[BC]$nın orta noktasını işaretleme	+	+	–	+	–	–
11. $[BC]$nın orta noktasını E harfi ile isimlendirme	–	–	–	–	–	–
12. $[BC]$nın orta dikmesini çizme	+	–	–	+	–	–
13. $[BC]$nın orta dikmesini d_2 ile isimlendirme	+	–	–	–	–	–
14. $[BC]$nın d_2 doğrusuna dik olduğunu "$[BC] \perp d_2$" şeklinde gösterme	–	–	–	–	–	–
15. $[BE]$ ile $[EC]$nın uzunluklarının birbirine eşit olduklarını "$\|BE\| = \|EC\|$" şeklinde gösterme	–	–	–	–	–	–
16.d_1 ve d_2 nin kesim noktasını O harfi ile isimlendirme	+	–	–	–	–	–
17. "$d_1 \cap d_2 = \{O\}$" şeklinde gösterme	–	–	–	–	–	–
18.O noktasıyla A ve B noktalarını birleştirme	+	+	+	–	–	–
19. $[AO]$ve$[BO]$nın uzunlukları birbirine eşit olduğunu sembollerle gösterme	+	+	+	–	–	–
20. "$\|AO\| = \|BO\|$" ifadesini yazma	–	–	–	–	–	–
21.O noktasıyla C noktasını birleştirme	+	+	+	–	–	–
22. $[BO]$ ve $[CO]$nın uzunlukları birbirine eşit olduğunu sembollerle gösterme	+	+	+	–	–	–
23."$\|BO\| = \|CO\|$" ifadesini yazma	–	–	–	–	–	–
24. $[AC]$nın orta dikmesini, O noktasından geçecek şekilde çizme	+	–	–	+	–	–

Tablo 11, gruplara yöneltilen 4. soruda öğrencilerin kullandıkları temsil cümlelerini ifade etmektedir. Bütün grupların, $T_{4.1}$ ve $T_{4.2}$ temsil cümlelerini

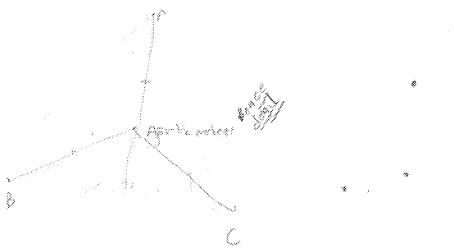
kullandıkları gözükmektedir. Bunun nedeninin de, 4. soru içinde geçen "*doğrusal olmayan A, B, C noktaları*" ifadesi olduğu düşünülmektedir. 1. gruba ait çizim aşağıda verilmiştir:



Şekil 26- 1.grubun 4. soruya ait çizimi

Yukarıdaki çizim incelendiğinde 1. grubun, $T_{4.1}$, $T_{4.2}$, $T_{4.3}$, $T_{4.4}$, $T_{4.6}$, $T_{4.7}$, $T_{4.10}$, $T_{4.12}$, $T_{4.13}$, $T_{4.16}$,$T_{4.18}$, $T_{4.19}$, $T_{4.21}$, $T_{4.22}$ ve $T_{4.23}$ temsil cümlelerini kullandıkları görülmüştür. Ancak burada dikkat edilmesi gereken husus, $T_{4.16}$,$T_{4.18}$, $T_{4.19}$, $T_{4.21}$, $T_{4.22}$ ve $T_{4.23}$ temsil cümlelerinde geçen "O" harfi yerine 1. grubun, "D" harfini kullanmış olmalarıdır.

Şekil 27 de ise 2. grubun çizimleri verilmiştir:

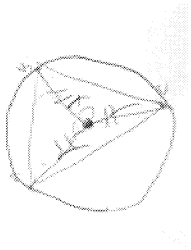


Şekil 27- 2.grubun 4. soruya ait çizimi

2. grubun, $T_{4.1}$, $T_{4.2}$, $T_{4.3}$, $T_{4.10}$, $T_{4.18}$, $T_{4.19}$, $T_{4.21}$ ve $T_{4.22}$ temsil cümlelerini kullandıkları görülmektedir. Bu grup, $T_{4.16}$,$T_{4.18}$, $T_{4.19}$, $T_{4.21}$, $T_{4.22}$ ve $T_{4.23}$ temsil cümlelerinde, kesim noktası için herhangi bir harf kullanmamışlardır. Bunun yanında, öğrencilerin aşağıdaki temsil cümlesini kullandıkları da düşünülmektedir:

"A noktasından $[BC]$na dikme çizme"

Tablo 11 e 3. grup için bakıldığında, bu grubun $T_{4.1}$, $T_{4.2}$, $T_{4.3}$, $T_{4.18}$, $T_{4.19}$, $T_{4.21}$, $T_{4.22}$ ve $T_{4.24}$ temsil cümlelerini kullandıkları görülmektedir:

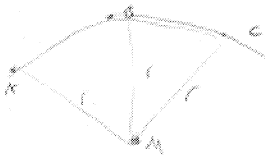


Şekil 28- 3.grubun 4. soruya ait çizimi

Şekil 28 dikkatli incelendiğinde, öğrencilerin ayrıca aşağıdaki temsil cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir:

"O noktasının A,B ve C noktalarına uzaklıklarını r harfi ile isimlendirme
A, B ve C noktalarından geçecek şekilde bir çember çizme"

4. gruba ait üç tane çizim bulunmaktadır. Bunlardan ilki şu şekildedir:

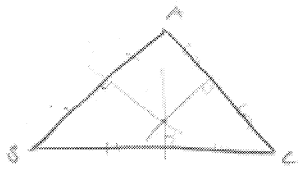


Şekil 29- 4.grubun 4. soruya ait ilk çizim

Şekil 29 incelendiğinde, öğrencilere ait temsil cümleleri şu şekilde sıralanmıştır:

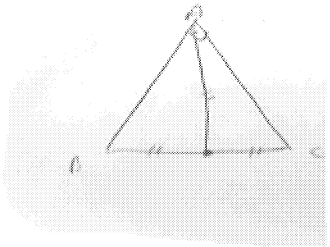
"Düzlemde bir M noktası işaretleme
M merkezli bir yay çizme
Çizilen yay üzerinde A, B ve C noktalarını yerleştirme
M noktası ile A, B ve C noktalarını birleştirme
Çizilen doğru parçalarının uzunluklarını r harfi ile gösterme"

Tablo 11 incelendiğinde 4. grubun, $T_{4.1}$, $T_{4.2}$, $T_{4.3}$, $T_{4.4}$, $T_{4.6}$, $T_{4.10}$, $T_{4.12}$ ve $T_{4.24}$ temsil cümlelerini kullandıkları belirlenmiştir. Bu fikri destekleyen çizim, aşağıda verilmiştir:



Şekil 30- 4.grubun 4. soruya ait ikinci çizimi

Yine Şekil 31 de, $T_{4.24}$ temsil cümlesinde geçen "O" harfinin kullanılmadığı görülmektedir. Ayrıca aşağıda grup tarafında yapılan son çizim verilmiştir:



Şekil 31- 4.grubun 4. soruya ait üçüncü çizimi

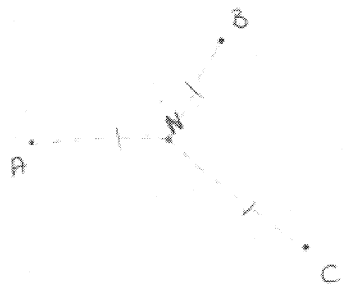
Bu şekil yardımıyla da, öğrencilerin sahip oldukları diğer temsil cümleleri şu şekildedir:

"A açısı dik açı olan bir $\overset{\Delta}{ABC}$ çizme

$[BC]$na ait kenarortay çizme

Çizilen kenarortay ile $[BC]$nın ayrılan her bir parçasını eşit sembollerle gösterme"

Bir diğer grup olan 5. grubun sadece, $T_{4.1}$ ve $T_{4.2}$ temsil cümlelerine sahip oldukları Şekil 32 de görülmektedir:



Şekil 32-5.grubun 4. soruya ait çizimi

Bunun yanı sıra yukarıdaki çizimin de desteklediği, aşağıdaki temsil cümlelerini kullandıkları düşünülmektedir:

"A, B ve C noktalarının birleştirilmesiyle oluşacak üçgenin iç bölgesinde bir nokta işaretleme

İşaretlenen noktayı N harfi ile gösterme

A, B ve C noktalarının birleştirilmesiyle oluşacak üçgenin iç bölgesinde işaretlenen bir noktayı, A, B ve C noktalarıyla birleştirme

Oluşan doğru parçalarının uzunluklarının birbirine eşit olduklarını sembollerle gösterme"

Tablo 11 e bakıldığında, incelenen son grup olan 6. grubun $T_{4.1}$ ve $T_{4.2}$ temsil cümlelerini kullandıkları görülmektedir. Bu gruba ait çizim aşağıda verilmiştir:



Şekil 33-6.grubun 4. soruya ait çizimi

Tablo 11 de belirtilen temsil cümlelerinin yanında, aşağıdaki temsil cümlesinin de 6. grup tarafından kullanıldığı düşünülmektedir:

"A, B ve C noktalarının birleştirilmesiyle oluşacak üçgenin iç bölgesinde, bir nokta işaretleme"

Tablo 12. 4. soruya ait Kontrol Kümesi

Anahtar Kavrama Kontrol Kümesi	1.grup	2.grup	3.grup	4.grup	5.grup	6.grup
1.İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.	+	+	+	+	–	–
2.Bir doğru parçası orta dikmesi; a) Bir doğrudur. b) Bu doğru, doğru parçasının orta noktasından geçer veya doğru parçasının orta noktası bu doğru üzerinde bulunur. c) Bu doğrunun doğru parçası ile yaptığı açı 90^0 dir.	+	–	–	+	–	–
3.Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerindeki her nokta, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır.	+	–	–	+	–	–
4.Eşitlik bağıntısı geçişkendir.	+	–	–	–	–	–
5.İki ortak noktaya sahip doğrular çakışıktır.	–	–	–	–	–	–
6.Doğrusal olmayan noktalarının birleştirilmesiyle oluşturulan doğru parçalarının orta dikmeleri çakışık olamazlar.	–	–	–	–	–	–

Tablo 12 nin en sol sütununda, incelenen grupların 4. sorunun çözüm sürecinde, kullanmaları beklenen kontrol cümlelerini içermektedir. 1. grubun çizimleri ve aşağıdaki açıklamaları göz önüne alındığında:

> *"Bu* [nokta] *bir tanedir.. Çünkü böyle bunun* [[AB]nın] *orta dikmesini çizersek. Bununkini de* [[AC]nın]*çizersek.. Bu noktadır.*[d_1 ve d_2 nin kesim noktasıdır.]*"*

bu grubun $K_{4.1}$ ve $K_{4.2}$ kontrol cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir. Ayrıca bir diğer ifade:

> *"Şu doğrunun* [d_2] *üzerindeki bir D noktası, AD eşit CD olması için yani biz D noktası diyelim, geometrik yeri istenen nokta.. AD eşit CD olması için D noktası şu doğru* [d_2] *üzerinde olmalı. AD eşit BD olması içinde D noktası şu doğru* [d_1] *üzerinde olmalı. D hem* d_1 *in hem* d_2 *nin üzerinde ise yani ortak noktasında olması gerekir. Dolayısıyla D burası* [d_1 ve d_2 nin kesim noktası]"

incelendiğinde 1. grubun $K_{4.3}$ kontrol cümlesini de kullandıkları görülmektedir. Tablo 12 ye bakıldığında, bu grubun kullandığı bir diğer kontrol cümlesi, $K_{4.4}$ olarak belirlenmiştir. Bunu destekleyen öğrenci görüşü ise şu şekildedir:

> *"Şimdi şu şey olduğu için, şurasıyla şurası eşit* [[AD]ve [DB]nın uzunluklarının eşit olması]*, zaten D nin koşulundan. Şurasıyla şurası eşit* [[AB]nın iki eş parçaya ayrılması] [d_1 ve [AB] birbirine] *dik olduğu için. Bu şey oluyor, ABD ikizkenar oluyor. Aynı şekilde AD de DC ye eşittir. Dolayısıyla BD ile DC eşittir zaten."*

Araştırmada gözlemlenen gruplardan birisi olan 2.grubun, bu sorunun çözümüne sezgisel yaklaştıkları görülmüştür. Doğrusal olmayan A, B ve C

noktalarını ikişerli birleştirdiklerinden dolayı, $K_{4.1}$ kontrol cümlesine sahip oldukları düşünülmektedir. Ayrıca kenarortay ve ikizkenar üçgen ile ilgili özellikleri sıraladıkları gözlemlenmiştir. Grup öğrencilerinden Berre 'ye ait bir ifade aşağıdaki gibidir:

> *"Şurası dik olduğunda* [$\overset{\Delta}{ABC}$ de A noktasından $[BC]$na çizilen doğru parçası] *ikizkenar üçgen şuralar* [$[BC]$nın iki eş parçaya ayrılması] *eşit olur.. da dik olduğunu nerden biliyoruz. Birde üç tane ikizkenar üçgen oluşabilir. Eğer şurası dik olursa eğer kesinlikle ağırlık merkezi olur."*

Burada, Berre tarafından kullanıldığı düşünülen kontrol cümlesi:

> "$|AB|=|AC|$ olan bir $\overset{\Delta}{ABC}$ ikizkenar üçgeninde, A noktasından $[BC]$na çizilen dikme üçgenin ağılık merkezinden geçer."

şeklinde belirlenmiştir. Meriç ise aşağıda verilen konuşmada kontrol cümlesi kullanmıştır:

> *"Meriç:* [...]*Mesela geometri sorusu çözerken ağırlık merkezi verilirse o zaman hepsine eşit diyeceğiz o zaman...*
>
> *Berre: Aaa evet olmaz o zaman.."*

Meriç'in kullandığı kontrol cümlesi şu şekildedir:

> " Üçgende ağırlık merkezi, üçgenin köşelerine eşit uzaklıkta değildir."

3. grubun ise bu sorunun çözümüne, tamamen sezgisel yaklaştıkları düşünülmektedir. Tablo 12 de görüldüğü gibi, bu gruba ait sadece $K_{4.1}$ kontrol cümlesi bulunmaktadır. Bu durumu, grubun yaptığı çizim desteklemektedir. Ayrıca öğrencilere ait:

> *"Üçgen.. Çevrel çember... Bütün kenarları* [üçgenin bütün köşeleri] *düşünürsek* [işaretlenen noktaya]*eşit uzaklıkta olduğu için r, r, r deriz. Eşit uzaklıkta."*

ifadesinin, 3. grubun bir başka kontrol cümlesinin kanıtı olduğu düşünülmektedir. Bu kontrol cümlesi aşağıda belirtildiği gibidir:

> "Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar, bir çember belirtir. "

Tablo 12 incelendiğinde, 4. grup için yaptıkları çizim de göz önüne alındığında, $K_{4.1}$ kontrol cümlesine sahip oldukları düşünülmektedir. Bunun yanında 4. grubun:

> *"Şimdi ben kafama göre A B C çizerimde... Yani bir çemberin merkezi gibi çizerim.. Çemberin üstündeki noktalar olarak çizerim. Çemberin merkezine eşit uzaklıktaki nokta olur. Burası A olur.. burası B olur.. burası C olursa... İşte şöyle bir yaydan geçirsek... İşte bunun düzgün olanını farz etsek.. Bunlara eşit uzaklıkta olan yarıçapı r olur işte.. merkez noktası eşit olur..."*

ifadesine bakıldığında bu grubunda 3. grup gibi:

> "Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar, bir çember belirtir. "

kontrol kümesine sahip oldukları düşünülmektedir. Yine Tablo 12 ye göz atıldığında, $K_{4.2}$ ve $K_{4.3}$ kontrol cümleleri de, 4. grup için görülmektedir. Bunu destekleyen ifade aşağıda verilmiştir:

> *"* [B ile C noktasını birleştirme] *yaparsak ta... B ile C nin orta noktasını buluruz. Bu doğruya* [[BC]] *dik bir doğru üzerinde... Bu uzaklığı* [[BC]nın orta dikmesi üzerinde seçilen noktanın, B ve C noktalarına uzaklığı] *AB* [A ve B noktaları] *arasında yakalayamıyorum... Burada* [[BC]nın orta dikmesi üzerinde] *bu* [[BC]nın orta dikmesi üzerinde seçilen noktasının B ve C noktalarına uzaklığı] *eşit böyle..*

Ayrıca aşağıdaki 4. gruptaki öğrencilerden olan, Didem'e ait ifadeye göz atıldığında:

> *"Yani şöyle bir şey... dik üçgende kenarortayı indirdiğimizde... şunlar eşit..* [kenarortayın hipotenüste ayırdığı parçalara eşit olması]"

Didem' in kullandığı kontrol cümlesi şu şekildedir:

> "Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğu, hipotenüste ayırdığı her eş parçaların uzunluğuna eşittir."

Bu soruya sezgisel yaklaşan gruplardan diğeri de 5. gruptur:

> *"Sercan: Bence eşit uzaklıkta bulunan noktalar yoktur, sadece bir nokta vardır.*
> *Damla: Sadece bir nokta vardır."*

Burada 5. gruba ait bir kontrol belirlenememiştir.

İncelenen son grup olan 6. grubunda, Tablo 12 de yer alan kontrol cümlelerini kullanmadıkları gözlemlenmiştir. Bu grupta yer alan Gizem sezgisel olarak istenen yerin tek nokta olduğunu belirtmiştir:

"Üçüne de eşit uzaklıkta olacak... Bence yine bir noktadır. Yani üç noktaya eşit uzaklıkta olan ne olabilir ki?"

Gizem'in kontrol cümlesi belirlenememiştir. Serkan ise, istenen yeri bulmak için yaptıklarını şöyle ifade etmiştir:

"Nokta belirledim.. Doğrusal olmayan üç tane nokta belirledim... Şimdi bir noktanın eşit uzaklıkta olması için bunların arasındaki.. ne kadar olduğunu bulmaya çalıştım. Şimdi bulacağım.. yani yapacağım nokta da onlara eşit uzaklıkta olması için birbirinden çıkaracağım şeyleri.. cm leri... Eşit nokta elde etmeye çalışacağım."

Fakat burada Serkan 'ın yapmaya çalıştığı anlaşılmamaktadır.

Araştırmada 4. soru için grupların sahip oldukları (P,İ,T,K) kavrama dörtlüleri, aşağıdaki tablolarda oluşturulmuştur. Bu tablolar, bulguları toparlamak adına oluşturulmuştur. İlk olarak, 1. gruba ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü Tablo 4.1 de görülmektedir:

Tablo 4.1. 1. grubun 4. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

1. grup	Problem Kümesi	$P_{4.1}, P_{4.2}, P_{4.3}, P_{4.4}, P_{4.5}, P_{4.6}, P_{4.7}$
	İşlem Kümesi	$İ_{4.1}, İ_{4.2}, İ_{4.3}, İ_{4.4}, İ_{4.5}, İ_{4.6}, İ_{4.7}, İ_{4.8}, İ_{4.9}$
	Temsil Kümesi	$T_{4.1}, T_{4.2}, T_{4.3}, T_{4.4}, T_{4.6}, T_{4.7}, T_{4.10}, T_{4.12}, T_{4.13}, T_{4.16}, T_{4.18}, T_{4.19}, T_{4.21}, T_{4.22}, T_{4.24}$
	Kontrol Kümesi	$K_{4.1}, K_{4.2}, K_{4.3}, K_{4.4}$

4. soru için, Burak ve Batuhan'ın bulunduğu 1. gruba ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde göz önüne alınacak olunursa, öğrencilerin, istenen yeri bulmak için kullandıkları cümleler ile anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde yer alan cümleler örtüşmektedir. Araştırmacı tarafından özellikle, öğrencilerin kullandıkları geometrik gösterimler, çözüm için yeterli ve uygun görülmektedir. Bunun yanında sorunun çözümünde cebirsel gösterimlerden yararlanılmamıştır.

Doğrusal olmayan A, B ve C noktalarıyla bir $\overset{\Delta}{ABC}$ çizmişlerdir. $[AB]$nın orta dikmesini ve $[AC]$nın orta dikmesini çizdikten sonra, bu doğruların kesim noktasının istenen yer olduğunu belirmişlerdir. Bu esnada, grupta yer alan öğrencilerin "orta dikme" kavramını tam ve doğru bir şekilde yapılandırdıkları, bu soruda kullandıkları işlem ve kontrol cümleleri yardımıyla görülmektedir. D noktasının yani kenar orta dikmelerinin kesim noktasının, A, B ve C noktalarına eşit uzaklıkta olduğunu eşitlik bağıntısı kullanılarak belirtilmiştir.

Öğrencilerin çözüm sırasında araştırmadıkları durum ise, D noktasının istenilen tek yer olduğunu göstermektir. Bu bağlamda, 1. grubun, bu durum ile ilgili problem cümlesi, işlem cümlesi, temsil cümlesi ve kontrol cümlesi bulunmamaktadır.

Gözlemlenen bir diğer grup olan 2. grubun, 4. soruya ait anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsüne göre oluşturulan (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü, Tablo 4.2 aşağıda verilmektedir:

Tablo 4.2: 2. grubun 4. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

2. grup	Problem Kümesi	$P_{4.1}, P_{4.2}$
	İşlem Kümesi	–
	Temsil Kümesi	$T_{4.1}, T_{4.2}, T_{4.3}, T_{4.10}, T_{4.18}, T_{4.19}, T_{4.21}, T_{4.22}$
	Kontrol Kümesi	$K_{4.1}$

Tabloda belirtilen kavrama öğelerinin dışında 2. grubun kullandığı diğer öğeler ise şu şekildedir:

Problem Cümleleri:

"Ağırlık merkezi nedir?"

"Çevrel çemberin merkezi nedir?"

"İç teğet çemberin merkezi nedir?"

"İkizkenar üçgenin özellikleri nelerdir?"

İşlem Cümleleri:

"A, B, C noktaları, bir üçgenin köşeleri olacak şekilde ikişerli birleştirilmezse istenen yerin tek bir nokta olması."

"$\overset{\Delta}{ABC}$ de A noktasından ve iç bölgesinde alınan noktayı birleştiren doğru parçası, $[BC]$na dik olduğunda istenen yerin ağılık merkezi oluşu."

"Geometri sorularında, bir $\overset{\Delta}{ABC}$ nin ağılık merkezi verilirse, A, B, C noktalarını ağırlık merkezine birleştiren doğru parçalarının uzunluklarına eşit denmesi."

Temsil Cümlesi:

"A noktasından $[BC]$na dikme çizme"

Kontrol Cümleleri:

"$|AB|=|AC|$ olan bir $\overset{\Delta}{ABC}$ ikizkenar üçgeninde, A noktasından $[BC]$na çizilen dikme üçgenin ağılık merkezinden geçer."

" Üçgende ağırlık merkezi, üçgenin köşelerine eşit uzaklıkta değildir."

2. grup için, belirlenen (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü incelendiğinde, öğrencilerin anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde yer alan cümlelerin çoğuna, özellikle işlem ve kontrol cümlelerine sahip değillerdir.

İstenen yerin bulunması için tamamen sezgisel hareket etmişleridir. Doğrusal olmayan A, B ve C noktalarının ikişerli olarak birleştirilmesiyle oluşan $\overset{\Delta}{ABC}$ nin iç bölgesinde, bir noktanın istenen nokta olduğu öğrenciler tarafından belirtilmiştir. İlk önce, bu noktanın $\overset{\Delta}{ABC}$ nin "*ağırlık merkezi*" olduğunu düşünmüşlerdir. Daha sonrasında, bu noktanın "*ağırlık merkez*i" olamayabileceği üzerinde durmuşlardır. Fakat yine sezgileriyle hareket etmişleridir. 2.grupta yer alan Meriç, bu noktanın "*çevrel çemberin merkezi*" ya da "*iç teğet çemberin merkezi*" olabileceğini belirtmiştir. Bu süreç içinde öğrenciler, ikizkenar üçgen özelliklerini de kullanmışlardır. Sonrasında ise belirlenen noktanın, "*ağırlık merkezi*" olması durumunda içinde "*ağırlık merkezi*" geçen her soruda, ağırlık merkezinin üçgenin köşelerine eşit uzaklıkta olması gerektiği işlemini kullanarak, bu noktanın "*ağırlık merkezi*" olmadığına karar vermişlerdir.

2. grup, bu soruda "orta dikme" kavramını kullanma gereği duymamıştır. Bunun sonucunda da, soruda istenen noktayı sezgileriyle belirlemeye çalışmışlardır.

Tablo 4.3, 4. soru için oluşturulan anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü göz önüne alındığında, 3. grupta bulunan bu kavramaya ait öğeleri göstermektedir:

Tablo 4.3. 3. grubun 4. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

3. grup	Problem Kümesi	$P_{4.1}, P_{4.2}$
	İşlem Kümesi	–
	Temsil Kümesi	$T_{4.1}, T_{4.2}, T_{4.3}, T_{4.18}, T_{4.19}, T_{4.21}, T_{4.22}$
	Kontrol Kümesi	$K_{4.1}$

Bunun yanı sıra grup, sorunun çözüm sürecinde, tabloda yer almayan öğeleri de kullanmışlardır:

Problem Cümleleri:

"Çevrel çember nedir?

İşlem Cümleleri:

"Üçgenin çevrel çemberinin merkezi A, B ve C noktalarıyla birleştirilirse, oluşan uzunlukların birbirine eşit olması."

Temsil Cümleleri:

"O noktasının A,B ve C noktalarına uzaklıklarını r harfi ile isimlendirme"

"A, B ve C noktalarından geçecek şekilde bir çember çizme"

Kontrol Cümleleri:

"Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar bir çember belirtir. "

3. gruptan elde edilen yazılı ve sözlü verilerin yardımıyla, bu grubun (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü ile anahtar kavrama arasında, hiçbir bağ kurulamamaktadır. Öğrenciler 4. soruya sezgisel yaklaşmışlardır.

Doğrusal olmayan A, B ve C noktalarını ikişerli olarak birleştirerek bir $\overset{\Delta}{ABC}$ oluşturmuşlardır. Sonrasında, bu üçgenin köşelerinden geçecek şekilde bir çember çizmişlerdir. Bu çemberin merkezinin, üçgenin köşelerine eşit uzaklıkta olduğunu belirtmişlerdir. Burada öğrenciler işlem ve kontrol cümlelerini, çember bilmelerinden faydalanarak kullanmışlardır. "Orta dikme" kavramını, bu sorunun çözüm sürecinde ortaya koymamışlardır.

Araştırmada yer alan gruplardan diğeri de 4. gruptur. 4. grup için anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsüne göre oluşturulan tablo şu şekildedir:

Tablo 4.4.4. grubun 4. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

4. grup	Problem Kümesi	$P_{4.1}, P_{4.2}, P_{4.3}, P_{4.4}, P_{4.5}, P_{4.6}$
	İşlem Kümesi	$İ_{4.1}, İ_{4.2}, İ_{4.3}, İ_{4.4}, İ_{4.5}$
	Temsil Kümesi	$T_{4.1}, T_{4.2}, T_{4.3}, T_{4.4}, T_{4.6}, T_{4.10}, T_{4.12}, T_{4.24}$
	Kontrol Kümesi	$K_{4.1}, K_{4.2}, K_{4.3}$

Yukarıda belirtilen kavrama öğelerinin yanında, 4. grubun sahip olduğu başka kavrama öğeleri de bulunmaktadır. Bu öğeler aşağıda yer almaktadır:

Problem Cümleleri:

"Bir çemberin merkezi nedir?"

"Bir çemberin yarıçapı nedir?"

"Bir yay nedir?"

İşlem Cümleleri:

"A, B, C noktaları bir çemberin üzerindeki noktalar bu noktaların ise çizilen çemberin merkezine eşit uzaklıkta olması."

"Dik üçgende dik açının karşısındaki kenara ait kenarortay çizilirse bu kenarın orta noktası A,B ve C noktalarına eşit uzaklıkta olması."

Temsil Cümleleri:

"Düzlemde bir M noktası işaretleme"

"M merkezli bir yay çizme"

"Çizilen yay üzerinde A, B ve C noktalarını yerleştirme"

"M noktası ile A, B ve C noktalarını birleştirme"

"Çizilen doğru parçalarının uzunluklarını r harfi ile gösterme"

"A açısı dik açı olan bir $\overset{\Delta}{A}BC$ çizme"

"$[BC]$na ait kenarortay çizme"

"Çizilen kenarortay ile $[BC]$nın ayrılan her bir parçasını eşit sembollerle gösterme"

Kontrol Cümleleri:

"Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar bir çember belirtir. "

"Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay uzunluğu, hipotenüste ayırdığı her eş parçaların uzunluğuna eşittir."

4. grubun ortaya koyduğu (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü göz önüne alındığında, öğrencilerin güçlü sezgilere sahip oldukları, araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir. Anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü ile karşılaştırıldığında, uygun işlem ve kontrollerin varlığı söz konusudur.

İlk önce, bir M merkezli çember yayı üzerinde olan A, B ve C noktalarını çizmişlerdir. Burada bu grup, 3. grup gibi çember bilmelerinden yararlanmıştır. Sonrasında A, B ve C noktalarının, düzlemde doğrusal olmayan noktalar olması durumunda, istenen noktanın yerinin nasıl bulunabileceği üzerinde düşünmüşlerdir. Yani burada, bir yay parçası üzerinde çizilen noktaların "*özel*" bir durum oluşturduğunu düşünmüşlerdir. Bu durum, bir kavram yanılgısı olarak görülmektedir.

4. grupta yer alan Kadir, doğrusal olmayan A, B, C noktalarından, B ve C noktalarını birleştirmiş ve $[BC]$nın "*orta dikmesini*" çizmiştir. Sonrasında ise A noktası ile $[BC]$nın orta dikmesi üzerinde çizilen noktalar arasında, bağlantı

kuramamıştır. Bunun ardından, bu grupta yer alan diğer öğrenci olan Didem, bir $\overset{\Delta}{A}BC$ dik üçgeninde hipotenüsün orta noktasının, köşelere eşit uzaklıkta olduğunu belirtmiştir. Fakat Kadir, bu özelliğin herhangi bir üçgende nasıl sağlanması gerektiği üzerinde durmuştur. Sonrasında bir $\overset{\Delta}{A}BC$ ninde $[BC]$ ve $[AB]$nın orta dikmelerini çizmiştir. İstenen noktanın, bu iki orta dikmenin kesim noktası olabileceği üzerinde durmuştur. Fakat eşitlik bağıntısının geçişme özelliğini kullanamadığından, bu ifadesinden emin olamamıştır.

Yine incelenen gruplardan olan 5. gruba ait kavrama öğelerinin anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsüne göre oluşturulan Tablo 4.5 aşağıdaki gibidir:

Tablo 4.5. 5. grubun 4. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

5. grup	Problem Kümesi	$P_{4.1}, P_{4.2}$
	İşlem Kümesi	–
	Temsil Kümesi	$T_{4.1}, T_{4.2}$
	Kontrol Kümesi	–

Bu tabloda belirtilen kavrama öğelerinin dışında 5. grubun sahip olduğu diğer kavrama öğeleri ise şu şekildedir:

Temsil Cümleleri:

"A, B ve C noktalarının birleştirilmesiyle oluşacak üçgenin iç bölgesinde bir nokta işaretleme"

"İşaretlenen noktayı N harfi ile gösterme"

"A, B ve C noktalarının birleştirilmesiyle oluşacak üçgenin iç bölgesinde işaretlenen bir noktayı A,B ve C noktalarıyla birleştirme"

"Oluşan doğru parçalarının uzunluklarının birbirine eşit olduklarını sembollerle gösterme"

5. grup için oluşturulan (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü, hiçbir işlem ve kontrol cümlesi içermemektedir. Sorunun çözümü için yaptıkları çizim göz önüne alındığında, bu grup için belirlenen problem cümleleri ve temsil cümleleri ortaya çıkmıştır. Bu grup, sezgisel olarak istenen noktaların sadece bir tane olduğunu belirmişlerdir. Doğrusal olmayan A, B ve C noktalarını düzlemde çizdikten sonra, üçgen oluşturmadan, iç bölge de bir nokta işaretlemişledir ve bu noktanın istenen noktada olduğunu belirtmişlerdir. Bu bağlamda 5. grup, "*orta dikme*" kavramını bu soruda hiç kullanmamışlardır.

Araştırmada yer alan son grup olan 6. grubun anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü göz önüne alındığında ortaya çıkan kavrama öğeleri şu şekildedir:

Tablo 4.6. 6. grubun 4. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

6. grup	Problem Kümesi	$P_{4.1}$, $P_{4.2}$
	İşlem Kümesi	–
	Temsil Kümesi	$T_{4.1}$, $T_{4.2}$
	Kontrol Kümesi	–

Ayrıca yine bu grubun sahip olduğu fakat Tablo 4.6 da yer almayan kavrama öğeleri aşağıda belirtilmiştir:

Temsil Cümleleri:

"A, B ve C noktalarının birleştirilmesiyle oluşacak üçgenin iç bölgesinde bir nokta işaretleme"

Araştırmada incelenen son grup olan 6. grubun (P,İ,T,K) kavraması göz önüne alındığında, bu grubun tamamen sezgisel bir şekilde ve sözel olarak istenen noktaların, A, B, C noktalarının üçüne de eşit uzaklıkta olan sadece bir nokta olduğunu belirtmiştir. Ancak bu fikri ile ilgili herhangi bir geometrik çizim yapmamıştır. Serkan ise bu doğrusal olmayan noktaların, ikişerli birleştirilmesiyle

oluşan üçgenin iç bölgesinde bir nokta işaretlemiştir. Serkan'ın 4. soruda ne demek istendiğini tam olarak anlayamadığının, sorunun çözümü için yaptığı yazılı ve sözel açıklamalarıyla desteklendiği, araştırmacı tarafından düşünülmektedir.

4.5. 5. soruya ait bulgular

Tablo 13. 5. soruya ait Problem Kümesi

Anahtar Kavrama Problem Kümesi	1.grup	2.grup	3.grup	4.grup	5.grup	6.grup
1.Bir çember nedir?	+	+	+	+	+	+
2.Bir çemberin merkezi nedir?	+	+	+	+	+	+
3.Bir çemberin yarıçapı nedir?	+	+	+	+	+	+
4.İki nokta arasındaki uzaklık nasıl bulunur?	–	–	–	–	–	–
5.Çemberin denklemi nedir?	+	+	+	+	+	+
6. Çemberin denklemi nasıl elde edilir?	–	–	–	–	–	–
7.Bir doğru parçasının orta noktası nasıl bulunur?	+	+	+	+	+	+
8.Bir denklemin grafiği ne demektir? Nasıl çizilir?	+	+	+	+	+	+

Tablo 13, grupların 5. soru için kullandıkları problem cümlelerini ifade etmektedir. Burada tüm grupların kullandığı problem cümleleri $P_{5.1}$, $P_{5.2}$, $P_{5.3}$, $P_{5.5}$, $P_{5.7}$ ve $P_{5.8}$ olarak görülmektedir. 1. gruba ait çizim ve aralarında geçen şu konuşma göz önüne alındığında:

> *"Batuhan: Gene çember belirtir de... Ama bu soru harbiden zor yani...*
> *Burak: Yok ya... Şey değil... Yine bir çember belirtir. Merkezi yine ilk çemberin merkezi ile aynıdır. Yarıçapı yarısına eşittir."*

Bu grubun $P_{5.1}$, $P_{5.2}$, $P_{5.3}$ ve $P_{5.7}$ problem cümlelerini kullandıkları düşünülmektedir. Ayrıca 1. grubun sahip olduğu $P_{5.5}$ problem cümlesi öğrencilerin yaptıkları çözüme dayandırılarak belirlenmiştir. Yine öğrencilere ait bir konuşma şu şekildedir:

"Batuhan: Merkezin koordinatları değişmeyecek, değil mi?

Burak: Evet. Bu denklemin grafiğini..

Batuhan: Grafiği... işte çember... y=0 olacak $x^2 = 2x$ *olacak..."*

Öğrencilerin yaptıkları çizim ile aralarında geçen ve yukarıda verilen konuşma incelendiğinde, 1. grubun $P_{5.8}$ problem cümlesini kullandıkları düşünülmektedir.

2. gruba ait bir konuşma ise şu şekildedir:

"Berre: Çember çizelim.

Meriç: Olası geometrik yeri merkez işte. Çemberin merkezi ile çemberin üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçaları. Doğru demeti yani o da var. Doğru demeti oluşturuyor."

Öğrencilerin çizimleri ve yukarıda verilen konuşma göz önüne alındığında, $P_{5.1}$ ve $P_{5.2}$ problem cümlelerinin kullanıldığı düşünülmektedir. Ayrıca burada, öğrencilerin yaptıkları çizimle ilgili olan bir problem cümlesi de bulunmaktadır:

"Doğru demeti nedir?"

2. grupta bulunan öğrenciler arasında geçen bir başka konuşma:

"Meriç: O zaman çevresi... $2\pi r$ *çember çevresi şeyinde* [formülünde] *bu r* [$2\pi r$ ifadesinde yer alan r], *yarıçapsa..*

Berre: yarıçap.

Meriç: Yarıçap di mi? E o zaman tamam, bu çemberin çevresi büyük çemberin yarısı olan bir çember oluşturur. Yarıçapa r dersek bu $\frac{r}{2}$ *olur. E bunun çevresi?* $2\pi\frac{r}{2}$ *den* πr *olur. Bu* $2\pi r$ *nin yarısıdır."*

şeklindedir. Burada 2. grubun, $P_{5.3}$, $P_{5.5}$ ve $P_{5.7}$ problem cümlelerini kullandıkları düşünülmektedir. Yine yukarıdaki konuşmaya bakıldığında:

"Çemberin çevresi nedir?"

problem cümlesini de kullandıkları görülmektedir. $P_{5.8}$ problem cümlesi ise aşağıdaki ifadeden çıkarılmıştır:

"Şimdi bu [istenen] *çemberin denklemi bu* [$x^2 + y^2 - 2x = 0$] *ise aradığımız geometrik yerin denklemini bulabilir misiniz? Grafiğini çizmeye çalışacağız.. Bunun grafiğini analitik düzlemde çizdiğimiz şey miydi?*

Ayrıca son olarak, 2. grubun kullandığı bir başka problem cümlesi ise:

"Fonksiyon grafiği nedir?"

şeklinde belirlenmiştir. Bu problem cümlesinin kullanıldığı düşünülen öğrenci ifadesi, aşağıda verilmiştir:

"[…] *grafik deyince hani böyle fonksiyon grafikleri gibi* […]*"*

Tablo 13 incelendiğinde, 3. grubun $P_{5.1}$, $P_{5.2}$, $P_{5.3}$, $P_{5.5}$, $P_{5.7}$ ve $P_{5.8}$ problem cümlelerini kullandıkları, aşağıdaki konuşmalarından anlaşılmaktadır:

"Güldane: Bir tane çember vermiş. Merkezi ile üzerindeki noktaların. Orta noktaları da yine aynı merkezli bir başka çember oluşturur. Bu çemberin denklemi. Merkezi (1,0) yarıçapı 1 olan çember. Şimdi bu denklemin grafiğini mi çizeceğiz...
Buğra: Grafiği evet. -3... 3 azalan olabilir mi ki acaba? x 1 için.. x için azalıyor. Azalan bir grafikte!..Çizeyim mi?"

Burada özellikle $P_{5.5}$ ve $P_{5.7}$ problem cümleleri, öğrencilerin soru için yaptıkları çizim ve cebirsel işlemlerle desteklenmektedir.

İncelenen bir diğer grup olan 4. grup, $P_{5.1}$, $P_{5.2}$, $P_{5.3}$ ve $P_{5.7}$ problem cümlesini kullandıkları düşünülen konuşma aşağıda verilmiştir:

Kadir: Şu çemberimiz olsun. [...] *Merkezi M yazayım. Çemberin üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçaları.. Çemberin üzerindeki noktaları diyor da.. Kaç tane nokta var? Çemberin üzerinde kaç tane nokta olacak?*
Didem: Sonsuz olur herhalde...
Kadir: Çemberin üzerine nokta koyalım o zaman. Şu nokta olsun. Çemberin üzerindeki noktaları [...]*Yarıçapından bahsediyor bu!*
Didem: İyide üzerindeki nokta demiş!
Kadir:Bak çember üzerindeki noktaları birleştiren diyor.. Bununla [M noktası ile] *çemberin üzerindeki noktaları birleştireceğiz işte. Yarıçap oluyor yani bu."*

Bunun yanında, öğrencilerin yaptıkları çizimler göz önüne alındığında ve öğrencilerin:

Didem: Denklemin grafiği nasıl çizilir ya..!!
Kadir: Evet doğru çıkıyor, böyleymiş! Tamam. Şimdi ne diyor, denklemi yazabildik.. Bu denklemin grafiğini çizmeye çalışınız. Hıı..Evet çizdik ya!

şeklindeki konuşmalarına bakıldığında, $P_{5.5}$ ve $P_{5.8}$ problem cümlelerinin 4. grup tarafından kullanıldığı düşünülmektedir.

5. gruba ait:

"Çizdiğimiz grafiğin bir adı vardır o yine bir çemberdir, benim aklıma gelen o. Çünkü çemberin merkezi ile çemberin üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçaları her zaman yarıçaptır. Onları orta noktaları yarıçapın yarısını alacağız, yarıçapın yarısı üzerinden çizdiğimiz yeni bir çember..."

ifadesi göz önüne alındığında, öğrenciler $P_{5.1}$, $P_{5.2}$, $P_{5.3}$, $P_{5.7}$ ve $P_{5.8}$ problem cümlelerini kullandıkları düşünülmektedir. Bu durum öğrencilerin çizimleri ile de desteklenmektedir. Ayrıca $P_{5.5}$ problem cümlesi öğrencilere ait:

"Sercan: Merkezi... (1,0)...
Damla: Nasıl hatırladın ki onları? Ben analitik sevmem de..
Sercan: Yarıçapı 2. Merkezi de (1,0). Burası [çizilen çemberin merkezi] *(1,0), yarıçapı 2 o zaman buralar* [yarıçapın orta noktasının ayırdığı uzunluklar] *1 er birim 1 er birim. Şimdi...*
Damla: Şunun kini [küçük çemberin denklemini] *yazacağız."*

konuşmada ve öğrenci çizimleri ile işlemleri yardımıyla ortaya konulmuştur.

Tablo13 incelendiğinde 6. gruba ait $P_{5.1}$, $P_{5.2}$, $P_{5.3}$ ve $P_{5.7}$ problem cümleleri gözükmektedir. Bu fikri destekleyen, öğrencilere ait konuşma aşağıda verilmiştir:

"Gizem: Merkezi ile üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçalarının demiş yani yarıçaplar. Bence bu sorunun cevabı yine bir çemberdir.
Serkan: Bir nedeni olmalı ama!
Gizem: Bu merkezle [çizilen çemberin merkezi] *üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçaları dediği şey yarıçap.. yani düşününce öyle çıkıyor. Bir sürü yarıçap var. Orta noktaları da hepsinin orta noktasını birleştirirsek yine bir çember oluşur. İşte şu* [çizilen çemberin yarıçaplarının orta noktalarının birleştirilmesi ile oluşan çember]*"*

Burada öğrencilere ait problem cümleleri belirlenirken, öğrenci çizimleri de göz önüne alınmıştır. Öğrenciler arasında geçen bir başka konuşma şöyledir:

"Gizem: 2 olursa şurası [istenen çemberin yarıçapı] *1 olur. Merkezini de bulmuştuk yine (1,0)... Merkezleri aynı olduğu için direkt denklemini yazarız.* $(x-1)^2+(y-0)^2=1^2$ *bulduğumuz denklemdir.*
Serkan: Şimdi grafiğini çizelim...
Gizem: Bunun grafiğini mi çizeceğiz? x 0 için y kaç? y 0 için x kaç?"

Yukarıda verilen 6. gruba ait konuşmada bu grubun $P_{5.5}$ ve $P_{5.8}$ problem cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir.

Tablo 14. 5. soruya ait İşlem Kümesi

Anahtar Kavrama İşlem Kümesi	1.grup	2.grup	3.grup	4.grup	5.grup	6.grup
1. Çemberin merkezi M(a,b) ve çemberin üzerindeki nokta P(x,y) noktası ise bu noktalar arasındaki uzaklık, iki nokta arasındaki uzaklık formülünden, $\|PM\| = r \Rightarrow r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ olması	–	–	–	–	–	–
2.Çemberin denklemi, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ise çemberin merkezinin M(a,b) ve yarıçapının, r birim olması.	+	+	+	+	+	+
3. $[PM]$nın uzunluğu r birim olduğundan orta nokta kavramından $[MK]$nın uzunluğu $\frac{r}{2}$ birim olması	+	+	+	+	+	+
4. Çemberin merkezi M(a,b) ve $[PM]$nın orta noktası K(u,v) ise, iki nokta arasındaki uzaklık formülünden; $\|MK\| = \frac{r}{2} \Rightarrow \sqrt{(u-a)^2 + (v-b)^2} = \frac{r}{2}$ olması	–	–	–	–	–	–
5.$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ olan çemberin denklemi, $(x-1)^2 + y^2 = 2^2$ şeklinde düzenlenirse, verilen çemberin merkezinin M(1,0) ve yarıçapının 2 birim olması	+	–	–	–	–	–
6. İstenen çemberin merkezi M(1,0) ve yarıçapı 1 birim ise denklemi $(x-1)^2 + y^2 = 1^2$ yani $x^2 + y^2 - 2x = 0$ olarak bulunması.	+	+	+	+	+	+
7. Dik koordinat sisteminde pergelin 1 birim açılıp, iğnesinin M(1,0) noktasına batırılmasıyla, istenen yerin grafiğinin elde edilmesi.	+	–	–	–	–	–

Yukarıda verilen Tablo 14, öğrencilerin, 5. sorunun çözümü içinde kullanmaları beklenilen işlem kümesi elemanlarını ifade etmektedir. Tablo 14 incelendiğinde, $İ_{5.2}$, $İ_{5.3}$ ve $İ_{5.6}$ problem cümlelerinin bütün gruplar tarafından kullanıldığı görülmektedir. Yine Tablo 14 e bakıldığında, sadece 1. grubun, $İ_{5.5}$ ve

$İ_{5.7}$ problem cümlelerine sahip olduğu belirlenmiştir. 5. sorunun çözümü sürecinde, 1. grupta yer alan öğrenciler arasında geçen konuşmanın, sınırlı olduğu düşünülmektedir:

"Batuhan: Gene çember belirtir de... Ama bu soru harbiden zor yani...
Burak: Yok ya... Yine bir çember belirtir. Merkezi yine ilk çemberin merkezi ile aynıdır. Yarıçapı yarısına eşittir.
Burak: r_1 *ilk çemberimizin yarıçapı...* r_2 *de ikinci çemberimizin yarıçapı..*
Batuhan: Merkezin koordinatları değişmeyecek, değil mi?
Burak: Evet."

Yukarıda verilen konuşma ile özellikle öğrencilerin çizimleri ve yaptıkları işlemler göz önüne alındığında, 1. grubun $İ_{5.2}$, $İ_{5.3}$, $İ_{5.5}$ ve $İ_{5.6}$ işlem cümlelerini kullandıkları düşünülmektedir. Bunun yanı sıra, 1. grup $İ_{5.7}$ işlem cümlesini de kullanmışlardır:

"Burak: Bu $[(x-1)^2 + y^2 = 1^2]$*denklemin grafiğini..*
Batuhan: Grafiği... işte çember... y=0 olacak, $x^2 = 2x$ *olacak...*
Burak: Şu [dik koordinat sisteminde merkezi (1,0) ve yarıçapı 1 birim olan çember] *değil midir?*
Batuhan: Evet doğru."

Öğrencilerin istenen grafiği çizerken pergel kullanmadıkları araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir.

2. grupta bulunan öğrenciler arasında geçen bir konuşma aşağıdaki gibidir:

"Berre: Çember çizelim.

Meriç: Olası geometrik yeri merkez işte. Çemberin merkezi ile çemberin üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçaları. Doğru demeti yani o da var. Doğru demeti oluşturuyor."

Burada öğrencilerin sadece yaptıkları çizimle ilgili olarak kullandıkları bir işlem cümlesi:

"Çemberin merkezinden doğrular geçerse bu doğruların çemberin merkezinde doğru demeti oluşturması "

olarak belirlenmiştir. Yine bir 2. gruba ait fikir:

" […]*şimdi* $2\pi r$ *çember çevresi şeyinde* [formülünde] *bu r* [$2\pi r$ ifadesinde yer alan r]*, yarıçapsa. Yarıçap di mi? E o zaman tamam, bu çemberin çevresi büyük çemberin yarısı olan bir çember oluşturur."*

şeklindedir. Burada ise, kullanıldığı düşünülen işlem cümlesi şöyledir:

"Yarıçapı r olan çemberin çevresi $2\pi r$ ise istenen noktaların, çevresi büyük çemberin çevresinin yarısı olan bir çember oluşturması."

Öğrencilerin verilen denklemin, merkezini ve yarıçapını bulurken, aralarında geçen konuşma aşağıdaki gibidir:

"Berre: Evet çember oluyor... Çemberin denklem... (1,0) mı?..

Meriç: Hah pardon bu şey.. merkezi.. merkezi yazıyorum $(1, -\frac{0}{2})$..

Berre: r yi de buluyorduk. r=2 bulduk. Merkezi çizdik r yi de bulduk, yine bir çember çizelim. (1,0)... şurası [verilen çemberin yarıçapı] *2 olsun…"*

Öğrencilerin aralarında geçen bu konuşmanın ışığı altında, öğrencilerin çizimleri ve yaptığı işlemler ile 2. grubun kullandığı işlem cümlesinin şu şekilde olduğu düşünülmektedir:

"Verilen çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ise bu çemberin merkez koordinatlarının $(1, -\frac{0}{2}) = (1,0)$ ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{4+12} = 2$ birim olması."

Tablo 14 incelendiğinde, 2. grubun yaptıkları işlemler ve Berre'ye ait aşağıdaki fikir göz önüne alındığında, $İ_{5.2}$, $İ_{5.3}$ ve $İ_{5.6}$ işlem cümleleri kullandıkları düşünülmektedir:

"Çember oluyor o zaman. Yarıçapı 1 olur. [...] yarıçapı bilinen merkezi bilinen... Çemberin denklemini $(x-1)^2 + (y-0)^2$ *eşittir yarıçapın karesiydi. Buradan* $x^2 + 1 - 2x + y^2 = 1$. *Yani tahmin ettiğim gibiymiş.* $x^2 + y^2 - 2x = 0$... *denklemini yazdık"*

2. grupta bulunan Meriç tarafından kullanıldığı düşünülen bir diğer işlem cümlesi, $İ_{5.7}$ dir:

"Berre: [...] grafiğini çizmeye çalışalım..

Meriç: Merkezi (1,0) Bak bu y ekseni bu x ekseni. Şuna Meriç noktası diyelim.. Buradan bir çember nasıl çizeceğiz?

Berre: Bu grafik olmadı.

Meriç: Bence oldu.

Berre: Zaten çemberi biz analitik düzlemde gösterdik.

Meriç: Nasıl bir grafik bekliyordun? V-t grafiği mi?

Berre: Grafik deyince hani böyle fonksiyon grafikleri gibi şöyle şöyle..

Meriç: Grafiğin adı çember grafiği.

Berre: Bence çember değildir."

Yukarıda verilen konuşmada Berre:

"İstenen çemberin grafiği çizilirse, analitik düzlemde fonksiyon grafikleri gibi, V-t grafiği gibi grafiklerin oluşması."

şeklinde verilen işlem cümlesini kullanmışlardır.

Tablo 14, 3. grup için incelendiğinde, bu grubun $İ_{5.2}$, $İ_{5.3}$ ve $İ_{5.6}$ işlem cümlelerine sahip olduklarını, aşağıda Güldane'ye ait fikirden ve özellikle öğrencilerin kağıt üzerinde yaptıkları işlemlerden anlaşılmaktadır:

"Bir tane çember vermiş... Merkezi ile üzerindeki noktaların... orta noktaları da yine aynı merkezli bir başka çember oluşturur. Bu çemberin denklemi merkezi (1,0) yarıçapı 1 olan çember..."

Burada yine özellikle öğrencilerin kağıt üzerinde yaptıkları işlemler göz önüne alındığında, sahip oldukları bir diğer işlem cümlesi aşağıda verilmiştir:

"Verilen çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ise bu çemberin merkez koordinatlarının (1,0) ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{4+0+12} = 2$ birim olması. "

3. grubun bir başka konuşması:

Güldane:[…] *Şimdi bu denklemin grafiğini mi çizeceğiz?*

Buğra: Grafiği evet. -3... 3 azalan olabilir mi ki acaba? x 1 için.. x için azalıyor. Azalan bir grafikte!..Çizeyim mi ? Ben şunu [dik koordinat sisteminde bir doğru] *çizerim. Ben şunu düşündüm. Şu x* [ekseni] *tarafını r olarak alırsak* r_1, r_2... *Bu* r_2 *li üçgen* r_1 *li üçgene göre arttığı için r artarken burada* [y ekseninde] *bir azalma olur, diye düşündüm. Öyle bir yorum yapayım dedim...Ben yorum yaptım..*

Güldane: Şuradan x e 0 versem filan.. Aman işte x e 1 verirsek y ye 1 verirsek bir grafik çıksa .. Niye olmasın? y 1 için x 1 çıkıyor...

Buğra: Farklı bir değer verelim. x 0 için...y 0... x 0 için.. y $\sqrt{2}$ *...Şu kocaman noktalardan geçen bir grafik.. Doğru ....Ne diyorduk? Düzgün artan.. azalan....”*

şeklindedir. Burada öğrencilerin kullandıkları işlem cümlesi, araştırmacı tarafından aşağıdaki gibi düşünülmektedir:

“İstenen noktaların grafiği çizilirse analitik düzlemde fonksiyon grafikleri gibi grafiklerin oluşması.”

Tablo 14 incelendiğinde, 4. grup $İ_{5.3}$ işlem cümlesini kullandıkları gözükmektedir. Bu görüşü destekleyen 4. gruba ait konuşma aşağıda verilmiştir:

Didem: […] *yarıçaplarında ortası oluyor..Yani çapın dörtte birinin...*

Kadir: Değil!! Öyle mi?!?

Didem: Evet! Noktaları birleştiren parçaların orta noktalarının orta noktalarının...

Kadir: Öyle! O zaman yarıçapı.. merkezi yine merkez noktası olup da yarıçapı... büyük çemberin yarıçapının yarısı.

Didem: Geometrik yeri çemberin yarıçapının yarısı kadar uzaklıkta olan noktaların oluşturduğu çember oluyor..

Kadir: Yani şöyle bir şey oluyor.. $\frac{r}{2}...\frac{r}{2}$ *..çemberimiz biraz küçük oldu ama..”*

Yine 4. gruba ait bir başka konuşma ise şu şekildedir:

“Didem: O çember oluyor geometrik yeri... Merkezi mi buluyorsun?
Kadir:..miydi? Hı tamam..x i 1 noktası merkezin y si 0.. mı? Yarıçapı 2..r si 1
Didem: (1,0)..”

Öğrencilerin yukarıda bahsedilen konuşmada kullandıkları bir işlem cümlesi şöyledir:

“Verilen çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ise bu çemberin merkez koordinatlarının (1,0) ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{4+0+12} = 2$ birim olması.”

4. gruba ait bir başka konuşma ise:

Didem: Merkezi 1 e 0...
Kadir: Merkezi de 1 e 0.. bunun [denklemi] *şeyi* [formülü] *vardı.*
Didem: $(x-1)^2 + (y-0)^2$ *falan filan bir şeyler mi vardı?*
Kadir: Doğru.. $x^2 - 2x + 1 + y^2 = r^2$, $x^2 - 2x + 1 + y^2$ *.. r si kaçtı bunun?*
Didem: 1! 1!
Kadir: $x^2 + y^2 - 2x + 1 = 1$ *oldu mu?*
Didem: l ler gidiyor.”

şeklindedir. Tablo 14 e bakıldığında 4. grubun sahip olduğu $İ_{5.2}$ ve $İ_{5.6}$ işlem cümlelerini, bu konuşmada ortaya koydukları, araştırmacı tarafından belirlenmiştir.

Son olarak, istenilen noktaların grafiğinin çizilmesi konusunda 4. grubun, iki kere bu soru üzerinde düşündükleri gözlemlenmiştir. Bunlardan ilki şu şekildedir:

> *"Didem: Analitik düzlem çizsek... y doğrusu üzerinde olur merkezi.*
> *Kadir:* […] *İyide bu* [merkez] *x ekseni üzerinde çıktı.. Zaten öyle olacak değil mi?* […] *yarıçapımız 2 olduğu için. Bize bu* [dik koordinat sisteminde merkezi (1,0) yarıçapı 1 birim olarak çizilen] *çemberin denklemini soruyor.* […] *işte* [yarıçapı] *1 oluyor.. r =1 birim.. Bu çemberi soruyor bize.."*

Burada öğrenciler, verilen çemberi analitik düzlemde gösterdikten sonra, istenen çemberi de yine analitik düzlemde göstermişlerdir. Soruda istenen noktaların denklemini yazdıktan sonra, tekrar grafik çizmeye çalışmışlardır:

> *"Kadir: Denklemi yazabildik. Bu denklemin grafiğini çizmeye çalışınız..Evet çizdik ya!*
> *Grafik ne ya? Yani yıllara göre oran mı yapacağız?! Grafik çıkmaz ki buradan! Valla bu denkleme göre bir tane çember çizilir. O da çizik zaten! Aşağıya tekrar çizeyim mi? Grafik? Var mıdır?*
> *Didem: x ve y doğrularına* [noktalarına] *göre çiziliyordu. x şu olduğunda y nin eşiti...*
> *Kadir:* […] *x = 0 için diyelim de.. 0 çıktı.... x = 1 için...*
> *Didem: ± 1 olur.*
> *Kadir: ± 1 olur. x = 2 için.. yine 0 çıktı.. Böyle bu şey* [grafik] *logaritma mı.. böyle..böyle yamuk yumuk... x =3 için..* […] *Bir çizgiye oturtturamadık ki* [grafiği]*! Tekrar bir aynı rakama yakalasam.. bu hep gidecek.. Bir aşağı bir yukarı diyeceğim de* […] *Bence bu yol yanlış oldu ya! Aralarında bir oranda yok ki bunların* [x,y değerleri]! *Bence biz... 2 den fazla veremeyiz ki!! Bir dakika! Bir dakika! x maksimum 2 olur ya.. x 2 den fazla olursa çemberin dışına çıkar!...*
> *Didem: Evet!* […] *Bence bunun grafiği çizilmez ya..!*
> *Kadir: Çizilir.. çizilir.. Ya böyle bir aşağıdan bir yukarıdan giden.. Ondan mı çizeceğiz.. Yoksa yuvarlak mı çizeceğiz? İlginç doğrusunu söylemek*

gerekirse.... İşte ya bu yukardan aşağıdan inen bir fonksiyon şeysi olur. Büyük ihtimalle öyle olur! Sonra nokta nokta gidecekte..”

Burada öğrenciler istenen noktaların grafiğin çizmeye çalışırken, şu işlem cümlelerinin kullandıkları düşünülmektedir:

“İstenen noktaların grafiği çizilirse analitik düzlemde oran, logaritma, artan ya da azalan fonksiyon olması gerektiği. ”
“Grafiği istenen denkleminde, x değişkenine 2 den büyük değer verilirse grafiğin çemberin dışına çıkması”

Tablo 14 de 5. grup incelendiğinde, bu grubun $\dot{I}_{5.3}$ işlem kümesine sahip olduğu görülmektedir. Bu durum, öğrencilerin çizimleri ve yaptıkları sayısal işlemlerle desteklenmektedir. Aşağıda bu işlem cümlesinin yer aldığı düşünülen konuşma verilmiştir:

“Sercan: Önce bunun [verilen denklemin] *bir yarıçapını bulalım.. Şimdi şurası* [işaretlenen nokta] *bunun* [pergelle çizilen çemberin] *merkezi...*
Damla: Çemberin üzerindeki doğru parçalarının...
Sercan: Yarıçapı belirtirsek bir kaç noktadan... 3,5 [cm]
Damla: [...] *birleştiren doğru parçalarının orta noktaları..*
Sercan: Şuradan [çizilen yarıçapın orta noktasından] *iki parçaya böldüğümüzü düşünürsek..*
Damla: birbirine eşit...
Sercan: noktaları birleştiren çemberler. Bunun [sorunun] *bizden istediği geometrik olaydır.*
Damla: Yine çember oldu.”

Ayrıca yine 5. grup tarafından kullanılan bir başka işlem cümlesi ise:

"Verilen çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ise bu çemberin merkez koordinatlarının (1,0) ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{4+12} = 2$ birim olması."

şeklindedir. Bu işlem cümlesinin kullanıldığı düşünülen konuşma şöyledir:

"Sercan: Bu [verilen çemberin] *merkezini bulalım önce.. Merkezi (1,0)*
Damla: Nasıl hatırladın ki onları? Ben analitik sevmem de..
Sercan: Yarıçapı 2 Merkezi de (1,0). Burası [çizilen çemberin merkezi] *(1,0) yarıçapı 2 o zaman buralar* [yarıçapın iki eş parçaya ayrılmasıyla oluşan doğru parçaları] *1 er birim 1 er birim."*

5. grup öğrencilerine ait bir başka konuşma ise aşağıdaki gibidir:

"Sercan: [...] *Şimdi...*
Damla: Şunun kini [istenen çemberin denklemini] *yazacağız.*
Sercan: Tamam $(x-1)^2 + y^2 = 1 \ldots$ $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \ldots$ *Buradan...* $x^2 - 2x + y^2 = 0$"

Burada ise öğrencilerin, Tablo 14 de yer alan, $İ_{5.2}$ ve $İ_{5.6}$ işlem cümlelerini kullandıkları düşünülmektedir. Son olarak 5. grubun grafik çizimi ile ilgili bir konuşması verilecek olunursa:

Sercan: Grafiğini çizdik?
Damla: O grafik değil ki şekil!
Sercan: Grafik ne?
Damla: Böyle artacak azalacak... yok parabol ne biliyim.. Grafik çizeceğiz o zaman!
Sercan: E yine aynısı çıkacak!
Damla: Çıkmayacak!
Sercan: Çıkacak...

Damla: Şimdi x 0 için desek... ne olacak ki? O zaman y de 0 olacak! Bir şey fark etmiyor ki!... O zaman y ye 0 vereceğim, yine x de sıfır olacak.. yine bir şey değişmiyor.
Sercan: Tek bir nokta mı buluyorsun?
Damla: (0,0) çıkar! Başka bir şey çıkmıyor ki!
Sercan: y ye 0 verirsem x de 0 mı çıkıyor?
Damla: Çıkmıyor! Hıı.. Köklü falan bir şey çıkıyor.
Sercan: x eşittir 2
Damla: (0,0) şurası [dik koordinat düzlemindeki orijin] *iyide bu çizilir mi? Bu böyle kaldı!*
Sercan: İkinci dereceden bir denklem... Asla bir doğru olmaz... ya yarım çemberdir, yarı çember denklemi değil. Bence yazdığım doğruydu. Çizdiğimiz grafik yarıçapı diğerinin yarısı ve merkezi aynı olan bir çember oluşturur....yada belirtir..fark etmez..."

Öğrencilerin aralarında geçen bu konuşmada, grafik çizimi ile ilgili kullanılan işlem cümlesi aşağıdaki gibidir:

"İstenen noktaların grafiği çizilirse, analitik düzlemde artan azalan parabol gibi elde edilmesi"

Tablo 14 e bakıldığında, incelenen son grup olan 6. grubun $\dot{I}_{5.3}$ işlem kümesine sahip olduğu aşağıdaki konuşmaya ve yaptıkları sayısal işlemlere dayandırılarak belirlenmiştir:

"Gizem: Merkezi ile üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçalarının demiş yani yarıçaplar. Bence bu sorunun cevabı yine bir çemberdir.
Serkan: Bir nedeni olmalı ama!
Gizem: Bu merkezle [çizilen çemberin merkezi] *üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçaları dediği şey yarıçap yani düşününce öyle çıkıyor.*

Bir sürü yarıçap var. Orta noktaları da, hepsinin orta noktasını birleştirirsek yine bir çember oluşur."

Öğrencilerin arasında, verilen çemberin merkezini ve yarıçapını bulmaya çalışırken şöyle bir konuşma geçmiştir:

"Serkan: Yani tamam.(1,0) Birde koordinat çizeyim..
Gizem: 1 e 0 olunca y nin üzerinde mi olacak? Ayy iyice kafam karıştı!
Serkan: x ekseni üzerinde olur.
Gizem: Yarıçapını bulabiliriz değil mi? $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$
Serkan: 2 olur".

Burada öğrenciler tarafından kullanılan işlem cümlesi:

"Verilen çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ise bu çemberin merkez koordinatlarının (1,0) ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F} = \frac{1}{2}\sqrt{4+12} = 2$ birim olması."

olarak gözlemlenmiştir. Ayrıca aşağıdaki ifade de 6. grubun, $İ_{5.2}$ ve $İ_{5.6}$ işlem cümlelerini kullandıkları da belirlenmiştir:

"2 olursa şurası [istenen çemberin yarıçapı] *1 olur. Merkezini de bulmuştuk yine (1,0). Merkezleri aynı olduğu için direkt denklemini yazarız.* $(x-1)^2+(y-0)^2=1^2$ *bulduğumuz denklemdir.*

6. grupta bulunan öğrenciler, arasında istenen noktaların grafiğin çizimi ile ilgili aşağıdaki konuşma geçmiştir:

Serkan: Şimdi grafiğini çizelim...

Gizem: x 0 için y kaç? y 0 için x kaç? Bence öyle bir yöntem... Denklem bulduğumuz için koordinat sisteminde şöyle bir şeyler çiziliyor ya hani vardı..Şöyle [parabole benzer şeyler] *bir şeyler çıkacak.*

Serkan: x 0 için y 0 dır.

Gizem : y 0 içinde. x ya 0 yada 2 dir. Çizelim..Şurası x ekseni şurası y ekseni.. İyi de bu hep 0 oluyor.. Bir nokta burası... Diğer nokta.. y 0 için..

Serkan: 2 dir... Bence çizdiğimiz grafiğin bir adı vardır. Nedir?

Gizem: Grafik. Bence parabol gibi bir şey soruluyor.

Serkan: Hayır .Şimdi bu (0,0) ya, bu orijin denklemidir. Bu orijin grafiğidir. Bir de (2,0) O da x eksenine ait bir şeydir, grafiktir. İki grafik çizeceğiz..

Gizem: Böyle mi? Çok saçma geldi bana. Bence bir değer daha verelim .x 1 için y = 1 olur! y = 1 için x.(x–2) = –1 miş. Yaa uff denklem yazalım.. x^2 –2x +1= 0 dan.

Serkan: x =1

Gizem: Aynı şeyler çıkıyor.. O zaman ben diyorum ki bunun denklemi bir noktadır Nokta değildir pardon..

Serkan: Şöyle gidiyor [(2,0) ve (1,1) den geçen bir doğru] *o zaman. Bir de burası* [orijin] *var. Böyle mi geçer?*

Gizem:Yok burasını [orijini] *saymayalım bence..*

Serkan: Niye? 0 da bir sayı değil midir?

Gizem: 0 sayı zaten 0 ı da saydık da karışık oluyor o zaman. Şöyle bir şey bu ayrı bir doğru[orijinden geçen bir doğru].

Serkan: O zaman şöyle mi gidiyor? Zig zag gibi bir şey herhalde!"

Bu konuşmada, öğrenciler grafik çizimi ile ilgili şu işlem kümesini kullanmışlardır:

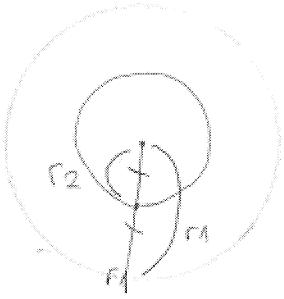
"İstenen noktaların grafiği çizilirse analitik düzlemde doğru denklemi elde edilmesi."

Tablo 15. 5. soruya ait Temsil Kümesi

Anahtar Kavrama Temsil Kümesi	1.grup	2.grup	3.grup	4.grup	5.grup	6.grup
1.Düzlemde sabit bir nokta işaretleme	+	+	+	+	+	+
2.Sabit noktayı M(a,b) olarak isimlendirme	–	–	–	–	–	–
3.M(a,b) merkezli bir çember çizme	+	+	+	+	+	+
4.Çember üzerinde rasgele bir nokta işaretleme	+	+	+	+	+	+
5.Rasgele noktayı P(x,y) ile isimlendirme	–	–	–	–	–	–
6.P ve M noktalarını birleştirme	+	+	+	+	+	+
7. $[PM]$ nın çemberin yarıçapı olduğunu söyleme	+	+	+	+	+	+
8. $[PM]$nın uzunluğunu r harfi ile isimlendirme ve "$\|PM\| = r$" şeklinde gösterme	–	–	–	+	–	–
9. $[PM]$nın uzunluğunu iki nokta arasındaki uzaklık formülünden, $\|PM\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Rightarrow$ $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ şeklinde yazma	–	–	–	–	–	–
10. $[PM]$nın orta noktasını işaretleme	+	+	+	+	+	+
11. $[PM]$nın orta noktasını K(u,v) ile gösterme	–	–	–	–	–	–
12."$\|PM\| = r \Rightarrow \|PK\| = \|MK\| = \frac{r}{2}$" şeklinde gösterme	–	–	–	–	–	–
13. $[MK]$nın uzunluğunu iki nokta arasındaki uzaklık formülünden, $\|MK\| = \frac{r}{2} \Rightarrow \sqrt{(u-a)^2 + (v-b)^2} = \frac{r}{2}$ $\Rightarrow (u-a)^2 + (v-b)^2 = \frac{r^2}{4}$ şeklinde yazma	–	–	–	–	–	–
14.$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ denklemini gerekli düzenlemeler yaparak, $(x-1)^2 + y^2 = 2^2$ şeklinde yazma	+	–	–	–	–	–
15. $(x-1)^2 + y^2 = 1^2$ denklemini gerekli düzenlemeler yaparak $x^2 + y^2 - 2x = 0$ şeklinde yazma	+	+	+	+	+	+
16.Dik koordinat düzlemi çizme	+	+	+	+	+	+
17.Düzlemde M(1,0) noktasını işaretleme	+	+	–	+	–	+

18.Pergeli 1 birim açma	–	–	–	+	–	–
19.Pergelin iğnesini M(1,0) noktasına batırma	–	–	–	+	–	–
20.Merkezi M(1,0) olan ve yarıçapı 1 birim olan çemberi çizme	+	+	–	+	–	–

Tablo 15, 5. soru için öğrencilerin kullandıkları temsil cümlelerini ifade etmektedir. 1. grubun yapmış olduğu, iki çizim bulunmaktadır. Bu çizimlerin ilkinde, gruba ait $T_{5.1}$, $T_{5.3}$, $T_{5.4}$, $T_{5.6}$, $T_{5.7}$ ve $T_{5.10}$ temsil kümeleri görülmektedir:



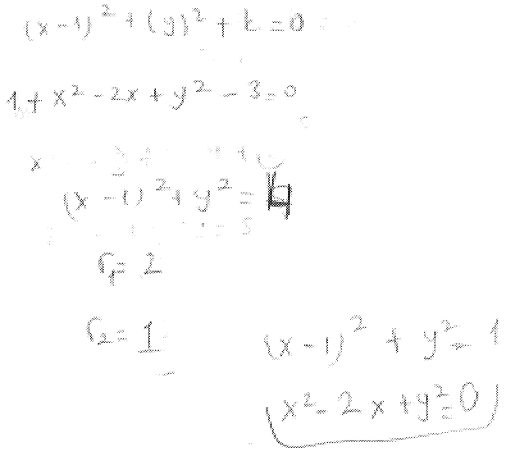
Şekil 34- 1. grubun 5. soruya ait çizimi

Şekil 34 den de görüldüğü gibi, bu grubun kullandığı temsil cümleleri aşağıdadır:

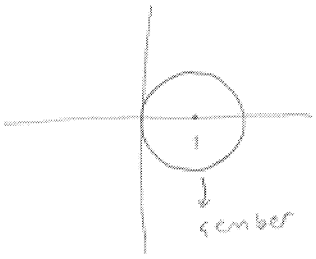
" Büyük çemberin yarıçapını r_1 ile gösterme

Küçük çemberin yarıçapını r_2 ile gösterme"

Benzer şekilde 1. grubun, yaptığı sayısal işlemler ile ilgili temsil cümleleri $T_{5.14}$ ve $T_{5.15}$ ile ifade edilmiştir. Öğrencilerin bu işlemleri aşağıda verilmiştir:

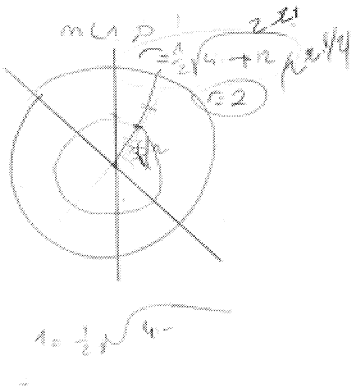


Tablo 15 incelendiğinde, istenen grafik çizimi ile ilgili temsil cümleleri olan $T_{5.16}$, $T_{5.17}$, $T_{5.18}$ ve $T_{5.20}$, 1. grup tarafından kullanıldığı görülmektedir:



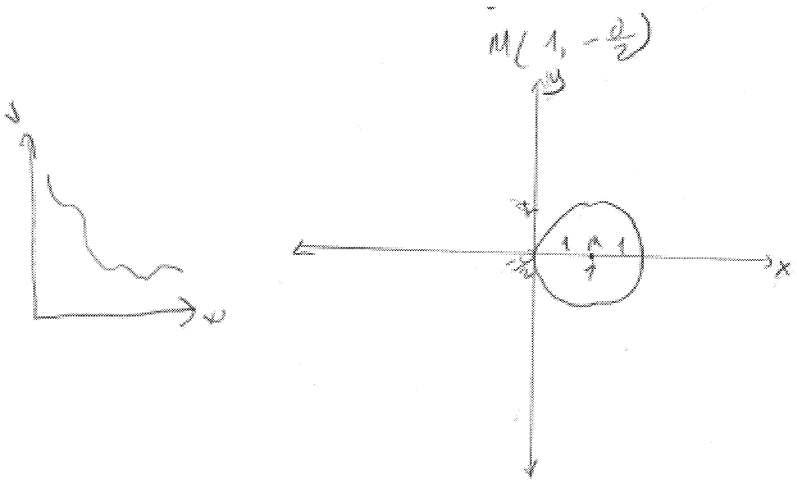
Şekil 35- 1. grubun 5. soruya ait grafik çizimi

2. grubun kullandığı temsil cümleleri olan ise $T_{5.1}$, $T_{5.3}$, $T_{5.4}$, $T_{5.6}$, $T_{5.7}$, $T_{5.10}$ ve $T_{5.15}$ aşağıdaki şekle bakıldığında görülmektedir:



Şekil 36- 2. grubun 5. soruya ait çizimi

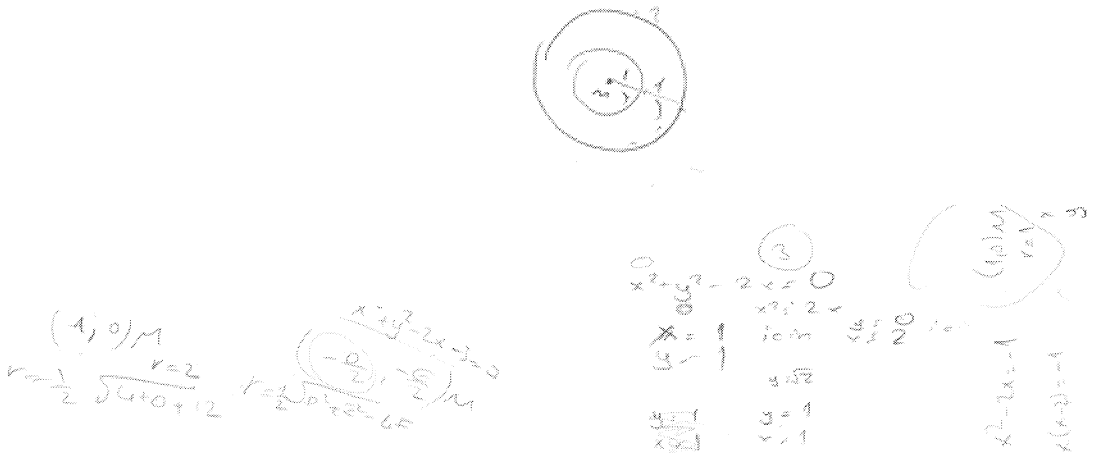
2. grup, iki grafik çizmiştir. Aşağıdaki çizimlerden sağdaki, Meriç 'in çizimi, soldaki ise Berre 'nin çizimidir:



Şekil 37- 2. grubun 5. soruya ait grafik çizimleri

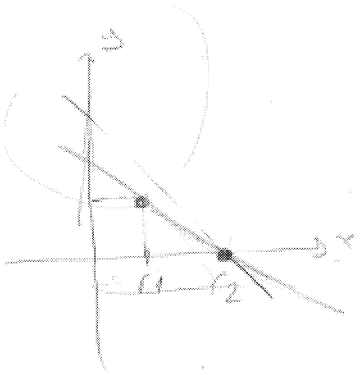
Öğrencilerin $T_{5.16}$, $T_{5.17}$ ve $T_{5.20}$ temsil cümlelerine sahip oldukları, Şekil 37 de görülmektedir.

Bir diğer grup olan 3. grubun, 5. soru için yaptıkları çizim ve sayısal işlemler için kullandıkları temsil cümleleri $T_{5.1}$, $T_{5.3}$, $T_{5.4}$, $T_{5.6}$, $T_{5.7}$, $T_{5.10}$, $T_{5.11}$ ve $T_{5.13}$ aşağıda gözükmektedir:



Şekil 38-3. grubun 5. soruya ait çizimi

Bunun yanında, 3. grubun grafik çizimi de Şekil 39 da verilmiştir:



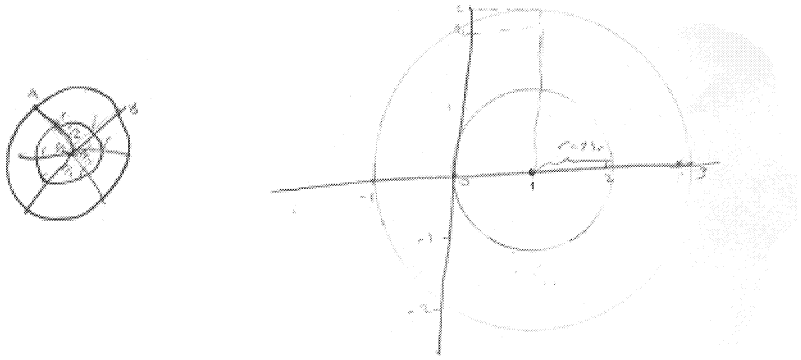
Şekil 39- 3. grubun 5. soruya ait grafik çizimi

Burada, öğrencilerin Tablo 15 de sahip oldukları sadece $T_{5.15}$ temsil cümlesidir. Öğrencilerin burada kullandıkları temsil cümlesi ise:

"Dik koordinat düzleminde doğru grafiği çizme"

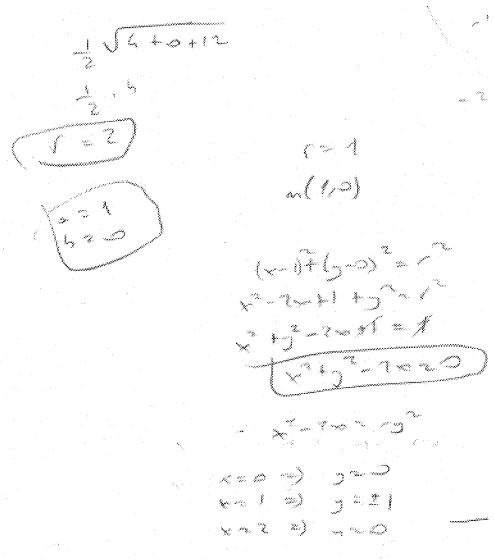
olarak ifade edilebilir.

Tablo 15 e, 4. grup için bakıldığında $T_{5.1}$, $T_{5.3}$, $T_{5.4}$, $T_{5.6}$, $T_{5.7}$, $T_{5.8}$, $T_{5.10}$, $T_{5.12}$, temsil cümlelerine sahip oldukları görülmektedir:

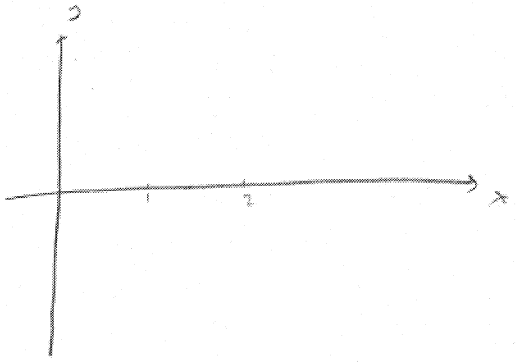


Şekil 40- 4. grubun 5. soruya ait çizimleri

Bunun yanında, 4. grubun aşağıda verilen işlemlerinden de $T_{5.14}$ ve $T_{5.15}$ temsil cümlelerinin olduğu tespit edilmiştir:

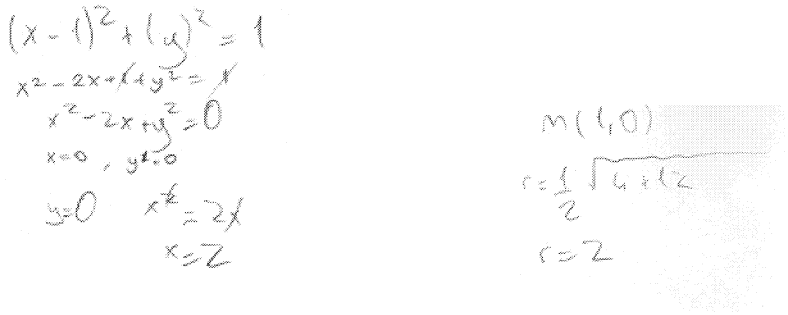


Aslında 4. grup, istenen noktaların grafiğini çizme konusunda başarılı olamamışlardır. Fakat aşağıdaki Şekil 41 de, öğrencilerin $T_{5.16}$, $T_{5.17}$, $T_{5.18}$, $T_{5.19}$ ve $T_{5.20}$ temsil cümlelerini kullanmalarına rağmen, doğru çözüm yaptıklarını fark etmeden çizdiklerini, araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir:

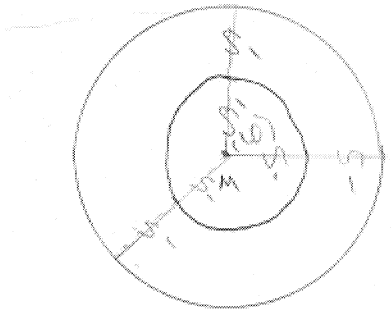


Şekil 41- 4. grubun 5. soruya ait grafik çizimi

5. grup için aşağıda verilen işlemleri incelenmesi yardımıyla, Tablo 15 de yer alan $T_{5.1}$, $T_{5.2}$, $T_{5.3}$, $T_{5.6}$, $T_{5.7}$, $T_{5.10}$ ve $T_{5.15}$ temsil sistemlerine sahip oldukları, görülmektedir:

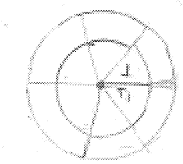


Ayrıca 5. grubun çizimleri de, bunu desteklemektedir:



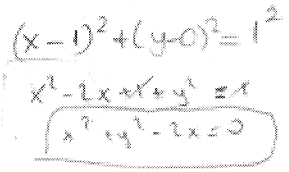
Şekil 42- 5. grubun 5. soruya ait çizimi

İncelenen son grup olan 6. grup, $T_{5.1}$, $T_{5.3}$, $T_{5.4}$, $T_{5.6}$, $T_{5.7}$ ve $T_{5.10}$ temsil cümlelerine sahip oldukları Şekil 43 de yer almaktadır:

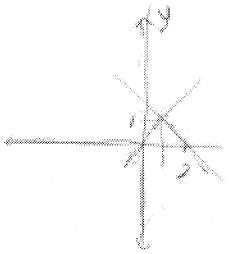


Şekil 43-6. grubun 5. soruya ait çizimi

Tablo 15 e bakıldığında, 6. gruba ait olarak görülen $T_{5.15}$ temsil kümesi için aşağıdaki işlemlerinde bulunmaktadır:



6. grubun grafik ile ilgili yaptığı çizim Şekil 44 de gözükmektedir:



Şekil 44- 6. grubun 5. soruya ait grafik çizimi

Şekil 44 den de görüldüğü gibi 6. grubun burada kullandıkları temsil cümlesi şu şekildedir:

"Dik koordinat düzleminde doğru grafiği çizme"

Tablo 16. 5. soruya ait Kontrol Kümesi

Anahtar Kavrama Kontrol Kümesi	1.grup	2.grup	3.grup	4.grup	5.grup	6.grup
1.Düzlemde sabit bir M noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesi, çemberdir.	+	+	+	+	+	+
2. Düzlemde M(a,b) noktası çemberin merkezi ve P(x,y) noktası çemberin üzerinde rasgele bir nokta olmak üzere M ve P noktalarını birleştiren doğru parçasının uzunluğu yarıçaptır ve $\|PM\| = r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ dir.	–	–	–	–	–	–
3.Bir doğru parçasının orta noktası, doğru parçasını iki eş parçaya ayırır.	+	+	+	+	+	+
4.Bir çemberin grafiği, o denklemi sağlayan noktaların dik koordinat düzleminde geometrik olarak temsil edilmesidir.	+	+	–	–	–	–

Tablo 16 da, öğrencilerin 5. soru ile ilgili ortaya koydukları kontrol kümesinin elemanları görülmektedir. Tablo 16 incelendiğinde, $K_{5.1}$ ve $K_{5.3}$ kontrol cümlelerinin, bütün gruplar tarafından kullanıldığı gözükmektedir. $K_{5.4}$ kontrol cümlesini ise sadece 1. ve 2. grupların kullandıkları, yine Tablo 16ya bakıldığında görülmektedir. 1. gruba ait:

"Batuhan: Gene çember belirtir de... Ama bu soru harbiden zor yani...

Burak: Yok ya... Yine bir çember belirtir. Merkezi yine ilk çemberin merkezi ile aynıdır. Yarıçapı yarısına eşittir."

konuşmasında $K_{5.1}$ ve $K_{5.3}$ kontrol cümlelerinin kullanıldığı düşünülmektedir. Ayrıca yine $K_{5.4}$ kontrol cümlesine sahip oldukları, araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir Bu durum, öğrencilerin çizimleri ve aşağıda verilen öğrencilere ait görüş ile desteklenmektedir:

"Burak: Bu [$(x-1)^2 + y^2 = 1^2$] *denklemin grafiğini..*

Batuhan: Grafiği... işte çember... y=0 olacak, $x^2 = 2x$ *olacak...*

Burak: Şu [dik koordinat sisteminde merkezi (1,0) ve yarıçapı 1 birim olan çember] *değil midir?*

Batuhan: Evet doğru."

Gözlenen bir diğer grup olan 2. grup için bir kontrol cümlesi, şu şekildedir:

"Sabit bir noktadan geçen doğrular, doğru demeti oluşturur."

2. grubun bu kontrol cümlesini kullandıkları düşünülen konuşmaları, aşağıda verilmiştir:

"Berre: Çember çizelim.

Meriç: Olası geometrik yeri merkez işte. Çemberin merkezi ile çemberin üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçaları. Doğru demeti yani o da var. Doğru demeti oluşturuyor."

Yine Tablo 16, 2. grup için incelendiğinde, $K_{5.1}$ ve $K_{5.3}$ kontrol cümlelerinde sahip oldukları görülmektedir:

"Berre: r yi de buluyorduk. r=2 bulduk. Merkezi çizdik r yi de bulduk, yine bir çember çizelim. (1,0)... şurası [verilen çemberin yarıçapı] *2 olsun..."*

Meriç: Analitik düzlemde nasıl göstereceğiz? [...] *Grafiğini çizmeye çalışacağız. Bunun* [istenen çemberin] *grafiğini analitik düzlemde çizdiğimiz şey miydi?*

Berre: Çember oluyor o zaman. Yarıçapı 1 olur."

3. grupta yer alan Meriç'in grafik ile ilgili olarak, $K_{5.4}$ kontrol cümlesini kullandığı düşünülmektedir:

Berre: Bu grafik olmadı..

Meriç: Bence oldu.

Berre: Zaten çemberi biz analitik düzlemde gösterdik..

Meriç: Nasıl bir grafik bekliyordun? V-t grafiği mi?

Berre: Grafik deyince hani böyle fonksiyon grafikleri gibi şöyle şöyle..

Meriç: Grafiğin adı çember grafiği.

Berre: Bence çember değildir."

Yukarıda verilen konuşmada Berre 'nin kontrol cümlesinin ise şu şekilde olduğu düşünülmektedir:

"Bir denklemin grafiği, fonksiyon grafiği gibi çizilmelidir."

Araştırmada yer alan 3. grup için Tablo 16 ya bakıldığında bu grubun $K_{5.1}$ ve $K_{5.3}$ kontrol cümlelerine sahip oldukları görülmektedir:

"Bir tane çember vermiş... Merkezi ile üzerindeki noktaların... orta noktaları da yine aynı merkezli bir başka çember oluşturur. Bu çemberin denklemi merkezi (1,0) yarıçapı 1 olan çember..."

Ayrıca öğrenciler, verilen çemberin merkez ve yarıçapını bulurken, aşağıdaki kontrol cümlesini kullandıkları düşünülmektedir:

"Genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde olan bir çemberin merkez koordinatları $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçapı $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ olarak bulunur."

3. grup öğrencilerinin grafik çizimi için aralarında geçen konuşmanın, bir kısmı şöyledir:

Güldane: [...] *Şimdi bu denklemin grafiğini mi çizeceğiz?*
Buğra: Grafiği evet. -3... 3 azalan olabilir mi ki acaba? x 1 için.. x için azalıyor. Azalan bir grafikte!..Çizeyim mi ? Ben şunu [dik koordinat sisteminde bir doğru] *çizerim. Ama neden neden!!.. Ben şunu düşündüm. Şu x* [ekseni] *tarafını r olarak alırsak* r_1, r_2... *Bu* r_2 *li üçgen* r_1 *li üçgene göre arttığı için r artarken burada* [y ekseninde] *bir azalma olur, diye düşündüm. Öyle bir yorum yapayım dedim...*
Güldane: Şuradan x e 0 versem filan.. Aman işte x e 1 verirsek y ye 1 verirsek bir grafik çıksa .. Niye olmasın? y 1 için x 1 çıkıyor...
Buğra: Farklı bir değer verelim. x 0 için...y 0... x 0 için.. y $\sqrt{2}$ *...Şu kocaman noktalardan geçen bir grafik.. Doğru ....Ne diyorduk? Düzgün artan.. azalan...."*

Burada, öğrencilerin sahip oldukları düşünülen kontrol cümlesi aşağıda verilmiştir:

"Bir denklemin grafiği çizilirken x değişkenlerine değerler verilerek y değişkenleri bulunur ve bu nokta ikilileri analitik düzlemde gösterilir. Elde edilen şekil doğru denklemi, artan azalan şekiller olmalıdır."

4. grup ise yine diğer gruplar gibi, $K_{5.1}$ ve $K_{5.3}$ kontrol cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir:

Didem: […] *yarıçaplarında ortası oluyor..Yani çapın dörtte birinin...*
Kadir: Değil!! Öyle mi?!?
Didem: Evet! Noktaları birleştiren parçaların orta noktalarının orta noktalarının...
Kadir: Öyle! O zaman yarıçapı.. merkezi yine merkez noktası olup da yarıçapı... büyük çemberin yarıçapının yarısı.
Didem: Geometrik yeri çemberin yarıçapının yarısı kadar uzaklıkta olan noktaların oluşturduğu çember oluyor..
Kadir: Yani şöyle bir şey oluyor.. $\frac{r}{2}...\frac{r}{2}$ *..çemberimiz biraz küçük oldu ama.."*

4. grup, verilen çemberin merkezini ve yarıçapını bulurken kullandıkları kontrol cümlesi şöyledir:

"Genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde olan bir çemberin merkez koordinatları $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçap $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ olarak bulunur."

Bu belirtilen kontrol cümlesini, aşağıda verilen konuşmada kullandıkları düşünülmektedir:

"Didem: O çember oluyor geometrik yeri... Merkezi mi buluyorsun?

Kadir:..miydi? Hı tamam..x i 1 noktası merkezin y si 0.. mı? Yarıçapı 2..r si 1
Didem: (1,0)..”

Bu durum, öğrencilerin yaptıkları sayısal işlemlerle de desteklenmektedir. Aslında bu gruptaki öğrenciler istenen grafiği çizmişlerdir:

“Didem: Analitik düzlem çizsek... y doğrusu üzerinde olur merkezi.
Kadir: […]*İyide bu* [merkez] *x ekseni üzerinde çıktı.. Zaten öyle olacak değil mi?* […] *yarıçapımız 2 olduğu için. Bize bu* [dik koordinat sisteminde merkezi (1,0) yarıçapı 1 birim olarak çizilen] *çemberin denklemini soruyor.* […] *işte* [yarıçapı] *1 oluyor.. r =1 birim.. Bu çemberi soruyor bize..”*

Bunun yanında, 4. grubun grafik ile ilgili kontrol cümleleri şu şekildedir:

“Bir denklemin grafiği, yıllara göre oran grafiği gibi artan alan fonksiyonlar gibi çizilmelidir ”

Öğrencilerin grafik çizimi ile ilgili konuşması ise şu şekildedir:

“Kadir: Denklemi yazabildik. Bu denklemin grafiğini çizmeye çalışınız..Evet çizdik ya!
Grafik ne ya? Yani yıllara göre oran mı yapacağız?! Grafik çıkmaz ki buradan! Valla bu denkleme göre bir tane çember çizilir. O da çizik zaten! Aşağıya tekrar çizeyim mi? Grafik? Var mıdır?
Didem: x ve y doğrularına [noktalarına] *göre çiziliyordu. x şu olduğunda y nin eşiti...*
Kadir: […] *x = 0 için diyelim de.. 0 çıktı.... x = 1 için...*
Didem: ± 1 olur.
Kadir: ± 1 olur. x = 2 için.. yine 0 çıktı.. Böyle bu şey [grafik] *logaritma mı.. böyle..böyle yamuk yumuk... x =3 için..* […] *Bir çizgiye oturtturamadık ki* [grafiği]*! Tekrar bir aynı rakama yakalasam.. bu hep gidecek.. Bir aşağı bir yukarı diyeceğim de* […] *Bence bu yol yanlış oldu ya! Aralarında bir oranda*

yok ki bunların [x,y değerleri]! *Bence biz... 2 den fazla veremeyiz ki!! Bir dakika! Bir dakika! x maksimum 2 olur ya.. x 2 den fazla olursa çemberin dışına çıkar!...*
Didem: Evet! […] *Bence bunun grafiği çizilmez ya..!*
Kadir: Çizilir.. çizilir.. Ya böyle bir aşağıdan bir yukarıdan giden.. Ondan mı çizeceğiz.. Yoksa yuvarlak mı çizeceğiz? İlginç doğrusunu söylemek gerekirse.... İşte ya bu yukardan aşağıdan inen bir fonksiyon şeysi olur.Büyük ihtimalle öyle olur! Sonra nokta nokta gidecekte..”

Tablo 16 da 5. grup incelendiğinde, bu grubun da $K_{5.1}$ ve $K_{5.3}$ kontrol cümlelerinde sahip oldukları görülmektedir. Bu durumu destekleyen ve öğrenciler arasında geçen konuşma şu şekildedir:

“Sercan: Bu [verilen çemberin] *merkezini bulalım önce.. Merkezi (1,0)*
Damla: Nasıl hatırladın ki onları? Ben analitik sevmem de..
Sercan: Yarıçapı 2 Merkezi de (1,0). Burası [çizilen çemberin merkezi] *(1,0) yarıçapı 2 o zaman buralar* [yarıçapın iki eş parçaya ayrılmasıyla oluşan doğru parçaları] *1 er birim 1 er birim.”*

Öğrencilerin yaptıkları sayısal işlemler ve verilen konuşmada, ayrıca öğrencilerin verilen denklemin merkezi ve yarıçapı aşağıda belirtilen kontrol cümlesi ile ifade ettikleri düşünülmektedir:

“Genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde olan bir çemberin merkez koordinatları $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçap $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ olarak bulunur.”

Bunun yanında, öğrencileri grafik çizimi ile ilgili kararsızlıkları bulunmaktadır. Aralarında geçen konuşma ise şöyledir:

Sercan: Grafiğini çizdik?

Damla: O grafik değil ki şekil!

Sercan: Grafik ne?

Damla: Böyle artacak azalacak... yok parabol ne biliyim.. Grafik çizeceğiz o zaman!

Sercan: E yine aynısı çıkacak!

Damla: Çıkmayacak!

Sercan: Çıkacak...

Damla: Şimdi x 0 için desek... ne olacak ki? O zaman y de 0 olacak! Bir şey fark etmiyor ki!... O zaman y ye 0 vereceğim, yine x de sıfır olacak.. yine bir şey değişmiyor.

Sercan: Tek bir nokta mı buluyorsun?

Damla: (0,0) çıkar! Başka bir şey çıkmıyor ki!

Sercan: y ye 0 verirsem x de 0 mı çıkıyor?

Damla: Çıkmıyor! Hıı.. Köklü falan bir şey çıkıyor.

Sercan: x eşittir 2

Damla: (0,0) şurası [dik koordinat düzlemindeki orijin] *iyide bu çizilir mi? Bu böyle kaldı!*

Sercan: İkinci dereceden bir denklem... Asla bir doğru olmaz... ya yarım çemberdir, yarı çember denklemi değil. Bence yazdığım doğruydu. Çizdiğimiz grafik yarıçapı diğerinin yarısı ve merkezi aynı olan bir çember oluşturur....yada belirtir..fark etmez...”

Burada öğrencilerin kullandıkları düşünülen kontrol cümleleri, şu şekilde belirtilmiştir:

“Bir denklemin grafiği artan azalan fonksiyonlar gibi, parabol gibidir.
İstenen yerin denklemi 2. derecedendir ve doğru denklemi gibi çizilemez.”

İncelenen son grup olan 6. grupta, yine diğer gruplar gibi $K_{5.1}$ ve $K_{5.3}$ kontrol cümlelerine sahip oldukları düşünülmektedir. Bu fikri destekleyen grup konuşması, aşağıda verilmiştir:

> *"Gizem: Merkezi ile üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçalarının demiş yani yarıçaplar. Bence bu sorunun cevabı yine bir çemberdir.*
> *Serkan: Bir nedeni olmalı ama!*
> *Gizem: Bu merkezle* [çizilen çemberin merkezi] *üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçaları dediği şey yarıçap yani düşününce öyle çıkıyor. Bir sürü yarıçap var. Orta noktaları da, hepsinin orta noktasını birleştirirsek yine bir çember oluşur."*

Yine bu grupta verilen denklemin merkezini ve yarıçapını bulurken şu kontrol cümlesini kullandıkları düşünülmektedir:

> "Genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde olan bir çemberin merkez koordinatları $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçap $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ olarak bulunur."

6. grupta yer alan öğrenciler, istenen yerin grafiğini çizme konusunda zorlandıkları gözlemlenmiştir:

> *Serkan: Şimdi grafiğini çizelim...*
> *Gizem: x 0 için y kaç? y 0 için x kaç? Bence öyle bir yöntem... Denklem bulduğumuz için koordinat sisteminde şöyle bir şeyler çiziliyor ya hani vardı..Şöyle* [parabole benzer şeyler] *bir şeyler çıkacak.*
> *Serkan: x 0 için y 0 dır.*
> *Gizem : y 0 içinde. x ya 0 yada 2 dir. Çizelim..Şurası x ekseni şurası y ekseni.. İyi de bu hep 0 oluyor.. Bir nokta burası... Diğer nokta.. y 0 için..*
> *Serkan: 2 dir... Bence çizdiğimiz grafiğin bir adı vardır. Nedir?*

Gizem: Grafik. Bence parabol gibi bir şey soruluyor.

Serkan: Hayır .Şimdi bu (0,0) ya, bu orijin denklemidir. Bu orijin grafiğidir. Bir de (2,0) O da x eksenine ait bir şeydir, grafiktir. İki grafik çizeceğiz..

Gizem: Böyle mi? Çok saçma geldi bana. Bence bir değer daha verelim .x 1 için y = 1 olur! y = 1 için x.(x–2) = –1 miş. Yaa uff denklem yazalım.. x^2 –2x +1= 0 dan.

Serkan: x =1

Gizem: Aynı şeyler çıkıyor.. O zaman ben diyorum ki bunun denklemi bir noktadır Nokta değildir pardon..

Serkan: Şöyle gidiyor [(2,0) ve (1,1) den geçen bir doğru] *o zaman. Bir de burası* [orijin] *var. Böyle mi geçer?*

Gizem:Yok burasını [orijini] *saymayalım bence..*

Serkan: Niye? 0 da bir sayı değil midir?

Gizem: 0 sayı zaten 0 ı da saydık da karışık oluyor o zaman. Şöyle bir şey bu ayrı bir doğru[orijinden geçen bir doğru].

Serkan: O zaman şöyle mi gidiyor? Zig zag gibi bir şey herhalde!"

Yukarıda, öğrencilerin konuşmalarından çıkarılan kontrol cümlesi ise şöyledir:

"Bir denklemin grafiği parabol grafiği gibi, doğru denklemi gibidir."

Araştırmada yer alan grupların, 5. soruya ait problem, işlem, temsil ve kontrol kümeleri ile ilgili oluşturulan tablolar aşağıda gözükmektedir. Bu tablolar, bulguları toparlamak amacıyla hazırlanmıştır. Bu tablolardan ilki, 1. grubun (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsüne aittir:

Tablo 5.1. 1.grubun 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

1. grup	Problem Kümesi	$P_{5.1}, P_{5.2}, P_{5.3}, P_{5.5}, P_{5.7}, P_{5.8}$
	İşlem Kümesi	$İ_{5.2}, İ_{5.3}, İ_{5.5}, İ_{5.6}, İ_{5.7}$
	Temsil Kümesi	$T_{5.1}, T_{5.3}, T_{5.4}, T_{5.6}, T_{5.7}, T_{5.10}, T_{5.14}, T_{5.15}, T_{5.16}, T_{5.17}, T_{5.20}$
	Kontrol Kümesi	$K_{5.1}, K_{5.3}, K_{5.4}$

Bu belirtilen kavrama öğelerinin yanında, 1. grubun sahip olduğu başka kavrama öğeleri de bulunmaktadır:

Temsil Kümesi:

" Büyük çemberin yarıçapını r_1 ile gösterme"

"Küçük çemberin yarıçapını r_2 ile gösterme"

1. grubun, 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü ile anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü göz önüne alındığında, bu grubun araştırmacı tarafından beklenilen çözümü yaptıkları düşünülmektedir.

Soruda, çemberin merkezi ile çemberin üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçalarının çemberin "*yarıçapları*" olduğunu hemen fark etmişlerdir. Yarıçaplarının orta noktalarının birleştirilmesiyle oluşan geometrik yerin de ilk çemberin merkeziyle aynı merkezli bir çember olduğunu açıkladıktan sonra, bu durum ile ilgili çizim yapmışlardır.

İlk verilen çember denkleminin, $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ olmasıyla aranılan geometrik yerin denklemini, herhangi bir formüle dayandırmadan yazmışlardır. Verilen çemberin merkezinin (1,0) noktası olduğunu bulduktan sonra, verilen ve istenen çemberlerin yarıçaplarını bulmuşlardır.

Denklemin grafiğini çizerken de hiçbir zorluk yaşamadıkları, araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir. Dik koordinat sisteminde, (1,0) noktasını işaretlemiş ve istenilen geometrik yeri yani çemberi çizmişlerdir.

2.grubun 5. soru ile ilgili sahip oldukları kavrama (P,İ,T,K) dörtlüsü ile anahtar kavrama (P,İ,T,K) dörtlüsü kıyaslandığında aşağıdaki tablo elde edilmiştir:

Tablo 5.2. 2.grubun 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

2. grup	Problem Kümesi	$P_{5.1}, P_{5.2}, P_{5.3}, P_{5.5}, P_{5.7}, P_{5.8}$
	İşlem Kümesi	$İ_{5.2}, İ_{5.3}, İ_{5.6}$
	Temsil Kümesi	$T_{5.1}, T_{5.3}, T_{5.4}, T_{5.6}, T_{5.7}, T_{5.10}, T_{5.15}, T_{5.16}, T_{5.17}, T_{5.20}$
	Kontrol Kümesi	$K_{5.1}, K_{5.3}, K_{5.4}$

Bunun yanı sıra, 2. grubun sahip olduğu diğer kavrama öğeleri de şu şekildedir:

Problem Kümesi:

"Çemberin çevresi nedir?"

"Fonksiyon grafiği nedir?"

İşlem Kümesi:

"Yarıçapı r olan çemberin çevresi $2\pi r$ ise istenen noktaların, çevresi büyük çemberin çevresinin yarısı olan bir çember oluşturması."

"Verilen çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ise bu çemberin merkez koordinatlarının $(1, -\frac{0}{2}) = (1,0)$ ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{4+12} = 2$ birim olması."

"İstenen çemberin grafiği çizilirse analitik düzlemde fonksiyon grafikleri gibi, V-t grafiği gibi grafiklerin oluşması."

Kontrol Kümesi:

"Sabit bir noktadan geçen doğrular, doğru demeti oluşturur."

Bu gruptan elde edilen yazılı ve sözlü verilerin de yardımıyla, 2.grup için oluşturulan (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü düşünüldüğünde, öğrencilerin tam olmasa da istenilen düzeyde bir çözüme sahip olduğu düşünülebilir.

2. grup, çemberin merkezi ile çemberin üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçalarının, çemberin "*yarıçapları*" olduğunu fark etme hususunda zorlandıkları gözlemlenmiştir. Çizdikleri şekle bakarak, çemberin merkezinden geçen doğruların doğru demeti oluşturduğunu belirtmişlerdir. Yine bu öğrenciler, istenilen geometrik yerin, çevresi ilk çemberin çevresinin yarısı olan bir çember olduğunu belirtmişleridir.

İstenilen yerin denklemini bulurken de, ders kitaplarında da yer almakta olan ve genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde olan bir çembere ait merkez koordinatlarının, $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ ve bunun yanında yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ olması durumunu kullanmışlardır. Öğrenciler tarafından ezberlendiği düşünülen bu formülleri, çözüm aşamasında hatırlamaya çalışmışlardır.

Meriç, dik koordinat sisteminde, (1,0) merkezli ve 1 birim yarıçaplı bir çember çizmiştir. Fakat bu gruptaki diğer öğrenci olan Berre, *"Bu grafik olmadı. Grafik deyince hani böyle fonksiyon grafikleri gibi şöyle şöyle.."* diyerek grafik ile ilgili kavramasının, "fonksiyon grafikleri" ya da "sinüs, cosinüs fonksiyon grafikleri" şeklinde olduğunu belirtmiştir.

Gözlemlenen diğer bir grup olan 3. grubun, anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü göz önüne alındığında, bu grubun 5. soru için kavrama dörtlüsü şu şekildedir:

Tablo 5.3. 3.grubun 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

3. grup	Problem Kümesi	$P_{5.1}, P_{5.2}, P_{5.3}, P_{5.5}, P_{5.7}, P_{5.8}$
	İşlem Kümesi	$İ_{5.2}, İ_{5.3}, İ_{5.6}$
	Temsil Kümesi	$T_{5.1}, T_{5.3}, T_{5.4}, T_{5.6}, T_{5.7}, T_{5.10}, T_{5.15}, T_{5.16}$
	Kontrol Kümesi	$K_{5.1}, K_{5.3}$

Ayrıca, 3.gruba ait olan ve anahtar kavrama (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde yer almayan diğer öğeleri ise şu şekilde sıralanabilir:

İşlem Kümesi:

"Verilen çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ise bu çemberin merkez koordinatlarının (1,0) ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{4+0+12} = 2$ birim olması. "

"İstenen noktaların grafiği çizilirse, analitik düzlemde fonksiyon grafikleri gibi grafiklerin oluşması."

Temsil Kümesi:

"Dik koordinat düzleminde doğru grafiği çizme"

Kontrol Kümesi:

"Bir denklemin grafiği, fonksiyon grafiği gibi çizilmelidir."

"Genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde olan bir çemberin merkez koordinatları $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçap $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ olarak bulunur."

"Bir denklemin grafiği çizilirken, x değişkenlerine değerler verilerek y değişkenleri bulunur ve bu nokta ikilileri analitik düzlemde gösterilir. Elde edilen şekil doğru denklemi, artan azalan şekiller olmalıdır."

Araştırmada yer alan 5. soru için, 3. gruba ait (P,İ,T,K) kavraması göz önüne alındığında, beklenilen çözümü yaptıkları görülmüştür. Bu grupta yer alan öğrencilerden Güldane, istenen geometrik yerin bir çember olduğunu belirtmiştir. Buğra da grup arkadaşını desteklemiştir.

Öğrenciler kendilerine verilen $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ çemberinin merkezini ve yarıçapını, daha önceden ezberledikleri formüllerle hesaplamışlardır. Analitik geometri ders kitaplarında da geçen, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde olan bir çembere ait merkez koordinatlarının $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ ifadelerini kullanmışlardır.

Son olarak 3. grup öğrencileri, çemberin grafiğini çizememişlerdir. Grafiği bir doğru grafiği gibi ifade etmeye çalışmışlardır. Hatta elde edilmesi gereken grafiğin, "*düzgün azalan, düzgün artan grafikler*" gibi olabileceği üzerinde durmuşlardır. Bu grafiğin ve y değişkenlerine değerler verilerek ve bu (x,y) ikililerini dik koordinat sisteminde birleştirerek elde edileceğini düşünmüşledir. Burada, öğrencilerin hatalı bilmeleri ortaya çıkmaktadır. Her grafiğin, sanki bir "*parabol grafiği*" gibi çıkması gerektiği inancını taşıdıkları, araştırmacı tarafından düşünülmektedir.

Tablo 5.4 de anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde ve 4. grubun (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsünde ortak olarak yer alan öğeler yer almaktadır:

Tablo 5.4. 4.grubun 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

4. grup	Problem Kümesi	$P_{5.1}, P_{5.2}, P_{5.3}, P_{5.5}, P_{5.7}, P_{5.8}$
	İşlem Kümesi	$İ_{5.2}, İ_{5.3}, İ_{5.6}$
	Temsil Kümesi	$T_{5.1}, T_{5.3}, T_{5.4}, T_{5.6}, T_{5.7}, T_{5.8}, T_{5.10}$ $T_{5.15}, T_{5.16}, T_{5.17}, T_{5.18}, T_{5.19}, T_{5.20}$
	Kontrol Kümesi	$K_{5.1}, K_{5.3}$

Bunun yanı sıra, 4. gruba ait olan fakat yukarıdaki tabloda bulunmayan kavrama öğeleri şu şekilde belirtilebilir:

İşlem Kümesi:

"Verilen çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ise bu çemberin merkez koordinatlarının (1,0) ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{4+0+12} = 2$ birim olması."

"İstenen noktaların grafiği çizilirse analitik düzlemde oran, logaritma, artan ya da azalan fonksiyon olması gerektiği."

"Grafiği istenen denkleminde x değişkenine 2 den büyük değer verilirse grafiğin çemberin dışına çıkması."

Kontrol Kümesi:

"Genel denklemi $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ şeklinde olan bir çemberin merkez koordinatları $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ ve yarıçap $\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ olarak bulunur."

"Bir denklemin grafiği yıllara göre oran grafiği gibi artan alan fonksiyonlar gibi çizilmelidir "

4. grup öğrencilerinin, 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavramalarına bakıldığında, sorunun çözümünde beklenen işlem ve kontrol cümlelerinin büyük bir kısmının kullanıldığı görülmektedir.

Çizdikleri çemberin merkezi ile üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçalarının, çemberin "*yarıçapları*" olduğunu fark etmelerinden yarıçapların orta noktalarının birleştirilmesiyle "*merkezi yine merkez noktası olup da yarıçapı... büyük çemberin yarıçapının yarısı.* " olan bir çemberin oluştuğunu belirtmişlerdir.

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ denklemi ile verilen çemberin merkezini, (1,0) ve yarıçapını 2 birim olarak, denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde olan bir çembere ait merkez koordinatlarının $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ şeklinde ifade eden ve ders kitaplarında yer alan formüller yardımıyla bulmuşlardır. Sonrasında ise çemberi pergel yardımıyla, dik koordinat sisteminde göstermişlerdir.

Denklemini buldukları geometrik yeri, yani merkezi (1,0) ve yarıçapı 1 birim olan çemberin grafiğini çizememişlerdir. x ve y değişkenlerine değerler vererek, dik koordinat sisteminde göstermeye çalışmışlardır. İstenilen grafiğin bir "*logaritma fonksiyonu grafiği*" gibi ya da bir "*aşağıdan yukarıya inen bir fonksiyon*" gibi çıkması gerektiğini belirtmişlerdir. Sonuç olarak, 4. grup öğrencilerinin, çemberlerin dik koordinat sisteminde, denklemin grafiğini çizmiş olmalarına rağmen, bu çizdiklerinin "*grafik*" olduğunun farkına varmadıkları, araştırmacı tarafından belirlenmiştir.

5. grup göz önüne alındığında anahtar (P,İ,T,K) kavramada sahip oldukları kavrama öğeleri Tablo 5.5 de verilmiştir:

Tablo 5.5. 5.grubun 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

5. grup	Problem Kümesi	$P_{5.1}, P_{5.2}, P_{5.3}, P_{5.5}, P_{5.7}, P_{5.8}$
	İşlem Kümesi	$İ_{5.2}, İ_{5.3}, İ_{5.6}$
	Temsil Kümesi	$T_{5.1}, T_{5.3}, T_{5.4}, T_{5.6}, T_{5.7}, T_{5.10}$ $T_{5.15}, T_{5.16}$
	Kontrol Kümesi	$K_{5.1}, K_{5.3}$

Bunların yanında, 5. grubun sahip olduğu fakat tabloda görülmeyen diğer kavrama elemanları aşağıda belirtilmiştir:

İşlem Kümesi:

"Verilen çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ise bu çemberin merkez koordinatlarının (1,0) ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{4+12} = 2$ birim olması. "

"İstenen noktaların grafiği çizilirse analitik düzlemde artan azalan parabol gibi elde edilmesi."

Kontrol Kümesi:

"Genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde olan bir çemberin merkez koordinatları $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçap $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ olarak bulunur."

"Bir denklemin grafiği artan azalan fonksiyonlar gibi, parabol gibidir."

"İstenen yerin denklemi 2. derecedendir ve doğru denklemi gibi çizilemez."

5. gruptaki öğrencilerin, bu soruda yapmış oldukları çözüm yardımıyla oluşturulan (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsüne bakıldığında, öğrencilerin işlem ve kontrol cümlelerinin tam olmasa da, yeterli seviyede olduğu düşünülmektedir.

Çemberin merkezi ile üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçalarının "*her zaman çemberin yarıçapı"* olduğunu belirtmişleridir. Yarıçapların iki eşit parçaya ayılmasıyla, soruda istenen geometrik yerin, merkezi ilk çemberin merkezi ve yarıçapı ilk çemberin yarıçapının yarısı olan bir çember olduğu yorumunu rahatlıkla yapmışlardır.

Soruda verilen $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ çember denkleminde, merkezi (1,0) ve yarıçapı 2 birim olarak bulmuşlardır. Burada denklemi, $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde olan bir çemberin merkez koordinatlarının $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ şeklinde verilen formül yardımıyla yapmışlardır. Öğrencilerin, bu formülü hatırlamakta zorlandıkları gözlemlenmiştir.

Denklemi istenen geometrik yerin, yani merkezi (1,0) ve yarıçapı 1 birim olan çemberin grafiğini çizerken başarılı olamamışlardır. Sercan yapmış oldukları çizimin "*grafik*" olduğunu söylemiştir. Bu grupta yer alan diğer öğrenci olan Damla ise, istenen grafiğin "*artacak, azalacak, parabol gibi*" bir grafik çıkması gerektiğini düşünmüştür. Sonrasında, elde ettikleri $x^2 + y^2 - 2x = 0$ denkleminde x ve y değişkenlerine değerler vererek (x,y) ikilileri elde edip, dik koordinat sisteminde göstermeye çalışmışlardır. Denklemin grafiğini çizmedikleri için ilk çizdikleri şeklin, grafik olduğunu belirtmişlerdir. Bu bağlamda, öğrencilerin "*grafik*" ile ilgili olarak hatalı bilmelere sahip olukları aştırmacı tarafından düşünülmektedir.

Yine incelenen gruplardan olan 6. gruba ait kavrama öğelerinin anahtar (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsüne göre oluşturulan tablo aşağıdaki gibidir:

Tablo 5.6. 6.grubun 5. soruya ait (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsü

6. grup	Problem Kümesi	$P_{5.1}, P_{5.2}, P_{5.3}, P_{5.5}, P_{5.7}, P_{5.8}$
	İşlem Kümesi	$İ_{5.2}, İ_{5.3}, İ_{5.6}$
	Temsil Kümesi	$T_{5.1}, T_{5.3}, T_{5.4}, T_{5.6}, T_{5.7}, T_{5.10}$ $T_{5.15}, T_{5.16}, T_{5.17}$
	Kontrol Kümesi	$K_{5.1}, K_{5.3}$

Yukarıda belirtilen kavrama öğelerinin yanında, 6. grubun sahip olduğu başka kavrama öğeleri de bulunmaktadır. Bu öğeler aşağıda yer almaktadır:

İşlem Kümesi:

"Verilen çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ise bu çemberin merkez koordinatlarının (1,0) ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F} = \frac{1}{2}\sqrt{4+12} = 2$ birim olması."

"İstenen noktaların grafiği çizilirse analitik düzlemde doğru denklemi elde edilmesi."

Temsil Kümesi:

"Dik koordinat düzleminde doğru grafiği çizme"

Kontrol Kümesi:

"Genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde olan bir çemberin merkez koordinatları $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçap $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ olarak bulunur."

"Bir denklemin grafiği parabol grafiği gibi, doğru denklemi gibidir."

5. soru için 6. grupta yer alan öğrencilerin (P,İ,T,K) kavrama dörtlüsüne bakılacak olunursa, bu soruda öğrencilerden beklenen çözümün büyük bir kısmını gerçekleştirdikleri görülmektedir.

Bu grupta yer alan Gizem, çemberin merkezi ile üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçalarının "*yarıçap*" olduğuna karar verdikten sonra, istenilen yerin yine bir çember olduğunu belirlemiştir. Serkan'ı ise, kullandığı işlem ve kontrollerle ikna etmeye çalışmıştır.

Denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde olan bir çemberin merkez koordinatlarının $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçapının $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ şeklinde verilen ve öğrenciler tarafından ezberlendiği düşünülen formül yardımıyla, $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ olarak verilen çemberin merkezini (1,0) ve yarıçapı 2 birim olarak bulmuşlardır.

Bu grupta yer alan öğrenciler, istenen grafik çiziminde, istenen işlem ve kontrol cümlelerini kullanmamışlardır. Dik koordinat sisteminde, buldukları geometrik yer denkleminin "*parabol gibi bir şey*" olacağını düşünmüşlerdir. Bu denklemde, x ve y değişkenlerine değerler vererek (x,y) ikilileri bulmuş ve bu ikilileri düzlemde göstermeye çalışmışlardır. Sonuç olarak, bu gruptaki öğrencilerin de *"grafik"* bilmelerinin de, hatalı olduğu araştırmacı tarafından düşünülmektedir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde, araştırmamızda elde edilen bulgulara dayalı sonuçlar üzerinde durulacaktır. Ayrıca araştırma bulguları çerçevesinde, hem bu uygulamaya hem de bu konuda çalışma yapmak isteyen eğitimcilere ve araştırmalarla yönelik önerilerde bulunulmuştur.

5.1. SONUÇLAR

cK¢ modeli, öğrencilerin bilgiyi, yapılandırmacılık kuramı doğrultusunda öğrendiğini varsayarak, öğrenci kavramalarının ortaya çıkarılmasında bir model olarak tasarlanmıştır. Yine bu model, öğrenci kavramalarını modellemeyi ve öğrenci kavramaları için biçimsel (formal) bir betimleme yaparak bu kavramaların teşhisini amaçlamaktadır (Artigue, 1992). Kavramalar, gözlenilebilir unsurlar olan, öğrencilerin kullandıkları işlemler, problem çözüşleri, problemleri açıklarken kullandıkları dil ve öğrencilere ait kontrol yapılarıdır. cK¢ modeli yardımıyla, problem çözme sürecide yapılan gözlemlerle öğrenmenin gerçekleşip gerçekleşmediğini gösteren kriterler belirlenebilmektedir. Bu kriterler, kavrama dörtlüsünde yer alan öğelerdir. Bu öğelerden özellikle öne çıkanlar işlem ve kontrol kümeleridir. Eğer öğrenci, bu kriterleri doğru bir şeklide açıklayabiliyorsa, öğrencinin kavram ile ilgili doğru bir kavramaya sahip olduğu söylenilebilmektedir (Webber, Pesty, Balacheff, 2002). Yapılan araştırmada, öğrencilerin "geometrik yer" kavramı ile ilgili sahip oldukları kavrama dörtlüleri yorumlandığında, gerekli kriterleri cebirsel ve geometrik açıklamalardan tamamen uzak bir şekilde açıklamaya çalıştıkları sonucuna varılmıştır. Öğrenciler araştırmada yer alan sorulara sezgisel olarak cevap vermişleridir.

Yine bu araştırmada öğrencilerin kavramalarının teşhisinin ve belirlenmesinin güçlüğü görülmüştür. Kavramaları teşhis edebilmekteki güçlük, öğrencilerin sahip

oldukları kavramaların (doğru yada yanlış) geniş bir çeşitlilik göstermesi olarak düşünülmektedir. Araştırmadaki öğrenciler, birbiriyle bağlantılı olduğu düşünülen bilmelerini bir arada kullanmıştır. Ayrıca öğrenciler, problem çözme sürecinde epistemolojik (bilgisel) engellerle karşılaşmış ve sahip oldukları bilmelerle problemi çözmeye çalışmışlardır. Örneğin, 4. soru ile ilgili olarak bir öğrenci:

> *"Şimdi ben kafama göre A B C çizerimde... Yani bir çemberin merkezi gibi çizerim.. Çemberin üstündeki noktalar olarak çizerim. Çemberin merkezine eşit uzaklıktaki nokta olur. Burası A olur.. burası B olur.. burası C olursa... İşte şöyle bir yaydan geçirsek... İşte bunun düzgün olanını farz etsek.. Bunlara eşit uzaklıkta olan yarıçapı r olur işte.. merkez noktası eşit olur..."*

Burada, öğrenci sorunun çözümünü sahip olduğu bilmeler yardımıyla yapmaya çalıştığı sonucuna varılmıştır. Bu şekildeki öğrenci ifadeleri nedeniyle, verilerin analizi ve yorumlanması uzun bir sürece yayılmıştır. Bunun yanında, teorik açıdan kavramaların bu şekilde modellenmesi, "geometrik yer" kavramı ile ilgili öğrencilerin kavramalarını epistemolojik olarak ortaya konmasına olanak sağlamıştır.

cK¢ modelinin açıklayamadığı bazı durumlarda söz konusudur. Örneğin, öğrencilere yöneltilen 5. soruda, buldukları geometrik yerin yani çemberin grafiğini çizmeleri de istenmiştir. Gruplardan elde edilen verilerden bir kaçı şöyledir:

> *"Sercan: Grafiğini çizdik?*
> *Damla: O grafik değil ki şekil!*
> *Sercan: Grafik ne?*
> *Damla: Böyle artacak azalacak... yok parabol ne biliyim.. Grafik çizeceğiz o zaman!"*

"Güldane: Şuradan x e 0 versem filan.. Aman işte x e 1 verirsek y ye 1 verirsek bir grafik çıksa .. Niye olmasın? y 1 için x 1 çıkıyor...

Buğra: Farklı bir değer verelim. x 0 için...y 0... x 0 için.. y $\sqrt{2}$ ...Şu kocaman noktalardan geçen bir grafik.. Doğru ....Ne diyorduk? Düzgün artan.. azalan"

Brousseau (1997)'ya göre hatalar sadece bilgisizlik, tereddüt ya da şans sonucu değildir. Ancak hata, dikkate değer ve başarılı olan bir önceki bilmenin sonucudur. Yukarıda verilen öğrenci görüşleri, cK¢ modeline göre incelendiğinde "grafik" ile ilgili olan "dikkate değer ve başarılı" bilmeler tespit edilememiştir. Bu durum, Maracci tarafından öğrencilerin lineer cebir ile ilgili güçlükleri belirlediği çalışmasında da belirtilmiştir(16). Fakat bunun yanında araştırmacı, öğrencilerin daha önceden yapılandırdıkları "*fonksiyon*" ve "*parabol*" gibi kavramlarla ilgili bilmelerini, burada kullanmaya çalışmış olabilecekleri sonucuna varmıştır. Yani önceki "*fonksiyon*" ve "*parabol*" hakkındaki bilmeleri, karşılaştıkları bu problem durum ile uyuşmadığı ve bunun sonucu olarak da, kendilerine yöneltilen sorunun çözümünde hatalı bilmeler kullanmış olabilecekleri sonucuna varılmıştır.

Yapılan bu araştırmada öğrencilerin kendilerine yöneltilen sorulara nasıl yaklaştıkları ve ilgili bilmelerini problem çözme davranışları ile nasıl ortaya çıkardıkları görülmüştür. Araştırmacı tarafından, "geometrik yer " ile ilgili yapılan literatür taramasında bu kavram için bir çok yaklaşım olduğu belirlenmiştir. Bunlardan birisi geometrik yeri, verilen kurala göre hareket eden bir noktanın çizdiği yol olarak ve bir diğeri ise geometrik yeri, belirli kurala uyan (x,y) noktalarının kümesine (x,y) ikililerinin kümesi olarak düşünmektir. Gözlemlen öğrenciler "geometrik yer" kavramına sadece geometrik olarak yani verilen bir kurala göre hareket eden bir noktanın (cismin) çizdiği yol olarak bakmışlarıdır. Analitik olarak yani, belirli kurala uyan (x,y) noktalarının kümesine olarak düşünmemişleridir. Araştırmacı, öğrencilerdeki bu yaklaşımın okullarında aldıkları alışılagelmiş ve öğrencileri irdelemeye sevk etmeyen öğretim yöntemlerinin bir sonucu olduğunu düşünmektedir.

cK¢ modeli yardımıyla öğrenci kavramalarının bu şekildeki bir betimlemesi yardımıyla, öğretilen içeriği, öğrencinin ne derece yapılandırdığını ortaya çıkarmanın önemi, bu araştırmada görülmüştür. Öğrenmenin gerçekleşip gerçekleşmediğini kontrol etmek amacıyla kullanılabilecek bir model olduğu sonucuna varılmıştır. Bu vesileyle de öğretilen ve öğrenilen kavramlar hakkında, daha geniş perspektif içeren yorumlar yapılabilmiştir.

5.2. ÖNERİLER

Bu bölümde elde edilen bulgular çerçevesinde çalışma ile ilgili ve ileride bu alanda yapılacak araştırmalara yönelik öneriler sunulmuştur.

1. Öğrenme ortamları, öğretilmek istenen içerik doğrultusunda ve öğrencilerin kavramalarında istenen durumların sağlanmasını amaçlayacak şekilde düzenlenebilir. Bir kavramın öğretilmesi hususunda, özellikle öğrencilerin sürece katılması gerekmektedir.

2. cK¢ modelinde belirtildiği gibi, öğrencilerin problem çözme sürecindeki davranışları yoluyla, kavramaları gözlemlenebilmektedir. Öğrencinin bir kavram hakkındaki bilmeleri, kavramı nasıl yapılandırdığını ortaya çıkaran ortamlarda öğrenilebilir. Bu bağlamda, öğrenciler uygun ve açık uçlu problemlerle meydana getirilen problem çözme süreçlerinde yer almalıdır.

3. "*Geometrik yer*" kavramı ile ilgili elde edilen bulguların ışığı altında, öğrenciler bu kavramı, sezgisel olarak açıkladıkları ve kavramın özüne yönelik açıklamalarda bulunmadıkları görüldüğünden, okullardaki matematik dersleri kavramların kullanıldığı işlem odaklı dersler olmaktan çıkıp, kavramların özüne odaklı dersler hale getirebilir.

4. Öğrenme ortamları, ders içeriği, dersin işlenişi, ders kitapları v.b. öğrencilerin kavramalarını ortaya çıkarttıracak şekilde düzenlenilebilir.

5. Öğrencilerin bilmelerini uygun, tutarlı ve doğru bir şekilde oluşmasını sağlamak için, kavramların özüne yönelik problem durumları ile öğrencilerin karşılaşması sağlanılabilir.

6. Bu çalışmada, öğrencilerle bir kavram hakkında tek oturum yapılmıştır. cK¢ modeli ile öğrenci kavramalarının biçimsel (formal) olarak betimlenmesi üzerine olabilecek bundan sonraki çalışmalarda, birbiriyle bağlantılı olan birkaç oturum yapılabilir.

7. Yapılan matematik eğitimi çalışmalarda, bir kavram ile ilgili öğrencilerin kavramalarını cK¢ modeli gibi biçimsel (formal) olarak betimleyen çalışma sayısı oldukça azdır. Bu konu üzerine araştırma yapılabilir.

8. cK¢ modelinde öğrenci kavramalarının oluşturulmasında, öğretmenin rolünü inceleyen bir çalışma yapılabilir. Bu yapılacak olan araştırma ile öğrenci kavramalarını inceleyen çalışmalar kıyaslanabilir.

KAYNAKÇA

AEBLI, H. (1963) **Didactique psychologique**. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

AMBROSIO, U. d' (1993) **Etnomatemática.** São Paulo: Editora Atica.

ARSAC, G., BALACHEFF, N., MANTE, M. (1992) **Teacher's role and reproducibility of didactical situations.** Educational Studies in Mathematics 23 (5) (s.5-29).

ARTIGUE, M. (1991) **Épistémologie et didactique.** Recherches en didactique des mathématiques. 10(2/3) (s.241-285).

ARTIGUE, M. (1992) **Functions from an algebraic and graphic point of view: Cognitive difficulties and teaching practices.** In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25 (s. 109–132). Washington, DC: Mathematical Association of America.

BACHELARD, G. (1938) **La formation de l'esprit scientifique**. Paris : Vrin.

BALACHEFF, N. (1987) **Processus de preuves et situations de validation.** Educational Studies in Mathematics 18(2) (s.147-176).

BALACHEFF, N. (1990) **Towards a probl´ematique for research on mathematics teaching**. Journal for Research in Mathematics Education, 21, (s.258–272).

BALACHEFF, N. (1998) **Construction of meaning and teacher control of learning.** In: Tinsley D. J., Johnson D. C. (eds.) Information and Communication Technologies in School Mathematics (s. 111-120). Chapman & Hall.

BALACHEFF, N. (2000) **A modelling challenge: untangling learners' knowing'**, in Journées Internationales d'Orsay sur les Sciences Cognitives: L'apprentissage, JIOSC2000, Paris.

BALACHEFF, N., GAUDIN, N. (2002). **Students conceptions: an introduction to a formal characterization**, Cahier du laboratoire Leibniz # 65, http://wwwleibniz.imag.fr/LesCahiers/Cahiers2002.html

BALACHEFF, N. , GAUDIN, N.(2003) **'Baghera assessment project'** , in S. Soury-Lavergne (ed.), Baghera Assessment Project: Designing an Hybrid and Emergent Educational Society. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, # 81, Grenoble, Laboratorie Leibniz-IMAG.

BEDNAR, A. K., CUNNINGHAM, D., DUFFY, T. M., PERRY, J. D. (1995) **Theory into practice: How do we link?** In G. Anglin (Ed.), instructional technology: Past, present, and future. (s.100-112). Denver, CO: Libraries Unlimiled.

BROUSSEAU, G. (1997) **Theory of didactical situations in mathematics**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

BROUSSEAU, G., BROUSSEAU, N. , WARFİELD, V. (2004) **Rationals and decimals as required in the school curriculum Part 1: Rationals as measurement.** Journal of Mathematical Behaviour, 23(1), s.(1-20).

BROWN, J. S., COLLINS, A., DUGUID, P. (1989) **Situted cognition and the culture of learning.** Educational Researcher, 18, (s.32-42).

CONFREY, J. (1986) **"Misconceptions" accross subject matters: charting the course from a constructivist perspective.** Annual meeting of the American Educational Research Association.

CONFREY, J. (1990) **A review of the research on students conceptions in mathematics, science, and programming.** In: Courtney C. (ed.) Review of research in education. American Educational Research Association 16, (s. 3-56).

CUNNINGHAM, D. J. (1991) **In defense of extremism.** Educational Technology, 31(9), (s.26-27).

DERYAKULU, D., **Yapıcı Öğrenme, Sınıfta Demokrasi,** Eğitim Sen Yayınları 2001, Ankara.

DUBINSKY, E. (1991) **Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.** In D. Tall (Ed),Advanced mathematical thinking (s.231-250). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

DUFFY, T. M. , BEDNAR, A, K. (1991) **Attempting to comc to grips with alternative perspectives.** Educational Technology, 31(9), (s.12-15).

DUFFY, T. M. , JONASSEN, D. H. (1991) **Constructivism: New implications for instructional technology.** Educational Technology, 31(5), (s.7-12).

DREYFUS, T. (1990) **Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education** Advanced mathematical thinking. In P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds.), (s.113–134). Cambridge: Cambridge University Press.

FULLER, S. (2005) **The Intellectual**. Icon Books.

GAUDIN, N. (1999) **Caractérisation des conceptions du concept de fonction.** Mémoire de DEA, Laboratoire Leibniz, Grenoble,

GLASERSFELD, E. von (1984) **An introduction to radical constructivism.** In: Watzlawick P. (ed.) The invented reality (s. 17-40). New York: Norton.

GROPPER, G. L. (1987). **A lesson based on a behavioral approach to instructional design.** in. C. M. Reigeluth (Ed.), instructional theories in action. Lessons illustrating selected theories and models. (s. 45-112). Hilisdale, NJ: Lawrence Eribaum.

JAHN A. P. (2002),**"Locus" and "Trace" in Cabrigéomètre: relationships between geometric and functional aspectsin a study of transformations.** ZDM, Volume 34 (Haziran) Number 3

JONASSEN, D. H. (1988). **Integrating learning strategies into coursevvare to facilitate deeper processing.** in D. H. Jonassen (Ed.), instructional designs for microcomputer corseware (s. 151-181). Hilisdale, NJ: Lawrence Eribaum.

JONASSEN, D. H. (1990) **Toward a constructivist view of instructional design.** Educational Technology, 30(10), (s.32-34).

JONASSEN, D. H, (1991a). Objectivism **versus constructivism: Do we need a new philosophical paradigm?** Educational Technology Research and Development, 39(3), (s.5-14).

JONASSEN, D. H. (1991b). **Context is everything.** Educational Technology, 31(6), (s.35-37).

JONASSEN, D. H. (1994). **Toward a constructivist design model.** Educational Technology, 34(4), (s.34-37).

KISLENKO, K. (2005) **Students'beliefs about mathematics from the perspective of the theory of didactical situations,** Agder University College, Didactics of

Mathematics-The French way. texts from a nordic Ph.D-course at The University of Copenhagen.

KUHN, T. S. (1957) The **Copernican Revolution: Planetary Astronomy in the Development of Western Thought,** Harvard University Press, Cambridge, 1985.

LAKOFF, G. (1987). **Women, fire, and dangerous things.** Chicago, İL: University of Chicago Press.

LAVE J. (1988) **Cognition into practice**. Cambridge: Cambridge University Press.
Lunenberg, F. C. (1998). Constructivism and technology: instructional designs for successful education reform. **Journal of instructional Psychology,** 25(2), (s.75-81).

MIYAKAWA T. (2004) **Reflective symmetry in construction and proving** Laboratoire LEIBNIZ – IMAG (France) & University of Tsukuba (Japan)

NUÑES, T., CARRAHER, D., SCHLIEMANN, A. (1983) **Mathematics in streets and schools.** Cambridge: Cambridge University Press.

PEHKONEN, E. (1994). **Teachers' and pupils' beliefs in focus – consequence of constructivism.** In M. Ahtee, and E. Pehkonen, (Eds.), Constructivist viewpoints for school teaching and learning in mathematics and science (s. 27-33). Helsinki: University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 131.

PIAGET, J., INHELDER, B. (1969). **The psychology of the child.** New York: Basic Books.

PICHOT, A. (1994) **Pour une approche naturaliste de la connaissance**. Lekton 4(2) (s.199-241).

ROBERT, A. (1992) **Problèmes méthodologiques en didactique des mathématiques.** Recherches en didactique des mathématiques. 12(1) (s.33-58).

ROBERT, A. (1993) **Présentation du point de vue de la didactique des mathématiques sur les métaconnaissances.** In : Baron M., Robert A. (eds.) Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques. RR LAFORIA 93/18. (s.5-18). Paris: Institut Blaise Pascal.

SALIN M.-H. (1976) **Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques de l'école primaire.** IREM de Bordeaux.

SCHEURMAN, G. (1998) **From behaviorist to constructivist teaching.** Social Education, 62(1), (s.6-9).

SFARD, A. (1991) **On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin.** Educational Studies in Mathematics 22, (s.1-36).

SHOENFELD, A. (ed) (1987) **Cognitive Science and Mathematics Education.** Hillsdale : Lawrence Erlbaum Associates.

SHOENFELD A. (1985) **Mathematical Problem Solving.** Orlando: Academic Press.

SIERPINSKA, A. (1989) **On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of functions and attractive fixed points.** Institut de Mathématiques, preprint 454. Varsovie: Académie des Sciences de Pologne.

STEWART, J. (1994) **un système cognitif sans neurones : les capacités d'adaptation, d'apprentissage et de mémoire du système immunitaire.** Intellectika 18, (s.15-43).

ŞİMŞEK, A. , DERYAKULU, D. (1994). **Kubaşık kümelerde akran etkileşimini artırmanın bir yolu olarak türetimci öğrenme.** Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Birinci Eğitim Bilimleri Kongresi'nde sunulan bildiri. (Nisan) Adana.

THOMPSON, A. (1992). **Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research.** In A. D. Grouws, (Ed.), Handbook of research on mathematics learning and teaching (s. 127-146). New York: Macmillan.

THURSTON, W. P. (1994) **On proof and progress in mathematics.** Bulletin of the American Mathematical Society 30(2) (s.161-177).

VERGNAUD, G. (1981) **Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques.** Recherches en didactique des mathématiques. 2(2) (s.215-231).

VINNER, S. (1983) **Concept definition, concept image and the notion of function.** International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 14, (s. 293-305).

VINNER, S. (1992). **The function concept as a prototype for problems in mathematics learning.** In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25 (s. 195–213). Washington, DC: Mathematical Association of America.

WEBBER C., PESTY S. , BALACHEFF N. (2002**) A multi-agent and emergent approach to learner modelling.** In F. van Harmelen (ed.), Proceedings of the 15th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI 2002) Amsterdam, IOS Press.

(1) www.tdk.gov.tr (22 Nisan 2005, 13:34:54)

(2) http://en.wikipedia.org/wiki/Locus (2 Mart 2005, 23:45:23)

(3) http://etext.virginia.edu/DicHist/dict.html (23 Haziran 2005 21:42:02)

(4) http://igitur-archive.library.uu.nl/ph/2005-0309-013011/correspondence.pdf (04 Mayıs 2005, 17:46:28)

(5) www.math.ubs.ca- Colloquium.htm(27 Nisan 2005, 09:25:34)

(6) http://descartes.cnice.mecd.es/ingles/Bach_CNST_1/Analytical_geometry/Geometria_8-1.htm (26 Haziran 2004, 11:23:52)

(7) http://en.wikipedia.org/wiki/Locus_(mathematics) (06 Haziran 2005, 12:45:19)

(8) http://mathworld.wolfram.com/ (14 Aralık 2005, 20:00:21)

(9) http://www.bookrags.com/sciences/mathematics/locus-wom.html(08 Şubat 2005, 12:23:45)

(10)http://www.mansw.nsw.edu.au/members/reflections/vol23no2grant.htm (13 Mart 2005, 16:13:46)

(11)www.tiscali.co.uk/reference/encyclopaedia/hutchinson (23 Haziran 2005, 22:23:41)

(12) http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/theory-pmet.pdf (18 Mart 2005, 23:12:03)

(13) http://www.itd.cnr.it/telma/docs/Rep_Del_Draft3.pdf (20 Temmuz 2005, 12:23:45)

(14)http://www-leibniz.imag.fr/NEWLEIBNIZ/LesCahiers/2005/Cahier127/CLLeib127.pdf (12 Şubat 2006, 14:12:51)

(15)http://www.mathematik.uni-kassel.de/didaktik/HomePersonal/biehler/home/abgeschlossene_projekte/bacometh.htm (7 Mart 2005, 12:37:56)

(16) http://ning.ntctc.edu.tw/resource/PME27/Volume_3/RR_maracci.pdf (18 Ocak 2006, 15:31:58)

EKLER

EK 1

GRUP ÇALIŞMASI

Merhaba, adım Gönül YAZGAN. Özel bir dershanede matematik öğretmeniyim ve Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans öğrencisiyim. Matematik eğitiminde öğrenci kavramaları üzerine bir araştırma yapıyorum. Bu konuyla ilgili olarak çalışma kağıdı yardımıyla sizinde görüşlerinizi almak istiyorum.

Bu gözlem süresince söyleyeceklerinizin tümü gizlidir. Vereceğiniz bilgileri araştırmacıların dışında herhangi bir kimsenin görmesi mümkün değildir. Sizin isminiz veya söyleyeceğiniz herhangi bir şahsın ismi araştırma raporuna yazılmayacaktır. Bu görüşmenin yaklaşık 50-60 dakika süreceğini tahmin ediyorum.

Gözlem sürecini kaydetmemin sizce bir sakıncası var mı? Sorulara başlamadan önce belirtmek istediğiniz bir düşünce veya sormak istediğiniz bir soru var mı? Araştırmaya katılmayı kabul ettiğiniz için şimdiden teşekkür ederim. İzin verirseniz çalışma kağıdını vermek istiyorum.

EK 2

Sizlere geometrik kavramlarla ilgili dört soru yöneltiyoruz. Bu soruları dikkatlice okuyunuz. Soruların üzerinde düşündükten sonra cevaplamaya çalışınız. Cevaplarınızı mümkün olduğunca açınız. Cevaplarınız için size dağıtılan geometrik araçları kullanabilirsiniz.

1) Düzlemde verilen bir AB doğru parçasının uç noktalarının her ikisine de eşit uzaklıkta bulunan noktaların yerlerini belirlemeye çalışınız. Belirleyebildiyseniz bu yerin özelliklerini yazınız.

2) Düzlemde bir AB doğru parçası veriliyor. |AC| = |CB| eşitliğini sağlayan C noktalarının yerlerini düzlemde gösterebilir misiniz? Gösterebildiyseniz, gösterebildiğiniz şeklin bir geometrik adı var mıdır? Bunu göstermede kullandığınız yolları yazınız ve açıklayınız.

3) Düzlemde AB doğru parçası, CD doğru parçasının orta dikmesinin bir parçası ise CD doğru parçası AB doğru parçasının orta dikmesinin parçası olur mu? Cevaplarınızın gerekçelerini yazınız

4) Düzlemde doğrusal olmayan A, B, C noktaları verilmektedir. Bu üç noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini belirleyiniz. Belirleme aşamasında kullandığınız düşüncelerinizi yazınız.

5) Düzlemde verilen bir çemberin merkezi ile çemberin üzerindeki noktaları birleştiren doğru parçalarının orta noktalarının olası geometrik yeri nedir? Bu çemberin denklemi $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ise aradığımız geometrik yerin denklemini yazabilir misiniz? Denklemi yazabilseydiniz bu denklemin grafiğini çizmeye çalışınız. Çizdiğiniz grafiğin bir adı var mıdır? Varsa yazınız.