
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

DUNKL OPERATÖRLERİNİN KANTOROVICH TİPLİ GENELLEMESİ

Esma GÖKMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KASIM 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Esma GÖKMEN

4/11/2022

DUNKL OPERATÖRLERİNİN KANTOROVICH TİPLİ GENELLEMESİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Esma GÖKMEN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Kasım 2022

ÖZET

Bu tez 4 kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda giriş bölümüne yer verilmiştir. İkinci kısımda yaklaşım teorisinde yer alan bazı teoremler ve temel tanımlar yer almaktadır.. Üçüncü kısımda Dunkl-Appell polinomu yardımıyla kurulan Kantorovich tip integralin oluşturduğu operatörün tanımı ve yaklaşım özellikleri verilmektedir. Birinci ve ikinci momentler hesaplanmış ve yaklaşım hızı incelenmiştir. Dördüncü kısımda sonuç bölümü yer almıştır.

Bilim Kodu	:	20406
Anahtar Kelimeler	:	Dunkl Operatör, Kantorovich tip integral, Yaklaşım hızı, Lipschitz sınıfı
Sayfa Adedi	:	49
Danışman	:	Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ

KANTOROVICH TYPE GENERALIZATION OF THE DUNKL OPERATORS
(M. Sc. Thesis)

Esma GÖKMEN

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
November 2022

ABSTRACT

This thesis consists of 4 parts. In the first part, the introduction part is given. In the second part, some theorems and basic definitions in approximation theory are included. In the third part, the definition and approximation properties of the operator formed by the Kantorovich type integral constructed with the help of Dunkl-Appell polynomial are given. The first and second moments were calculated and the rate of convergence was examined. The fourth part is the conclusion part.

Science Code	:	20406
Keywords	:	Dunkl operators, Kantorovich type integral, Rate of convergence, Lipschitz class
Number of pages	:	49
Supervisor	:	Assoc. Prof. Dr. Gürhan İÇÖZ

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca ders seçimlerim, tez konumum belirlenmesi, veri toplama ve tezin hazırlanması sürecinde benden zamanını, desteğini esirgemeyen her koşulda yanımda olan ve değerli vaktini ayıran saygıdeğer bilim insanı danışmanım Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ ’e, tezimin yazım aşamasında bilgi birikimiyle yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Aytekin B. ÇIBIK’a, maddi manevi her konuda yanımda olan ve bu süreçte beni destekleyen sevgili eşim Doç. Dr. Uğur GÖKMEN’e, eğitim hayatım ve tüm yaşantım boyunca karşılaştığım her türlü zorlukta yanımda olan mutluluklarımı paylaşan desteklerini her zaman hissettiğim güzel ailem ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. TANIMLAR VE TEOREMLER 3

2.1. Lineer Pozitif Operatörler İle İlgili Temel Kavramlar 3

2.2. Korovkin Teoremi 7

2.3. Süreklilik Modülü ve Özellikleri 10

2.4. Önemli Eşitsizlikler, Formül ve Tanımlar 14

2.4.1. Lineer pozitif operatörlerin önemi 15

3. KANTOROVİCH TİP İNTEGRALİN DUNKL-APPELL POLİNOMU YARDIMIYLA OPERATÖRE UYARLANMASI 25

3.1. E_m Operatörünün Oluşturulması 25

3.2. E_m Operatörünün Yaklaşım Özellikleri 31

3.3. E_m Operatörünün Yaklaşım Hızı 41

4. SONUÇ VE ÖNERİLER 45

KAYNAKLAR 47

ÖZGEÇMİŞ 49

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\nu_{\mathbf{n}}(\mathbf{h};\mathbf{x})$	ν operatörünün x noktasındaki değeri
$\mathbf{B_n}(\mathbf{k};\mathbf{w})$	Bernstein operatörü
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfı fonksiyon
$\mathbf{F_m}(\sigma;\mathbf{y})$	Szász operatörünün Dunkl analoğu
γ_μ	Gamma fonksiyonu
$\|\varphi\|$	φ'nin normu
$\|\varphi\|_{\mathbf{C_B^2}(\mathbf{0},\infty)}$	$C_B^2(0,\infty)$ için φ fonksiyonun normu
τ_μ	Dunkl türevi
$\mathbf{T_m}(\mathbf{f};\mathbf{y})$	Kantorovich tip genelleme
$\mathbf{C}[\mathbf{0},\infty)$	$[0,\infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$\psi_{\mathbf{r},\eth}(\wp;\mathbf{c})$	ψ operatörü
$\mathbf{E_m}$	$\mathbf{E_m}$ operatörü
$\nabla_\mathbf{1}$	Birinci moment
$\nabla_\mathbf{2}$	İkinci moment
$\mathbf{C_B}[\mathbf{0},\infty)$	$[0,\infty)$ aralığındaki tüm sınırlı ve sürekli fonksiyon uzayı
$\mathbf{C_B^2}[\mathbf{0},\infty)$	2 kez türevi sürekli olan fonksiyon uzayı
$\omega(\varphi,\delta)$	Süreklilik modülü

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
o.ü.	Olmak üzere
v.b.	ve benzeri

1. GİRİŞ

Tarih boyunca, matematiksel analiz son üç yüz yıldır matematiğin önde gelen dallarından biri olmuştur. 19. yüzyılın sonlarında ortaya çıkan yaklaşımlar teorisi, fonksiyonlar teorisinin en çok kullanım alanına sahip dallarından biri olara değerlendirilebilir. Bu dalın asıl amacı; fonksiyonlar uzayındaki unsurları aşikar bir noktada veya normda bu uzayın bir alt uzayının ya da elemanlarından oluşturulmuş dizilerin limitleri biçiminde ifadelerini bulmaktır denilebilir. Bu durumda bu diziler, bulunan uzayın elemanlarını yaklaştırır ve dolayısıyla yaklaşma problemi çözülür. Tabi ki bu durumda yaklaşan dizinin elemanlarının iyi nitelikleri olması gerekmektedir. Çünkü amaç, ”pürüzlü” elemanlara ”iyi” elemanlarla yaklaşmaktır.

Fonksiyonları yaklaştıran en basit yapılar, lineer pozitif operatörlerin yardımıyla bulunabildiğinden, son altmış yıldır yaklaşımlar teorisinde lineer pozitif operatörler önemli bir yer tutmaktadır.Bu operatörler pozitif fonksiyonları pozitif fonksiyonlara dönüştürmesinden ötürü monoton operatörlerdir. Bu özellik pozitif operatörler için önemli eşitsizlikler ispatlamaya imkan sağlar. Yaklaşımlar teorisi aslında fonksiyonel analizle ilgili bir konu olmakla beraber, bu teorinin asıl amacı, daha çok özellikleri az bilinen bir fonksiyona, özellikleri daha iyi bilinen diğer fonksiyonlarla yaklaşılarak daha basit şekilde hesaplanabilmesine yardımcı olmaktır. Bir çok matematikçi bu alanda çalışmalar yapmıştır. Özellikle bu uygulamalı araştırma konularından bazıları şu şekilde sıralanabilir: mühendislik, plastik cerrahi, bilgisayar destekli geometrik tasarım , diş tedavisinde pürüzsüz protez ve implantların yapımı, sayısal analiz vb. çalışmalar üzerine olmuştur. Ayrıca yaklaşımlar teorisinin büyük ölçekte tabanlar kullanılarak bilimsel hesaplamalarda da çok fonksiyonlu araçlar olduğu ispatlanmıştır. İnşaat mühendislği alanında kullanılan dinamik metodların ve sinyal sınıflandırmalarının belirlenmesi ve kontrolündeki problemlerin çözümünde, termografik görüntüleme metodu ile köprü ve bina gibi inşaların depreme karşı dayanıklılarını ve enerji verimliliklerinin araştırılmasında Kantorovich operatörleri kullanımıyla yaklaşımı son yılların gözde olan yeni uygulamalarındandır.

Bu yüksek lisans tezinde, Kantorovich tipi integralin Dunkl operatörüne uyarlanması gösterilmiştir. Bir yaklaşım sonucu elde etmek için bir dizi işlem verilmiştir. Operatörün Kantorovich tipi integrali olan varyantı verilmiş ve birinci mertebeden süreklilik modülü ile yaklaşım oranı incelenmiştir. Operatörün yaklaşım hızı, süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ile gösterilmiştir.

2. TANIMLAR VE TEOREMLER

Burada, ihtiyaç duyulan bilgiler ve teoremler verilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler İle İlgili Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım (Lineer Uzay)

Υ, boştan farklı bir küme ve P, reel veya karmaşık sayılar kümesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa Υ ye P üzerinde lineer uzay veya vektör uzayı denir [19].

(i) Υ,+ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani
   (a) $\forall x,e \in \Upsilon$ için $x+e \in \Upsilon$ dir.
   (b) $\forall x,e,z \in \Upsilon$ için $x+(e+z)=(x+e)+z \in \Upsilon$ dir.
   (c) $\forall x \in \Upsilon$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta \in \Upsilon$ vardır.
   (d) $\forall x \in \Upsilon$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $-x \in \Upsilon$ vardır.
   (e) $\forall x,e \in \Upsilon$ için $x+e=e+x \in \Upsilon$ dir.

(ii) $x,e \in \Upsilon$ ve $\eta,\rho \in P$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.
   (a) $\eta x \in \Upsilon$ dir.
   (b) $\eta(x+e)=\eta x+\eta e$ dir.
   (c) $(\eta+\rho)x=\eta x+\rho x$ dir.
   (d) $1.x=x.1=x$ dir. Burada $1, P$'nin birim elemanıdır.

2.1.2. Tanım ($C[0,\infty)$ Uzayı)

$[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C[0,\infty)$ ile gösterilmektedir [4].

2.1.3. Tanım ($C_B[0,\infty)$ Uzayı)

$[0,\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı tüm sınırlı ve sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C_B[0,\infty)$ ile gösterilmektedir [5].

2.1.4. Tanım ($C_B^2[0,\infty)$ Uzayı)

$[0,\infty)$ aralığı üzerinde iki kez türevli sürekli olan fonksiyonlar uzayı $C_B^2[0,\infty)$ ile gösterilmektedir ve ifadesi

$$C_B^2[0,\infty) = \left\{ \varphi \in C_B[0,\infty) : \varphi', \varphi'' \in C_B[0,\infty) \right\} \tag{2.1}$$

gibidir [5].

2.1.5. Tanım (Norm)

Υ, bir lineer uzay olsun. $\| \| : \top \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x'deki değeri $\|x\|$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\| \|$ fonksiyonuna Υ üzerinde norm denir.

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

iii) $\|kx\| = |k| \, \|x\|$

iv) $\|x+e\| \leq \|x\| + \|e\|$

Bir lineer uzay üzerinde norm tanımlanmışsa bu uzaya normlu uzay denir [18].

2.1.6. Tanım ($\|\varphi\|_{C_B[0,\infty)}$ Normu)

$C_B[0,\infty)$ uzayı için φ fonksiyonunun normu $\|\varphi\|_{C_B[0,\infty)}$ ile gösterilmektedir [8]. Aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\|\varphi\|_{C_B[0,\infty)} = \sup_{t\in[0,\infty)} |\varphi(t)| . \tag{2.2}$$

2.1.7. Tanım ($\|\varphi\|_{C_B^2[0,\infty)}$ Normu)

$C_B^2[0,\infty)$ uzayı için φ fonksiyonunun normu $\|\varphi\|_{C_B^2[0,\infty)}$ ile gösterilir [8]. Aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\|\varphi\|_{C_B^2[0,\infty)} = \|\varphi\|_{C_B[0,\infty)} + ||\varphi^{'}||_{C_B[0,\infty)} + ||\varphi^{''}||_{C_B[0,\infty)}. \tag{2.3}$$

2.1.8. Tanım (Düzgün Yakınsaklık)

(ς_n), $\Upsilon \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlaırn bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ verildiğinde, her $n_0 \leq n$ ve her bir $x \in \Upsilon$ için $|\varsigma_n(x) - \varsigma(x)| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlandığı en az bir n_0 sayısı varsa, (ς_n) fonksiyon dizisi ς fonksiyonuna Υ üzerinde düzgün yakınsaktır denir [4]. Burada n_0 sayısı sadece ε sayısına bağlıdır. Eğer n_0 sayısı hem ε hem de x sayısına bağlı ise (ς_n) fonksiyon dizisi ς fonksiyonuna Υ üzerinde noktasal yakınsaktır denir.

2.1.9. Tanım (Noktasal Süreklilik)

$A \subset \mathbb{R}$ ve $h : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. f fonksiyonu a noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x-a| < \delta$ ise $|\varsigma(x) - \varsigma(a)| < \varepsilon$ dur [19].

2.1.10. Tanım (Düzgün Süreklilik)

$A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır öyle ki $|x-h| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, h \in A$ için $|\varsigma(x) - \varsigma(h)| < \varepsilon$ dur.

2.1.11. Tanım (Operatör)

S ve U aynı M cismi üzerinde reel değerli fonksiyon uzayları olsun. $\Upsilon : S \to U$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör denir.

2.1.12. Tanım (Lineer Operatör)

S ve U aynı M cismi üzerinde iki lineer uzay ve $\Upsilon : S \to U$ şeklinde tanımlı Υ operatörü olsun. $\forall t, v \in S$ ve $\forall \lambda, \rho \in M$ için $\Upsilon(\lambda t + \rho v) = \lambda \Upsilon(t) + \rho \Upsilon(v)$ eşitliğini sağlıyorsa, Υ operatörüne S den U'ye bir lineer operatör denir [4].

2.1.13. Tanım (Pozitif Operatör)

S ve U iki lineer uzay ve $\Upsilon : S \to U$ lineer operatör olsun. Υ operatörünün x noktasındaki değeri $\Upsilon_n(h;x)$ olarak gösterilir. S uzayından alınan $\forall\, h \geq 0$ fonksiyonu için $\Upsilon_n(h;x) \geq 0$ ise Υ operatörüne pozitif operatör denir.

2.1.14. Tanım (Lineer Pozitif Operatör)

Lineer operatörler uzayı içinde bir alt sınıf olan pozitif operatörler vardır. $S^+ = \{t \in S, t(x) \geq 0\}$ ve $U^+ = \{v \in U, v(e) \geq 0\}$ olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış Υ lineer operatörü S^+ kümesindeki herhangi bir pozitif t fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise Υ operatörüne lineer pozitif operatör denir [18].

2.1.1. Lemma

$\Upsilon : S \to U$ lineer pozitif operatör olsun. $t, v \in S$ olmak üzere her k için $t(k) \leq v(k)$ iken $\Upsilon(t(;x) \leq \Upsilon(v(;x)$ dir ve buna $\top$ lineer operatörünün monotonluk özelliği denir. Ayrıca $\top$'nin monotonluk özelliğinden $|\top(k;x)| \leq \top(|k|;x)$ eşitsizliği sağlanır [19].

2.1.15. Tanım (Lineer Pozitif Operatörlerde Sınırlılık)

$(S, \|.\|_1)$ ve $(U, \|.\|_2)$ normlu uzaylar, $E(\Upsilon) \subset S$ olmak üzere $\Upsilon : E(\Upsilon) \to U$ lineer bir operatör olsun. $\forall x \in E(\Upsilon)$ için $\|\Upsilon_x\|_2 \leq c \|x\|_1$ olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı mevcutsa Υ operatörüne sınırlı lineer operatör denir [4].

2.1.16. Tanım (Lineer Pozitif Operatörlerde Süreklilik)

S ve U normlu uzaylar $E(\Upsilon) \subset S$ olmak üzere $\Upsilon : E(\Upsilon) \to U$ lineer bir operatör olsun. Bu durumda Υ sürekli olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır [4].

2.2. Korovkin Teoremi

$C[a,b]$ uzayı üzerinde tanımlanan bir $(\Upsilon_m)_{m\geq 1}$ pozitif lineer operatör dizisinin bir yaklaşım süreci, yani, $[a,b]$ aralığı üzerinde her $\varsigma \in C[a,b]$ için $(\Upsilon_m)(\varsigma) \rightrightarrows \varsigma$ yakınsamasının $[a,b]$ üzerinde düzgün olup olmadığını gösteren teoremdir.

2.2.1. Teorem

$\varsigma \in C[a,b]$ ve reel eksenin tamamında sınırlı $|\varsigma(x)| < N_\varsigma$ olsun. Eğer $\Upsilon_n(\varsigma;x)$ pozitif ve lineer bir operatör dizisi $[a,b]$ aralığındaki her x için

(i) $\Upsilon_n(1;x) \rightrightarrows 1$

(ii) $\Upsilon_n(t;x) \rightrightarrows x$

(iii) $\Upsilon_n(t^2;x) \rightrightarrows x^2$

koşullarını sağlıyorsa, $[a,b]$ de $\Upsilon_n(\varsigma;x)$, operatörü ς fonksiyonuna düzgün yakınsar [1].

İspat

$\varsigma \in C[a,b]$ olsun. Süreklilik tanımından dolayı

$$|t-x| < \delta \Longrightarrow |\varsigma(t)-\varsigma(x)| < \varepsilon$$

olur. Üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$|\varsigma(t)-\varsigma(x)| \leq |\varsigma(t)| + |\varsigma(x)| \leq 2N_\varsigma$$

gerçeklenir. Diğer yandan

$$|t-x| \geq \delta \Longrightarrow \frac{|t-x|}{\delta} \geq 1$$

olacağından $\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq \frac{|t-x|}{\delta} \geq 1$ gerçeklenir. Ayrıca, sürekli fonksiyon aynı zamanda sınırlı olduğundan

$$|\varsigma(t)-\varsigma(x)| \leq 2N_{\varsigma} \leq 2N_{\varsigma}\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$$|t-x| < \delta \Rightarrow |\varsigma(t)-\varsigma(x)| < \varepsilon$$

ve

$$|t-x| \geq \delta \Rightarrow |\varsigma(t)-\varsigma(x)| \leq 2N_{\varsigma}\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

dir. Böylece her $k,t,x \in [a,b]$ için

$$|\varsigma(t)-\varsigma(x)| \leq \varepsilon + 2N_{\varsigma}\frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. $|t-x| > \delta$ ise $2N_{\varsigma}\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 0$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik yine sağlanır. Eğer (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağlayan (Υ_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n\to\infty} \|\Upsilon_n(\varsigma(t);x)\,\varsigma(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini de sağladığı gösterilirse ispat tamamlanır.

Lineerlikten

$$\begin{aligned}|\Upsilon_n(\varsigma(t);x)-\varsigma(x)| &= |\Upsilon_n(\varsigma(t);x)+\Upsilon_n(\varsigma(x);x)-\Upsilon_n(\varsigma(x);x)-\varsigma(x)| \\ &= |\Upsilon_n((\varsigma(t)-\varsigma(x));x)+\varsigma(x)(\Upsilon_n(1;x)-1)|\end{aligned}$$

dir. Üçgen eşitsizliği uygulandığında

$$|\Upsilon_n(\varsigma(t);x)-t(x)| \leq |\Upsilon_n((\varsigma(t)-\varsigma(x));x)|+|\varsigma(x)||\Upsilon_n(1;x)-1|$$

olur. Diğer yandan lineer pozitif operatörlerin monoton artanlığından yani
$\varsigma(t)-\varsigma(x) \leq |\varsigma(t)-\varsigma(x)|$
özelliğinden dolayı

$$|\Upsilon_n((\varsigma(t)-\varsigma(x));x)| \leq |\Upsilon_n(|\varsigma(t)-\varsigma(x)|;x)|$$

bulunur. Operatörün pozitif olmasından ve $|\varsigma(t)-\varsigma(x)| \geq 0$ eşitsizliğinden dolayı

$$|\Upsilon_n(|\varsigma(k)-\varsigma(x)|;x)| = \Upsilon_n(|\varsigma(k)-\varsigma(x)|;x)$$

dir. O zaman

$$|\Upsilon_n(\varsigma(t);x)-\varsigma(x)| \leq \Upsilon_n(|\varsigma(t)-\varsigma(x)|;x)+|\varsigma(x)||\Upsilon_n(1;x)-1|$$

olduğu ifade edilebilir ve

$$|\Upsilon_n(\varsigma(t);x)-\varsigma(x)| \leq \Upsilon_n(|\varsigma(t)-\varsigma(x)|;x)+N_\varsigma|\Upsilon_n(1;x)-1|$$

yazılabilir. (Υ_n) operatörünün monoton artanlığından

$$|\Upsilon_n(\varsigma(t);x)-\varsigma(x)| \leq \Upsilon_n\left(\varepsilon+2N_\varsigma\frac{(t-x)^2}{\delta^2};x\right)+N_\varsigma|\Upsilon_n(1;x)-1|$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\Upsilon_n\left(\varepsilon+\frac{2N_\varsigma}{\delta^2}(t-x)^2;x\right) &= \Upsilon_n(\varepsilon;x)+\Upsilon_n\left(\frac{2N_\varsigma}{\delta^2}(t-x)^2;x\right)\\ &= \varepsilon\Upsilon_n(1;x)+\frac{2N_\varsigma}{\delta^2}\Upsilon_n\left(t^2-2xt+x^2;x\right)\\ &= \varepsilon(\Upsilon_n(1;x)-1)+\varepsilon+\frac{2N_\varsigma}{\delta^2}\left[(\Upsilon_n\left(t^2;x\right)-x^2)\ +x^2-2x\Upsilon_n(t;x)\right.\\ &\qquad \left.+x^2\Upsilon_n(1;x)-tx^2\right]\end{aligned}$$

$$= \varepsilon(\Upsilon_n(1;x)-1)+\varepsilon+\frac{2N_\varsigma}{\delta^2}\left[(\Upsilon_n\left(t^2;x\right)-x^2)\ -2x(\Upsilon_n(t;x)-x)\right.$$
$$\left.+x^2(\Upsilon_n(1;x)-1)\right]$$

yazılabilir. Buradan

$$|\Upsilon_n(\varsigma(t);x)-\varsigma(x)| \leq \varepsilon(\Upsilon_n(1;x)-1)+\varepsilon+N_\varsigma|(\Upsilon_n(1;x)-1)|$$
$$+\frac{2N_\varsigma}{\delta^2}\left[(\Upsilon_n\left(t^2;x\right)-x^2)\ -2x(\Upsilon_n(t;x)-x)+x^2(\Upsilon_n(1;x)-1)\right]$$

bulunur. (i), (ii) ve (iii) koşullarının kullanılmasıyla $|\Upsilon_n(\varsigma(t);x)-\varsigma(x)| \leq \varepsilon$ olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\max_{a\leq x\leq b}|\Upsilon_n(\varsigma(t);x)-\varsigma(x)|=0$$

olur ve istenilen bulunur. Verilen operatörün sadece 1, t ve t^2 ifadelerinin 1, x ve x^2 ye düzgün yakınsaması, sonlu aralıkta sürekli olan bütün fonksiyonların bu operatör yardımıyla yakınsamasını söylememiz için yeterlidir.

Korovkin teoreminde $\varsigma_i(t)=t^i, i=0,1,2$ fonksiyonları Korovkin test fonksiyonları olarak ifade edilir.

2.3. Süreklilik Modülü ve Özellikleri

Yaklaşım teorisinde, lineer pozitif operatörün sürekli bir fonksiyona yakınsaması kadar önemli olan bir diğer husussa yakınsama hızıdır. Yakınsama hızını bulmak için kullanılan önemli bir metot da süreklilik modülüdür.

2.3.17. Tanım (Süreklilik Modülü)

ς, $[a,b]$ aralığında tanımlı, sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. $t,v\in[a,b]$ olmak üzere $|t-v|\leq\delta$ şartını sağlayan keyfi bir $\delta>0$ için $|\varsigma(t)-\varsigma(v)|$ değerlerinin en küçük üst

sınırına ς fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında süreklilik modülü denir.

$$\omega(\varsigma;\delta) = \sup_{|t-v|\leq\delta} |\varsigma(t)-\varsigma(v)|$$

şeklinde tanımlanır. $\omega(\varsigma;\delta)$, değişkenler farkının en fazla δ olması durumunda iki fonksiyon değerinin en fazla ne kadar fark edeceğini ifade eder. ω, δ'nın bir fonksiyonudur ve $\delta > 0$ için $\omega(\varsigma;\delta)$ negatif olmayan bir fonksiyondur. Süreklilik modülü fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır.

2.3.2. Lemma

ω fonksiyonu monoton artandır. Yani, $0 < \delta_1 \leq \delta_2$ için $\omega(\varsigma;\delta_1) \leq \omega(\varsigma;\delta_2)$ dir.

İspat

$0 < \delta_1 \leq \delta_2$ olsun. O halde $|t-v| \leq \delta_2$ koşulunu sağlayan (t,v) sayı çiftlerinin kümesi $|t-v| \leq \delta_1$ koşulunu sağlayan sayı çiftlerinin kümesinden daha kapsamlıdır. Kümelerdeki supremum kavramı düşünüldüğünde süreklilik modülünün tanımından dolayı $\Lambda(\varsigma;\delta_1) \leq \Lambda(\varsigma;\delta_2)$ yazılabilmektedir.

2.3.3. Lemma

$t \in \mathbb{N}$ için $\omega(\varsigma;k\delta) \leq k\omega(\varsigma;\delta)$ dir.

İspat

$\omega(\varsigma;k\delta) = \sup_{\substack{|t-v|\leq t\delta \\ k,v\in[a,b]}} |\varsigma(t)-\varsigma(v)|$ eşitliğinde $t = v+kp$ alındığında, $k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\omega(\varsigma;k\delta) = \sup_{\substack{|\varsigma|\leq\delta \\ t,v\in[a,b]}} |\varsigma(v+kp)-\varsigma(v)|$$

$$= \sup_{\substack{|\varsigma|\leq\delta \\ t,v\in[a,b]}} |\varsigma(v+kp)-\varsigma(v+(k-v)p)+\varsigma(v+(k-2)p)-\ldots+\varsigma(v+p)-\varsigma(v)|$$

$$= \sup_{\substack{|\varsigma|\leq\delta \\ t,v\in[a,b]}} \left| \sum_{k=v}^{t} \varsigma(v+kp)-\varsigma(v+(k-v)p) \right|$$

olur. O halde

$$\omega(\varsigma;k\delta) \leq \sum_{k=1}^{t} \sup_{\substack{|\varsigma|\leq\delta \\ t,v\in[a,b]}} |\varsigma(v+kp)-\varsigma(v+(k-v)p)|$$

bulunur. Yukarıdaki toplamın içindeki ifade süreklilik modülü olması ile toplananların sayısı k tane olmasından

$$\omega(\varsigma;k\omega) \leq k\omega(\varsigma;\delta)$$

eşitsizliği bulunur.

2.3.4. Lemma

ς fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(h;\delta) = 0$$

olur.

İspat

ς fonksiyonu sürekli olduğundan, süreklilik tanımından dolayı her $\varepsilon > 0$ için bir $\mu > 0$ vardır öyle ki $|t-v| < \mu$ olduğunda $|\varsigma(t)-\varsigma(v)| < \varepsilon$ dır. Süreklilik modülünde $\delta < \mu$ alındığında $\omega(\varsigma;\delta) < \varepsilon$ dır. Yani

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\varsigma;\delta) = 0$$

olur.

2.3.5. Lemma

$\kappa > 0$ reel sayısı için

$\omega(\varsigma;\kappa\delta) \leq (1+\kappa)\omega(\varsigma;\delta)$

olur .

İspat

t, κ nın tam kısmı olsun. O halde $t \leq \kappa < t+1$ olur. ω süreklilik modülünün monotonluk özelliğinden dolayı ve Lemma 2.3.3 den

$\omega(\varsigma;\kappa\delta) \leq \omega(\varsigma;(t+v)\delta)$

$\omega(\varsigma;(t+1)\delta) \leq (t+1)\omega(\varsigma;\delta) \leq (\kappa+1)\omega(\varsigma;\delta)$

olur. O halde

$\omega(\varsigma;\kappa\delta) < (\kappa+1)\omega(\varsigma;\delta)$

olur. İspat bitmiş olur.

2.3.6. Lemma

ς fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlı ise, her $t,v \in [a,b]$ için

$|\varsigma(t)-\varsigma(v)| \leq \left(1+\frac{|t-v|}{\delta}\right)\omega(\varsigma;\delta)$

dır .

İspat

Süreklilik modülünün tanımı ve Lemma 2.3.5 den

$$|\varsigma(t)-\varsigma(x)| \leq \omega\left(\varsigma; \tfrac{|t-v|}{\delta}\delta\right)$$

$$\leq \left(1+\tfrac{|t-v|}{\delta}\right)\omega(\varsigma;\delta)$$

elde edilir.

2.4. Önemli Eşitsizlikler, Formül ve Tanımlar

2.4.2. Teorem (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$t=(t_n)$ ve $v=(v_n)$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}|t_n v_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|t_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|v_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğine Cauchy-Schwarz eşitsizliği denir [4].

2.4.3. Teorem (Hölder Eşitsizliği)

$p,q>0$ reel sayıları ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. $(f_i)=(f_1,f_2,\ldots)$, $(g_j)=(g_1,g_2,\ldots)$ şeklinde diziler olsun. O halde

$$\sum_{j=1}^{\infty}|f_j g_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|g_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir.

2.4.1. Lineer pozitif operatörlerin önemi

Alman Matematikçi Weierstrass, 1895 yılında sonlu aralıkta tanımlanan her fonksiyon sürekli ise, bu sonlu aralıktaki fonksiyona polinomsal olarak düzgün yakınsayan bir polinom fonksiyonun varlığını ispatlamıştır. Rus Matematikçi S. N. Bernstein bu polinomu 1912 yılında $x \in [0,1]$ için

$$B_n(k;w) = \sum_{q=0}^{n} k\left(\frac{q}{n}\right)\binom{n}{q} w^q (1-w)^{n-q}$$

olarak ispatlamıştır.

Bernstein'ın bu ispatından önce bazı ifade ve ispatlar verilsin.

2.4.7. Lemma

Bernstein operatörleri için

$B_n(1;w) = 1$
$B_n(k;w) = w$
$B_n(k^2;w) = w^2 + \frac{w(1-w)}{n}$

tanımları verilebilir.

İspat

Binom açılımı

$$(a+b)^n = \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} a^q b^{n-q}$$

şeklinde ifade edilir. Bu açılımda $a = w$ ve $b = 1-w$ alınırsa $B_n(1;w) = 1$ olarak bulunur.

$B_n(k;w)$ için;

$$\begin{aligned} B_n(k;w) &= \sum_{q=0}^{n} \left(\frac{q}{n}\right) \binom{n}{q} w^q (1-w)^{n-q} \\ &= \sum_{q=1}^{n} \left(\frac{q}{n}\right) \frac{n!}{(n-q)q!} w^q (1-w)^{n-q} \\ &= \sum_{q=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-q)!(q-1)!} w^p (1-w)^{n-q} \\ &= w \sum_{q=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-q-1)!(q)!} w^q (1-w)^{n-q-1} \\ &= w \sum_{q=0}^{n-1} \binom{n-1}{q} w^q (1-w)^{n-q-1} \end{aligned}$$

bulunur. Binom açılımından ötürü $B_n(k;w) = w$ olur.

$B_n(k^2;w)$ için

$$\begin{aligned} B_n(k^2;w) &= \sum_{q=0}^{n} \left(\frac{q}{n}\right)^2 \binom{n}{q} w^q (1-w)^{n-q} \\ &= \sum_{q=0}^{n} \frac{q^2}{n^2} \binom{n}{q} w^q (1-w)^{n-q} \\ &= \sum_{q=1}^{n} \left(\frac{q}{n}\right) \frac{(n-1)!}{(n-q)!(q-1)!} w^q (1-w)^{n-q} \end{aligned}$$

olur. $\frac{q}{n} = \frac{q-1+1}{n} = \frac{q-1}{n} + \frac{1}{n}$ olduğundan son eşitlikte

$$B_n(k^2;w) = \sum_{q=1}^{n} \left(\frac{q-1}{n} + \frac{1}{n}\right) \frac{(n-1)!}{(n-q)!(q-1)!} w^q (1-w)^{n-q}$$

$$= \sum_{q=2}^{n} \left(\frac{q-1}{n} + \frac{1}{n}\right) \frac{(n-1)!}{(n-q)!(q-1)(q-2)!} w^q (1-w)^{n-q}$$

$$= \sum_{q=0}^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right) \frac{(n-1)!}{(n-q-2)!(q)!} w^{q+2}(1-w)^{n-q-2}$$

$$= w^2(\frac{n-1}{n}) \sum_{q=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-q-2)!(q)!} w^q(1-w)^{n-q-2}$$

yazılır Binom açılımı kullanılıp gerekli işlemler ve sadeleştirmeler yapıldığında

$$B_n(k^2;w) = w^2 + \frac{w(1-w)}{n}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

2.4.18. Tanım (Kantorovich Operatörü)

Bernstein operatörlerinin Kantorovich tipli integral genellemesi, 1930 yılında Kantorovich tarafından verilmiştir[9]. $L_1[(0,1)]$ için bu genelleme, $x \in [0;1]$ $m \geq m_0$ *ve* m, $m_0 \in N$ için iken,

$$Y_m h(y) = (m+1) \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} y^k (1-y)^{m-k} \int_{\frac{k}{m+1}}^{\frac{k+1}{m+1}} h(t)\, dt$$

şeklinde tanımlanmıştır[13].
Burada, yukarıdaki operatörün bazı yakınsaklık değerlerine bakılacaktır. Bu operatör için gerekli bazı hesaplar aşağıda verilecektir.

2.4.8. Lemma

$d_i(s) = s^i$, $i = 0,1,2$ ve $s \in [0,1]$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.

(i) $(d_0;s) = 1$ için

$Y_m(d_0;s) = 1$

gerçeklenir.

(ii) $(d_1;s)=s$ için

$$Y_m(d_1;s)=\frac{1}{2(m+1)}+\frac{m}{m+1}s$$

gerçeklenir.

(iii) $(d_2;s)=s^2$ için

$$Y_m(d_2;s)=\frac{1}{3(m+1)^2}+\frac{2m}{(m+1)^2}s+\frac{m(m-1)}{(m+1)^2}s^2$$

gerçeklenir.

(iv)

$$Y_m(d_3;s)=\frac{s(1-3s+3mx+2s^2-3ms^2+m^2s^2}{m^2}$$

İspat

(i) $Y_m(d_0;s)=1$ eşitliğini bulmak için operatörde $h(t)$ yerine 1 yazılırsa,

$$\begin{aligned} Y_m(d_0;s) &= (m+1)\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}s^k(1-s)^{m-k}\left[\int_{\frac{k}{m+1}}^{\frac{k+1}{m+1}}dt\right] \\ &= Y_m(1;s)=1 \end{aligned}$$

yazılır. İstenilen bulunmuş olur.

(ii) $Y_m(d_1;s)=\frac{1}{2(m+1)}+\frac{m}{m+1}s$ eşitliğini bulmak için operatörde $h(t)$ yerine t yazılırsa

$$\begin{aligned} Y_m(d_1;s) &= (m+1)\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}s^k(1-s)^{m-k}\int_{\frac{k}{m+1}}^{\frac{k+1}{m+1}}tdt \\ &= \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}s^k(1-s)^{m-k}\frac{m+1}{2}\left[\frac{(k+1)^2-k^2}{(m+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2(m+1)}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}s^k(1-s)^{m-k}2\,(k+1) \\ &= \frac{m}{m+1}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}s^k(1-s)^{m-k}\frac{k}{m}+\frac{1}{2(m+1)}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}s^k(1-s)^{m-k} \end{aligned}$$

$$= \frac{m}{m+1}s+\frac{1}{2(m+1)}$$

(iii) $Y_m(d_2;s)=\frac{1}{3(m+1)^2}+\frac{2m}{(m+1)^2}s+\frac{m(m-1)}{(m+1)^2}s^2$ eşitliğini bulmak için operatörde $h(t)$ yerine t^2 yazılırsa

$$\begin{aligned}
Y_m(d_2;s) &= (m+1)\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}s^k(1-s)^{m-k}\int_{\frac{k}{m+1}}^{\frac{k+1}{m+1}}t^2dt \\
&= \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}s^k(1-s)^{m-k}\frac{m+1}{3}\left[\frac{(k+1)^3-k^3}{(m+1)^3}\right] \\
&= \frac{m^2}{(m+1)^2}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}s^k(1-s)^{m-k}\frac{k^2}{m^2}+\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}s^k(1-s)^{m-k}\frac{k}{m} \\
&\quad +\frac{1}{3m^2}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}s^k(1-s)^{m-k} \\
&= \frac{m^2}{(m+1)^2}\left[s^2+\frac{s(1-s)}{m}\right]+\frac{m}{(m+1)^2}s+\frac{1}{3(m+1)^2} \\
&= s^2\left[\frac{m^2}{(m+1)^2}-\frac{m}{(m+1)^2}\right]+s\left[\frac{m}{(m+1)^2}+\frac{m}{(m+1)^2}\right]+\frac{1}{3(m+1)^2} \\
&= \frac{m(m-1)}{(m+1)^2}s^2+\frac{2m}{(m+1)^2}s+\frac{1}{3(m+1)^2}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

2.4.9. Lemma

$s\in[0,1]$ olsun. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $F^i(s)=(t-s)^i i=1,2,...$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.

(i) $F^1(s)=(t-s)^1$ olmak üzere,

$$Y_m(F_1;s)=\frac{1}{2(m+1)}-\frac{s}{(m+1)}$$

şeklindedir.

(ii) $F^2(s) = (t-s)^2$

$$Y_m(F_s^2; s) = \frac{1}{3(m+1)^2} - \frac{(1-m)}{(m+1)^2}s + \frac{(1-m)}{(m+1)^2}s^2$$

şeklindedir.

İspat

(i) Operatörde $F^1(s) = (t-s)^1$ yazılır ve Lemma 2.4.8 kullanılırsa

$$\begin{aligned} Y_m(t-s;s) &= \sum_{k=1}^{m} g_{m,k}(m+1) \int_{\frac{k}{m+1}}^{\frac{k+1}{m+1}} (t-s)dt \\ &= \sum_{k=1}^{m} g_{m,k}(m+1) \int_{\frac{k}{m+1}}^{\frac{k+1}{m+1}} tdt - \sum_{k=1}^{m} g_{m,k}(m+1) \int_{\frac{k}{m+1}}^{\frac{k+1}{m+1}} sdt \\ &= \frac{1}{2(m+1)} - \frac{s}{(m+1)} \end{aligned}$$

bulunur.

(ii) Şimdi $Y_m(F_s^2; s) = \frac{1}{3(m+1)^2} - \frac{(1-m)}{(m+1)^2}s + \frac{(1-m)}{(m+1)^2}s^2$ eşitliğinin doğruluğu gösterilsin.

$$Y_m((t-s)^2; s) = Y_m(t^2 - 2ts + s^2; s)$$

olarak düzenlenip lineerlik özelliği kıllanılırsa, Lemma 2.4.8. den

$$\begin{aligned} Y_m((t-s)^2;s) &= Y_m(t^2;s) - 2sY_m(t;s) + s^2Y_m(1;s) \\ &= \frac{1}{3(m+1)^2} + \frac{2m}{(m+1)^2}s + \frac{m(m-1)}{(m+1)^2}s^2 - 2s\left[\frac{1}{2(m+1)} + \frac{m}{m+1}s\right] + s^2 \\ &= \frac{1}{3(m+1)^2} + s\left(\frac{2m}{(m+1)^2} - \frac{1}{m+1}\right) + s^2\left(\frac{m(m-1)}{(m+1)^2} - \frac{2m}{m+1} + 1\right) \\ &= \frac{1}{3(m+1)^2} - \frac{(1-m)}{(m+1)^2}s + \frac{(1-m)}{(m+1)^2}s^2 \end{aligned}$$

bulunur, böylece ispat tamamlanmış olur.

2.4.19. Tanım

$[a,b] \in R$ olmak üzere $[a,b]$ aralığında tanımlı bir s fonksiyonu olsun $\forall k,w \in [a,b]$ $M > 0$ ve $0 < \gamma \leq 1$ için

$$|s(k) - s(w)| \leq M\,|k-w|^{\gamma}$$

eşitsizliğini gerçekleyen s fonksiyonlarının sınıfına Lipschitz sınıfı denir ve $Lip_{M\gamma}$ biçiminde ifade edilir. Burada M , Lipschitz sabiti olarak bilinir.

2.4.10. Lemma

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri gerçeklemektedir.

1. $\omega(g;\delta) \geq 0$
2. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(g;\delta_1) \leq \omega(g;\delta_2)$
3. $u \in \mathbb{N}$ $\omega(g;u\delta) \leq u\omega(g;\delta)$
4. $\gamma \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(g;\gamma\delta) \leq (1+\gamma)\omega(g;\delta)$
5. $\lim_{\delta \to 0} \omega(g;\delta) = 0$
6. $|g(t) - g(s)| \leq \omega(g;|t-s|)$
7. $|g(t) - g(s)| \leq \frac{1+|t-s|}{\delta}\omega(g;\delta)$

İspat

1. Süreklilik modülü, mutlak değerin supremumu olduğundan $\omega(g;\delta) \geq 0$ olduğu aşikardır.

2. $\delta_1 \leq \delta_2$ için $|t-s| \leq \delta_1$ kümesi $|t-s| \leq \delta_2$ tarafından kapsanmaktadır. O yüzden supremum özelliğinden $\omega(g;\delta_1) \leq \omega(g;\delta_2)$ sağlanır.

3. Süreklilik modülünün tanımından ötürü

$\omega(g;u\delta) = \sup_{\substack{s,t\in[a,b] \\ |t-s|\leq u\delta}} |g(t)-g(s)|$ olabilir.

$|t-s| \leq u\delta \Rightarrow s-u\delta \leq t \leq s+u\delta$

ve $t = x+sh$ alınırsa

$$\begin{aligned} s-u\delta &\leq s+uh \leq s+u\delta \\ &\Rightarrow -u\delta \leq uh \leq u\delta \\ &\Rightarrow -\delta \leq h \leq \delta \\ &\Rightarrow |h| \leq \delta \end{aligned}$$

$\omega(g;u\delta) = \sup_{\substack{s,t\in[a,b] \\ |h|\leq\delta}} |g(s+uh)-g(s)|$

biçiminde bulunur. Öbür yandan

$$\sup_{\substack{s,t\in[a,b] \\ |h|\leq\delta}} |g(s+uh)-g(s)| = \sup_{\substack{s,t\in[a,b] \\ |h|\leq\delta}} \left| \sum_{k=0}^{u-1} [g(s+(t+1)h)-g(s+th)] \right|$$

olup, sağ tarafa üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{s,t\in[a,b] \\ |h|\leq\delta}} |g(s+uh)-g(s)| &\leq \sup_{\substack{s,t\in[a,b] \\ |h|\leq\delta}} \left| \sum_{k=0}^{u-1} [g(s+(t+1)h)-g(s+th)] \right| \\ &\leq \omega(g;\delta)+\ldots+\omega(g;\delta) \\ &\leq u\omega(g;\delta) \end{aligned}$$

bulunur.

4. $\gamma \in \mathbb{R}^+$ için $[|\gamma|]$ tam değer fonksiyonu olmak üzere $[|\gamma|] \leq \gamma \leq [|\gamma|]+1$ eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizlikten kaynaklı ve 2. özellikten dolayı $\omega(g;u\delta)$ 'nın azalmayan fonksiyon olmasından kaynaklı

$\omega(g;\gamma\delta) \leq \omega(g;([|\gamma|]+1)\delta)$

eşitsizliği yazılır. $[|\gamma|]$ pozitif bir sayı olmasından ötürü üstteki eşitsizliğe 3. özellik uygulanırsa

$$\omega(g;([|\gamma|]+1)\delta \leq ([|\gamma|]+1)\omega(g;\delta)$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca $\gamma \in \mathbb{R}^+$ için $[|\gamma|]+1 \leq \gamma+1$ yazılabildiği bilindiğinden

$$\omega(g;([|\gamma|]+1)\delta \leq (\gamma+1)\omega(g;\delta)$$

dır. O halde $\omega(g;\gamma\delta) \leq (1+\gamma)\omega(g;\delta)$ bulunur ki ispat tamamlanmış olur.

5. $|t-s| \leq \delta$ eşitsiliğinde $\delta \geq 0$ ise $t \to s$ olur. g fonksiyonunun sürekliliğinden ve süreklilik tanımından $t \to s$ olmasından kaynaklı $|g(t)-g(s)| \to 0$ olmasından dolayı ispat aşikardır.

6. $\omega(g;\gamma\delta)$ da $\delta = |t-s|$ denirse

$$\omega(g;|t-s|) = \sup_{s,t\in[a,b]} |g(t)-g(s)|$$

olur böylece $|g(t)-g(s)|$ 'lerin supremumu $\omega(g;|t-s|)$ olduğundan $|g(t)-g(s)|$, $\omega(g;|t-s|)$ 'dan küçük olur.

7. 6.özellik kullanılırsa

$$|g(t)-g(s)| \leq \omega(g;|t-s|) = \frac{1+|t-s|}{\delta}\omega(g;\delta)$$

olur. O halde bu eşitsilikte 4.özellikten de yararlanılırsa

$$|g(t)-g(s)| \leq \frac{1+|t-s|}{\delta}\omega(g;\delta)$$

dır. İspat tamamlanmış olur.

3. KANTOROVİCH TİP İNTEGRALİN DUNKL-APPELL POLİNOMU YARDIMIYLA OPERATÖRE UYARLANMASI

3.1. E_m Operatörünün Oluşturulması

Bazı ünlü matematikçiler yaklaşım teorisiyle ilgili iyi bilinen operatörler tanımlamışlar ve önemli teoremler vermişlerdir [2,5,7,16,17,18].

Son yıllarda bazı matematikçiler tarafından Gamma fonksiyonu dahil olmak üzere operatörlerin genelleştirilmesiyle ilgili bir çok sonuç elde edilmiştir.[1,3,9]

Sucu[24] [19,25,26,27] Szász operatörünün Dunkl analoğunu

$$F_m(\sigma;y)=\frac{1}{e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(my)^j}{\gamma_\mu(j)}\sigma\left(\frac{j+2\mu\theta_j}{m}\right)$$

gibi tanımlamıştır [12,19,23,27].

Burada $\mu>0,\ m\in\mathbb{N},\ y\geq 0$ ve $\sigma\in C[0,\infty)$ olsun. Yukarıda, toplam ile verilen fonksiyon yakınsadığında $e_\mu(y)$ 'nin tanımı[22]

$$e_\mu(y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{\gamma_\mu(j)}$$

şeklinde gösterilir. Burada, $k\in\mathbb{N}$ ve $\mu\geq -1/2$ olmak üzere γ_μ Gamma fonksiyonu

$$\gamma_\mu(2j)=\frac{2^{2j}j!\Gamma(j+\mu+1/2)}{\Gamma(\mu+1/2)}$$

ve

$$\gamma_\mu(2j+1)=\frac{2^{2j+1}j!\Gamma(j+\mu+3/2)}{\Gamma(\mu+1/2)}$$

şeklindedir. Burada, $m\in\theta_j=\{0;j\in\{0,2,4,...,2n,...\}1;j\in\{1,3,...,2n+1,...\}$.

şeklinde tanımlanır. Ayrıca Sucu [24], F_m operatörüyle ilgili özdeşlikleri aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

$$\begin{aligned} F_m(1;y) &= 1, \\ F_m(t;y) &= y, \\ F_m\left(t^2;y\right) &= y^2+\left(1+2\mu\frac{e_\mu(-my)}{e_\mu(my)}\right)\frac{y}{m}. \end{aligned}$$

F_m operatörlerinin Kantorovich tipi genellemesi T_m operatörleri İçöz G. ,Çekim B. [9] tarafından

$$T_m(f;y)=\frac{m}{e_\mu(my)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(my)^k}{\gamma_\mu(k)}\int_{\frac{k+2\mu\theta_k}{m}}^{\frac{k+1+2\mu\theta_k}{m}} f(t)\,dt.$$

şeklinde tanımlanmıştır. T_m operatörü

$$\begin{aligned} T_m(1;y) &= 1, \\ T_m(t;y) &= y+\frac{1}{2m}, \\ T_m\left(t^2;y\right) &= y^2+2\left(1+\mu\frac{e_\mu(-my)}{e_\mu(my)}\right)\frac{y}{m}+\frac{1}{3m^2} \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar. Gamma fonksiyonu

$$\gamma_\mu(j+1)=\left(j+1+2\mu\theta_{j+1}\right)\gamma_\mu(j),\ j\in\mathbb{N}_0$$

şeklinde verilen rekürans bağıntısını gerçekler.

τ_μ Dunkl türevi [4] aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\left(\tau_\mu\upsilon\right)(y)=\tau_\mu\upsilon(y)=\frac{d\upsilon}{dy}+\mu\frac{\upsilon(y)-\upsilon(-y)}{y},$$

burada μ reel sayısı $\mu > -\frac{1}{2}$ şeklindedir ve υ karmaşık türevli fonksiyondur. Bu işlem ikinci türev için tekrarlanırsa,

$$(\tau_\mu^2 \upsilon)(y) = \tau_\mu^2 \upsilon(y) = \frac{d^2\upsilon}{dy^2} + \frac{2M}{y}\frac{d\upsilon}{dy}\mu\frac{\upsilon(y)-\upsilon(-y)}{y^2}$$

elde edilir.

Ben Cheikh ve Gaied Dunkl-Appell [4] polinomları kümesini tanımlayanlardandır. $j \in \mathbb{N}_0$ için (p_j) Dunkl-Appell polinomu

$$\tau_\mu p_{j+1}(y) = \frac{\gamma_\mu(j+1)}{\gamma_\mu(j)} p_j(y)$$

olarak tanımlanır [11]. (p_j) polinomu

$$\frac{b_{k-j}}{P(1)} > 0$$

olmak üzere

$$p_j(y) = \sum_j^k \binom{k}{j}_\mu b_{k-j} y^j, (b_0 \neq 0),$$

(p_j) polinomunun genelleştirilmiş fonksiyonu

$$P(t)\, e_\mu(yt) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(y)}{\gamma_\mu(j)} t^j \tag{3.1}$$

olarak ifade edilir. Burada,

$$P(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{\gamma_\mu(j)} t^j,\ (a_j \neq 0)$$

şeklindedir.

Sucu [24], 2020 yılında Dunk-Appell polinomunun S_m operatörü ile yeni bir genelleştirmesini aşağıdaki gibi tanımlamıştır. $\{S_m\}$ tanımlanan operatörlerin bir dizisi

$$S_m(\varphi;y)=\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\varphi\left(\frac{j+2\mu\theta_j}{m}\right)$$

olsun. Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$S_m(1;y) = 1, \tag{3.2}$$

$$S_m(\psi;y) = y+\frac{\left(e_\mu(my)-e_\mu(-my)\right)P'(1)+e_\mu(-my)\left(\tau_\mu P\right)(1)}{P(1)\,me_\mu(my)} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}S_m\left(\psi^2;y\right) &= y^2+\frac{e_\mu(my)\left(2P'(1)+P(1)\right)+2\mu P(-1)\,e_\mu(-my)}{P(1)\,me_\mu(my)}y\\ &\quad+\frac{\left(\tau_\mu P\right)(1)\,e_\mu(-my)}{P(1)\,m^2e_\mu(my)}\\ &\quad+\frac{\left[2P''(1)-\left(\tau_\mu P\right)'-\left(\tau_\mu P'\right)(1)\right]}{P(1)\,m^2e_\mu(my)}\left(e_\mu(my)-e_\mu(-my)\right)\\ &\quad+\frac{P(1)-2\mu P'(-1)}{P(1)\,m^2e_\mu(my)}\left(e_\mu(my)-e_\mu(-my)\right)\\ &\quad+\frac{\left(\tau_\mu^2P\right)(1)+2\mu\left(\tau_\mu P\right)(-1)}{P(1)\,m^2}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Bu lemmanın ispatı yapılacak olursa $S_m(1;y)=1$ için,

$$\begin{aligned}S_m(1;y) &= \frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\varphi\left(\frac{j+2\mu\theta_j}{m}\right)\\ &= \frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}1\\ &= \frac{e_\mu(my)}{e_\mu(my)}\\ &= 1\end{aligned}$$

(3.2) nin ispatı oldukça basittir, çünkü (3.1) 'de y yerine my ve t yerine 1 yazılırsa

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)} t = P(1)\, e_\mu(my)$$

elde eilir ki bu eşitlik operatörde yerine yazılırsa (3.2) elde eilir. (3.3) eşitliğini elde etmek için Dunkl operatörü ile verilen denklemin her iki tarafına uygulanırsa

$$\begin{aligned} \tau_\mu\left(t^j\right) &: = \tau_{\mu,t}\left(t^j\right) = \frac{\gamma_\mu(j)}{\gamma_\mu(j-1)} t^{j-1} \\ \tau_\mu\left(e_\mu(yt)\right) &: = \tau_{\mu,t}\left(e_\mu(yt)\right) = y e_\mu(yt) \end{aligned}$$

$$\left(\tau_\mu(\upsilon)\right)(t) = \upsilon(t)\,\tau_\mu(t) + (-t)\,\tau_\mu \upsilon(t) + \upsilon'(t)\,((t)-(-t))$$

bulunur. Bu eşitlikler (2)'de yerine konulursa

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(y)}{\gamma_\mu(j)} \left(j + 2\mu\theta_j\right) t^{j-1} &= yP(t)\, e_\mu(yt) + e_\mu(-yt)\left(\tau_\mu P\right)(t) \\ &\quad + P'(t)\left[e_\mu(yt) - e_\mu(-yt)\right]. \end{aligned}$$

olduğu açıkça görülmektedir.

E_m operatörü Nasiruzzaman'ın tanımladığı operatördeki [20], 2020 yılındaki çalışmasından esinlenerek kurulmuştur [21] fakat bu operatörde, S_m operatörünün Dunk türevi yardımıyla yeni bir genelleştirilmesi gösterilmektedir. Nasiruzzaman[21] 2020 yılındaki çalışmasında klasik türev kullanmışken bu operatörde daha geniş ve doğru bir çalışma yapılmıştır[26]. Nasiruzzaman [21], S_m operatörlerin Kantorovich tipli genellemesini vermiştir. $\wp \in C_\Phi[0,\infty) = \left\{\wp \in C[0,\infty) : \wp(t) = O(t^\Phi)\right\}$ $t \to \infty$ olsun. O zaman her $c \in [0,\infty)$ için $\Phi > r$, $r \in \mathbb{N}$ $G(1) \neq 0$ ve $\eth \geq 0$ iken

$$\Psi_{r,\eth},(\wp;c)=\frac{r}{G(1)\,e_{\eth}(rc)}\sum_{a=0}^{\infty}{}_{a}(rc)\int_{\frac{a+2\eth\theta_a}{r}}^{\frac{a+1+2\eth\theta_a}{r}}\wp(t)\,dt$$

operatör tanımlanır.

3.1.1. Lemma

i=0,1,2,3 için $\gamma_i=t^i$ test fonksiyonu olsun. $\Psi_{r,\eth}(\wp;c)$ için,

$$\begin{aligned}
\Psi_{r,\eth}(\gamma_0;c) &= 1,\\
\Psi_{r,\eth}(\gamma_1;c) &= c+\frac{1}{2r}\left(2\frac{G'(1)}{G(1)}+4\eth+1\right),\\
\Psi_{r,\eth}(\gamma_2;c) &= c^2+\frac{1}{r}\left(2\frac{G'(1)}{G(1)}+4\eth+2\right)c\\
&\quad+\frac{1}{3r^2}\cdot\left(3\frac{G''(1)}{G(1)}+6(1+2\eth)\frac{G'(1)}{G(1)}+12\eth^2+6\eth+1\right),
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Şimdi S_m operatörünün yeni bir Kantorovich tip genelleştirilmesi verilecektir [12,13]. Bunun için $f\in C_{\beth}[0,\infty)=\{f\in C[0,\infty):f(\beth)=O(\lambda^{\beth})\}$, $\beth\to\infty$ olsun. O zaman her $y\in[0,\infty)$ $\beth>m$, $m\in\mathbb{N}$ $P(1)\neq 0$ ve $\mu>0$ için aşağıdaki operatör tanımlanır.

$$E_m(\varphi;y)=\frac{m}{P(1)\,e_{\mu}(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_{\mu}(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}\varphi(t)\,dt. \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2. E_m Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde E_m operatörünün Korovkin teoreminin şartlarını sağladığı ispat edilecektir[10].

3.2.2. Lemma

E_m operatörleri pozitif lineer operatörler olsun. E_m operatörleri,

$$E_m(1;y) = 1, \tag{3.6}$$

$$E_m(t;y) = y+\frac{1}{mP(1)\,e_\mu(my)}\left\{e_\mu(-my)\left(\tau_\mu P\right)(1)+P'(1)\left[e_\mu(my)-e_\mu(-my)\right]\right\} \tag{3.7}$$

$$+\frac{1}{2m} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} E_m\left(t^2,y\right) &= y^2+\frac{e_\mu(my)\left(2P'(1)+P(1)\right)+2\mu P(-1)\,e_\mu(-my)}{mP(1)\,e_\mu(my)}y \\ &+\frac{\left(\tau_\mu P\right)(1)\,e_\mu(-my)}{m^2P(1)\,e_\mu(my)} \\ &+\frac{\left[2P''(1)-\left(\tau_\mu P\right)'-\left(\tau_\mu P'\right)(1)\right]}{P(1)\,m^2e_\mu(my)}\left(e_\mu(my)-e_\mu(-my)\right) \\ &+\frac{P(1)-2\mu P'(-1)}{P(1)\,m^2e_\mu(my)}\left(e_\mu(my)-e_\mu(-my)\right) \\ &+\frac{\left(\tau_\mu^2P\right)(1)+2\mu\left(\tau_\mu P\right)(-1)}{P(1)\,m^2}+\frac{y}{m} \\ &+\frac{1}{m^2P(1)\,e_\mu(my)}\left\{e_\mu(-my)\left(\tau_\mu P\right)(1)+P'(1)\left[e_\mu(my)-e_\mu(-my)\right]\right\} \\ &+\frac{1}{3m^2}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat

(3.5) ile verilen operatör tanımında $\varphi(t)=1$ için,

$$\begin{aligned} E_m(1;y) &= \frac{m}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}dt \\ &= \frac{m}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)} \\ &= \frac{e_\mu(my)}{e_\mu(my)}=1 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

(3.5) ile verilen operatör tanımında $\varphi(t)=t$ için,

$$\gamma_\mu(j+1)=\left(j+1+2\mu\theta_{j+1}\right)\gamma_\mu(j)$$

denkleminde j yerine $j-1$ yazılırsa

$$\gamma_\mu(j)=\left(j+2\mu\theta_{j+1}\right)\gamma_\mu(j-1)$$

elde edilir. (3.5) eşitliğinde yukarıdaki eşitlik kullanılırsa

$$\begin{aligned} E_m(t;y) &= \frac{1}{m}\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\left(j+2\mu\theta_j\right)\gamma_\mu(j-1)}\left(j+2\mu\theta_j\right)+\frac{1}{2m} \\ &= \frac{1}{m}\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j-1)}+\frac{1}{2m} \\ &= \frac{1}{m}\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_{j+1}(my)}{\gamma_\mu(j)}+\frac{1}{2m} \end{aligned} \tag{3.10}$$

olur.

$$P(t)\, e_\mu(yt) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(y)}{\gamma_\mu(j)} t^j,$$

denkleminin her iki tarafının t ye göre Dunkl türevi alınırsa

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_j(y)}{\gamma_\mu(j)} \left(j + 2\mu\theta_j\right) t^{j-1} = yP(t)\, e_\mu(yt) + e_\mu(-yt) \left(\tau_\mu P\right)(t) + P'(t) \left[e_\mu(yt) - e_\mu(-yt)\right]$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede y yerine my ve t yerine 1 yazılırsa

$$\begin{aligned} myP(1)\, e_\mu(my) + e_\mu(-my) \left(\tau_\mu P\right)(1) + P'(1) \left[e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right] &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)} \left(j + 2\mu\theta_j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{j+1}}{\gamma_\mu(j+1)\gamma_\mu} \left(j + 1 + 2\mu\theta_{j+1}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{j+1}(my)}{\gamma_\mu(j)} \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen bu denklem kullanılırsa

$$\begin{aligned} E_m(t;y) &= \frac{1}{m} \frac{1}{P(1)\, e_\mu(my)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_{j+1}(my)}{\gamma_\mu(j)} + \frac{1}{2m} \\ &= \frac{1}{m} \frac{1}{P(1)\, e_\mu(my)} \left\{myP(1)\, e_\mu(my) + e_\mu(-my) \left(\tau_\mu P\right)(1) + P'(1) \left[e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right]\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2m} \\ &= y + \frac{1}{mP(1)\, e_\mu(my)} \left\{e_\mu(-my) \left(\tau_\mu P\right)(1) + P'(1) \left[e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right]\right\} \\ &\quad + \frac{1}{2m} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (3.5) ile verilen operatör tanımında $\varphi(t)=t^2$ için

$$\begin{aligned}
E_m\left(t^2;y\right) &= \frac{m}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}} t^2dt \\
&= \frac{m}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{(j+2\mu\theta_j)}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}} \\
&= \frac{m}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\frac{1}{3m^3}\left[3\left(j+2\mu\theta_j\right)^2+3\left(j+2\mu\theta_j\right)+1\right] \\
&= \frac{1}{m^2}\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\left(j+2\mu\theta_j\right)^2 \\
&\quad+\frac{1}{m^2}\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\left(j+2\mu\theta_j\right) \\
&\quad+\frac{1}{3m^2}\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Şimdi

$$\gamma_\mu(j+1)=\left(j+1+2\mu\theta_{j+1}\right)\gamma_\mu(j)$$

eşitliği kullanılırsa, $j+1$ yerine j yazıldığında

$$\gamma_\mu(j)=\left(j+2\mu\theta_j\right)\gamma_\mu(j-1)$$

elde edilir.

(3.1)'de denklemin her iki tarafının t ye göre Dunkl türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_j(y)}{\gamma_\mu(j)}\left(j+2\mu\theta_j\right)t^{j-1} \\
&\qquad = yP(t)\,e_\mu(yt)+e_\mu(-yt)\left(\tau_\mu P\right)(t)+P'(t)\left[e_\mu(yt)-e_\mu(-yt)\right]
\end{aligned}$$

elde edilmişti. Yukarıdaki denklemin her iki tarafının t ye göre türevi tekrar alınırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=2}^{\infty}\frac{p_j(y)}{\gamma_\mu(j)}(j+2\mu\theta_j)(j-1+2\mu\theta_{j-1})t^{j-2}\\
=\;& y^2P(t)e_\mu(yt)+y(\tau_\mu P)(t)e_\mu(-yt)+yP'(t)[e_\mu(yt)-e_\mu(-yt)]\\
&-ye_\mu(-yt)(\tau_\mu P)(t)+e_\mu(yt)(\tau_\mu^2P)(t)+[e_\mu(yt)-e_\mu(-yt)](\tau_\mu P)'(t)\\
&+[ye_\mu(yt)-ye_\mu(-yt)])P'(t)+[e_\mu(-yt)-e_\mu(yt)](\tau_\mu P)'(t)\\
&+2[e_\mu(yt)-e_\mu(-yt)]P''(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede y yerine my ve t yerine 1 yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m^2}\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\left(j+2\mu\theta_j\right)^2\\
&\qquad=y^2+\frac{e_\mu(my)\,(2P'(1)+P(1))+2\mu P(-1)\,e_\mu(-my)}{mP(1)\,e_\mu(my)}y\\
&\qquad+\frac{\left(\tau_\mu P\right)(1)\,e_\mu(-my)}{m^2P(1)\,e_\mu(my)}\\
&\qquad+\frac{\left[2P''(1)-\left(\tau_\mu P\right)'(1)-\left(\tau_\mu P'\right)(1)\right]\left(e_\mu(my)-e_\mu(-my)\right)}{m^2P(1)\,e_\mu(my)}\\
&\qquad+\frac{[P'(1)-2\mu P'(-1)]\left(e_\mu(my)-e_\mu(-my)\right)}{m^2P(1)\,e_\mu(my)}\\
&\qquad+\frac{\left(\tau_\mu^2P\right)(1)+2\mu\left(\tau_\mu P\right)(-1)}{P(1)\,m^2}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{1}{m^2}\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\left(j+2\mu\theta_j\right)$$

ifadesi için

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_j(y)}{\gamma_\mu(j)} \left(j + 2\mu\theta_j\right) t^{j-1}$$
$$= yP(t)\, e_\mu(yt) + e_\mu(-yt) \left(\tau_\mu P\right)(t) + P'(t) \left[e_\mu(yt) - e_\mu(-yt)\right]$$

denklemi kullanılırsa,

$$\frac{y}{m} + \frac{1}{m^2 P(1)\, e_\mu(my)} \left\{e_\mu(-my) \left(\tau_\mu P\right)(1) + P'(1) \left[e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right]\right\}$$

bulunur. Son olarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{3m^2} \frac{1}{P(1)\, e_\mu(my)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)} &= \frac{1}{3m^2} \frac{1}{P(1)\, e_\mu(my)} P(1)\, e_\mu(my) \\ &= \frac{1}{3m^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Denklemler bir araya getirilirse,

$$\begin{aligned} E_m\left(t^2; y\right) &= y^2 + \frac{e_\mu(my)\left(2P'(1) + P(1)\right) + 2\mu P(-1)\, e_\mu(-my)}{mP(1)\, e_\mu(my)} y \\ &\quad + \frac{\left(\tau_\mu P\right)(1)\, e_\mu(-my)}{m^2 P(1)\, e_\mu(my)} \\ &\quad + \frac{\left[2P''(1) - \left(\tau_\mu P\right)'(1) - \left(\tau_\mu P'\right)(1)\right] \left(e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right)}{m^2 P(1)\, e_\mu(my)} \\ &\quad + \frac{\left[P'(1) - 2\mu P'(-1)\right] \left(e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right)}{m^2 P(1)\, e_\mu(my)} \\ &\quad + \frac{\left(\tau_\mu^2 P\right)(1) + 2\mu \left(\tau_\mu P\right)(-1)}{P(1)\, m^2} + \frac{y}{m} \\ &\quad + \frac{1}{m^2 P(1)\, e_\mu(my)} \left\{e_\mu(-my) \left(\tau_\mu P\right)(1) + P'(1) \left[e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right]\right\} + \frac{1}{3m^2}. \end{aligned}$$

Böylece Lemma 3.2.2 nin ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi, E_m operatörünün birinci ve ikinci momentleri sırasıyla.

$$\nabla_1 = E_m(\Im - y; y)$$

$$\nabla_2 = E_m\left((\Im - y)^2; y\right)$$

şeklinde ifade edilsin.

3.2.3. Lemma

(5) ile tanımlanan E_m operatörleri

$$\begin{aligned}
\nabla_1 &= \frac{1}{mP(1)\,e_\mu(my)}\left\{e_\mu(-my)\left(\tau_\mu P\right)(1) + P'(1)\left[e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right]\right\} \\
&\quad + \frac{1}{2m},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_2 &= \frac{e_\mu(my)\left(2P'(1) + P(1)\right) + 2\mu P(-1)\,e_\mu(-my)}{mP(1)\,e_\mu(my)}\,y \\
&\quad + \frac{\left(\tau_\mu P\right)(1)\,e_\mu(-my)}{m^2 P(1)\,e_\mu(my)} \\
&\quad + \frac{\left[2P''(1) - \left(\tau_\mu P\right)'(1) - \left(\tau_\mu P'\right)(1)\right]\left(e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right)}{m^2 P(1)\,e_\mu(my)} \\
&\quad + \frac{\left[P'(1) - 2\mu P'(-1)\right]\left(e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right)}{m^2 P(1)\,e_\mu(my)} \\
&\quad + \frac{\left(\tau_\mu^2 P\right)(1) + 2\mu\left(\tau_\mu P\right)(-1)}{P(1)\,m^2} \\
&\quad - \frac{2y}{mP(1)\,e_\mu(my)}\left\{e_\mu(-my)\left(\tau_\mu P\right)(1) + P'(1)\left[e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right]\right\} \\
&\quad - \frac{y}{m}.
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlar.

İspat

$\nabla_1 = E_m(\Im - y; y)$ için

$$\begin{aligned}
\nabla_1 &= E_m(\Im - y; y) \\
&= \frac{m}{P(1)\, e_\mu(my)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)} \int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}} (\Im - y)dt \\
&= \frac{m}{P(1)\, e_\mu(my)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)} \left[\frac{\Im^2}{2} - \Im y\right]_{\frac{(j+2\mu\theta_j)}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}} \\
&= \frac{m}{P(1)\, e_\mu(my)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)} \left[\frac{\Im^2}{2}\right]_{\frac{(j+2\mu\theta_j)}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}} \\
&\quad - \frac{m}{P(1)\, e_\mu(my)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)} [\Im y]_{\frac{(j+2\mu\theta_j)}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}},
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$= \frac{m}{P(1)e_\mu(my)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)} \left[\frac{\Im^2}{2}\right]_{\frac{(j+2\mu\theta_j)}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}$

denklemde

$$= \frac{1}{m} \frac{1}{P(1)\, e_\mu(my)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)} (j + 2\mu\theta_j)$$

denklemden yararlanılırsa

$$y + \frac{1}{m} \frac{1}{P(1)\, e_\mu(my)} \left\{ e_\mu(-my) \left(\tau_\mu P\right)(1) + P'(1) \left[e_\mu(my) - e_\mu(-my) \right] \right\} + \frac{1}{2m}$$

gelir.

$$\frac{m}{P(1)\,e_{\mu}(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_{\mu}(j)}\left[\Im y\right]_{\frac{(j+2\mu\theta_j)}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}$$

denklem açılırsa,

$$\frac{ym}{P(1)\,e_{\mu}(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_{\mu}(j)}\frac{1}{m}=y$$

bulunur. Bu iki denklemin sonucu birleştirildiğinde,

$$\begin{aligned}\nabla_1 &= E_m(\Im-y;y)\\ &= 2y+\frac{1}{mP(1)e_{\mu}(my)}\{e_{\mu}(-my)(\tau_{\mu}P)(1)+P'(1)[e_{\mu}(my)-(-my)]\}+\frac{1}{2m}\end{aligned}$$

birinci momentin ispatı tamamlanmış olur.

$\nabla_2 = E_m\left((\Im-y)^2;y\right)$ için

$$\begin{aligned}\nabla_2 &= E_m\left((\Im-y)^2;y\right)\\ &= \frac{m}{P(1)\,e_{\mu}(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_{\mu}(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}(\Im-y)^2dt\\ &= \frac{m}{P(1)\,e_{\mu}(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_{\mu}(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}(\Im^2-2\Im y+y^2)dt\\ &= \frac{m}{P(1)\,e_{\mu}(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_{\mu}(j)}\left[\frac{\Im^3}{3}\right]_{\frac{(j+2\mu\theta_j)}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
- & \frac{2my}{P(1)\,e_\mu(my)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)} \left[\frac{\Im^2}{2}\right]^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}_{\frac{(j+2\mu\theta_j)}{m}} \\
& + \frac{y^2 m}{P(1)\,e_\mu(my)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)} \frac{1}{m}
\end{aligned}
$$

denklemlere gerekli işlemler uygulandığında,

$$
\begin{aligned}
\nabla_2 = & \frac{e_\mu(my)\,(2P'(1)+P(1)) + 2\mu P(-1)\,e_\mu(-my)}{mP(1)\,e_\mu(my)} y \\
& + \frac{\left(\tau_\mu P\right)(1)\,e_\mu(-my)}{m^2 P(1)\,e_\mu(my)} \\
& + \frac{\left[2P''(1) - \left(\tau_\mu P\right)'(1) - \left(\tau_\mu P'\right)(1)\right]\left(e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right)}{m^2 P(1)\,e_\mu(my)} \\
& + \frac{[P'(1) - 2\mu P'(-1)]\left(e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right)}{m^2 P(1)\,e_\mu(my)} \\
& + \frac{\left(\tau_\mu^2 P\right)(1) + 2\mu\left(\tau_\mu P\right)(-1)}{P(1)\,m^2} \\
& - \frac{2y}{mP(1)\,e_\mu(my)} \left\{e_\mu(-my)\left(\tau_\mu P\right)(1) + P'(1)\left[e_\mu(my) - e_\mu(-my)\right]\right\} \\
& - \frac{y}{m}.
\end{aligned}
$$

ikinci momentin ispatı tamamlanmış olur.

3.3. E_m Operatörünün Yaklaşım Hızı

Bu bölümde, Lipschitz sınıfı fonksiyonları yardımıyla yakınsama hızı verilip ilgili teoremler ifade edilip ispatlanacaktır[10].

$0 < \alpha \leq 1, M > 0$ olmak üzere $Lip_m(\alpha)$, Lipschitz sınıfı fonksiyon olsun,

$$Lip_M(\alpha) = \left\{ f : |f(\rho) - f(\iota)| \leq M|\rho - \iota|^{\alpha}, \rho, \iota \in [0,\infty) \right\}.$$

şeklinde tanımlanır.

3.3.1. Teorem

$\varpi \in Lip_M(\alpha)$ olsun. Bu durumda

$$|E_m(\varpi; y) - \varpi(y)| \leq M(\nabla_2(y))^{\beta/2}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

E_m operatörünün monotonluk özelliğinden

$$\begin{aligned} |E_m(\varpi; y) - \varpi(y)| &= |E_m(\varpi(\Im)) - \varpi(y); y| \\ &\leq E_m(|(\varpi(\Im)) - \varpi(y)|; y) \\ &\leq M.E_m\left(|\Im - y|^{\beta}; y\right) \end{aligned}$$

olur. Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|E_m(\varpi;y)-\varpi(y)| &\leq \frac{m}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}|\varpi(t)-\varpi(y)|\,dt \\
&\leq M.\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}} m^{\frac{\beta}{2}}|t-y|^{\beta}\,m^{\frac{2-\beta}{2}}\,dt \\
&\leq M.\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\left(\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}} m(t-y)^2\,dt\right)^{\frac{\beta}{2}} \\
&\quad\times\left(\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}} m dt\right)^{\frac{2-\beta}{2}} \\
&\leq M.\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p_j(my)}{P(1)\,e_\mu(my)\,\gamma_\mu(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}} m(t-y)^2\,dt\right)^{\frac{\beta}{2}}. \\
&\quad\times\left(\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)P(1)\,e_\mu(my)}\right)^{\frac{2-\beta}{2}} \\
&\leq M.\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{P(1)\,e_\mu(my)\,\gamma_\mu(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}} m(t-y)^2\,dt\right)^{\frac{\beta}{2}} \\
&\quad\times\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)P(1)\,e_\mu(my)}\right)^{\frac{2-\beta}{2}} \\
&= M.(\nabla_2)^{\frac{\beta}{2}}
\end{aligned}$$

bulunur, böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.3.2. Teorem

f, $[0,\infty)$ üzerinde düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$|E_m(\varphi;y)-\varphi(y)| \leq (1+\partial_m(y))\,\omega\left(\varphi;\frac{1}{\sqrt{m}}\right),$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\partial_m(y)=m\sqrt{\nabla_2}$ dır.

İspat. (5) deki operatör kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |E_m(\varphi;y)-\varphi(y)| &\leq \frac{m}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}|\varphi(t)-\varphi(y)|\,dt \qquad (3.11)\\ &\leq \left\{1+\frac{1}{\delta}\frac{m}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}|t-y|\,dt\right\}\omega(f;\delta) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} &\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}\sqrt{m}\,|t-y|\,\sqrt{m}dt\\ \leq\ &\frac{1}{P(1)\,e_\mu(my)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)}\left(\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}m(t-y)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\times\left(\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)P(1)\,e_\mu(my)}\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leq\ &\sum_{j=0}^{\infty}\sqrt{\frac{p_j(my)}{P(1)\,e_\mu(my)\,\gamma_\mu(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}m(t-y)^2dt}\\ &\times\sqrt{\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)P(1)\,e_\mu(my)}}\\ \leq\ &\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{P(1)\,e_\mu(my)\,\gamma_\mu(j)}\int_{\frac{j+2\mu\theta_j}{m}}^{\frac{j+1+2\mu\theta_j}{m}}m(t-y)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\times\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{p_j(my)}{\gamma_\mu(j)P(1)\,e_\mu(my)}\right)^{\frac{1}{2}}\\ =\ &\sqrt{m\nabla_2} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitsizlikte $\delta=\frac{1}{\sqrt{m}}$ alınırsa

$$|E_m(\varphi;y)-\varphi(y)| \leq \left\{1+\frac{1}{\delta}\sqrt{m\nabla_2}\right\}\omega(f;\delta)$$

$$\leq \quad (1+\partial_m(y))\,\omega\left(\varphi;\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde öncelikle yaklaşım teorisinin önemli operatörlerinden biri olan Szász operatörüyle ilgili temel bilgiler verilerek bir genellemesi olan Dunkl-Appell tip operatör tanımlanmıştır. Ayrıca bu operatörün Kantorovich tip genellemesi detaylı olarak incelenmiştir. Bu tezi inceleyen bir kişi operatör genellemesi hakkında detaylı bilgiye erişebilecektir. Doğrucu fonksiyonlar hakkında işlem yeteneği kazanıp operatörlerle bağdaştırma tekniğini uygulayabilecektir. Detaylı verilen ispatlar neticesinde işlem yeteneği kazanacak başka operatörlerde de rahat uygulayabilme yetisine sahip olup, süreklilik modülü ve Lipscihtz sınıfı tanımları ve ilgili teoremler sayesinde yaklaşım hızı hesabında bilgi sahibi olacaktır. Çalışılan uzay dikkate alınarak başka uzaylara adapte etme fırsatı elde edecektir. Operatör genellemeleri hakkında derin bilgiye ulaşıp başka operatör genellemeleri kurgulayabilme, özelliklerini inceleyebilme, yaklaşım hızı hesabı yapabilme yeteneği kazanabilecektir.

KAYNAKLAR

1. Akçay, M. (2016). Pozitif Lineer Operatörler İle Korovkin-Tipli Yaklaşım, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

2. Altomare, F., and Campiti, M. (1994). Korovkin-type approximation theory and its applications. de Gruyter Stud. Math. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 17.

3. Askey, R. (2007). The q-Gamma and q-Beta functions. *Applicable Analysis*, 125-141.

4. Ben Cheikh, Y., and Gaied, M. (2007). Dunkl-Appell d-orthogonal polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, 18(8), 581-597.

5. Bernstein, S. N. (1912). Demonstration of the Weierstrass theorem based on the calculation of probabilities.*Common Soc.Math. Charkow* Ser. 2t, 13, 1-2.

6. DeVore, R. A., and Lorentz, G. G. (1993).*Constructive approximation*. Springer Science & Business Media,303.

7. Gadzhiev, A. D. O. (1974). The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets, and theorems analogous to that of PP Korovkin. In Doklady Akademii Nauk Russian Academy of Sciences. 218(5), 1001-1004.

8. Gadjiev, A. (1976). Theorems of the type of P. P. Korovkin's theorems. *Matematicheskie Zametki*, 20(5), 781-786.

9. İçöz, G., and Çekim, B. (2016). Stancu-type generalization of Dunkl analogue of Szász-Kantorovich operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(7), 1803-1810.

10. İçöz, G., and GÖKMEN, E. (2022) Adaptation of the Kantorovich Type Integral to the Dunkl Operator. *Gazi University Journal of Science Part A :Engineering and Innovation*, 9(3), 334-346.

11. İçöz, G., Varma, S., and Sucu, S. (2016). Approximation by operators including generalized Appell polynomials. *Filomat*, 30(2), 429-440.

12. Jakimovski, A., and Leviatan, D. (1969). Generalized Szász operators for the approximation in the infinite interval. *Mathematica (Cluj)*, 11(34), 97-103.

13. Kanat, K., and Sofyalıoğlu, M. (2018). Approximation by (p,q)-Lupaş–Schurer–Kantorovich operators. *Journal of Inequalitiesand Applications*, 2018(1), 1-17.

14. Kanat, K., and Sofyalıoğlu, M. (2019). On Stancu type generalization of (p, q)-Baskakov-Kantorovich operators. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics* , 68(2), 1995-2013.

15. Kantorovich, L. V. (1960). Mathematical methods of organizing and planning production. Management science, 6(4), 366-422.

16. King, J. (2003). Positive linear operators which preserve x^2*Acta Mathematica Hungarica*, 99, 203-208.

17. Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. In*Dokl. Akad. Nauk SSSR* , 90(953), 961-964.

18. Lorentz, G. G., Polynomials, B. (1953). University of Toronto Press.

19. Mursaleen, M., Rahman, S., and Alotaibi, A. (2016). Dunkl generalization of q-Szász-Mirakjan Kantorovich operators which preserve some test functions.*Journal of Inequalities and Applications* , (1), 1-18.

20. Nasiruzzaman, M., and Aljohani, A. F. (2020). Approximation by Szász-Jakimovski-Leviatan-type operators via aid of Appell polynomials.*Journal of Function Spaces* , 2020

21. Nasiruzzaman, M., and Aljohani, A. F. (2020). Approximation by parametric extension of Szász-Mirakjan- Kantorovich operators involving the Appell polynomials.*Journal of Function Spaces*, 2020.

22. Rosenblum, M. (1994). Generalized Hermite polynomials and the Bose-like oscillator calculus. In Nonselfadjoint operators and related topics.*Birkhäuser, Basel*. 369-396.

23. Sucu, S. (2014). Dunkl analogue of Szász operators. *Applied Mathematics and Computation*, 244, 42-48.

24. Sucu, S. (2020). Approximation by sequence of operators including Dunkl-Appell polynomials. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43(3), 2455-2464.

25. Sucu, S., İçöz, G., and Varma, S. (2012). On some extensions of Szász operators including Boas-Buck-type polynomials.*In Abstract and Applied Analysis* (2012).

26. Szász, O. (1950). Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval.*J. Res. Nat. Bur. Standards*, 45(3), 239-245.

27. Yazici, S., Yeşildal, F. T., and Çekim, B. (2022). On a generalization of Szász-Mirakyan operators including Dunkl-Appell polynomials. *Turkish Journal of Mathematics* , 46(6), 2353-2365.



GAZİ GELECEKTİR...