
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Islam Qasim Abdullah AL-SALIH

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2025

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Islam Qasim Abdullah AL-SALIH

13/02/2025

LİNEER VE LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLEMLRİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Islam Qasim Abdullah AL-SALIH

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2025

ÖZET

Bu tezde dört kısım bulunmaktadır. Birinci kısımda giriş bölümü verilmiştir. İkinci kısımda bazı temel tanımlara ve kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü kısımda lineer integral denklemler ele alınmış, bu denklemler Fredholm integral denklemi ve Volterra integral denklemi olarak iki gruba sınıflandırılmıştır. Dördüncü kısımda lineer olmayan integral denklemleri ele alınmış ve lineer olmayan Fredholm integral denklemi ve lineer olmayan Volterra integral denklemi olarak iki modelde verilmiştir.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Lineer integral denklemler, lineer olmayan integral denklemler, Fredholm integral denklemi, Volterra integral denklemi.
Sayfa Adedi: : 61
Danışman : Prof. Dr. Adil MISIR

LINEAR AND NON LINEAR INTEGRAL EGUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Islam Qasim Abdullah AL SALIH

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2025

ABSTRACT

There are four parts in this thesis. In the first part, the introduction section is given. In the second part some basic definitions and concepts are included. In the third part linear integral equations was discussed, these equations were classified into four equations, Fredholm integral equations and Volterra integral equations. In the fourth part, nonlinear integral equations discussed and classified into two basic equations, non-linear Fredholm ere integral equations and the non-linear Volterra integral equations.

Science Code : 20406
Key Words : Linear integral equations, nonlinear integral equations, Fredholm integral equations, Volterra integral equations.
Page Number : 61
Supervisor : Prof. Dr. Adil MISIR

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca ders seçimlerim, tez konumum belirlenmesi, veri toplama ve tezin hazırlanması sürecinde benden zamanını, desteğini esirgemeyen her koşulda yanımda olan ve değerli vaktini ayıran ve hayatımın manevi açıdan gelişimine önemli katkı sağlayan saygıdeğer bilim insanı danışmanım Prof. Dr. Adil MISIR'a çok teşekkür ederim ve sayın danışmanıma Allahtan uzun ve mutlu bir ömür diliyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR ix

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR 3

3. LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLERİ 9

3.1. Fredholm İntegral Denklemleri 9

3.1.1. Fredholm integral denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği 9

3.1.2. Fredholm integral denklemi için ardışık yaklaşımalar yöntemi 16

3.1.3. Fredholm integral denklemi için doğrudan hesaplama yöntemi 18

3.1.4. Fredholm integral denklemi için değiştirilmiş ayrıştırma yöntemi 20

3.2. Volterra ˙İntegral Denklemleri 23

3.2.1. Volterra integral denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği 23

3.2.2. Volterra integral denklemi için Adomian ayrıştırma yöntemi 28

3.2.3. Volterra integral denklemi için Laplace dönüşüm yöntemi 30

3.2.4. Volterra integral denklemi için G_r-dönüşüm yöntemi 32

4. LİNEER OLMAYAN ˙İNTEGRAL DENKLEMLERİ 37

4.1. Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denklemleri 37

4.1.1. Lineer olmayan Fredholm integral denkleminin çözümünün varlığı 37

4.1.2. Lineer olmayan Fredholm integral denklemi için ardışık yaklaşımlar yöntemi 39

Sayfa

4.1.3. Lineer olmayan Fredholm integral denklemi için doğrudan hesaplama yöntemi 41

4.1.4. Lineer olmayan Fredholm integral denklemi için seri çözüm yöntemi 44

4.2. Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemleri 47

4.2.1. Lineer olmayan Volterra integral denkleminin çözümünün varlığı 47

4.2.2. Lineer olmayan Volterra integral denklemi için Adomian ayrıştırma yöntemi 49

4.2.3. Lineer olmayan Volterra integral denklemi için seri çözüm yöntemi 52

4.2.4. Lineer olmayan Volterra integral denklemi için ardışık yaklaşımlar yöntemi 55

KAYNAKLAR 59

ÖZGEÇMİŞ 61

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbf{R}^n$	n boyutlu Euclid uzayı
$\mathbf{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$K(x,t)$	Çekirdek fonksiyonu
$\sum$	Toplam sembolü
$\|.\|$	Mutlak değer
$\|\|.\|\|$	Norm
Lw	Lineer operatör
Tw	İntegral operatör
L	Laplace dönüşüm

1. GİRİŞ

İntegral denklemlerin bilimsel ve pratik alanlarda önemi açıktır. Matematikte ve fizikte integral denklemlerin rol oynamadığı bir alan hemen hemen hiç yoktur. Bu denklemlere zaman ilerledikçe ilgi arttı ve birçok mühendislik, teknolojik alanda kullanıldı. İntegral denklemler teorisi matematikçilerin, matematik mühendisliğindeki bazı problemleri ve mekanikteki titreşim problemlerini ele alma ihtiyacından kaynaklanmıştır. İntegral denklemlerle ilgili ilk çalışmalar on dokuzuncu yüzyılda ortaya çıktı ve araştırmalar yapıldı. Başlangıçta çalışmalar düzensiz ve rastgele idi ancak on dokuzuncu yüzyılın sonlarında çalışmalar daha sistematik hale geldi. Özellikle ilk integral denklemi 1825 yılında İtalyan bilim adamı Able tarafından mekanik bir konuyu inceleyerek üretmiştir. Du Bois EYMOND 1888 yılında yazdığı bir makalede integral denklem kavramını kullanmıştır. Daha sonra bilim adamı Volterra Vito temel kavramları vermiştir. Teoriyi araştırmış ancak bu teoriyi çözmenin yolunu bulamamıştır. Bu araştırma MS 1900'de Fredholm'un bu denklemlere bir çözüm bulmasının yolunu açtı, daha sonra yeni tür lineer ve lineer olmayan integral denklemlerin ortaya çıkmasıyla bu alandaki araştırmalar genişletti [1,2].

Bu çalışma şu şekilde organize edilmiştir:

Çalışmanın ikinci bölümünde integral denklemlerle ilgili temel tanım ve kavramlara değinildi. Üçüncü bölümde lineer integral denklemlerin net bir açıklamasını verildi ve iki denkleme değinildi. Bunlar lineer Fredholm integral denklemi ve lineer Volterra integral denklemidir. Lineer Fredholm integral denklemini tanımı yapıldı ve denklemi üç tipte incelendi. Fredholm integral denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği kanıtlayan teoriler sunuldu. İkinci tip Fredholm integral denklemini çözmek için üç analitik yöntemi örneklerle tartıştık. Bunlar ardışık yaklaşımlar yöntemi, doğrudan hesaplama yöntemi ve değiştirilmiş ayrıştırma yöntemidir. Lineer Volterra integral denklemine gelince, denklemi tanımı yapıldı ve üç denklem türü olarak sınıflandırdık. Denkleminin çözümünün varlığını ve tekliğini kanıtlayan teorem sunuldu, ikinci tip Volterra integral denklemini örneklerle çözmek için üç analitik yöntem kullandık. Bunlar şu şekildedir: Adomian ayrıştırma yöntemi, Laplace dönüşüm yöntemi ve G_r-dönüşüm yöntemi. Dördüncü bölümde lineer olmayan integral denklemlerini tartıştık ve kavramını net bir şekilde verdik. Lineer olmayan Fredholm integral denklemi ve lineer olmayan Volterra integral denklemi olan iki temel denklemin

altını çizdik. Daha sonra iki denkleminin çözümünün varlığı kanıtlayan teoriler sunduk. Fredholm integral denklemini çözmek için üç yöntemin kullanılmasıyla ardışık yaklaşımlar yöntemi, doğrudan hesaplama yöntemi ve seri çözüm yöntemi ortaya konuldu. Volterra integral denklemini çözme yöntemlerine gelince, bunlar aşağıdaki gibidir: Adomian ayrıştırma yöntemi, seri çözüm yöntemi, ardışık yaklaşımlar yöntemi.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu tez çalışmasında kullanacağımız bazı temel tanım ve özellikler aşağıda verilmiştir.

2.1. Tanım

X vektör uzayı, $x,\ y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bir $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu
(1) $\| x \| \geqslant 0$ ve $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(2) $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$
(3) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$

koşullarını sağlıyorsa, $\|.\|$ fonksiyona X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir [7].

2.2. Tanım

$L: X \to Y$ şeklinde tanımlayan bir operatörü olsun. Eğer her $x_1,\ x_2 \in X$ için

$$\| L(x_1) - L(x_2) \| \leqslant E \ \| x_1 - x_2 \|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $E > 0$ sabiti bulunabiliyor ise L operatörüne Lipschitz şartını sağlıyor denir. $E > 0$ sabitine de Lipschitz sabiti denir.

2.3. Tanım

$L: X \to X$ şeklinde bir dönüşüm olsun. Eğer her $x_1,\ x_2 \in X$ için

$$\| L(x_1) - L(x_2) \| \leqslant \alpha \ \| x_1 - x_2 \|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $0 < \alpha < 1$ bir sayısı varsa L dönüşümüne büzülme (veya daralma) dönüşümü denir.

2.4. Tanım

$$L_2[a,b] = \{f: [a,b] \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(t)|^2 \ dt < \infty\}$$

şeklinde tanımlayan fonksiyonlar uzayına L_2 uzayı denir [3].

2.5. Tanım

$f: [a,b] \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun

$$\| f \|_2 = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \ dt}$$

şeklinde tanımlayan L_2 uzayında normu denir [3].

2.6. Teorem

$f, g \in L_2[a,b]$ fonksiyonları için

$|f \ g| \leqslant \| f \|_2 . \| g \|_2$

eşitsizliğine Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir [3].

2.7. Tanım

S normlu uzayındaki her bir Cauchy dizisi S deki bir elemana yakınsıyorsa, S uzayı tamdır denir. Tam olan normlu uzaylara Banach uzayı denir [7].

2.8. Tanım

$T: S \to S$ bir dönüşüm ve $s \in S$ olsun. Eğer $Ts = s$ ise s'e T dönüşümünün sabit noktası denir.

2.9. Teorem

Banach sabit nokta teoremi: (S, d) boş olmayan bir tam metrik uzayı ve $T: S \to S$ bir daralma (büzülme) dönüşümü olsun. Bu durumda T'nin S'in içerisinde $Ts = s$ olacak şekilde bir tek s sabit noktası vardır [6].

2.10. Tanım

Bilinmeyen $w(x)$ fonksiyonunun integral işareti altında yer aldığı denklemlere integral denklemleri denir. Bu tip denklemlerin genel gösterimi

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} K(x,t)w(t)\,dt \tag{2.1}$$

şeklindedir [2]. Burada $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ verilmiş fonksiyonlar, λ ise bir skalerdir. İntegral işareti altında bulunan $K(x,t)$, x ve t değişkenlerinin bilinen fonksiyonudur ve integral denklemin çekirdeği olarak adlandırılır.

İntegral denklemleri, lineer ve lineer olmayan integral denklemler olarak iki sınıfa ayrılır.

2.11. Tanım

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\, h_i(t)$$

şeklinde çekirdek, dejenere veya ayrılabilir olarak adlandırılır.

2.12. Tanım

Eğer $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu $K(x,t) = K(t,x)$ özelliğine sahipse simetrik çekirdek olarak adlandırılır.

2.13. Tanım

Eğer $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu değeri $K(x,t)=c$ ise buna sabit çekirdek olarak adlandırılır.

2.14. Tanım

Eğer (2.1) denkleminde $f(x)=0$ ise integral denklemine homogen integral denklemi denir. Bu tip denklemlerin genel gösterimi

$$w(x)=\lambda\int_{h(x)}^{g(x)}K(x,t)w(t)\,dt$$

şeklindedir.

2.15. Tanım

Eğer (2.1) denkleminde $f(x)\neq 0$ ise integral denklemine homogen olmayan integral denklemi denir. Bu tip denklemlerin genel gösterimi

$$w(x)=f(x)+\lambda\int_{h(x)}^{g(x)}K(x,t)w(t)\,dt$$

şeklindedir.

2.16. Tanım

$$Lw=w(x)-\lambda\int_{h(x)}^{g(x)}K(x,t)w(t)\,dt$$

operatörü , eğer

$$L[\alpha w_1(x)+\beta w_2(x)]=\alpha L[w_1(x)]+\beta L[w_1(x)]$$

lineer operatör koşulunu sağlarsa (2.1) denklemine lineerdir denir, aksi halde lineer olmayan denir [4]. Burada α ve β sabitlerdir.

2.17. Tanım

$x \geqslant 0$ için tanımlı h ve w fonksiyonları verilsin. Bu durumda h ve w nin konvolüsyonu $(h * w)(x)$ ile gösterilir ve

$$(h * w)(x) = \int_a^x h(x-t)w(t)dt$$

ile tanımlanır.

3. LİNEER İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Lineer integral denklemler karmaşık olmayan denklemlerdir. Bu nedenle lineer integral denklemlerin çözümü için çok sayıda sistematik ve yapılandırılmış yöntem vardır. Genel olarak bir lineer integral denklemin birden fazla çözümü olabilir. Şimdi

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} K(x,t)w(t)\,dt \tag{3.1}$$

İntegral denklemi ele alalım. (3.1) ile verilen integral denklemi lineer operatör koşulunu sağladığından (3.1) denklemine lineer integral denklemi denir.

Lineer integral denklemlerini integralin sınırlarının yapısına göre sınıflandırabiliriz. Bu nedenle aşağıdaki iki ana lineer integral denklemi türünü tanıtacağız.

3.1. Fredholm İntegral Denklemleri

Fredholm integral denklemi en önemli denklemlerden biridir, birçok uygulamalı ve mühendislik biliminde kullanılmaktadır. Fredholm integral denkleminin genel formu, bilinmeyen fonksiyon $w(x)$ olmak üzere

$$\varphi(x)w(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)w(t)\,dt \tag{3.2}$$

şeklinde verilir. $\varphi(x)$ fonksiyonunun değerine göre Fredholm integral denklemi üç sınıfa ayrılır [1].

1. Eğer $\varphi(x) = 0$ alınırsa (3.2) denklemi

$$0 = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)w(t)\,dt$$

denklemine dönüşür. Bu denkleme I. cins Fredholm integral denklemi denir. Dikkat edilirse bilinmeyen $w(x)$ fonksiyonu integralin içinde bulunmaktadır.

2. Eğer $\varphi(x) = 1$ alınırsa (3.2) denklemi

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)w(t)\,dt$$

denklemine dönüşür. Bu denkleme II. cins Fredholm integral denklemi denir. Dikkat edilirse bilinmeyen $w(x)$ fonksiyonu integralin hem içinde hem de dışında bulunmaktadır.

3. Eğer $\varphi(x)$ ne 0 ne de 1 ise (3.2) denklemi

$$\varphi(x)w(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)w(t)\,dt$$

halinde olur. Bu denkleme III. cins Fredholm integral denklemi denir. Örneğin

$$x\ \ w(x) = 2x + \int_0^1 w(t)\,dt.$$

denklemi III. cins Fredholm integral denklemidir.

3.1.1. Fredholm integral denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği

$L_2[a,b]$ uzayında

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)w(t)\,dt \tag{3.3}$$

Fredholm integral denklemini ele alalım. Ayrıca kabul edelim ki aşağıdaki iki koşul sağlansın.

(i) Fredholm denkleminin çekirdeği

$$\left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dtdx\right)^{\frac{1}{2}} = c = sabit$$

süreksizlik şartını sağlasın,

(ii) Her $x \in [a,b]$ için $|f(x)| \leqslant F$ olacak şekilde bir $F > 0$ var olsun.

(3.3) denklemi integral operatör formunda

$$Lw = Tw + f$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$Tw = \lambda \int_a^b K(x,t)w(t)\,dt \tag{3.4}$$

dir. Bu durumda aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.1.1.Teorem

$|\lambda| < \frac{1}{C}$ olması halinde (3.4) denkleminini tek bir çözümü vardır.

İspat

Bu teoremin ispatını iki farklı yolla vereceğiz.

İspat

Banach sabit nokta teoremi yardımıyla varlık ve teklik. Bu yolla ispat yapabilmemiz için gerekli olan iki lemmayı aşağıda ispatıyla birlikte verelim.

3.1.1.Lemma

(3.4) integral operatörü sınırlıdır.

İspat

(3.4) denkleminden

$$\| Tw \| = |\lambda| \left\| \int_a^b K(x,t)w(t)\, dt \right\|$$

elde ederiz. Cauchy-Schwartz eşitsizliğini ve (i) koşulunu uygularsak

$$\| T \| \| w \| \leqslant |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |w(t)|^2 \; dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant |\lambda| \; c \; \| w \|$$

elde ederiz.

Böylece, $\| T \| \leqslant c|\lambda|$ olurki bu da lemma 3.1.1.2 yı ispatlar.

3.1.1.3. Lemma

(3.4) integral operatörü süreklidir.

İspat I

Kabul edelim ki $w_1(x),\ w_2(x) \in L_2[a,b]$ olsun ve

$$Tw_1 = \lambda \int_a^b K(x,t)w_1(t)\, dt, \quad Tw_2 = \lambda \int_a^b K(x,t)w_2(t)\, dt$$

olarak tanımlansın. Böylece

$$Tw_1 - Tw_2 = \lambda \int_a^b [K(x,t)w_1(t) - K(x,t)w_2(t)\,]dt$$

$$\|Tw_1 - Tw_2\| = |\lambda| \left\| \int_a^b [K(x,t)w_1(t) - K(x,t)w_2(t)\,]dt \right\|$$

$$\| Tw_1 - Tw_2 \| = |\lambda| \left| \left(\int_a^b \left(\int_a^b K(x,t)\,[w_1(t) - w_2(t)]dt \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right|$$

Cauchy-Schwartz eşitsizliğini ve (i) koşulunu uygulayarak

$$\| Tw_1 - Tw_2 \| \leqslant |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dxdt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |w_1(t) - w_2(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde ederiz. Sonuç olarak

$$\| Tw_1 - Tw_2 \| \leqslant |\lambda|\, c \quad \| w_1(t) - w_2(t) \|$$

olarak elde ederiz ki bu da Lemma 3.1.1.3'ü ispatlar.

İki lemma ve $|\lambda|\, c < 1$, koşulu altında (3.4) integral operatörü bir daraltma operatörüdür. Bu nedenle çözüm tekildir [3].

İspat II

(3.3) denkleminin çözümünün varlığını ve tekliğini kanıtlamanın klasik yolu ardışık yaklaşım yöntemidir. Önce $w_0(x) = f(x)$ sürekli fonksiyonunu alıp ve iki diziyi

$$w_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, w_{n-1}(t)\, dt, \quad n \geqslant 1$$

$$w_{n-1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, w_{n-2}(t)\, dt$$

olarak tanımlarız. Çıkarma işlemini yaparak

$$w_n(x) - w_{n-1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, [w_{n-1}(t) - w_{n-2}(t)]\, dt \tag{3.5}$$

elde ederiz. Kolay iterasyon için

$$\varphi_n(x) = w_n(x) - w_{n-1}(x), \qquad \varphi_0(x) = f(x) \tag{3.6}$$

tanımlayalım. (3.6) denklemi (3.5) denkleminde kullanılarak

$$\varphi_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, \varphi_{n-1}(t)\, dt, \quad n \geqslant 1 \tag{3.7}$$

elde ederiz. Normun özelliklerini uygularsak

$$\| \varphi_n(x) \| \leqslant |\lambda| \left\| \int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(t)\, dt \right\|$$

elde ederiz. $n = 1$ için

$$\| \varphi_1 \| \leqslant |\lambda| \left\| \int_a^b K(x,t)\varphi_0(t)\, dt \right\|$$

elde edilir. Cauchy-Schwartz eşitsizliğini ve (i) koşulunu uygularsak

$$\| \varphi_1 \| \leqslant |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |\varphi_0(t)|^2\ dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant |\lambda|\ c \left(\int_a^b |\varphi_0(t)|^2\ dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde ederiz. Daha sonra $\varphi_0(x) = f(x)$ ve (ii) koşullarından

$$\| \varphi_1 \| \leqslant |\lambda| c \quad \| \varphi_0(t) \| \leqslant |\lambda| c\ F$$

elde ederiz. Tümevarım yoluyla

$$\| \varphi_n(x) \| \leqslant |\lambda|^n\ (c)^n\ F = \alpha^n\ F, \quad \alpha = |\lambda| c \tag{3.8}$$

elde ederiz. Bu sınır $\varphi_n(x)$ dizisinin yakınsamasını sağlar, eğer

$|\lambda| < \dfrac{1}{c}$ ise $\alpha < 1$ olur ve

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x) = w(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x) \tag{3.9}$$

şeklinde yazılabileceğini verir. w nın (3.3) denkleminde sağlanmasını kontrol ederiz. (3.3) kullanarak

$$\lambda \int_a^b K(x,t)\, w(t)dt = \lambda \int_a^b K(x,t) \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(t)dt \tag{3.10}$$

elde ederiz. (3.8) eşitsizliğindeki $\varphi_n(x)$ terimi $F\alpha^n$ ile sınırlı olduğundan $\{w_n(x)\}$ serisi düzgün yakınsaktır. (3.10) denkleminde integral ve toplamın sırasını değiştirerek

$$\lambda \int_a^b K(x,t)\, w(t)dt = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^b K(x,t)\, \varphi_i(t)dt \tag{3.11}$$

elde ederiz. (3.7) denklemi (3.11) denkleminde uygulayarak

$$\lambda \int_a^b K(x,t)\, w(t)\, dt = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{i+1}(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots - \varphi_0(x)$$

olarak elde ederiz. Bu nedenle

$$\lambda \int_a^b K(x,t)\, w(t)\, dt = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x) - \varphi_0(x) \tag{3.12}$$

elde edilir. Son olarak, (3.12)'de (3.6) ve (3.9) denklemini kullanarak

$$\lambda \int_a^b K(x,t)\, w(t)dt = w(x) - f(x)$$

elde edilir. Her $\varphi_i(x)$ açıkça süreklidir, dolayısıyla $w(x)$ süreklidir, çünkü bu sürekli fonksiyonların düzgün yakınsak dizisinin limitidir. $w(x)$'nin tek sürekli çözüm olduğunu göstermek için $\overline{w}$ aynı zamanda (3.3) nin sürekli bir çözümü olduğunu varsayalım. O zaman

$$w(x) - \overline{w}(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)[w(t) - \overline{w}(t)]\, dt$$

olur. Normun özelliklerini kullanarak

$$\| w(x) - \overline{w}(x) \| \leqslant |\lambda| \left\| \int_a^b K(x,t)\, [w(t) - \overline{w}(t)]\, dt \right\|$$

elde ederiz. Cauchy-Schwartz eşitsizliğini uygularsak

$$\| w(x) - \overline{w}(x) \| \leqslant |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |w(t) - \overline{w}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde ederiz. Eşitsizlikte (i) koşulunun kullanılması ile

$$\| w(x) - \overline{w}(x) \| \leqslant |\lambda|\, c \quad \| w(x) - \overline{w}(x) \| \leqslant \alpha \, \| w(t) - \overline{w}(t) \|$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$(1 - \alpha) \, \| w(x) - \overline{w}(x) \| \leqslant 0$$

elde ederiz. $\| w(x) - \overline{w}(x) \|$ zorunlu olarak negatif olmadığından, $\alpha < 1$ olduğundan $0 < 1 - \alpha$ dır. Dolayısıyla $\| w - \overline{w} \| = 0$ olmalıdır ki bu da $w = \overline{w}$ olmasını gerektirir. Buradan, eğer (3.3) denkleminin bir çözümü varsa, bunun tek olması gerektiği sonucu çıkar [3].

3.1.2. Fredholm integral denklemi için ardışık yaklaşımlar yöntemi

Bu yöntem, integral işareti altındaki bilinmeyen fonksiyonu, sıfırıncı yaklaşımı adı verilen $w_0(x)$ gibi bir ilk yaklaşımla değiştirerek integral denkleminin çözümünü bir iterasyon yardımıyla dizi olarak elde eder. $w_0(x)$ için en sık seçilen değerler 0, 1 veya x dir. Ardışık yaklaşımlar dizisi, $w_0(x)$ herhangi bir reel değerli fonksiyon olmak üzere

$$w_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) w_{n-1}(t)\, dt, \qquad n \geq 1$$

iterasyonu yardımıyla verilir. Buna göre ilk yaklasım

$$w_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) w_0(t)\, dt \tag{3.13}$$

olarak elde edilir. İkinci yaklaşım $w_2(x)$ benzer şekilde (3.13)'teki $w_0(x)$'in yukarıda elde edilen $w_1(x)$ ile değiştirilmesiyle elde edilebilir. Yani,

$$w_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) w_1(t)\, dt$$

olarak elde edilir. Bu şekilde ilerleyerek, n-inci yaklaşımı

$$w_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) w_{n-1}(t)\, dt, \qquad n \geq 1$$

şeklinde elde edilir. Limit yardımı ile $w(x)$ çözümü

$$w(x) = \lim_{n\to\infty} w_n(x)$$

olarak elde edilir.

Örnek

Aşağıda verilen lineer Fredholm integral denklemini ele alalım

$$w(x) = e^x + e^{-1} \int_0^1 w(t)\, dt. \tag{3.14}$$

Yukarıdaki gibi tanımlanan yaklaşımdan faydalanalım. Sıfırıncı yaklaşım için $w_0(x) = 0$ olarak alalım.

İlk yaklaşım: (3.14) de $w_0(x) = 0$ alınır ve $w_1(x)$ birinci yaklaşımı

$$w_1(x) = e^x + e^{-1}\int_0^1 w_0(t)\,dt = e^x + e^{-1}\int_0^1 0\;\,dt = e^x$$

olarak bulunur.

İkinci yaklaşım: (3.14) de $w_1(x) = e^x$ alınır ve $w_2(x)$ ikinci yaklaşımı

$$w_2(x) = e^x + e^{-1}\int_0^1 w_1(t)\,dt = e^x + e^{-1}\int_0^1 e^t\;\,dt = e^x + 1 - e^{-1}$$

olarak bulunur.

Üçüncü yaklaşım: (3.14) de $w_2(x) = e^x + 1 - e^{-1}$ alınır ve $w_3(x)$ üçüncü yaklaşımı

$$w_3(x) = e^x + e^{-1}\int_0^1 w_2(t)\,dt = e^x + e^{-1}\int_0^1 (e^t + 1 - e^{-1})\,dt = e^x + 1 - e^{-2}$$

olarak bulunur. Bu şekilde devam edilirse, n-inci yaklaşım:

$$w_n(x) = e^x + 1 - e^{-(n-1)}, \qquad n \geq 1$$

olarak bulunur. Limit yardımı ile $w(x)$ çözümü

$$w(x) = \lim_{n\to\infty} w_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(e^x + 1 - e^{-(n-1)}\right) = e^x + 1$$

olarak elde edilir.

3.1.3. Fredholm integral denklemi için doğrudan hesaplama yöntemi

Doğrudan hesaplama yöntemi Fredholm integral denklemleriyle ilgilenir ve çözümü seri halinde değil tam biçimde elde eder. Bu yöntem tamamen $K(x,t)$ çekirdek yapısına bağlı olup çekirdeğin ayrılabilir olması durumunda kullanılabilir.

Özel olarak çekirdeği

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(t) \tag{3.15}$$

şeklindeki bir yapıya sahip olan bir integral denkleme dejenere çekirdekli integral denklem denir. Şimdi dejenere çekirdeğe sahip

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)w(t)\,dt \tag{3.16}$$

şeklinde II. cins Fredholm integral denklemini ele alalım. (3.15)'in (3.16) de kullanılmasıyla

$$w(x) = f(x) + g_1(x)\lambda \int_a^b h_1(t)w(t)\,dt + g_2(x)\lambda \int_a^b h_2(t)w(t)\,dt + \cdots + g_n(x)\lambda \int_a^b h_n(t)w(t)\,dt \tag{3.17}$$

elde edilir. (3.17) integral denklemi

$$\beta_i = \int_a^b h_i(t)w(t)\,dt, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

ler belirlenmesi gereken sabitler olmak üzere,

$$w(x) = f(x) + \lambda g_1(x)\beta_1 + \lambda g_2(x)\beta_2 + \cdots + \lambda g_n(x)\beta_n$$

şeklinde yazılabilir. Bu yöntemi açıklamak için aşağıdaki örneği inceleyeceğiz.

Örnek

Aşağıda verilen lineer Fredholm integral denklemini ele alalım

$$w(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 t w(t)\,dt. \tag{3.18}$$

$K(x,t) = x^2 t$ çekirdeği ayrılabilir olduğu için (3.18) denklemini

$$w(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}x^2 \int_0^1 tw(t)\, dt \tag{3.19}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitliğin sağ tarafıntaki integral yalnızca t değişkenine bağlı olduğundan bir sabite eşdeğer olduğunu not edelim. Dolayısıyla (3.19) denklemini

$$w(x) = 3x + 3x^2 + \frac{1}{2}x^2\ \beta, \tag{3.20}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\beta = \int_0^1 tw(t)\, dt \tag{3.21}$$

dir. β'nın değerini elde etmek için (3.21) eşitliğinde (3.20)'i kullanırsak

$$\beta = \int_0^1 t\left(3t + 3t^2 + \frac{1}{2}t^2\ \beta\right) dt$$

elde ederiz. Buradan $\beta = \frac{7}{4} + \frac{1}{8}\beta$, dolayısıyla $\beta = 2$ elde edilir. β'nın bu değerini (3.20) de yerine koyarsak $w(x)$ çözümü

$$w(x) = 3x + 4x^2$$

olarak elde ederiz.

3.1.4. Fredholm integral denklemi için değiştirilmiş ayrıştırma yöntemi

Değiştirilmiş ayrıştırma yöntemi temel olarak $f(x)$ fonksiyonuna dayanmaktadır ve bu yöntemin sağladığı niteliksel değişim ve yinelemeli ilişki nedeniyle $w(x)$ bileşenlerin daha kolay ve daha hızlı tanımlanmasını kolaylaştırır. $f(x)$ fonksiyonunun birden fazla terimi varsa bu yöntemi kullanabiliriz örneğin $f(x)$ fonksiyonunu $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ şeklinde iki parçadan oluşuyor ise Fredholm integral denklemini

$$w(x) = f_1(x) + f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, w(t)\, dt \tag{3.22}$$

olarak yazarız. $w(x)$ çözümü verilen sonsuz sayıda bileşenin toplamı ile olmak üzere

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \tag{3.23}$$

olarak alınır. (3.23) eşitliği (3.22) denkleminde kullanılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t)\, dt$$

ya da eşdeğer olarak

$$w_0(x) + w_1(x) + w_2(x) + \cdots = f_1(x) + f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)[w_0(t) + w_1(t) + \cdots]dt$$

olarak elde edilir. $w_0(x), w_1(x), w_2(x), \ldots$ fonksiyonları

$w_0(x) = f_1(x)$

$w_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, w_0(t)\, dt$

$w_2(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, w_1(t)\, dt$

$w_3(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, w_2(t)\, dt$

$w_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, w_{n-1}(t)\, dt, \qquad n > 1$

olarak belirlenir. Değiştirilmiş yineleme genel formülü

$w_0(x) = f_1(x)$

$w_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, w_0(t)\, dt$

$$w_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, w_{n-1}(t)\, dt, \qquad n > 1$$

olarak verilir. Bu yöntemi açıklamak için aşağıdaki örneği inceleyeceğiz.

Örnek

Aşağıda verilen lineer Fredholm integral denklemini ele alalım

$$w(x) = 3x + e^{4x} - \frac{1}{16}(17 + 3e^4) + \int_0^1 t\ \ w(t)\, dt.$$

İlk olarak $f(x)$ fonksiyonunu

$$f_1(x) = 3x + e^{4x}$$
$$f_2(x) = -\frac{1}{16}(17 + 3e^4)$$

şeklinde olmak üzere $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ şeklinde iki parçaya ayırırız. Daha sonra değiştirilmiş yineleme formülünün kullanılmasıyla

$$w_0(x) = f_1(x) = 3x + e^{4x}$$
$$w_1(x) = -\frac{1}{16}(17 + 3e^4) + \int_0^1 t\ \ w_0(t)\, dt$$
$$= -\frac{1}{16}(17 + 3e^4) + \int_0^1 t\ \ (3t + e^{4t})dt$$
$$= -\frac{1}{16}(17 + 3e^4) + \frac{1}{16}(17 + 3e^4)$$
$$= 0$$
$$w_n(x) = \int_0^1 K(x,t)\, w_{n-1}(t)\, dt = 0, \qquad n > 1$$

olarak bulunur. Belli ki her $i \geqslant 1$ için w_i sıfırdır. Bu nedenle

$$w(x) = 3x + e^{4x}$$

kesin çözümü elde edilir.

3.2. Volterra İntegral Denklemleri

Volterra, integral denklemler alanındaki ana araştırmacılardan biridir, teorinin önemini fark eden ve onu sistematik olarak inceleyen ilk kişidir. Volterra integral denklemi, $w(x)$ bilinmeyen fonksiyon, integrasyon sınırlarından biri sabit, diğeri değişken olmak üzere

$$\varphi(x)w(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)w(t)\,dt \tag{3.24}$$

formundaki denklemle karakterize edilir.

(3.24) denklemine $\varphi(x) = 0$ ise I. cins, $\varphi(x) = 1$ ise II. cins ve $\varphi(x)$ ne 0 ne de 1 ise III. cins Volterra integral denklemi denir.

3.2.1. Volterra integral denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\,w(t)\,dt \tag{3.25}$$

Volterra integral denklemini ele alalım. (3.25) denkleminin çözümünün varlığını ve tekliğini kanıtlamanın klasik yolu ardışık yaklaşım yöntemidir. Önce $w_0(x) = f(x)$ sürekli fonksiyonunu alır ve iki diziyi

$$w_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\,w_{n-1}(t)\,dt, \quad n \geqslant 1 \tag{3.26}$$

$$w_{n-1}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\,w_{n-2}(t)\,dt \tag{3.27}$$

olarak tanımlarız. Çıkarma işlemini yaparak

$$w_n(x) - w_{n-1}(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\,[w_{n-1}(t) - w_{n-2}(t)]\,dt \tag{3.28}$$

elde ederiz. Kolay iterasyon için

$$\varphi_n(x) = w_n(x) - w_{n-1}(x), \qquad \varphi_0(x) = f(x) \tag{3.29}$$

tanımlayalım. (3.29) denklemi (3.28) denkleminde kullanılarak

$$\varphi_n(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\, \varphi_{n-1}(t)\, dt, \quad n \geqslant 1 \tag{3.30}$$

elde ederiz.

3.2.1.1. Teorem

Eğer $0 \leqslant x \leqslant X$'de $K(x,t)$ ve $f(x)$ sürekli iki fonksiyon ise, o zaman (3.25) integral denklemi, $0 \leqslant x \leqslant X$'de tek bir sürekli çözüme sahiptir.

İspat

$K(x,t)$ ve $f(x)$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant X$ için sürekli olduklarından
$|f(x)| \leqslant F, \qquad 0 \leqslant x \leqslant X$

$$|K(x,t)| \leqslant M, \qquad 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant X \tag{3.31}$$

olacak şekilde F ve M sayıları vardır.

İddia ediyoruz ki

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \frac{F(|\lambda|MX)^n}{n!}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad n \geqslant 1 \tag{3.32}$$

dir. (3.32) denklemini kullanarak doğruluğunu tümevarımla gösterelim.
i) $n = 1$ için

$$\varphi_1(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\, \varphi_0(t)\, dt$$

dir. Dolayısıyla

$$|\varphi_1(x)| \leqslant \frac{|\lambda| FMX}{1!}, \qquad X = \max\{x\}$$

doğrudur.

ii) $n = 2$ için

$$\varphi_2(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\, \varphi_1(t)\, dt$$

dir. Dolayısıyla

$$|\varphi_2(x)| \leqslant \frac{F|\lambda|^2 M^2 X^2}{2!}, \qquad X = \max\{x\}$$

doğrudur.

iii) $n = m$ için

$$\varphi_m(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\, \varphi_{m-1}(t)\, dt$$

dir. Dolayısıyla

$$|\varphi_m(x)| \leqslant \frac{F|\lambda|^m M^m X^m}{m!}$$

doğrudur.

iv) $n = m + 1$ için

$$\varphi_{m+1}(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\, \varphi_m(t)\, dt$$

dir. Buradan

$$|\varphi_{m+1}(x)| \leqslant \frac{|\lambda|^{m+1} M^{m+1} F}{m!} \int_0^x t^m \; dt$$

dolayısıyla

$$|\varphi_{m+1}(x)| \leqslant \frac{|\lambda|^{m+1} M^{m+1} \; X^{m+1}}{(m+1)!} F \tag{3.33}$$

elde edilir. (3.33) eşitsizliği tüm n-ler için açıkça doğru olduğundan bu terim, (3.30) denklemindeki $w_n(x)$ dizisinin yakınsadığını ve

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x) = w(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x) \tag{3.34}$$

şeklinde yazılabileceğini verir. *w* nın (3.25) denkleminde sağlanmasını kontrol ederiz. (3.25) kullanılarak

$$\lambda \int_0^x K(x,t)\, w(t) dt = \lambda \int_0^x K(x,t) \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(t) dt \tag{3.35}$$

elde ederiz. (3.33) denklemdeki $\varphi_i(x)$ terimi $\frac{F(|\lambda|MX)^i}{i!}$ ile sınırlı olduğundan $\{w_n(x)\}$ serisi düzgün yakınsaktır. (3.35) denkleminde integral ve toplamın sırasını değiştirerek

$$\lambda \int_0^x K(x,t)\, w(t) dt = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^x K(x,t)\, \varphi_i(t) dt \tag{3.36}$$

elde ederiz. (3.30) denklemi (3.36) denkleminde uygulayarak

$$\lambda \int_0^x K(x,t)\, w(t)\, dt = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{i+1}(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots - \varphi_0(x)$$

olarak elde ederiz. Bu nedenle

$$\lambda \int_0^x K(x,t)\, w(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x) - \varphi_0(x) \tag{3.37}$$

elde edilir. Son olarak, (3.37)'de (3.29) ve (3.34) denklemini kullanarak

$$\lambda \int_0^x K(x,t)\, w(t) dt = w(x) - f(x)$$

elde edilir. Her $\varphi_i(x)$ açıkça süreklidir, dolayısıyla $w(x)$ süreklidir, çünkü bu sürekli fonksiyonların düzgün yakınsak dizisinin limitidir. $w(x)$'in tek sürekli çözüm olduğunu göstermek için $\overline{w}$ aynı zamanda (3.25)'ün sürekli bir çözümü olduğunu varsayalım ve

$$w(x) - \overline{w}(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)[w(t) - \overline{w}(t)]\, dt \tag{3.38}$$

ifadesini oluşturalım. $w(x)$ ve $\overline{w}(x)$ sürekli olduğundan,

$$|w(x) - \overline{w}(x)| \leqslant B \tag{3.39}$$

şeklinde B sabiti vardır. (3.38) denklemine norm uygulayarak

$$\| w(x) - \overline{w}(x) \| = |\lambda| \left\| \int_0^x K(x,t)[w(t) - \overline{w}(t)]\, dt \right\| \tag{3.40}$$

elde ederiz. (3.39) ve (3.31) denklemlerini (3.40)'de kullanarak ve adımın tekrarlanması

$$\| w(x) - \overline{w}(x) \| \leqslant |\lambda|^n \; B \; \frac{(MX)^n}{n!}, \qquad X = \max\{x\}$$

eşitsizliğini verir. Yeterince büyük n değeri için sağ taraf yeterince küçüktür, bu nedenle

$$w(x) = \overline{w}(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant X$$

olması gerekir [3].

3.2.2. Volterra integral denklemi için Adomian ayrıştırma yöntemi

Adomian Ayrıştırma Yöntemi, George Adomian tarafından tanıtıldı ve geliştirildi. Adominan ayrıştırma yöntemi, herhangi bir denklemin bilinmeyen bir fonksiyonunu $w(x)$ dağılım serisiyle tanımlanan

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \tag{3.41}$$

sonsuz sayıda bileşenin toplamına ayrıştırmaktan oluşur. Eğer (3.41) ifadesini Voltterra integral denkleminin her iki tarafına koyarsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t)\, dt$$

ya da eşdeğer olarak

$$w_0(x) + w_1(x) + w_2(x) + \cdots = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)[w_0(t) + w_1(t) + w_2(t) + \cdots]dt$$

elde edilir. $w_0(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$, ... bileşenleri ardışık iterasyon kullanılarak

$$w_0(x) = f(x)$$
$$w_1(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\, w_0(t)\, dt$$
$$w_2(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\, w_1(t)\, dt$$

$$w_3(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\, w_2(t)\, dt$$

$$w_n(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\, w_{n-1}(t)\, dt, \qquad n \geq 1$$

şeklinde belirlenir. Sonuç olarak, Volterra integral denkleminin seri formundaki $w(x)$ çözümü, (3.41) kullanılarak kolaylıkla elde edilebilir. Bu yöntemi açıklamak için aşağıdaki örneği inceleyeceğiz.

Örnek

Aşağıda verilen lineer Volterra integral denklemini ele alalım

$$w(x) = 1 + \int_0^x (t-x)w(t)dt. \tag{3.42}$$

Adomian ayrıştırma yöntemine göre, (3.41) ayrıştırma serisini (3.42)'un her iki tarafında kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) = 1 + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (t-x)w_n(t)dt$$

elde ederiz. Sıfırıncı bileşeni, integral işaretinin altına girmeyen tüm terimlerle tanımlarız. Bu nedenle aşağıdaki yineleme ilişkisini elde ederiz:

$$w_0(x) = 1$$

$$w_n = \int_0^x (t-x)w_{n-1}(t)dt, \qquad n \geqslant 1.$$

Böylece

$$w_0(x) = 1$$

$$w_1(x) = \int_0^x (t-x)w_0(t)\, dt = \int_0^x (t-x)dt = -\frac{1}{2!}x^2$$

$$w_2(x) = \int_0^x (t-x)w_1(t)\,dt = -\frac{1}{2!}\int_0^x (t-x)t^2 = \frac{1}{4!}x^4$$
$$w_3(x) = \int_0^x (t-x)w_2(t)\,dt = \frac{1}{4!}\int_0^x (t-x)t^4\;\,dt = -\frac{1}{6!}x^6$$
$$w_4(x) = \int_0^x (t-x)w_3(t)\,dt = -\frac{1}{6!}\int_0^x (t-x)t^6\;\,dt = \frac{1}{8!}x^8$$

elde edilir.

Bu şekilde devam edersek

$$w(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \cdots = \cos x$$

elde ederiz.

3.2.3. Volterra integral denklemi için Laplace dönüşüm yöntemi

Volterra integral denklemi, çekirdeğin farka bağlı $K(x,t) = h(x-t)$ şeklinde olması durumunda Laplace dönüşümü yardımıyla çözebiliriz. Bu durumda integral denklemi

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_0^x h(x-t)w(t)dt \tag{3.43}$$

şeklinde ifade edilebilir. $h(x)$ ve $w(x)$ fonksiyonlarının konvolüsyonu

$$(h * w)(x) = \int_0^x h(x-t)w(t)dt \tag{3.44}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda (3.44)'un her iki tarafına Laplace dönüşümünü uyguladığımızda

$$L\{h * w\}(x) = L\{h(x)\}L\{w(x)\} = H(s)W(s)$$

olarak elde ederiz. Eğer (3.43)'un her iki tarafına Laplace dönüşümü uygularsak

$$W(s) = F(s) + \lambda H(s)W(s)$$

elde ederiz. Burada $W(s) = L\{w(x)\}$, $F(s) = L\{f(x)\}$, $H(s) = L\{h(x)\}$ dir.
$W(s)$ için çözüm

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 - \lambda H(s)} \ , \qquad \lambda H(s) \neq 0dt \tag{3.45}$$

şeklinde verilir. (3.45) denklemin her iki tarafının ters Laplace dönüşümünü alarak çözüme ulaşırız. Bu yöntemi bir örnekle açıklayacağız.

Örnek

Aşağıda verilen lineer Volterra integral denklemini ele alalım

$$w(x) = \frac{1}{3!}x^3 - \int_0^x (x - t)w(t)dt.dt \tag{3.46}$$

(3.46)'nin her iki tarafına Laplace dönüşümünü uygularsak

$$L\{w(x)\} = \frac{1}{3!}L\{x^3\} - L\{x * w(x)\}$$

elde ederiz. Buradan

$$W(s) = \frac{1}{s^4} - \frac{1}{s^2}W(s)$$

dolayısıyla

$$W(s) = \frac{1}{s^2(1 + s^2)}$$

olur. Eğer basit kesirlere ayırma yöntemini kullanırsak

$$W(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+s^2} \tag{3.47}$$

olarak yazabiliriz. (3.47)'nin her iki tarafının ters Laplace dönüşümünü alarak

$$w(x) = x - \sin x$$

çözümünü elde ederiz.

3.2.4. Volterra integral denklemi için G_r-dönüşüm yöntemi

$x \geqslant 0$ için tanımlı $w(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen G_r-dönüşümü

$$G_r\{w(x)\} = z^r \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{z}}\, w(x)\, dx = W(z)dt \tag{3.48}$$

ile tanımlanır. Burada $r \in \mathbb{Z}$ ve $e^{-\frac{x}{z}}$ fonksiyonu G_r-dönüşümünün çekirdeği olarak adlandırılır [8]. Eğer $w(x)$ fonksiyonu $x \geqslant 0$ için parçalı sürekli ve üstel mertebeli ise G_r-dönüşümü mevcuttur. Bu koşullar, $w(x)$ fonksiyonunun G_r-dönüşümünün varlığı için yalnızca yeterli koşullardır. $w(x)$ fonksiyonu, $W(z)$ fonksiyonunun ters G_r-dönüşümü olarak adlandırılır. Eğer $G_r\{w(x)\} = W(z)$ eşitliği mevcut ise sembolik olarak bu durumu $G_r^{-1}\{W(z)\} = w(x)$ şeklinde yazabiliriz.

G_r-dönüşümünün temel yapısını ve lineerlik özelliği de dahil olmak üzere bazı özelliklerini, G_r-dönüşümü $G_r\{a_1w_1(x) + a_2w_2(x)\} = a_1W_1(z) + a_2W_2(z)$ lineerlik özelliğine, $G_r\{w(ax)\} = \frac{1}{a^{r+1}}W(az)$ skalerin değişimi özelliğine ve kaydırma özelliği olarak bilinen$G_r\{e^{ax}\ w(x)\} = (1-az)^r W(\frac{z}{1-az})$ özelliğine sahiptir [9].

<u>G_r-dönüşümü ve Laplace dönüşümü arasındaki ilişki</u>

Laplace dönüşümü G_r-dönüşümünün $r = 0$ olması özel bir durumu olduğu için elbette ki G_r-dönüşümü, genellikle yaygın olarak kullanılan Laplace dönüşümü kullanılarak çözülebilen tüm problemleri de çözebilir. Bu nedenle, eğer $w(x)$ fonksiyonunun G_r-

dönüşümü $G_r\{w(x)\} = W(z)$ ve $w(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$L\{w(x)\} = \int_0^\infty e^{-zx}\ w(x)\,dx \text{ ise,}$$

$$L\{w(x)\} = A(z) = \int_0^\infty e^{-zx}\ w(x)\,dx = z^r\left(\frac{1}{z^r}\int_0^\infty e^{-zx}\ w(x)\,dx\right) = z^r W\left(\frac{1}{z}\right)$$

ilişkisi sağlanır. Bu ilişki, ihtiyaç duyulduğunda bir dönüşümden diğerine geçmek için bir yol sağlar. Buradan $L\{w(x)\} = A(z)$ Laplace dönüşümü için $G_r\{w(x)\} = z^r A\left(\frac{1}{z}\right)$ eşitliğini kullanarak bazı elemanter fonksiyonların G_r ve ters G_r-integral dönüşümleri sırasıyla aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$G_r\{1\}=z^{r+1}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\{z^{r+1}\} = 1$,
$G_r\{x\}=z^{r+2}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\{z^{r+2}\} = x$,
$G_r\{x^n\}= n!\ \ z^{r+n+1}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\{\ z^{r+n+1}\} = \frac{x^n}{n!}$,
$G_r\{e^{ax}\} = \frac{z^{r+1}}{1-az}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\left\{\frac{z^{r+1}}{1-az}\right\} = e^{ax}$,
$G_r\{\sin ax\} = \frac{az^{r+2}}{1+a^2z^2}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\left\{\frac{z^{r+2}}{1+a^2z^2}\right\} = \frac{\sin ax}{a}$,
$G_r\{\cos ax\} = \frac{z^{r+1}}{1+a^2z^2}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\left\{\frac{z^{r+1}}{1+a^2z^2}\right\} = \cos ax$,
$G_r\{\sinh ax\} = \frac{az^{r+2}}{1-a^2z^2}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\left\{\frac{z^{r+2}}{1-a^2z^2}\right\} = \frac{\sinh ax}{a}$,
$G_r\{\cosh ax\} = \frac{z^{r+1}}{1-a^2z^2}$, dolayısıyla $G_r^{-1}\left\{\frac{z^{r+1}}{1-a^2z^2}\right\} = \cosh ax$.

Teorem (konvolüsyon teoremi)

Eğer $G_r\{w(x)\} = W(z)$ ve $G_r\{h(x)\} = H(z)$ ise konvolüsyonun G_r-dönüşümü
$G_r\{(w * h)(x)\} = z^{-r}\ G_r\{w(x)\}\,G_r\{h(x)\} = z^{-r}\ W(z)H(z)$ dır.

İspat

$w(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonunun konvolüsyonu $(w * h)(x) = \int_0^x h(x-v)w(v)dv$ dir. Eğer (3.48) i kullanarak bu ifadenin her iki tarafına G_r-dönüşümünü uygularsak,

$$G_r\{(w*h)(x)\} = z^r \int_0^\infty e^{-\frac{x}{z}}\ (w*h)(x)\ dx = z^r \int_0^\infty e^{-\frac{x}{z}} \left(\int_0^x h(x-v)w(v)\ dv \right) dx$$

$$= z^r \int_0^\infty \int_0^x e^{-\frac{x}{z}} h(x-v)w(v)dvdx = z^r \int_0^\infty \int_v^\infty e^{-\frac{x}{z}} h(x-v)w(v)dxdv$$

elde ederiz. Eğer $x - v = m$ değişken değiştirmesini yaparsak $dx = dm$ olur ve yukarıdaki eşitlik

$$G_r\{(w*h)(x)\} = z^r \int_0^\infty w(v) \int_0^\infty e^{-\frac{m+v}{z}} h(m)dm\ dv$$

$$= z^r \int_0^\infty e^{-\frac{v}{z}} w(v)dv \int_0^\infty e^{-\frac{m}{z}} h(m)dm = z^{-r}\ W(z)H(z)$$

halini alır ki bu da konvolüsyon teoreminin ispatını tamamlar.

Volterra integral denklemi G_r-dönüşümü yardımıyla çözümü

Volterra integral denklemi, çekirdeğin farka bağlı $K(x,t) = h(x-t)$ şeklinde olması durumunda G_r-dönüşümü yardımıyla çözebiliriz. Bu durumda integral denklemi

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_0^x h(x-t)w(t)dt \tag{3.49}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Eğer (3.49) ifadesinin her iki tarafına G_r-dönüşümünü uygularsak

$$G_r\{w(x)\} = G_r\left\{ f(x) + \lambda \int_0^x K(x-t)\ w(t)dt \right\}$$

$$= G_r\{f(x)\} + G_r\left\{ \lambda \int_0^x K(x-t)\ w(t)dt \right\}$$

$$= G_r\{f(x)\} + \lambda\ G_r\{(K*w)(x)\} \tag{3.50}$$

elde ederiz. Eğer (3.50) ifadesinde konvolüsyon teoremini kullanırsak kullanırsak

$$G_r\{w(x)\} = G_r\{f(x)\} + \lambda\, z^{-r}\; G_r\{\mathrm{K}(x)\}G_r\{\mathrm{w}(x)\}$$

$$G_r\{w(x)\} = \frac{G_r\{f(x)\}}{1 - \lambda z^{-r}\;\; G_r\{K(x)\}} \tag{3.51}$$

elde ederiz. Eğer (3.51) eşitliğinin her iki tarafına ters G_r-dönüşümünü uygularsak (3.49) denkleminin çözümünü

$$w(x) = G_r^{-1}\left\{\frac{G_r\{f(x)\}}{1 - \lambda z^{-r}\;\; G_r\{K(x)\}}\right\}$$

olarak elde ederiz.

Örnek

Aşağıda verilen lineer Volterra integral denklemini ele alalım

$$w(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x w(t\,)\, dt. \tag{3.52}$$

Eğer (3.52) denkleminin her iki tarafına G_r-dönüşümünü uygularsak

$$\begin{aligned} G_r\{w(x)\} &= G_r\left\{1 - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x w(t)\, dt\right\}, \\ &= z^{r+1} - z^{r+3} + G_r\left\{\int_0^x\; w(t)dt\right\}, \\ &= z^{r+1} - z^{r+3} + z\;\; G_r\{w(x)\} \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$G_r\{w(x)\} = z^{r+1} + z^{r+2} \tag{3.53}$$

elde ederiz. Eğer (3.53) un her iki tarafına ters G_r-dönüşümünü uygularsak (3.52) denkleminin çözümünü

$$w(x) = 1 + x$$

olarak elde ederiz.

Örnek

Aşağıda verilen lineer Volterra integral denklemini ele alalım

$$w(x) = \sin x - 2\int_0^x \cos(x-t)\, w(t)\, dt. \tag{3.54}$$

Eğer (3.54) denkleminin her iki tarafına G_r-dönüşümünü uygularsak

$$G_r\{w(x)\} = G_r\left\{\sin x - 2\int_0^x \cos(x-t)\, w(t)\, dt\right\},$$
$$= \frac{z^{r+2}}{1+z^2} - 2G_r\{\cos(x) * w(x)\}, \tag{3.55}$$

elde ederiz. elde ederiz. Eğer (3.55) eşitliğinde konvolüsyon teoremini kullanırsak

$$G_r\{w(x)\} = \frac{z^{r+2}}{(1+z)^2}\ , \tag{3.56}$$

elde ederiz. Eğer (3.56) nın her iki tarafına ters G_r-dönüşümünü uygularsak (3.54) denkleminin çözümünü

$$w(x) = xe^{-x}$$

olarak elde ederiz.

4. LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Lineer olmayan integral denklemler karmaşık denklemlerdir. Bu nedenle lineer integral denklemler gibi sistematik çözüm yöntemleri yoktur. Ancak yeni teknolojilere eşlik eden son gelişmelerden sonra artık birçok lineer olmayan integral denklem türüne çözüm bulabilmekteyiz. Lineer olmayan bir integral denklemi genellikle birden fazla çözüme sahiptir. Lineer olmayan integral denklemlerin genel biçimi [2]

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} K(x,t)P\big(w(t)\big)\, dt, \tag{4.1}$$

olarak verilir. Burada $P\big(w(t)\big)$, $w(t)$'in lineer olmayan bir fonksiyonudur. $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ verilmiş fonksiyonlar, λ de bir skalerdir. İntegral işareti altında bulunan $K(x,t)$, x ve t değişkenlerinin bilinen fonksiyonudur ve integral denklemin çekirdeği olarak bilinir.

Lineer olmayan integral denklemlerini integralin sınırlarının yapısına göre sınıflandırabiliriz. Bu nedenle aşağıdaki iki ana integral denklem türünü tanıtacağız.

4.1. Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denklemleri

Lineer olmayan Fredholm integral denkleminin genel formu, bilinmeyen fonksiyon $w(x)$ olmak üzere

$$\varphi(x)w(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K(x,t)P\big(w(t)\big)\, dt, \tag{4.2}$$

şeklinde verilir. (4.2) denklemine $\varphi(x) = 0$ ise I. cins, $\varphi(x) = 1$ ise II. cins ve $\varphi(x)$ ne 0 ne de 1 ise III. cins lineer olmayan Fredholm integral denklemi denir.

4.1.1. Lineer olmayan Fredholm integral denkleminin çözümünün varlığı

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} K_1\big(x,t,w(t)\big)\, dt, \tag{4.3}$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemi ele alalım. Burada $K_1\big(x,t,w(t)\big) = K(x,t)P\big(w(t)\big)$ dır. (4.3)'in çözümünün varlığı için gerekli koşullar aşağıdaki gibidir [5].

(i) $f(x)$ fonksiyonu $a \leqslant x \leqslant b$ üzerinde sınırlıdır. Yani $|f(x)| < F$,
(ii) $K_1(x,t,z)$ çekirdeği integrallenebilir ve $a \leqslant x,t \leqslant b,\ |z| < c$ üzerinde sınırlıdır. Yani $|K_1(x,t,z)| < M$,
(iii) $K_1(x,t,z)$ çekirdeği $a \leqslant x,t \leqslant b,\ |z| < c$ üzerinde Lipschitz koşulunu sağlar. Yani $|K_1(x,t,z) - K_1(x,t,z')| <\ E\ |z-z'|$ şeklindedir,
(iv) $|\lambda| < \frac{1}{h(b-a)}$.

Ardışık yaklaşımlar kullanarak

$$w_0(x) = f(x)$$
$$w_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1\big(x,t,w_0(t)\big)\,dt$$
$$w_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1\big(x,t,w_1(t)\big)\,dt$$

elde edilir. Bu şekilde ilerleyerek, n-inci yaklaşımı

$$w_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1\big(x,t,w_{n-1}(t)\big)\,dt$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$w_1(x) - w_0(x) = \lambda \int_a^b K_1\big(x,t,w_0(t)\big)\,dt$$
$$w_2(x) - w_1(x) = \lambda \int_a^b \Big(K_1\big(x,t,w_1(t)\big) - K_1\big(x,t,w_0(t)\big)\Big)\,dt$$
$$w_n(x) - w_{n-1}(x) = \lambda \int_a^b \Big(K_1\big(x,t,w_{n-1}(t)\big) - K_1\big(x,t,w_{n-2}(t)\big)\Big)\,dt$$

elde edilir.

Yukarıda verilen koşullardan

$|w_1(x) - w_0(x)| < |\lambda| M(b-a).$

Bu eşitsizliklerden ve Lipschitz koşulundan

$$|w_2(x) - w_1(x)| < |\lambda| E \int_a^b |w_1(t) - w_0(t)| dt < |\lambda|^2 EM(b-a)^2| < |\lambda|^2 h^2 (b-a)^2$$

elde edilir. Burada $h^2 > EM$ dir. Benzer şekilde

$$|w_3(x) - w_2(x)| < |\lambda|^3 h^3 (b-a)^3$$

elde edilir. Bu şekilde ilerleyerek, n-inci yaklaşımı

$$|w_n(x) - w_{n-1}(x)| < |\lambda|^n h^n (b-a)^n$$

olarak elde edilir. O halde geometrik seri özellikleri ve $|\lambda| < \frac{1}{h(b-a)}$ koşulu altında

$$\lim_{n\to\infty} |w_n(x) - w_{n-1}(x)| = 0$$

sağlanır, bu şekilde oluşturulan $w_n(x)$ dizisi yakınsaktır, o zaman $\lim_{n\to\infty} w_n(x) = w(x)$ bir $w(x)$ vardır, ve bu $w(x)$ (4.3) denkleminin çözmüdür.

4.1.2. Lineer olmayan Fredholm integral denklemi için ardışık yaklaşımlar yöntemi

Bu yöntem, integral işareti altındaki bilinmeyen fonksiyonu, sıfırıncı yaklaşımı adı verilen $w_0(x)$ gibi bir ilk yaklaşımla değiştirerek integral denkleminin çözümünü bir iterasyon yardımıyla dizi olarak elde eder. $w_0(x)$ için en sık seçilen değerler 0, 1 veya x dir. Ardışık yaklaşımlar dizisi, $w_0(x)$ herhangi bir reel değerli fonksiyon olmak üzere

$$w_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)P\big(w_{n-1}(t)\big)\, dt, \qquad n \geq 1 \tag{4.4}$$

iterasyonu yardımıyla verilir. Buna göre ilk yaklasım

$$w_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)P\big(w_0(t)\big)\, dt$$

olarak elde edilir. İkinci yaklaşım $w_2(x)$ benzer şekilde denklem (4.4)'teki $w_0(x)$'in yukarıda elde edilen $w_1(x)$ ile değiştirilmesiyle elde edilebilir. Yani,

$$w_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)P\big(w_1(t)\big)\, dt$$

olarak elde edilir.

Bu şekilde ilerleyerek, n -inci yaklaşımı

$$w_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)P\big(w_{n-1}(t)\big)\, dt, n \geq 1$$

şeklinde elde edilir.

Limit yardımı ile $w(x)$ çözümü

$$w(x) = \lim_{n\to\infty} w_n(x)$$

olarak elde edilir.

Örnek

Aşağıda verilen lineer olmayan Fredholm integral denklemini ele alalım

$$w(x) = \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12}\int_0^{\pi} tw^2(t)\, dt. \tag{4.5}$$

Yukarıdaki gibi tanımlanan yaklaşımdan faydalanalım. Sıfırıncı yaklaşım için $w_0(x) = 1$ olarak alalım. İlk yaklaşım: (4.5) de $w_0(x) = 1$ alınır ve $w_1(x)$ birinci yaklaşımı

$$w_1(x) = \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12}\int_0^{\pi} tw_0^2(t)\,dt$$
$$= \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12}\int_0^{\pi} t\;dt = \cos x + 0.20561676$$

olarak bulunur. İkinci yaklaşım: (4.5) de $w_1(x) = \cos x + 0.20561676$ alınır ve $w_2(x)$ ikinci yaklaşımı

$$w_2(x) = \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12}\int_0^{\pi} tw_1^2(t)\,dt$$
$$= \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12}\int_0^{\pi} t(\cos t + 0.20561676)^2\;dt = \cos x - 0.051152685$$

olarak bulunur. Üçüncü yaklaşım: (4.5) de $w_2(x) = \cos x - 0.051152685$ alınır ve $w_3(x)$ üçüncü yaklaşımı

$$w_3(x) = \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12}\int_0^{\pi} tw_2^2(t)\,dt$$
$$= \cos x - \frac{\pi^2}{48} + \frac{1}{12}\int_0^{\pi} t(\cos t - 0.051152685)^2\;dt = \cos x + 0.0181289627$$

olarak bulunur. İlerledikçe sayı küçüldüğünü fark ederiz, dolayısıyla limiti yardımı ile $w(x)$ çözümü

$$w(x) = \lim_{n\to\infty} w_n(x) = \cos x$$

olarak elde edilir.

4.1.3. Lineer olmayan Fredholm integral denklemi için doğrudan hesaplama yöntemi

Doğrudan hesaplama yöntemi lineer olmayan Fredholm integral denklemleriyle ilgilenir. Bu

yöntem tamamen $K(x,t)$ çekirdek yapısına bağlı olup çekirdeğin ayrılabilir olması durumunda kullanılabilir. Özel olarak

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)h_i(t) \tag{4.6}$$

şeklindeki bir yapıya sahip olan bir integral denkleme dejenere çekirdekli integral denklem denir. Şimdi dejenere çekirdeğe sahip

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)P\big(w(t)\big)\,dt \tag{4.7}$$

şeklinde II. cins lineer olmayan Fredholm integral denklemini ele alalım. (4.6)'nin (4.7) de kullanılmasıyla

$$w(x) = f(x) + g_1(x)\lambda \int_a^b h_1(t)P\big(w(t)\big)\,dt + g_2(x)\lambda \int_a^b h_2(t)P\big(w(t)\big)\,dt + \cdots + g_n(x)\lambda \int_a^b h_n(t)P\big(w(t)\big)\,dt \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) integral denklemi

$$\beta_i = \int_a^b h_i(t)P\big(w(t)\big)\,dt, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

ler belirlenmesi gereken sabitler olmak üzere,

$$w(x) = f(x) + \lambda g_1(x)\beta_1 + \lambda g_2(x)\beta_2 + \cdots + g_n(x)\lambda\beta_n$$

şeklinde yazılabilir. Bu yöntemi açıklamak için aşağıdaki örneği inceleyeceğiz.

Örnek

Aşağıda verilen lineer olmayan Fredholm integral denklemini ele alalım

$$w(x) = x - \frac{5}{6} + \int_0^1 \left(w(t) + w^2(t)\right) dt. \tag{4.9}$$

Bu eşitliğin sağ tarafıntaki integral yalnızca t değişkenine bağlı olduğundan bir sabite eşdeğer olduğunu not edelim. Dolayısıyla (4.9) denklemini

$$w(x) = x - \frac{5}{6} + \beta_1 + \beta_2, \tag{4.10}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\beta_1 = \int_0^1 w(t)\, dt \tag{4.11}$$

ve

$$\beta_2 = \int_0^1 w^2(t)\, dt \tag{4.12}$$

dir. $\beta_1 ve\ \beta_2$'nın değerini elde etmek için, ilk olarak (4.11) eşitliğinde (4.12) kullanırsak

$$\beta_1 = \int_0^1 \left(t - \frac{5}{6} + \beta_1 + \beta_2\right) dt$$

elde ederiz. Buradan $\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{6} + \beta_1 + \beta_2,$ dolayısıyla $\beta_2 = \frac{1}{3}$ elde edilir.
β_2'nın bu değerini (4.10) de yerine koyarsak

$$w(x) = x + \beta_1 + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}$$
$$w(x) = x + \beta_1 - \frac{1}{2} \tag{4.13}$$

olarak elde ederiz. Şimdi β_1'nın değerini elde etmek için (4.12) eşitliğinde (4.13) kullanırsak

$$\beta_2 = \int_0^1 (t + (\beta_1 - \frac{1}{2}))^2\ dt$$

elde ederiz. Buradan

$$\beta_2 = \int_0^1 (t^2 + (\beta_1 - \frac{1}{2})^2 + 2t(\beta_1 - \frac{1}{2}))\ dt$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3} + (\beta_1 - \frac{1}{2})^2 + (\beta_1 - \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + (\beta_1 - \frac{1}{2})^2 + (\beta_1 - \frac{1}{2})$$

$$0 = (\beta_1 - \frac{1}{2})^2 + (\beta_1 - \frac{1}{2}) = {\beta_1}^2 - \beta_1 + \frac{1}{4} + \beta_1 - \frac{1}{2}$$

olur. Burada ya $\beta_1 = \frac{1}{2}$ yada $\beta_1 = -\frac{1}{2}$ olarak elde edilir. β_1'nın bu değerini (4.13) de yerine koyarsak

$w(x) = x$ ve ya $w(x) = x - 1$

olarak elde ederiz.

4.1.4. Lineer olmayan Fredholm integral denklemi için seri çözüm yöntemi

Taylor serisi, analitik fonksiyonlar için seri çözüm yöntemi hakkında açık ve eksiksiz bir kavram verir. Bu nedenle, bu yöntem esas olarak Taylor serisine dayanır. Ayrıca Taylor serisinin tüm mertebelerden türevleri içermesi gerektiğine de dikkat edilmelidir. Bu tip serinin genel gösterimi

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

şeklindedir. Basitlik açısından $a = 0$ noktasındaki Taylor serisi genel formu

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n, \qquad r_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{4.14}$$

şeklinde verilir. Şimdi

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)\, P\big(w(t)\big)\, dt \tag{4.15}$$

lineer olmayan Fredholm integral denklemi ele alalım. (4.15) denklemi çözümünü analitik bir çözüm olduğunu varsayacağız. (4.14) serisini (4.15)'nin her iki tarafında kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = T\big(f(x)\big) + \lambda \int_0^1 K(x,t) P\left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n\right) dt \tag{4.16}$$

ya da eşdeğer olarak

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \cdots = T\big(f(x)\big) + \lambda \int_0^1 K(x,t)\, P[r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \cdots]dt, \tag{4.17}$$

elde edilir. Burada $T\big(f(x)\big)$ $f(x)$'in Taylor serisidir. $f(x)$ fonksiyonu üstel, trigonometrik ve diğer analitik fonksiyonları içerdiğinde Taylor açılımlarını kullanmalıyız. Aşağıdaki adımları kullanarak bu yöntemi kullanabiliriz.

(i) (4.16) veya (4.17)'daki ikinci tarafını integrali hesaplarız,
(ii) $j \geqslant 0$ için r_j 'da yineleme ilişkisi elde etmek için t'in benzer kuvvetlerinin katsayılarını toplarız ve bunları elde edilen denklemin her iki tarafına eşitleriz,
(iii) Eşitlikten sonra katsayıları belirliyoruz $j \geqslant 0$ için r_j 'da ve bunları hipotez fonksiyonuna koyarak seri çözüm elde ederiz.

Bu adımları uyguladıktan sonra, bu yöntemin polinom olduğunda doğru çözümü sağlamada öne çıktığını fark ediyoruz. Bu yöntemi açıklamak için aşağıdaki örneği inceleyeceğiz.

Örnek

Aşağıda verilen lineer olmayan Fredholm integral denklemini ele alalım

$$w(x) = \frac{2357}{2310} + \frac{892}{945}x - x^2 - x^3 + \frac{1}{8}\int_0^1 (x-t)\, w^3(t)dt. \tag{4.18}$$

Seri yöntemine göre, (4.14) ayrıştırma serisini (4.18)'nin her iki tarafında kullanmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = \frac{2357}{2310} + \frac{892}{945}x - x^2 - x^3 + \frac{1}{8}\int_0^1 (x-t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n\right)^3 dt$$

ve ya denk olarak

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \cdots = \frac{2357}{2310} + \frac{892}{945}x - x^2 - x^3 + \frac{1}{8}\int_0^1 (x-t)[r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \cdots]^3 dt$$

$$= \frac{2357}{2310} + \frac{892\mathrm{x}}{945} - x^2 - x^3 + \frac{1}{8}\int_0^1 (x-t)[{r_0}^3 + 3{r_0}^2 r_1 t + (3{r_0}^2 r_2 + r_0 {r_1}^2)t^2 + ({r_1}^3 + 6r_0 r_1 r_2 + 3{r_0}^2 r_3)t^3 + \cdots]dt$$

$$= \frac{2357}{2310} + \frac{892}{945}x - x^2 - x^3 + \frac{1}{8}x\int_0^1 [{r_0}^3 + 3{r_0}^2 r_1 t + (3{r_0}^2 r_2 + r_0 {r_1}^2)t^2 + ({r_1}^3 + 6r_0 r_1 r_2 + 3{r_0}^2 r_3)t^3 + \cdots]dt$$

$$-\frac{1}{8}\int_0^1 [{r_0}^3 t + 3{r_0}^2 r_1 t^2 (3{r_0}^2 r_2 + r_0 {r_1}^2)t^3 + ({r_1}^3 + 6r_0 r_1 r_2 + 3{r_0}^2 r_3)t^4 + \cdots]dt$$

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \cdots = [\frac{2357}{2310} - \frac{1}{36}{r_0}^3 - \frac{1}{18}{r_0}^2 r_1 - \frac{1}{24} r_0 {r_1}^2 - \frac{1}{24} r_2 {r_0}^2 - \frac{1}{90}{r_1}^3 - \frac{1}{15} r_0 r_1 r_2 - \frac{1}{30}{r_0}^2 r_3] + [\frac{892}{945} + \frac{1}{18}{r_0}^3 - \frac{1}{12}{r_0}^2 r_1 + \frac{1}{18} r_0 {r_1}^2 + \frac{1}{18} r_2 {r_0}^2 + \frac{1}{72}{r_1}^3 + \frac{1}{12} r_0 r_1 r_2 + \frac{1}{24}{r_0}^2 r_3]x - x^2 - x^3 + \cdots$$

elde edilir. Eğer polinomların özdeşliği teoremini kullanırsak, $r_2 = r_3 = -1$ elde edilir. r_2 ve r_3 değerlerinden faydalanarak

$r_0 = r_1 = 1$

$r_n = 0, \quad her \ \ n \geqslant 4$

elde edilir. Bu değerleri yerlerine yazarsak seri formundaki çözümü

$w(x) = 1 + x - x^2 - x^3$

şeklinde bulunur.

4.2. Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemleri

Lineer olmayan Volterra integral denkleminin genel formu, bilinmeyen fonksiyon $w(x)$ olmak üzere

$$\varphi(x)w(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)P\big(w(t)\big)\, dt \tag{4.19}$$

şeklinde verilir. (4.19) denklemine $\varphi(x) = 0$ ise I. cins, $\varphi(x) = 1$ ise II. cins ve $\varphi(x)$ ne 0 ne de 1 ise III. cins lineer olmayan Volterra integral denklemi denir.

4.2.1. Lineer olmayan Volterra integral denkleminin çözümünün varlığı

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K_1\big(x,t,w(t)\big)\, dt \tag{4.20}$$

Lineer olmayan Volterra integral denklemi ele alalım. Burada $K_1\big(x,t,w(t)\big) = K(x,t)P\big(w(t)\big)$ dır. (4.10)'in çözümünün varlığı için gerekli koşullar aşağıdaki gibidir [5].

(i) $f(x)$ fonksiyonu $a \leqslant x \leqslant b$ üzerinde sınırlıdır. Yani $|f(x)| < F$,
(ii) $K_1(x,t,z)$ çekirdeği integrallenebilir ve $a \leqslant x, t \leqslant b, \ |z| < c$ üzerinde sınırlıdır. Yani $|K_1(x,t,z)| < M$,
(iii) $K_1(x,t,z)$ çekirdeği Lipschitz koşulunu sağlar. Yani
$|K_1(x,t,z) - K_1(x,t,z')| < \ E \ |z - z'|$şeklindedir,
(iv) λ bir sabittir.

Ardışık yaklaşımlar kullanarak

$$w_0(x) = f(x)$$
$$w_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K_1\big(x, t, w_0(t)\big)\, dt$$

elde edilir. Bu şekilde ilerleyerek, n-inci yaklaşımı

$$w_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K_1\big(x, t, w_{n-1}(t)\big)\, dt, \qquad n \geqslant 1 \tag{4.21}$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$w_1(x) - w_0(x) = \lambda \int_a^x K_1\big(x, t, w_0(t)\big)\, dt$$
$$w_2(x) - w_1(x) = \lambda \int_a^x \Big(K_1\big(x, t, w_1(t)\big) - K_1\big(x, t, w_0(t)\big)\Big)\, dt$$
$$w_n(x) - w_{n-1}(x) = \lambda \int_a^x \Big(K_1\big(x, t, w_{n-1}(t)\big) - K_1\big(x, t, w_{n-2}(t)\big)\Big)\, dt$$

elde edilir.

Yukarıda verilen koşullardan

$$|w_1(x) - w_0(x)| < |\lambda| M(x - a)$$

Bu eşitsizliklerden ve Lipschitz koşulundan

$$|w_2(x) - w_1(x)| < |\lambda| E \int_a^x |w_1(t) - w_0(t)| dt < |\lambda|^2 EM \frac{(x-a)^2}{2!}| < |\lambda|^2 h^2 \frac{(x-a)^2}{2!}$$

elde edilir. Burada $h^2 > EM$ dir. Benzer şekilde

$$|w_3(x) - w_2(x)| < |\lambda|^3 h^3 \frac{(x-a)^3}{3!}$$

elde edilir. Bu şekilde ilerleyerek, n-inci yaklaşımı

$$|w_n(x) - w_{n-1}(x)| < |\lambda|^n h^n \frac{(x-a)^n}{n!}$$

olarak elde edilir. O halde payda viktorya viktorya vardığı için bu bizi hızlı bir şekilde sıfıra götürür, yani

$$\lim_{n\to\infty} |w_n(x) - w_{n-1}(x)| = 0$$

bu şekilde oluşturulan $w_n(x)$ dizisi yakınsaktır, o zaman (4.21) denkleminin her iki tarafının limiti alırsak

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) + \lambda \int_a^x K_1\big(x, t, w_{n-1}(t)\big)\, dt \right)$$
$$= f(x) + \lambda \int_a^x K_1 \left(x, t, \lim_{n\to\infty} w_{n-1}(t) \right) dt$$
$$= f(x) + \lambda \int_a^x K_1\big(x, t, (t)\big)\, dt$$
$$= w(x)$$

olarak elde edilir. $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} w_n(x) = w(x)$ bir $w(x)$ vardır, ve bu $w(x)$ denkleminin çözümüdür.

4.2.2. Lineer olmayan Volterra integral denklemi için Adomian ayrıştırma yöntemi

Adomian, lineer olmayan fonksiyonların tüm sınıflarının güvenilir bir temsilini oluşturmak için resmi bir algoritma sundu. $w(x)$ bilinmeyen fonksiyonunu yinelemeli olarak belirlenecek sonsuz sayıda bileşene ayırmaya dayanır.

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) P\big(w(t)\big)\, dt \qquad (4.22)$$

lineer olmayan Volterra integral denklemi ele alalım. (4.22) denklemi $w(x)$ çözümünü seri

ile

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \tag{4.23}$$

şeklinde temsil edilir ve lineer olmayan $P\big(w(t)\big)$ terimi

$$P\big(w(t)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \tag{4.24}$$

olarak alınır. Burada

$$A_n(t) = \frac{1}{n!}\ \frac{d^n}{d\lambda^n}[P(\sum_{k=0}^{n} \lambda^k w_k(t))]_{\lambda=0}, \quad n \geqslant 0$$

Adomian polinomlarıdır. Adomian polinomları, algoritma kullanılarak aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$A_0 = p(w_0),$$
$$A_1 = w_1 p'(w_0),$$
$$A_2 = w_2 p'(w_0) + \frac{1}{2!} w_1^2 p''(w_0),$$
$$A_3 = w_3 p'(w_0) + w_1 w_2 p''(w_0) + \frac{1}{3!} w_1^3 p'''(w_0),$$
$$A_4 = w_4 p'(w_0) + \left(\frac{1}{2!} w_2^2 + w_1 w_3\right) p''(w_0) + \frac{1}{2!} w_1^2 w_2 p'''(w_0) + \frac{1}{4!} w_1^4 p''''(w_0).$$

(4.23) ve (4.24)'ün (4.25) de kullanılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\right) dt$$

ya da basit bir şekilde

$$w_0(x) + w_1(x) + w_2(x) + \cdots = f(x) + \int_0^x K(x,t)[A_0(t) + A_1(t) + A_2(t) + \cdots]dt$$

elde edilir. $w_0(x), w_1(x),\ w_2(x), \ldots$ bileşenleri tekrarlayan şema kullanılarak

$$w_0(x) = f(x)$$

$$w_1(x) = \int_0^x K(x,t)A_0(x)\,dx = \int_0^x K(x,t)A_0(t)\,dt$$

$$w_2(x) = \int_0^x K(x,t)A_1(x)\,dx = \int_0^x K(x,t)A_1(t)\,dt$$

$$w_3(x) = \int_0^x K(x,t)A_2(x)\,dx = \int_0^x K(x,t)A_2(t)\,dt$$

$$w_4(x) = \int_0^x K(x,t)A_3(x)\,dx = \int_0^x K(x,t)A_3(t)\,dt$$

$$w_n(x) = \int_0^x K(x,t)A_{n-1}(x)\,dx = \int_0^x K(x,t)A_{n-1}(t)\,dt, \qquad n \geqslant 1$$

olarak belirlenir. Bu yöntemi açıklamak için aşağıdaki örneği inceleyeceğiz.

Örnek

Aşağıda verilen lineer olmayan Volterra integral denklemini ele alalım

$$w(x) = x + \int_0^x w^2(t)dt. \tag{4.25}$$

(4.23) ve (4.24)'nin (4.25) de kullanılmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) = x + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t)\right) dt$$

elde ederiz.

Bu dizinin terim terim sırasını eşitleyerek, bir integral kümesi oluşturuyoruz. Böylece

$$w_0(x) = x,$$
$$w_1(x) = \int_0^x A_0(t)\,dt = \int_0^x w_0^2(t)dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3,$$
$$w_2(x) = \int_0^x A_1(t)\,dt = \int_0^x 2w_1(t)w_0(t)dt = \int_0^x 2\frac{t^3}{3}tdt = \frac{2}{15}x^5,$$
$$w_3(x) = \int_0^x A_2(t)\,dt = \int_0^x \big(2w_0(t)w_2(t) + w_1^2(t)\big)dt = \frac{17}{315}x^7$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek

$$w(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$$

kesin çözüme yakınsayan

$$w(x) = tam\, x$$

elde edilir.

4.2.3. Lineer olmayan Volterra integral denklemi için seri çözüm yöntemi

Daha önce tanıdığımız gibi bu yöntem Taylor serisine dayanır. Bu tip seri genel gösterimi

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

şeklindedir. Taylor serisinin $a = 0$ daki genel formu

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n, \qquad r_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{4.26}$$

şeklinde verilir. Şimdi

$$w(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\, P\big(w(t)\big)\, dt \tag{4.27}$$

lineer olmayan Volterra integral denklemi ele alalım. (4.27) denklemi çözümünü analitik bir çözüm olduğunu varsayacağız. (4.26) ayrıştırma serisini (4.27)'nin her iki tarafında kullanarak

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \cdots = T\big(f(x)\big) + \int_0^x K(x,t)\, P[r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \cdots]dt, \tag{4.28}$$

olur. Burada $T\big(f(x)\big)$ $f(x)$'in Taylor serisidir. (4.28)'daki integralin sağ tarafını birleştiririz, $j \geqslant 0$ için r_j'da bir yineleme ilişkisi elde etmek için t'in benzer kuvvetlerinin katsayılarını toplarız ve bunları elde edilen denklemin her iki tarafına eşitleriz. Eşitlikten sonra katsayıları belirliyoruz. $j \geqslant 0$ için r_j'da ve bunları hipotez fonksiyonuna koyarak seri çözüm elde ediyoruz. Zinciri bir yerden keserek yaklaşık çözümü bulabiliriz, ne kadar çok terim bulursak o kadar yüksek doğruluk elde ederiz. Bu yöntemi açıklamak için aşağıdaki örneği inceleyeceğiz.

Örnek

Aşağıda verilen lineer olmayan Volterra integral denklemini ele alalım

$$w(x) = \frac{9}{8} + 2x - \frac{1}{4}x^2 - \sinh x - \frac{1}{8}\cosh 2x + \int_0^x (x-t)w^2(t)dt. \tag{4.29}$$

Seri yöntemine göre, $\sinh x$ ve $\cosh 2x$ için Taylor açılımlarını alınarak ve (4.26) ayrıştırma serisini (4.29)'nin her iki tarafında kullanmasıyla

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n = \frac{9}{8} + 2x - \frac{1}{4}x^2 - T(\sinh x) - \frac{1}{8}T(\cosh 2x) + \int_0^x (x-t)\left(\sum_{n=0}^{\infty} r_n t^n\right)^2 dt$$

olur. Dolayısıyla

$$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \cdots = \frac{9}{8} + 2x - \frac{1}{4}x^2 - \left(x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots\right)$$

$$-\frac{1}{8}\left(1+\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^4}{4!}x^4+\cdots\right)+\int_0^x (x-t)\,[r_0+r_1t+r_2t^2 +r_3t^3+\cdots]^2dt$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
r_0+r_1x+r_2x^2+\cdots &= \frac{9}{8}+2x-\frac{1}{4}x^2-\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right)\\
&\quad -\frac{1}{8}\left(1+\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^4}{4!}x^4+\cdots\right)+x\int_0^x [{r_0}^2+2r_1r_0t\\
&\quad +(2r_0r_2+{r_1}^2)t^2+2(r_0r_3+r_1r_2)t^3+\cdots]dt-\int_0^x [{r_0}^2t+2r_1r_0t^2\\
&\quad +(2r_0r_2+{r_1}^2)t^3+2(r_0r_3+r_1r_2)t^4+\cdots]dt\\
&= \frac{9}{8}+2x-\frac{1}{4}x^2-\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right)\\
&\quad -\frac{1}{8}\left(1+\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^4}{4!}x^4+\cdots\right)+({r_0}^2x^2+r_1r_0x^3\\
&\quad +\frac{1}{3}(2r_0r_2+{r_1}^2)x^4+(2r_0r_3+r_1r_2)x^5+\cdots)-[\frac{1}{2}{r_0}^2x^2+\frac{2}{3}r_1r_0x^3\\
&\quad +\frac{1}{4}(2r_0r_2+{r_1}^2)x^4+\frac{2}{5}(r_0r_3+r_1r_2)x^5+\cdots]\\
&= \frac{9}{8}+2x-\frac{1}{4}x^2-\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right)\\
&\quad -\frac{1}{8}\left(1+\frac{2^2}{2!}x^2+\frac{2^4}{4!}x^4+\cdots\right)[\frac{1}{2}{r_0}^2x^2+\frac{1}{3}r_1r_0x^3+\\
&\quad \left(\frac{1}{6}r_0r_2+\frac{1}{12}{r_1}^2\right)x^4+\frac{1}{10}\left(r_0r_3+\frac{1}{10}r_1r_2\right)x^5+\cdots]
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemelerden sonra bu eşitliği

$$\begin{aligned}
r_0+r_1x+r_2x^2+\cdots &= \frac{9}{8}-\frac{1}{8}+x+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}r_0^2\right)x^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}r_1r_0\right)x^3\\
&\quad +\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{6}r_0r_2+\frac{1}{12}{r_1}^2\right)x^4
\end{aligned}$$

$$+\left(-\frac{1}{120}+\frac{1}{10}r_0r_3+\frac{1}{10}r_1r_2\right)x^5+\cdots$$

şeklinde yazabiliriz. Polinomların özdeşliği teoremini kullanırsak

$r_0 = r_1 = 1$

$r_2 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}r_0^2 = 0$

$r_3 = -\frac{1}{6}+\frac{1}{3}r_0r_1 = \frac{1}{3!}$

$r_4 = -\frac{1}{12}+\frac{1}{6}r_0r_2+\frac{1}{12}r_1^2 = 0$

$r_5 = -\frac{1}{120}+\frac{1}{10}r_1r_2+\frac{1}{10}r_0r_3 = \frac{1}{5!}$

$n = 2n$ olduğunda $r_n = 0$

elde ederiz. Bu şekilde elde edilen katsayılar seri açılımında yazıldığında

$$w(x) = 1+\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right)$$

olarak elde edilir. Eğer

$$\sinh x = x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

açılımını kullanırsak kesin çözüme yakınsayan fonksiyon

$$w(x) = 1+\sinh x$$

olarak elde edilir.

4.2.4. Lineer olmayan Volterra integral denklemi için ardışık yaklaşımlar yöntemi

Bu yöntem Fredholm ve Volterra integral denklemlerinin her ikisine de uygulanabilir. Volterra integral denklemi için, integralin işareti altındaki bilinmeyen fonksiyonu, sıfırıncı

yaklaşımı adı verilen $w_0(x)$ gibi bir ilk yaklaşımla değiştirerek integral denkleminin çözümünü bir iterasyon yardımıyla dizi olarak elde eder. Burada $w_0(x)$ için 0,1 veya x olarak alınabilir. Ardışık yaklaşımlar dizisi, $w_0(x)$ herhangi bir reel değerli fonksiyon olmak üzere

$$w_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)P\big(w_{n-1}(t)\big)\,dt, \qquad n \geq 1$$

iterasyonu yardımıyla verilir. Buna göre ilk yaklaşım

$$w_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)P\big(w_0(t)\big)\,dt \tag{4.30}$$

olarak elde edilir.

İkinci yaklaşım $w_2(x)$ benzer şekilde denklem (4.30)'deki $w_0(x)$'in yukarıda elde edilen $w_1(x)$ ile değiştirilmesiyle elde edilebilir. Yani,

$$w_2(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)P\big(w_1(t)\big)\,dt$$

olarak elde edilir.

Bu şekilde ilerleyerek, n-inci yaklaşımı

$$w_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)P\big(w_{n-1}(t)\big)\,dt, \qquad n \geq 1$$

şeklinde elde edilir.
Limit yardımı ile $w(x)$ çözümü

$$w(x) = \lim_{n\to\infty} w_n(x)$$

olarak elde edilir.

Örnek

Aşağıda verilen lineer olmayan Volterra integral denklemini ele alalım

$$w(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \int_0^x (x-t)w^2(t)\,dt.$$

Yukarıdaki gibi tanımlanan yaklaşımdan faydalanalım. Sıfırıncı yaklaşım için $w_0(x) = 1$ olarak alalım.

İlk yaklaşım: $w^2(x)$ de $w_0(x) = 1$ alınır ve $w_1(x)$ birinci yaklaşımı

$$w_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \int_0^x (x-t)w_0^2(t)\,dt$$
$$= 1 + x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6$$

olarak bulunur.

İkinci yaklaşım: $w^2(x)$ de $w_1(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6$ alınır ve $w_2(x)$ ikinci yaklaşımı

$$w_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \int_0^x (x-t)(1 + t^2 - \frac{1}{6}t^4 - \frac{1}{30}t^6)^2\,dt$$
$$= 1 + x^2 + \left(\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^4\right) - \frac{1}{90}x^6 + \cdots$$
$$= 1 + x^2 + -\frac{1}{90}x^6 + \cdots$$

olarak bulunur.

Üçüncü yaklaşım: $w^2(x)$ de $w_2(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{90}x^6 + \cdots$ alınır ve $w_3(x)$ üçüncü yaklaşımı

$$w_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \int_0^x (x-t)(1 + t^2 - \frac{1}{90}t^6 + \cdots)^2\,dt$$
$$= 1 + x^2 + (\frac{1}{90}x^6 - \frac{1}{90}x^6) + \cdots$$

$$= 1 + x^2 + \cdots$$

olarak bulunur. Limit yardımı ile $w(x)$ çözümü

$$w(x) = \lim_{n \to \infty} w_n(x)$$
$$= 1 + x^2$$

olarak elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and nonlinear integral equations*. Berlin: Springer. 639, 35-36.

2. Rahman, M. (2007). *Integral equations and their applications*. UK: WIT press.

3. Abdou, M. (2020). *Elementary methods to solev lineaar integral equation*.

4. Raisinghania, M. D. (2007). *Integral equations and boundary value problems*. S. Chand Publishing.

5. Davis, H. T. (1960). *Introduction to nonlinear differential and integral equations*. US Atomic Energy Commission.

6. Bayraktar. M. (2006). *Fonksiyonel analiz üçüncü baskı*. Ankara: Gazi Kitabevi.

7. Cakar, O. (2002). *Fonksiyonel analize giriş*. Ankara: Ankara Universitesi Doner Sermaye İşletmesi Yayınları.

8. Kim, H. (2017). The Intrinsic Structure and Properties of Laplace-Typed Integral Transforms. *Mathematical Problems in Engineering*, (1), 1762729.

9. Kim, H. (2017). The solution of Laguerre's equation by using G-transform. Mathematical Problems in Engineering. *International Journal of Applied Engineering Research,* 12(24), 16083-16086.



Gazili olmak ayrıcalıktır