**GAZİ ÜNİVERSİTESİ**
**EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**ORTA ÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ**
**MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ ANA BİLİM DALI**

# MATEMATİK EĞİTİMİNDE TÜREV ÖĞRENİMİ VE ÖĞRETİMİ İLE İLGİLİ SORULMUŞ BAZI ETKİN SORULAR VE CEVAPLARI HAKKINDA ÖĞRENCİLERİN VE ÖĞRETİM ELEMANLARININ GÖRÜŞLERİ ÜZERİNE BİR FENOMENOGRAFİK ÇALIŞMA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Hazırlayan**
**Nurettin YILDIZ**

**ANKARA - 2006**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ**
**EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**ORTA ÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ**
**MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ ANA BİLİM DALI**

# MATEMATİK EĞİTİMİNDE TÜREV ÖĞRENİMİ VE ÖĞRETİMİ İLE İLGİLİ SORULMUŞ BAZI ETKİN SORULAR VE CEVAPLARI HAKKINDA ÖĞRENCİLERİN VE ÖĞRETİM ELEMANLARININ GÖRÜŞLERİ ÜZERİNE BİR FENOMENOGRAFİK ÇALIŞMA

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Hazırlayan**
**Nurettin YILDIZ**

**Danışman**
**Doç. Dr. Ahmet ARIKAN**

**ANKARA - 2006**

**Bu tezde belirtilen görüş ve yorumlar yazana aittir. Türk Silahlı Kuvvetlerinin ya da diğer kamu kuruluşlarının görüşlerini yansıtmaz.**

Nurettin YILDIZ ‘ın “MATEMATİK EĞİTİMİNDE TÜREV ÖĞRENİMİ VE ÖĞRETİMİ İLE İLGİLİ SORULMUŞ BAZI ETKİN SORULAR VE CEVAPLARI HAKKINDA ÖĞRENCİLERİN VE ÖĞRETİM ELEMANLARININ GÖRÜŞLERİ ÜZERİNE BİR FENOMENOGRAFİK ÇALIŞMA” başlıklı tezi 17.11.2006 tarihinde, jürimiz tarafından Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Matematik Öğretmenliği Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

| | Adı Soyadı | İmza |
|---|---|---|
| Başkan : | Prof. Dr. Ziya ARGÜN | ..... |
| Üye (Tez Danışmanı) : | Doç. Dr. Ahmet ARIKAN | ..... |
| Üye : | Yrd. Doç. Dr. Mehmet Fatih TAŞAR | ..... |

# ÖNSÖZ

Matematik öğrenimi ve öğretimi konusunda kendisinden çok önemli bilgiler edindiğim değerli hocam Prof. Dr. Ziya ARGÜN ‘e, çalışmalarım boyunca yardımları ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Ahmet ARIKAN ‘a, İngilizce ‘ye ihtiyaç duyduğum zamanlarda yardımlarını esirgemeyen değerli meslektaşlarım Binbaşı Semih SERT ve Yarbay Özcan BİLGETÜRK ‘e ve manevi desteğinden dolayı değerli eşime teşekkür ederim.

02.10.2006

Nurettin YILDIZ

# ÖZET

Bu araştırma çalışmasında, yüksek matematiğin temelini oluşturan kalkülüsün türev konusu ile ilgili dünyanın çeşitli yerlerinden "Ask Dr. Math." adlı uluslararası İnternet sitesine sorulmuş sorulardan bazı etkin olanları ve bunlara verilen cevaplar hakkında, öğrencilerin ve öğretim elemanlarının görüşleri alınmak suretiyle, kavram yanılgıları, kavramlardaki eksiklikler ve değişik yaklaşımlar araştırılmaktadır. Bunun için "Ask Dr. Math" sitesine sorulan sorulardan 12 tanesi seçilerek dikkatlice yazıldı ve belirli bir sıraya kondu.

Araştırma verilerinin toplanması, nitel araştırmanın fenomenografik yaklaşımına uygun şekilde yapıldı. Toplanan veriler, "içerik analizi" tekniğiyle analiz edildi.

Araştırma 2005–2006 eğitim öğretim yılında Kara Harp Okulu 'nda öğretim gören üç öğrenci ile bu öğrencilere ders veren iki matematik öğretim elemanının katılımıyla gerçekleştirildi.

Araştırma sonunda elde edilen bulguların matematik öğretimi ve öğrenimi için rehber niteliğinde olması hedeflendiğinden, türev öğretimi ve öğrenimine farklı bir bakış açısı getireceği umulmaktadır. Eğer, öğretmenler ve öğretim elemanları burada incelenen konulara ve sunulan önerilere dikkat çekerlerse, öğrencilerin kavramsal olarak anlamalarını ve kalıcı öğrenmelerini sağlayabilirler.

## ABSTRACT

This study attempts to identify the misconceptions, lack of full conceptualization, and diverse approaches by surveying the views of some students and teachers from all around the world on the questions and answers found in "Ask Dr. Math", an international website, relating to derivation in calculus that constitutes the core of Advanced Mathematics. For this purpose, 12 questions from "Ask Dr. Math" have been selected and put in an order.

Collection of the data was done in a phenomenographic fashion. The data collected were analyzed using "content analysis".

Three cadets who were students at the Turkish Military Academy during 2005-2006 academic year and two math teachers who were teaching these cadets participated in this study.

It is hoped that the findings of the research will bring a different insight into teaching and learning of derivation for they are expected to provide guidance in teaching math class. Teachers may enable the students to comprehend concepts correctly and effectively provided that they take notice of the subjects studied and the suggestions presented here.

## İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI
UYARI YAZISI
JÜRİ ÜYELERİNİN ONAY SAYFASI
ÖNSÖZ ……..…….… i
ÖZET …….....…… ii
ABSTRACT ……....……. iii
İÇİNDEKİLER …….……. iv
TABLOLAR LİSTESİ …….. vii
ŞEKİLLER LİSTESİ ……. ix

BÖLÜM 1
GİRİŞ
PROBLEM DURUMU

1.1 Matematik: En Çok Yanlış Anlaşılan Ders ..... 1
1.2 Matematik Öğretiminin Amacı ..... 2
1.3 Kavram Yanılgılarının Doğası ..... 3
1.4 Kavram Görüntüsü ve Kavram Tanımı ..... 4
1.5 Türev Kavramı ..... 6
1.6 Araştırmanın Problem Cümlesi ..... 7
1.7 Araştırmanın Amacı ..... 8
1.8 Araştırmanın Önemi ..... 8
1.9 Araştırmanın Sınırlılıkları ..... 10

BÖLÜM 2
İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

2.1. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Yapılan Araştırmalar ……... 11

BÖLÜM 3
YÖNTEM

3.1 Evren ve Örneklem ..... 25
3.2 Veri Toplama Yöntemi ..... 25
3.3 Veri Analiz Yöntemi ..... 28

BÖLÜM 4
BULGULAR, YORUMLAR VE TARTIŞMALAR

4.1. Görüşülen Bireylere İlişkin Kişisel Bilgiler ..... 29
4.2 Görüşmelere İlişkin Açıklamalar ..... 29
4.3 Matematik Eğitiminde Türev Öğretimi İle İlgili
Bulgular ve Yorumlar ..... 30

BÖLÜM 5
SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar ..... 84
5.2 Öneriler ..... 87
5.2.1 Öğretmenlere ve öğretim elemanlarına yönelik öneriler ..... 88
5.2.2. Eğitimcilere yönelik öneriler ..... 89
5.2.3. Araştırmacılara yönelik öneriler ..... 90

KAYNAKÇA ..... 91
EKLER ..... 98

EK 1: Görüşme formu

EK 2: Öğrencilere yöneltilen görüşme soruları

EK 3: Öğretim elemanlarına yöneltilen görüşme soruları

EK 4: Yüksek lisans izin dilekçesi

EK 5: Yüksek lisans çalışması yapılmasına müsaade verilmesine ilişkin KHO Komutanlığı' nın emri

EK 6: Yüksek lisans çalışması yapılmasına müsaade edildiğine ilişkin Kara Kuvvetleri Komutanlığı' ndan gelen mesaj emri

EK 7: Yüksek lisans çalışması yapılmasına müsaade edildiğine ilişkin KHO Komutanlığı' nın emri

## TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1. Görüşülen Bireylere Ait Kişisel Bilgiler ……..... 29

Tablo 2. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 1. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..... 30

Tablo 3. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 1. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……. 32

Tablo 4. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 2. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi …….. 36

Tablo 5. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 2. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..... 38

Tablo 6. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 3. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi …….. 41

Tablo 7. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 3. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……. 43

Tablo 8. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 4. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..... 45

.

Tablo 9. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 4. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……. 48

Tablo 10. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 5. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..... 50

Tablo 11. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 5. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……. 52

Tablo 12. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 6. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..... 55

Tablo 13. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 6. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi …… 56

Tablo 14. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 7. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..... 58

Tablo 15. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 7. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……. 59

Tablo 16. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 8. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..... 61

Tablo 17. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 8. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi …… 62

Tablo 18. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 9. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..... 66

Tablo 19. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 9. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi …… 68

Tablo 20. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 10. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..... 69

Tablo 21. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 10. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..…… 71

Tablo 22. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 11. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..... 74

Tablo 23. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 11. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..…… 76

Tablo 24. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 12. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..... 79

Tablo 25. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 12. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi ……..…… 81

## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Türev fonksiyonunun grafiği …… 13

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ

## PROBLEM DURUMU

### 1.1 Matematik: En Çok Yanlış Anlaşılan Ders

Dil, din, ırk ve ülke ayırt etmeden uygarlıktan uygarlığa zenginleşerek geçen evrensel bir dil ve kültür olarak tanımlanabilecek matematik, "çok zor ve karmaşık bir derstir", "soyuttur, anlaşılması güçtür" veya "akıl ölçüsüdür" vb. şeklindeki kavram yanılgılarından dolayı, ilköğretimin ilk yıllarından yüksek öğretimin son yıllarına kadar öğrencilerin çoğunun korkulu rüyası olmuştur. Bunun sonucu olarak da çoğu zaman sevilmeyen ve başarısız olunan bir ders durumuna gelmiştir.

Birçok öğrenci matematik hakkında böyle kavram yanılgılarına sahiptir. Fakat matematik hakkındaki en büyük kavram yanılgısı, matematiğin formüllerden oluşup, hesaplamalardan ibaret olduğu düşüncesidir. Matematiğin birileri tarafından oluşturulan kurallar ve formüller dizisi ve öğrencilerin görevinin de bütün bunları ezberlemeleri gerektiği şeklindeki bu düşünce, bilinçsizce üretilen bir saplantıdır. Bu saplantıda olan öğrenciler, gelecekte patronlarının ofislerine girip kendilerinden: "İkinci derece formülünün matematiksel anlamı nedir?" veya "$3x^2 - 6x + 1$ fonksiyonunun türevini bulmaya ihtiyacım var." gibi isteklerde bulunacaklarını düşünürler (Lewis, 2000). Bu durumun en güzel kanıtı; matematik öğretmenlerinin daha ilk derslerinden itibaren "Bu öğrendiklerimiz mezun olunca işimize yaramayacak.", "İlerde nerede kullanacağım?", "Mesleğimde kullanmayacağım" gibi ifadelerle sık sık karşılaşmaları değil midir?

O halde, öğrenciler öncelikle matematiğin önemini, amacını ve yararlarını anlarlarsa, bu dersi öğrenmemeleri ve sevmemeleri mümkün değildir. Matematik, birçok bilim dalının kullandığı bir araç olup, ayrıca modern insanın objektif ve özgür düşünmesine, özgüveninin artmasına, karşılaştığı problemlerde sebep-sonuç

ilişkilerini açıklamasına yardımcı olacak yetenek ve becerilerinin gelişmesine yardımcı olmaktadır (Alkan ve Altun, 1998). Matematik, her insanda doğuşta tabiatında var olan düşünme yollarını geliştirir. Matematiği kavrayan insan diğer konuları daha iyi anlar. Doğru ve verimli düşünür ve isabetli kararlar verir.

Matematik, kişinin sabırlı, dikkatli ve düzenli çalışmasını sağlar. Yeni beceriler geliştirmesi için kişiye yardımcı olur. Sağlam bir yargı (muhakeme) gücü geliştirir. Kişiyi araştırma ve bilimsel düşünmeye teşvik eder. Herhangi bir konuda değişik yollardan düşünebilmeyi öğretir (Göker, 1997).

Atatürk çok farklı konular üzerinde düşünmüş olmakla birlikte, düşüncelerinin ortak bir ifade özelliği, matematikle donatılmış bir mantığın egemenliğini çoğu kez, belirgin biçimde yansıtmasıdır. O 'nun aşağıdaki düşünceleri bunun açık bir örneğidir:

> " En büyük askerlik budur: Muhtelif ihtimalleri çok iyi hesap etmeli; en iyi görüneni süratle tatbik etmeli... Askeri plan arzuya göre değil, hesaba dayanarak tanzim olunmalıdır... Muharebede kuvvetten ziyade, kuvveti amaca uygun yönetmek mühimdir." (Uğurlu,2003)

### 1.2 Matematik Öğretiminin Amacı

Matematik öğretiminin başlıca üç amacı vardır. Matematiği öğretmek, matematiğin etkinliklerini sergilemek ve öğrencilerde düşünsel ve davranışsal değişiklikler oluşturmaktır. Matematik, akla uygun ve kuramsal bir bilim olduğundan öğretimi, öğrencilerin akıl yürütme yeteneklerini geliştirerek onlara yaratıcı bir beyin kazandırmayı amaçlar. Matematiğin soyut, dolayısıyla genel bir bilim dalı olma özelliği taşıdığı anımsanırsa bu dersin, öğrencilere soyut düşünme alışkanlığı kazandırmayı amaçladığı ortaya çıkacaktır (Gözen, 2001).

İyi bir matematik öğretimi, matematiğin etkinliklerini öğrencilere kavratmayı da amaçlamalıdır. Bu bağlamda, matematiğin teknikteki etkinliği, konuların elverdiği

zamanlama içinde sunulup, bu bilimin toplumları araç gereç yönünden zenginleştirerek insanların rahat yaşamalarına katkıları dile getirilmelidir. Öğrencilerin, bu bilimin pratikteki yararlarını anlamaları sağlanmalıdır. Matematikle doğa, toplum, insan arasındaki organik bağ, dolayısıyla bu bilimle doğa, tinsel ve toplumsal bilimlerin ilişkileri anlatılmalıdır. Matematiğin tüm olaylarda, onları inceleyen bilimlerdeki etkinliği kavratılmalı ve önemi sergilenmelidir. Buradaki amaç, öğrencilerin her alandaki bilgilerinin bir bütün oluşturarak kültüre dönüşmesini sağlamaktır.

### 1.3 Kavram Yanılgılarının Doğası

Matematik öğretmenleri ve araştırmacılar bir dizi yeni bulguların önemi üzerinde anlaşmaya başladılar. Yeni araştırmaya göre, birçok öğrencinin matematik hakkında kavram yanılgıları –bazen "acemice teoriler" (naive theories) de denir- var. Bu kavram yanılgıları onları beceriksiz öğrenciler haline getiriyor (Jose, 1989).

Öğrenciler sınıfa "boş tahta" (blank slates) olarak gelmezler (Resnick, 1983). Onun yerine, onlar günlük hayat deneyimlerinden oluşmuş teoriler ile gelirler. Onlar aktif olarak bu teorileri oluştururlar. Bu, tüm başarılı öğrenmeler kadar çok önemli ve can alıcı bir etkinliktir. Bu teorilerin bazılarını öğrenciler dünyayı anlamlı kılmak için kullanırlar. Bununla birlikte, tamamlanmamış yarım doğruları da kullanırlar. Bunlar "kavram yanılgıları" dır.

Kavram yanılgıları iki sebepten dolayı problemdir. Birincisi, öğrenciler yeni deneyimleri yorumlamak için onları kullandıkları zaman, öğrenmelerini engelliyor. İkincisi, öğrenciler edindikleri kavram yanılgılarına duygusal ve zihinsel olarak bağlanıyorlar. Çünkü onları aktif olarak oluşturmuşlardır. Bundan dolayı, öğrenciler öğrenmede zararlı etkileri olan kavram yanılgılarını gönülsüz olarak bırakıyorlar.

Bu bulgular ne anlama geliyor? Bu bulgular öğretmenlere, öğrencilerin hemen hemen her zaman, yakın gelecekte işlenecek konular hakkında karmaşık

fikirler ile sınıfa geldiklerini gösteriyor. Ayrıca, ders tekrarı yapılması ve dersin açıkça anlatılması şeklinde önerilerde bulunulmasının, muhakemelerini güçlü bir şekilde sahip oldukları kavram yanılgıları üzerine kuran öğrencilere faydası olmayacaktır (Champagne, Klopfer & Gunston, 1982; McDermott, 1984; Resnick, 1983). Doğrusu şu ki, bir kavram yanılgısının üstesinden gelen öğrenciler, çoğunlukla sıradan derslerden sonra, yalnızca çok kısa bir zaman sonra ona geri dönüyorlar.

Temel matematikte olduğu kadar yüksek matematikte de birçok kavram yanılgıları vardır. Yapılan tartışmalar bazı yaygın kavram yanılgılarının değiştirilmesini zor olduğunu göstermiştir. Aslında, Benander ve Clement 'in (1985) belirttiği gibi, araştırmacılar böyle birçok kavram yanılgılarının olduğu bir katalog da geliştirmişlerdir (Aktaran: Jose, 1989).

### 1.4 Kavram Görüntüsü ve Kavram Tanımı

Bir kavram ismi gördüğümüzde veya duyduğumuzda zihnimize bir uyarıcı gelir. Kavram ismi aklımızda bazı şeyleri çağrıştırır. Genellikle, bu, kavram tanımı değildir. Hatta kavramın da bir tanımı vardır. Buna "kavram görüntüsü" denir (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983). Başka bir deyişle "kavram resmi" denir (Davis, 1984).

Kavram imajı, kafamızdaki kavram ismiyle ilişkili sözsüz bir şeydir. Kavram görsel betimlemelere sahip olduğu takdirde, kavramın görsel bir betimlemesi olabilir, aynı zamanda bu izlenimlerin veya deneyimlerin bir birleşimi de olabilir. Kavram ismiyle ilişkili görsel betimlemeler, zihinsel resimler, deneyimler ve izlenimler sözel biçimlere dönüştürülebilir. Ama şunu da unutmamak gerekir ki, bu sözel biçimler zihinde çağrışım yapan ilk şeyler değildir. Bunlar sadece daha sonraki aşamada akla gelir. Örneğin, $y = f(x)$ ifadesini anımsadığınızda, bir fonksiyonun grafiğini gözünüzde canlandırabilirsiniz, $y = x^2$ , $y = \ln x$ , $y = \cos x$ gibi özel fonksiyonları düşünebilirsiniz. O halde, kavram imajının belirli kişilerle ilişkili olduğunu söylemek

mümkündür. Ayrıca, aynı kişi farklı durumlarda kesin olan bir terime (kavram ismi) farklı şekilde tepki gösterebilir.

Bir kavramı edinmenin bu kavram için bir kavram imajı oluşturmak anlamına geldiğini zannederiz. Bir kavramın tanımını bilmek kavramı anlamanın garantisi değildir. Anlamak, kavram imajına sahip olmak anlamına gelir. Günlük hayatta bazı kavramlar, tanımlar verilerek açıklanır. Bu tanımlar kavram imajı oluşturmaya yardımcı olurlar. Ama kavram imajı oluştuğu an, bu tanımlar çok gerekli olmaz, hatta unutulur. Genelde, kavram oluşturmada tanımın rolü "yapı iskelesi metaforu" ile açıklanır. Bir binanın yapımı bittiğinde, yapı iskelesi kaldırılır.

Teknik bağlamlarda, tanımlar son derece önemli roller oynayabilirler. Sadece kavram imajı oluşturmaya yardımcı olmazlar, kavramaya ve idrak etmeye ilişkin ödevlerde de çoğu kez çok önemli rol oynarlar. Onların, kavram imajı tarafından hazırlanan birçok tuzaktan sizi koruma gücü vardır. Örneğin, size kapalı bir aralıkta bir fonksiyonun en büyük değeri (maximal value) sorulduğunda ve siz yerel maksimuma benzeyen bir grafik hatırlayıp, fonksiyonun türevini sıfır yapan değerleri bulmak için fonksiyonun türevini almaya çalıştığınızda, kapalı bir aralıkta maksimal (en yüksek) değerin açık tanımı, yerel maksimumlardan farklı başka olasılıkların olduğunu düşünmenize yardımcı olacaktır. Zaman zaman yanılmaları engelleyecektir. Tanıma başvurmamak birçok öğrencinin kafasında maksimal değer kavramı ile ilişkili türev alma tekniği üzerinde bir saplantıya neden olacaktır. Tabiki, türev alma tekniği birçok durumda istenilen sonuçlara götürür, ama hepsinde değil.

Vinner ve Dreyfus (1989), öğrencilerin teğet kavramına ait muhtemel sahip oldukları kavram imajlarını açığa çıkarmak amacıyla bir araştırma yapmışlardır. Araştırmaya fakülte birinci sınıfta olan ve fen bölümünde (matematik bölümü öğrencisi olmayan) öğrenim gören 278 öğrenci katılmıştır. Araştırmacılar, öğrenciler teğeti, ya kesenlerin bir limiti olarak ya da eğimi belli bir noktadaki türevi olan fonksiyonun grafiği ile ortak bir noktaya sahip olan bir doğru olarak tanımladıklarını, fakat, öğrencilerin sadece yüzde 41 'i derslerde açıklanan tanımlardan birini cevap olarak verdiğini, yüzde 35 'nin ise, çembere teğet durumuna uyan tarifler verdiğini

tespit etmişlerdir. Bu öğrencilerin, teğetin eğriye dokunduğu, ama onunla kesişmediği, eğriye değdiği, ama onu kesmediği veya eğri ile ortak bir noktaya sahip olduğu, ama eğrinin tek bir kenarı üzerinde olduğu şeklinde iddialarda bulunduklarını, diğer öğrencilerin ise tanım yapmadıklarını ya da anlamsız tanımlar yaptıklarını da belirtmişlerdir. Ayrıca, öğrencilere bazı özel fonksiyonlar verilip, kritik noktalarından fonksiyona teğet çizmeleri istendiğinde ise, doğru cevapların yüzdesi ortalama yüzde 13 olmuştur. Bu araştırmanın bulguları, öğrencilerin kavramların tanımına önem vermelerine rağmen, formal tanımların kullanılması gerekli olan sorular (ödevler) üzerinde çalıştıklarında, birçoğunun onları kullanmadıklarını göstermiştir. Bu sonuç, bizi iki zıt yargıya götürebilir:

1. Öğrencilerin düşünme alışkanlıklarını, günlük yaşam tarzından teknik tarza değiştirme amacından vazgeçme.

2. Öğrencilerin düşünme alışkanlıklarını uygun ve yerinde bir davranışla değiştirmeye çalışma.

### 1.5 Türev Kavramı

Türevin iki önemli özelliği vardır. Bunlardan birisi geometrik görünümlü olanı, diğeri de hesapla elde edilen formülüdür. Türevin çok sayıda uygulaması vardır. Bu uygulamalar başta matematik olmak üzere fizik, kimya, mühendislik, teknoloji, temel bilimler, ekonomi ve diğer alanlar olarak sayılabilir. Türevin halen yeni uygulama alanlarına yöneldiği de söylenebilir.

Bir eğriye üzerindeki bir noktadan teğetin çizilmesi ve bu teğetin denkleminin bulunması türevin temel çıkış noktasıdır. Yani, verilen bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimi bulunabilirse, bu eğim bu teğetin x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açının tanjantına eşit olur ve eğimi verilen doğrunun eğri üzerinde verilen noktadan teğetinin çizimi yapılabilir. Teğetin çizimi için teğetin bu noktadaki

eğiminin bilinmesi yeterlidir. Öyleyse bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilecek teğetin eğimini bulma problemi karşımıza çıkar.

Euclides (İ.Ö. 300), bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin, bu noktadan geçen eğrilik çemberinin yarıçapına dik olacağını göstermiştir. Fakat bu ispat yöntemi geometrikseldir. Hesaplamalar işin içine sokulamamıştır. Daha sonra Archimedes (İ.Ö. 287–212), kendi ismiyle anılan Archimedes yayına teğet olan doğrunun çizimi için bir yöntem getirmiştir. Apollonius (İ.Ö. 262–190), parabol, elips ve hiperbollere teğet çizimlerinin yöntemlerini vermiştir. Bu çizimlerin tümü geometrikseldir ve genel olmaktan uzaktır. Çünkü bu tür eğriler matematiğin çok özel hallerini içeren eğrilerdir. Bu nedenle Yunanlılar bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğeti bulamamışlar, diğer bir deyişle bu teğeti çizememişlerdir. Bunu gösteren genel bir teoremi de bulamamışlardır (Dönmez, 2005).

Bugünkü türev kavramının, hareket ve hızlarla ilgili bir problem olduğunu, yani ani hızın bugün bilindiği gibi yolun zamana göre birinci türevi olduğunu Newton (1642–1727) bulmuştur. Yolun kısa zamanda değişiminin bu süre içinde değişen zamana bölümünün, bu zamanın sıfıra giderken limiti olduğunu Newton görmüştür. Bugünkü modern dille söylersek, yolun zaman göre birinci türevi hız ve hızın zamana göre birinci türevinin de ivme olduğunu Newton formülleştirmiştir. k sabiti ve $n = 2,3,4,...$ için $y = kx^n$ şeklindeki eğrilerin türevlerini, bir eğriye üzerindeki bir noktadan çizilen teğetinin eğimi eğrinin bu noktadaki türevine eşittir teoremini ve birinci türevin sıfır olduğu noktalarda eğrinin maksimum ve minimum değerler alacağını yine Newton bulmuştur.

### 1.6 Araştırmanın Problem Cümlesi

Matematik eğitiminde türev öğrenimi ve öğretimi ile ilgili sorulmuş bazı etkin sorular ve cevapları hakkında öğrencilerin ve öğretim elemanlarının görüşleri nelerdir?

### 1.7 Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı, temel matematikten aldığı fikirleri daha genel durumlara genişleten ve yüksek matematiğin temelini oluşturan kalkülüsün türev konusu ile ilgili "Ask Dr. Math." adlı uluslararası İnternet sitesine sorulmuş sorulardan bazı etkin olanları ve bunlara verilen cevaplar hakkında, öğrencilerin ve öğretim elemanlarının görüşleri alınmak suretiyle, kavram yanılgılarını, kavramlardaki eksiklikleri ve değişik yaklaşımları ortaya çıkarmaktır.

Ayrıca çalışmanın bir diğer amacı da, araştırma sonucunda elde edilecek verilerin ışığında, matematik öğretmen adaylarının, öğretmenlerin, öğretim elemanlarının ve öğrencilerin çalışılan konulara dikkatlerini çekmek ve önerilerde bulunmaktır.

### 1.8 Araştırmanın Önemi

Okulda öğrenilen bilginin uygulamada öğrenilen bilgi ile gerçek bütünleşmesi eğitimcilerin mevcut kavramlarını ve inançlarını sorgulamakta ve aynı zamanda da entelektüel olarak yeniden yapılaşmayı desteklemektedir. Çünkü Leinhardt, McCarthy Young ve Merriman' ın (1955) söyledikleri gibi böyle bir bütünleşme, öğrencilerden soyut teorileri özele indirgemelerini, özel durumlardan da ilkeleri türetmelerini isteyerek, bir durumda öngörülen düşünce tarzını başka durumlarda kullanma ile ilgili bilginin yakından değerlendirmesini içermektedir. (Even, 1999).

Yüksek matematiğin temeli olan ve fizik, kimya, mühendislik, ekonomi, astronomi, işletme gibi bilim dallarının da geniş şekilde yararlandığı kalkülüs konularını (limit, türev, integral gibi ) öğretirken ve öğrenirken değişik kavram yanılgılarının ve kavramlardaki eksikliklerin yaşandığı süreçler vardır. Bu durumda, konunun anlaşılmasında ve kavramların zihinde anlamlı bir şekilde yapılanmasında zorluklar oluşmakta veya konu hiç anlaşılamamaktadır. Dolayısıyla, öğrenme hedefi tam olarak gerçekleşememektedir.

Kalkülüs, ileri düzeyde matematiğin başlangıcıdır ve ileri konuların anlaşılmasında temel oluşturmaktadır. Ubuz (1999) kalkülüs ile ilgili araştırma yapılmasının başlıca nedenlerini, ezbere işlem uygulamalarına yönelik eğilim, kavramsal anlamdaki yetersizlik ve ileri matematik öğretim ve öğrenimindeki kaliteyi yükseltmek olarak belirtmektedir.

Kavramsal anlama veya kavram oluşumu, kavramaların gelişimi ve onların matematiğin temel ilişkileri çerçevesinde toplanmaktadır. Ubuz (1999), öğrencilerin genel matematik yöntemlerini tamamen zayıf kavram imgeleri üzerine kurulan algoritmik düzeyde öğrendiklerini, gözde canlandırmanın nadir olarak yapıldığını, eğer yapılırsa görsel-grafiksel ve çözümsel-cebirsel gösterimler arasında bilişsel bağlantının büyük bir problem yarattığını yaptığı araştırmalarla ortaya koymuştur. (Aktaran: Çolak, 2002)

Ferrini-Mundy ve Lauten (1999), fonksiyonlar grafik olarak verildiği zaman, öğrencilerin grafiklerde verilen bilgiyi kullanmaktan çok fonksiyonları belirleyen bağıntıları bulduktan sonra türevleri almayı tercih ettiklerini ifade ediyorlar. Bu tercihin nedeni, öğrencilerin istediği yöne istediği şekilde yönlendirebileceği etkinlikleri yorumlayıcı etkinliklerden daha kolay bulmalarıdır. Böyle konuları araştıran çok az çalışmalar vardır ve bunlardan pek çoğu ilköğretim konuları hakkında matematik öğretme ve öğrenme ile ilgilidir. Matematik öğretiminde özel ve genel durumlar arasındaki ilişki üzerinde durulmamıştır. Hâlbuki özel konuları içeren araştırmalar matematik öğretme anlayışımızı arttırır.

Bu bağlamda, dünyanın çeşitli ülkelerindeki öğretmen ve öğrencilerin türev konusu ile ilgili "Ask Dr. Math" adlı uluslararası bir İnternet eğitim sitesine sordukları sorulardan bazı etkin olanları ve bunlara verilen cevaplar hakkında öğrencilerin ve öğretim elemanlarının görüşleri alınarak, bazı kavram yanılgılarının ve kavramlardaki eksikliklerin neler olabileceği ve değişik yaklaşımların ortaya çıkarılmasının önemli olduğu düşünülmektedir. Araştırma sonunda elde edilen bulguların matematik öğretimi ve öğrenimi için rehber niteliğinde olması hedeflendiğinden, türev öğretimi ve öğrenimine farklı bir bakış açısı getireceği

umulmaktadır. Eğer, öğretmenler ve öğretim elemanları burada incelenen konulara dikkat çekerlerse, öğrencilerin kavramsal olarak anlamalarını ve kalıcı öğrenmelerini sağlayabilirler.

### 1.9 Araştırmanın Sınırlılıkları

Araştırmaya ilişkin sınırlılıklar aşağıda maddeler halinde belirtilmiştir.

1. Araştırmaya katılan öğrencilerin ve öğretim elemanlarının kimlikleri gizli tutulmuştur.

2. Araştırma, yapılan görüşmelerle sınırlıdır.

3. Türev konusu ile ilgili "Ask Dr. Math." adlı uluslararası İnternet sitesine sorulmuş sorulardan sadece 12 tanesi ile sınırlıdır.

# BÖLÜM 2

# İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde, matematik eğitiminde türev öğrenimi ve öğretimi ile ilgili yapılan araştırmalara yer verilmiştir.

## 2.1. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Yapılan Araştırmalar

Orton (1980), İngiltere ‘de yaşları 16 ‘dan 22 ‘e kadar olan matematiği seçmiş ve kalkülüs ile ilgili en az bir ders almış 110 öğrenciyle (öğrencilerin 60 ‘ı ortaöğretim son sınıfta, 50 ‘si lisede öğrenim görüyor.) bireysel görüşme şeklinde deneysel tabanlı ergenlerin ve genç yetişkinlerin temel kalkülüsü anlamalarına yönelik bir çalışma yapmıştır. Görüşmede sunulan farklı ödevleri, herbiri sadece temel kalkülüsün bir yönünü içeren, analizdeki konular ile gruplandırmış, cevapları değerlendirerek öğrencilerin her konu ile ilgili başarı seviyesi hakkında global (dünya çapında) bir fikir edinmiştir. Donaldson ‘un (1963) çalışmasını takiben, Orton hataları, “ yapısal hatalar”, “uygulama hataları” ve “keyfi hatalar” şeklinde üç kategoride sınıflandırmıştır. Yapısal hataların, çözüm için bazı temel prensipleri anlamaya veya problemdeki gerekli ilişkileri kavramaya dair bazı başarısızlıktan, keyfi hataların, konunun keyfi olarak ele alınmasından ve şart koşulan sınırlamaları hesaba katma başarısızlığından ve uygulama hatalarının konunun gerekli olan prensiplerinin anlaşılmış olmasına rağmen işlemleri gerçekleştirmedeki başarısızlıktan kaynaklandığını tespit etmiştir. (Aktaran: Artigue, 1991).

Aynı türden olan matematik ve fizik bilim dallarında, öğrencilerin kavrayışlarını araştırmak için, matematik eğitiminden iki fizik eğitimden bir ekip, üniversitenin ilk iki yılındaki mevcut eğitim uygulamalarının etkilerini araştırma çalışmasında işbirliği yapmışlar. (Alibert ve diğerleri, 1987; Artigue ve Viennot, 1987; Artigue ve diğerleri, 1989). Araştırmacılar, kavramların tarihi gelişiminin ve

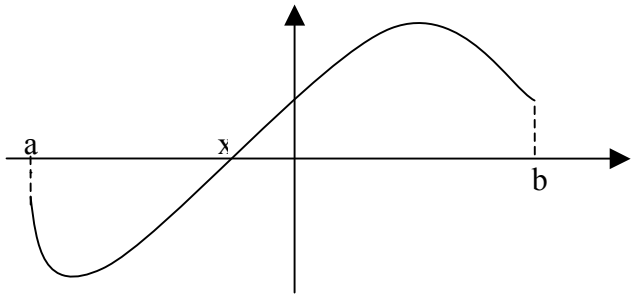
nasıl öğretildiğinin analizi, bireysel görüşmelerle birlikte matematiksel ve fiziksel bakış açısından yaklaşık 10 anket formu ile öğrenci ve daha küçük kapsamda öğretmen anlayışlarının analizi ve deneme ile bilginin değerlendirilmesi ve bilginin sırası olmak üzere çalışmalarını üç yönde yürütmüşlerdir. Tarihsel gelişimin analizi, öğrenci kavrayışlarının analizi için üç yönde fikir uyandırmıştır:

1.) Diferansiyel hesabın faydaları ve önemi ve diferensiyel hesabın yöntemleri,
2.) Yaklaştırma ve muhakeme yapmada yaşanılan zorluk,
3.) Diferansiyel hesabın elemanlarının rolü.

Birinci madde için, 85 üçüncü sınıf üniversite öğrencisi tarafından doldurulan matematiksel anket formları, açıklama safhası (öğrencilerin kavramları nasıl tanımladığı) ve işlem safhası (öğrencilerin kavramları nasıl uyguladığı) arasında önemli bir farkı açığa çıkarmıştır. Açıklama safhasında, teğet lineer yaklaştırma diferansiyelinin hâkim olduğu ve dersteki tanıma uygun hareket edildiği, işlem safhasında ise, diferansiyelin işlevsel rolünü kaybettiği ve yaklaştırmanın konumunun ortadan kalktığı, yerine parçalı türevleri ve Jacobian matrislerini kullanan cebirsel algoritmalar getirildiği tespit edilmiştir. İkinci madde için, yaklaştırmaların (approximations) açıklanmasına yönelik matematik anketlerinde genel olarak istenenler yetersizce cevaplandırılmış ve öğrenciler direk alıntı yapılan klasik teoremlerle çözemedikleri sürece, "ders programı harici (off the syllabus)" diye düşünmüşlerdir. Özel örneklerde, öğrencilerin açıklamaya çalıştığı yaklaştırmaların yarıdan fazlasının yanlış, verilen cevapların geri kalanlarının da hatalarla dolu olduğu görülmüştür. Üçüncü madde için ise, açıklama seviyesinde matematik öğrencilerince diferansiyellerin işlevsel rolünü sunmanın zor olduğunu, çeşitli sorulara verilen cevaplarda diferansiyellerin üçte birinden daha azının fonksiyon şeklinde olduğunu ve kavram ile birleştirilen geometrik şekillerin zayıf ve bir boyutla sınırlı olduğunu anketlere verilen yanıtlar göstermiştir. (Aktaran: Artigue, 1991).

Orhun (2003), cinsiyete göre fonksiyon, limit ve türev konularında öğrencilerin bilişsel davranışlarını tespit etmek amacıyla bir araştırma yapmıştır. Araştırma, 2000–2001 eğitim öğretim yılında Eskişehir 'deki Gazi Lisesinin 11 nci sınıfında okuyan 58 erkek ve 67 kız öğrencinin katılımıyla yürütülmüştür. Verileri 18 tane açık uçlu sorudan oluşan bir test ile elde etmiştir. Analizin sonunda, erkek ve kız öğrenciler arasında "tanım bilgisini edinme", "kavrama", "analiz", "sentez", ve "bilişsel davranışları değerlendirme" basamaklarında önemli farkların olduğu, ama "bilişsel davranışları uygulama" basamağında önemli farkların olmadığı ve genel olarak, öğrencilerin türevin anlamını öğrenmekten ziyade bir kural olarak verilen matematiksel ifadenin türevini elde etme yeteneği kazandıkları görülmüştür.

Türev konusunda sistematik hataların açıkça belirtildiği çalışmada, $f(x) = 2x^2 + 3x$, $f'(x) = 4x + 3$, $f'(2) = 11$ şeklinde verilen ifade için "11 sayısının geometriksel anlamını açıklayınız." sorusuna verilen doğru cevapların oranı ortalama yüzde 10 olmuştur. Çalışmada, "$f$, $(a,b)$ açık aralığında türevlenebilir ve $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olsun. Ayrıca, "aşağıdaki şekilde verilen grafik fonksiyonun türevinin grafiği ise, fonksiyon hangi aralıklarda artandır ve hangi noktalarda maksimumu ve minimumu vardır?" şeklinde sorulan bir başka soruya verilen doğru cevapların sayısı ise ortalama yüzde 2 gibi daha düşük çıkmıştır. Öğrenciler, türev fonksiyonunun grafiğini fonksiyonun grafiği olduğunu sanmışlar ve bir fonksiyonu verildiğinde ekstremum noktalarını bulabildikleri halde, türev fonksiyonunun grafiği üzerinde bu noktaları bulmada güçlük çekmişlerdir.




**Şekil 1:** Türev fonksiyonunun grafiği

Sorulara verilen cevaplardan, öğrencilerin türev kavramını tam olarak öğrenmedikleri, öğrenme yöntemini işlem olarak gördükleri ve kazanılan bilgilerin analiz, sentez ve değerlendirme aşamalarında kullanılmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Araştırmacılar üstü kapalı bir şekilde, öğrencilerin kalkülüs kavramlarını kavramsallaştırmada önceki deneyimlerin öneminden bahsetmişlerdir (Hauger, 1997; Nemirovsky & Noble, 1997; Speiser & Walter, 1996; Thompson, 1994; Thompson & Thompson, 1994). Bu önceki deneyimlerin birçoğu fizikseldir ya da fizik kavramları ve fikirleri içerir. Bu sonuç şaşırtıcı değildir, çünkü matematik ve fiziğin uzun bir geçmişe dayanan sağlam bağları bulunmaktadır. Fizik eğitimi literatüründe öğrencilerin sezgisel fizik bilgileri hakkında zengin bir araştırma temeli görülmektedir (McClosky, 1983; McDermott, 1984); bununla birlikte, öğrencilerin beraberlerinde ikinci ve üçüncü kalkülüs derslerine getirdikleri deneyime dayalı kaynaklara dair nispeten çok az araştırma bulunmaktadır. Nemirovsky ve arkadaşlarının yaptığı giderek artan sayıda araştırma ise dikkate değer bir istisna oluşturmaktadır. Bunların birçoğunda fiziksel aygıtlarla öğrencilerin matematiksel fikirlerden anlam çıkarmaları arasındaki karşılıklı etki belgelenmektedir.

Monk ve Nemirovsky (1994), bir lise öğrencisiyle ilgili bir durum çalışması (vaka incelemesi) ve onun bir görüşme sırasında bir grafik durumuna dair bilgisinin incelik kazanmasını aktarmıştır. Öğrenci, Air Flow Device denen fiziksel bir alet kullanmıştır; amacı Air Flow Device'tan geçen havanın akış oranı ve hacminin grafiklerini çizmektir. Yazarlar doğrudan fiziksel bir aletle çalışmanın, öğrenciye söz konusu aletle yaptığı kendi denemeleri çerçevesinde grafikleri yorumlama fırsatı sağladığını bulmuşlardır. Gerçekte, öğrenci ilk görüşme sorusunu doğrudan Air Flow Device'a gönderme yaparak yanıtlamış ve bütün görüşme boyunca Air Flow Device'a ve o aletle etkileşimine açık göndermeler yapmaya devam etmiştir.

Nemirovsky ve Noble (1997), Counter Analyzer denen bilgisayar temelli bir aleti kullandıklarını bildirmişlerdir; bu alet öğrencilerin eğim bilgisini incelemek için aynı anda yükseklik-mesafe ve eğim-mesafe grafikleri çizen bir alettir. Denemelerden birinde, bir öğrenci negatif eğimli bir yükseklik-mesafe grafiğinin

niçin bir eğim-mesafe grafiğindeki *x* ekseninin altında kalan bir fonksiyona karşılık geldiğini doğrulamada zorluk yaşamıştır. Öğrenci, dikey artışa karşı yatay artış şeklinde bir eğim tanımı kullanarak grafikleri doğrulamaya çalışmış, ama fizik dersinde negatif hız ölçtüğü bir hareket algılayıcıdan yararlanarak önceki deneyimleriyle bir bağ kurmuştur. O durumda öğrenci bir fizik dersindeki hareket algılayıcıları ve hız grafikleriyle olan geçmiş deneyimlerine dayanarak ödevde başarılı bir şekilde akıl yürütebilmiştir. Yazarlar bu öğrencinin hareket algılayıcıyla deneyimlerini yeniden hatırlamasının basit bir şekilde bilginin hatırlanması olmadığını, "geçmiş deneyimlerin bir yeniden uyanışı" olduğunu ileri sürmüşlerdir. Bu olay fiziksel durumlarda kalkülüs kavramlarıyla etkileşimlerin öğrenciler için basit bilgi parçalarından çok duyuların yeniden canlanabildiği deneyimlere ilişkin anılar olduğunu akla getirmektedir.

Zandieh (2000) hem kalkülüs ders kitaplarındaki türev tartışmalarını analiz ederek hem de insanların türev kavramı hakkında konuşma biçimlerini dinleyerek öğrencilerin türev bilgisini analiz etmek için bir çalışma çerçevesi geliştirmiştir. Zandieh'in iki boyutlu çalışma çerçevesi dört temsil ya da bağlamdan oluşmuştur: (a) grafiksel – teğet doğrunun eğimi; (b) sözel – anlık değişim oranı; (c) paradigmatik fiziksel – hız ya da sürat; ve (d) sembolik – farklı bölümün limiti ve üç işlem-nesne katmanı: (a) oran; (b) limit; ve (c) fonksiyon. Zandieh'in çalışma çerçevesi, öğrencilerin türev kavramını anlamalarının görsel bir organizasyonunu sağlamış ve çapraz-öğrenci karşılaştırmalarını kolaylaştırmıştır.

Marrongelle (2004), birleştirilmiş bir kalkülüs ve fizik sınıfındaki üniversite öğrencilerinin kalkülüs problemlerini çözmede kendilerine yardımcı olması için fiziği nasıl kullandıklarını araştırmak amacıyla bir çalışma yapmıştır. Öğrencilerin kalkülüs ödevleri üzerinde çalışırken fizik fikirlerini kullandıkları farklı yolları araştırmak için bir durum çalışması kullanılmıştır. Veriler, bir devlet üniversitesinin 2000-2001 akademik yılında 8 birinci sınıf ICP (İntegrated Calculus and Physics) öğrencisinin her biriyle yapılan dört ayrı bireysel görüşme, sınıf katılımı-gözlemi ve öğrencilerin ev ödevleri ve sınavlarından elde edilen verilerin triangülasyonuyla (verilerin analizinin sağlamasını yapmak) toplanmıştır. Birleşik Kalkülüs ve Fizik

müfredat programı üniversitelerde fen, matematik ve mühendislik asıl branşları için düzenlenmiş yıl boyu süren bir programıdır. Çalışmanın ana sonucu ortalama oranda değişim, türev ve integral kavramlar içeren ödevlerde, öğrencilerin fiziği kullanma biçimlerini karakterize etmek için kullanılan dört kategoriden oluşan bir araç olan Fizik Kullanımı Sınıflandırma Planı olmuştur. Kategoriler şu şekilde tanımlanmıştır:

| **Fizik Kullanımı Sınıflandırma Planı** | |
|---|---|
| **Fizik Kullanımı** | **Tanım** |
| Bağlamlaştıran | Öğrenci matematik problemlerini çözmek için fiziksel bir bağlam ortaya koyar. Öğrenci, kapsanan problemlerle ilgili olarak, onları çözmek için fiziksel bağlamda kanıtlar gösterir. |
| Örnek -Kullanan | Öğrenci, kendisine kalkülüs kavramlarını ve problemlerini anlamaya yardım edecek fizik örneklerini aklına getirir. Öğrenci eldeki problemlerden kopuk olarak fizik hakkında konuşur ve genelde fiziği cevabın doğruluğunu göstermek için kullanır. |
| Dil -Karıştıran | Öğrenci kendi çözüm metotlarını anlatırken hem fizikten hem de matematikten ifadeler kullanır. Bu sınıflandırma, öğrenciyi diğer bir kategoriye koymak için yeterli kanıt yoksa kullanılır. |
| Kullanmayan | Öğrenci kalkülüs ödevlerini çözmek için, hiçbir şekilde kayıt edilebilir sözlü ya da yazılı yol olarak fizik kullanmaz. |

Araştırmada, Bağlamlaştırıcı olarak sınıflandırılan öğrencilerin imgelenmiş ya da yeniden yaratılmış fiziksel olaylarla grafiğin karakteristikleri arasında daha esnek bir şekilde hareket edebildikleri ve öğrencilerin fiziksel olayları hatırlayarak ya da imgeleyerek matematiksel temsillerin yanı sıra grafikleri de anlamaya başladıkları sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca, öğrencilerin kalkülüs problemlerini çözerken fizik ve matematik arasında başarıyla bağlantı kurmaların ICP müfredat programının sonucu olduğu da belirtilmiştir.

Gravemıjer ve Doorman (1999), "Gerçekçi matematik eğitiminde bağlam problemleri: örnek olarak bir kalkülüs dersi" adlı çalışmalarında, gerçekçi matematik eğitimi (realistic mathematics education/RME) olarak bilinen Hollanda yaklaşımında kullanıldığı biçimiyle bağlam problemlerinin rolünü araştırmışlar ve öğrencilere *formal matematikle ciddi bir şekilde ilgilenmeleri konusunda nasıl yardımcı olabiliriz?* sorusuna cevap aramışlardır. RME'de bağlam problemlerinin amacı,

öğrencilerin formal matematikle ciddi bir şekilde ilgilenmelerini sağlayan bir yeniden keşfetme sürecini desteklediği vurgulanmıştır. Bu yaklaşım öncelikle bir öğretimsel-tasarım bakış açısından tanımlanmıştır. Öğretimsel tasarımcı geleneksel matematiğin yenilenebileceği bir yolu yorumlamaya çalışılmış ve bu tür bir yenileme yolu öğrencilere aşamalı matematikleştirmeye yönelik fırsatlar sunacak bağlam problemleriyle döşenmiştir. Bağlam problemleri problem durumunun öğrenciye deneyimsel açıdan gerçek olduğu problemler şeklinde tanımlanmıştır. İlkokul matematiği için geliştirilmiş olan bağlam problemleri ve modellemenin kullanıldığı, aynı zamanda kalkülüs gibi ileri düzey bir konuya da uyan keşifsel tasarıma dayanan teoriyi göstermek için bir kalkülüs dersine yönelik bir RME tasarımı örnek alınmıştır. Rol modellerinin konumlanmış etkinliğin bir *modelinden* matematiksel akıl yürütmeye *yönelik bir modele* doğru geçişte rol oynayabileceği keşifsel RME 'e özellikle dikkat edilmiştir. Araştırmada, bu yaklaşımın diğer birçok yaklaşımdan ayrı olduğu, sebebinin de öğrencilerin formal matematiği yenileyebileceği varsayımsal bir öğrenim yolu tasarımlayarak formal olmayan bilgiyle formal bilgi arasındaki ikiliği aşmaya çalışması olarak belirtilmiştir. Burada, öğretimsel tasarımın genel amacının ortak olarak kabul edilen matematiksel bir gerçekliğin derece derece ortaya çıkışını desteklemek olduğu ve öğrenciler matematiğin yenilenmesi sürecini sağduyunun gelişmesi olarak deneyimlerlerse, günlük yaşam deneyimleriyle matematik arasında hiçbir ikilik yaşamayacakları sonucu ortaya çıkmıştır.

Cohen, Cuypers, Jibetean ve Spanbroek (2006), matematiksel kalkülüste çeşitli problemlerin sınırlı sayıda kural uygulanarak tekrarlamalı bir şekilde çözülebileceği, genel bir çözüm stratejisi çıkarılabileceği ve bir eğitmenden daha iyisini yapmaya çalışan interaktif bir alıştırma sisteminin hayata geçirilebileceğinden yola çıkarak, kendileri tarafından geliştirilen yazılımın bu interaktifliği gerçekleştirmek için nasıl kullanılabileceği gösterilmiştir. Özellikle, temel fonksiyonların türevini hesaplamak için genel bir alıştırmanın uygulanması sunulmuştur ( $Sin\left(x^2+x\right)$ gibi). Bu yöntemin matematiksel kalkülüsteki diğer problemlere uygulanabilirliği tartışılmıştır. İnteraktif bir alıştırmada, araştırmacıların

stratejisi orijinal problemi daha basit alt problemlere ayrıştırmak, böylelikle çok adımlı bir alıştırma elde etmek olmuştur.

Schwalbach ve Dosemagen (2000), "Öğrencinin Anlamasının Geliştirilmesi: Kalkülüs Kavramlarının Bağlamlaştırılması" adlı araştırmalarında, öğrencilerine kalkülüsün soyut terimlerinin incelendiği bağlamsal olarak zengin bir ortam vermek için fizik dersinden somut örnekler sunan bir lise öğretmeninin uygulamasını incelemişlerdir. Bu niteliksel çalışmada öğrencilerin anlamaları analiz edilmiş ve anlamanın üç yönü temel alınmıştır: öğrencilerin kavramları ve yöntemleri açıklama, kavramları bir fizik bağlamında uygulama ve kendi öğrenimlerini araştırma yeteneği. Çalışmanın amacı, hazırlanan fizikle ilişkili bağlamların öğrencilerin kalkülüsü anlamalarını, özellikle fonksiyon, türev ve ters türev kavramlarını nasıl geliştirdiğini araştırmak olmuştur. Çalışma, Amerika 'nın orta batıdasındaki bir eyalette büyük, kentsel, kapsamlı, dini eğitim veren bir okuldaki 22 erkek ve 10 kız öğrenci olmak üzere toplam 32 lise son kalkülüs sınıfı öğrencinin katılımıyla yapılmıştır. Bu öğrencilerin 29'u aynı zamanda başarılı öğrencilerin oluşturduğu fizik sınıfına da kayıtlıdır. Bu çalışmada üniversiteden bir profesör, bir kalkülüs öğretmeni ve eğitimde yüksek lisans programını tamamlayan bir öğrenci de işbirliği yapmıştır.

Bu çalışmadan kavramları ve işlemleri açıklama yeteneğinin dört göstergesi ortaya çıkmıştır. Öğrenciler kalkülüs problemlerini çözmek için kullandıkları işlemi açıklayabilmişlerdir. Örneğin, bir nesnenin atıldığı yüksekliği belirlemek için ne yaptıklarını bir dinleyiciye anlatabilmişler, ayrıca probleme niçin o şekilde yaklaştıklarının temel ilkelerini açıklayabilmişlerdir. Öğrencilerin anlamalarını açıklama yeteneklerinin ikinci bir göstergesi onların fizik ve kalkülüsteki kavramlar arasındaki bağların farkına varmaları olmuştur. Öğrenciler konum, hız ve ivmeyi belirlemek için uğraşırlarken fonksiyon, türev ve ters türev gibi kavramlar yeni bir anlam kazanmıştır. Öğrenciler, açıklama olarak anlamanın üçüncü bir göstergesi olan, aynı problemin farklı gösterimlerini açıklama esnekliği geliştirmişlerdir. Öğrenciler problemleri sayısal, cebirsel, grafiksel ve sözel olarak açıklayabilmişlerdir. Açıklama olarak bu çalışmadan çıkan anlamanın dördüncü göstergesi çıkarım yapma yeteneği olmuştur. Öğrenciler bir problemin çözümünde

bir sonra ne ile karşılaşacaklarını önceden görebilmişler ve bu problem çözme stratejisini uygun zamanda kullanabilmişlerdir.

Anlamanın ölçütü olarak bağlamsal uygulama, başka bir deyişle öğrencilerin kalkülüs hakkında öğrendiklerini fizikle ilişkili çeşitli bağlamlara uygulama yeteneği incelendiğinde, öğrencilerin kalkülüs sınıflarının yanı sıra fizik sınıflarında da birçok problem çözerek bu yeteneği açıkça gösterdikleri görülmüştür. Bazen matematiksel modelin grafiğini çizmek ve bir eğrinin altında kalan alanı geometrik olarak hesaplamak gibi bir fizik yaklaşımı seçmişlerdir. Bazen de problemleri kalkülüs prosedürleri ile çözdükleri matematiksel modellere dönüştürmüşlerdir. Fizik, kalkülüsü öğrenciler için somut hale getirirken kalkülüs ise hesaplamalarda etkili yöntemler sağlamış ve öğrencilerin fizik kavramlarına dair bilgilerini derinleştirmiştir.

Anlamanın üçüncü yönü kendini tanıma olmuştur. Öğrenciler öğrenen bir kişi olarak güçlü ve zayıf oldukları yanları açıkça söyleyebilmişlerdir. Portföyler tutarak, öğrendikleri üzerinde derinlemesine düşünebilmişlerdir. Doğru biçimde ilerleme, bağımsız çalışma, kavramları açıklama, yaklaşım belirleme ve problemleri çabuk çözme, problem türlerini ayırma, çözümde güven sergileme ve probleme yönelik kuramsal bir temel görme yeteneklerini değerlendirmişlerdir. Anlamanın bu meta-bilişsel yönü öğrencilerin sürece dair farkındalıklarını ve kalkülüs yöntemlerini yerine getirirken kullandıkları temel ilke ve nedenleri açığa çıkarmıştır.

Aspinwall ve Shaw (2002), öğrencilerin çoğu zaman çok büyük ölçüde farklı kişisel ve bireye özgü gösterimler yapılandırdıklarını, bunun da farklı kavram bilgilerine götürdüğünü göstermek amacıyla bir çalışma yapmışlardır. Bu çalışmada yeni başlayan iki kalkülüs öğrencisinin birbirine karşıtlık gösteren düşünce süreçleri gösterilmiştir. Araştırmacıların açıklamalarına göre, Krutetskii (1976) bireylerin matematik işlemlerini analitik, geometrik ve armonik (uyumlu) şeklinde üç ana türe ayırmıştır: Bu öğrencilerden birinin şeması temelde geometrik, diğerinin de şeması temelde analitik olmuştur. Öğrencilere kalkülüs türev fonksiyonlarının grafik gösterimlerini içeren dörder ödev verilmiştir. Grafik olarak sunulan ödev verilmeden

önce, öğrencilerin türev fonksiyonlarını hesaplama formüllerini ne kadar iyi öğrendiklerini belirlemek amacıyla, öğrencilerden sembolik olarak gösterilen $f(x) = x^2 \sin x$ , $f(x) = \left(x^2 + 2x\right)^3$, ve $f(x) = \frac{3x}{2x+1}$ fonksiyonların türevlerini hesaplamaları istenmiştir. Her iki öğrenci de her ödevi kısa sürede başarıyla tamamlamış ve araştırmacılara problemlerin çok kolay olduğunu söylemişlerdir. Daha sonra öğrencilere yöneltilen dört sorunun analizi yapıldığında, araştırmacılar, öğrencilerin iki farklı gösterim tipi kullanmalarına rağmen, çeşitli farklı gösterim sistemlerinde iyice yerleşmiş olan bir fikrin farkına varma ve bu fikri bir gösterim biçiminden diğerine dönüştürme yeteneğinden yararlandıkları, birden fazla sayıda öğretimsel kavram gösterimlerinin olumlu bir sonucunun fikirleri sunmayı öğrenmekte olan öğrencilerin çeşitli diyagram, grafik, sembol ve denklemlerde akıcı olabildikleri ve öğrenciler matematiksel nesneleri farklı bakış açılarından oluşturup görebildiklerinde matematikte güç kazandıkları sonucuna ulaşmışlardır.

Schoenfeld, Smith ve Arcavi (1990), öğrencilerin eğim kavramını anlama ve inşa etme hakkında çok önemli, uzun dönemli, oldukça iyi düzenlenmiş bir çalışma yapmışlardır. Yazarlar, matematikte herhangi bir düzeyde çalışan pek çok kişinin – oldukça güçlü öğrenciler bile olsa – çok basit bir kavramda bile ciddi güçlükler yaşayabileceğini bulmuşlardır.

Orton (1983), öğrencilerin diferansiyel almadaki alışılmış (rutin) performanslarının yeterli olduğuna, ama türev kavramına dair sezgisel ya da kavramsal anlamanın çok az olduğuna dikkat çekmiştir. Orton aynı zamanda, öğrencilerin türevi grafik olarak yorumlamaları konusunda yaşadıkları güçlüklerin yalnızca daha karmaşık eğriler konusunda değil, düz doğrular konusunda da olduğunu bildirmiştir. Birçok öğrencinin (kendi çalışmasında aşağı yukarı %20) bir noktadaki türevi, ordinatla ya da teğet noktasının y-değeri (ikinci koordinat) ile karıştırdığını da bulmuştur.

Tufte (1989), bir "Kalkülüs Kavram Testi" kullanılarak üniversitede ilk yılında olan 200 kalkülüs öğrencisinin performansı hakkındaki bir çalışmanı bildirmiştir. Çalışmada, Tufte temel kalkülüs kavramları hakkında (örneğin, yaklaşımsal limitler, türevler ve Riemann toplamları yoluyla belirli integraller) programlar yazmak için haftada bir kez fazladan bir ders saati boyunca bir araya geldikleri bir kalkülüs dersini tamamlamış olan 24 birinci dönem kalkülüs öğrencisiyle yaptığı bir araştırma çalışmasını da aktarmıştır. Araştırma çalışmasının sonuçları, temel kavramlar hakkında bilgisayar diliyle yazmayı içeren bir programlama deneyiminin, geleneksel bir kalkülüs dersini tamamlamış olan öğrencilere kıyasla öğrencilerin kavramsal anlaması üzerinde çok büyük bir etkisi olabildiğini göstermiştir.

Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingerndorf (1997), kalkülüs öğrencilerinin bir fonksiyonun ve onun türevini grafik olarak anlamanın doğası hakkında bir araştırma yapmışlardır. Bu anlama için gerekli olan bilişsel yapıların başlangıç niteliğindeki bir kuramsal analizi verilmiştir. Çalışma, üniversite matematiğinin nasıl öğrenilebileceğini incelemek amacıyla, Üniversite Öğrencileri Matematik Eğitimi Topluluğu Araştırmasının (RUMEC/Research in Undergraduate Mathematics Education Community) üyeleri tarafından geliştirilmekte olan bir araştırma metodolojisine göre yapılmıştır. Öğrenciler tarafından açıkça gösterilen anlama, araştırma ve müfredat programı geliştirmeye yönelik Eylem-İşlem-Nesne-Şema (APOS/Action-Process-Object-Schema) şeklindeki kuramsal çerçeveye göre analiz edilmiştir.

Bu çalışmanın amaçları şu şekilde belirtilmiştir: Eylem-İşlem-Nesne-Şeması (APOS) kuramsal bakış açısının, (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Matthews & Thomas, 1996) türevin grafik olarak yorumunu öğrenen öğrencilerin oluşturduğu zihinsel yapıları anlamada ne ölçüde yararlı olduğunu belirlemek; bir fonksiyonun grafiğinin eğimini öğrenmenin nasıl gerçekleşebileceğine dair anlamayı arttırmak; geleneksel bir kalkülüs dersi verilen öğrencilerle düzeltilip geliştirilmiş bir kalkülüs dersi olan Kalkülüs, Kavramlar, Bilgisayarlar ve İşbirliğine Dayalı Öğrenme ($C^4L$:

Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning) (Schwingendorf, Mathews & Dubinsky, 1996) dersini alan öğrencilerin performansının kaba bir analizini yapmak; ve türev kavramıyla ilişkili epistemoloji ve pedagojiye ışık tutacak bir bilgi temeli geliştirmek.

Çalışmanın öğrenci popülasyonu (örneklemi), 1988 Güz dönemi ile 1990 Bahar dönemi boyunca Amerika 'nın orta batısındaki büyük bir üniversitede daha önce (en az) iki dönem tek değişkenli kalkülüs almış 41 mühendislik, bilim ve matematik öğrencisinden oluşmuştur. Görüşme yapılan bu 41 öğrenciden, 17'si en az bir dönemlik $C^4L$ derslerini tamamlamış ve geriye kalan 24 öğrenci yaklaşık 400 öğrenciye verilen geleneksel bir ders/ezber dersi olarak iki dönemlik bir kalkülüs dersini almıştır.

Araştırmacılar, kuramsal perspektifin bir fonksiyonun ve onun türevinin grafik olarak anlamanın gelişimini açıklamada gerçekten yararlı olduğu, öğrencilerin APOS perspektifine dayanan pedagojinin kullanıldığı derslerde bu kavramları daha iyi öğrendikleri ve $C^4L$ kalkülüs derslerinde ya da ona benzer bir derste verildiği şekliyle öğretimsel işleyiş biçiminin, öğrencilerin geleneksel olarak öğretilen derslere nazaran daha sağlam bir fonksiyon ve türev kavramı kazanmalarına katkıda bulunabileceği sonucuna ulaşmışlardır.

Cooley (2002), bir kalkülüs-I sınıfındaki yazım ödevlerinin derinlemesine düşünce içeren soyutlamayı geliştirmede herhangi bir etkisi olup olmayacağını belirlemek amacıyla yaptığı çalışmada; matematikte yazım, öğrenim sürecinde yararlı olabilir mi? ve özellikle, matematikte, öğrencilere derinlemesine düşünce içeren soyutlama sürecinde yazım ödevleri verilebilir mi? sorularına cevap aramıştır. Çalışma, bir anakent bölgesindeki 4 yıllık bir devlet üniversitesinde öğrenim görmekte olan ve yüzde sekseni İngilizce'den başka güney Çince, Fransızca, Hinduca, kuzey Çince, Rusça, İspanyolca ve Özbekçe ana dillerine sahip 25 Kalkülüs-I öğrencisinin katılımıyla gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma için, derinlemesine düşünce içeren soyutlama, kişinin yeni olan, yani daha önce

bilinmeyen bilgiyi yapılandırmasına ya da yeniden yapılandırmasına olanak tanıyan matematiksel bir yapının belli niteliklerinin diğerlerinden ayrılması için bir mekanizma olarak tanımlanmıştır. Temel olarak bu derinlemesine düşünce içeren soyutlama tanımıyla, bir kalkülüs-I sınıfı için yedi formal yazım ödevi geliştirilmiştir. Bu çalışmanın hedefi bir kalkülüs-I sınıfındaki yazım ödevlerinin derinlemesine düşünce içeren soyutlamayı geliştirmede herhangi bir etkisi olup olmayacağını belirlemek olmuştur. Öğrenciler kendilerini belli konulara odaklamak için tasarlanmış yazım ödevlerini tamamlamaya yönlendirilmiştir. Bu yazım ödevleri daha sonra toplanmış ve bir profesör tarafından değerlendirilmiştir; aynı profesör yorumlar yaparak ödevleri geri göndermiş, bazen de öğrencilerden ödevleri yeniden yazmalarını istemiştir. Ders döneminin sonunda, öğrencilerin bütün yazılı ödevlerini tuttukları defterler toplanmıştır. Bu defterler derinlemesine düşünce içeren soyutlama sürecinin gerçekleşip gerçekleşmediğini gösteren bir kanıt aranarak değerlendirilmiştir. Ayrıca, yazım ödevleri öğrenci ile profesör arasındaki iletişimi kolaylaştırdığı için, bunun öğrencilerin yanlış anlamaları olup olmadığının değerlendirileceği değerli bir araç olduğu açığa çıkmıştır. Cooley, kalkülüste yazım ile ilgili çalışmasında, öğrencilerin kalkülüs kavramları üzerinde derinlemesine düşündükleri ve fonksiyonlarla kalkülüs hakkında anlamlı fikirler yapılandırdıkları, öğrencilerin yazım işiyle aktif bir şekilde meşgul oldukları ve pek çok durumda düşünce dolu tanımlar ürettikleri ve bu sürecin profesörle öğrenci arasında bilgi için önemli bir geçiş yolu olduğu, ayrıca öğrencilerin düşünce biçimlerinde derinlemesine düşünmeyi geliştirme ve kavram yanılgılarından vazgeçirmede güçlü bir araç olduğu sonucuna varmıştır.

Borgen ve Manu (2002), "$y = 2x^2 - x + 1$ fonksiyonunun sabit noktasını (stationary point) ve ayrıca bu noktanın fonksiyonun maksimum veya minimum noktası olup olmadığını belirleyiniz." şeklindeki türev problemine tamamen kusursuz bir çözüm sunan bir öğrencinin anlayış biçimini araştırmışlardır. Öğrencinin çalışmasının video kaydı kullanılarak, onun çözüme belirlemede yaşadığı sürecin bir analizi, Schoenfeld'in analiz ve yapı düzeyleri ve Pirie-Kieren'in dinamik matematiksel anlamanın gelişimi kuramı olmak üzere iki farklı kuramsal çalışma

çerçevesi kullanılarak ele alınmıştır. Araştırmada, cebirsel formülleştirmelerin, öğrenciyi sorunun çeşitli bileşenleri arasındaki ilişkinin farkında olmadan doğru çözümlere götürebileceği belirlenmiştir. Sonuç olarak araştırmacılar, tam anlamaya ancak bir öğrencinin çeşitli bileşenlerin ilişkili bilgisine sahip olması durumunda ulaşabileceğini, "Paylaşılmış olarak kabul edilen" *imgelemin* (imagery) hem anlamada hem de yanlış anlamada varolabileceğini ve öğretmenlerin, öğrencilerin olası kavram yanılgılarının farkında oldukları takdirde, onların öğretimi geliştirmelerine yardımcı olabileceklerini belirtmişlerdir.

# BÖLÜM 3

# YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın evren ve örneklemi, veri toplama yöntemi ve veri analiz yöntemi açıklanmıştır.

## 3.1 Evren ve Örneklem

Bu araştırmanın evrenini, 2005–2006 eğitim öğretim yılında Kara Harp Okulu ‘nda öğretim gören öğrenciler ile matematik öğretim elemanları oluşturmaktadır.

Araştırmanın örneklemi ise, Kara Harp Okulu birinci sınıfında öğrenim gören Harbiyeliler ve bu Harbiyelilere ders veren matematik öğretim elemanları arasından seçildi.

## 3.2 Veri Toplama Yöntemi

Araştırma verilerinin toplanması, nitel araştırmanın fenomenografik yaklaşımına uygun şekilde yapıldı.

İnsan ve grup davranışlarının “niçin” ini anlamaya yönelik araştırmalara **nitel (“qualitative”) araştırma** denir. Nitel araştırma yöntemlerinden biri olan fenomenografi, insanların etrafındaki olup bitenleri, dünyanın farklı taraflarını ve dünyadaki çeşitli fenomenleri sınırlı sayıdaki niteliksel farklı yollar içinde nasıl tecrübe ettiklerinin, kavramlaştırdıklarının, anladıklarının, algıladıklarının, kavradıklarının vb. ampirik (deneye dayalı) bir çalışmasıdır. Bu farklı deneyimler ve anlayışlar verilen kriterlere göre hiyerarşik bir oluşum gösteren ve her biri diğerine mantıklı şekilde bağlı olan tasvir kategorilendirilmesi şeklinde nitelendirilir. Bu

şekildeki sıralı tanımlamalarına olayın (phenomenon) ya da incelenmekte olan kavramların neticeleri adı verilmektedir. Birçok farklı veri kullanılabilir olmasına rağmen asıl veri toplama metodu diyalog şeklinde yürütülen bireysel görüşmedir. Görüşülen kişiden konu ile ilgili tematik hale getirilmiş olan bir takım özellikler üzerinde düşünmesi istenir. Görüşmeler kelime kelime yazıya geçirilir ve bu yazılı metin üzerinde söylemler incelenerek analiz yapılır. Burada önemli olan bir kişinin yaşamış olduğu deneyimin zenginliği değil, bu olayın birçok kişi tarafından nasıl değerlendirildiğidir. Diğer bir deyişle, yapılan görüşmelerde farklı kişilerden elde edilen veriler arasında ilişkinin analiz edilmesidir.

Kant' a göre, insanların önceden (a priori) sahip olduğu bilgi ampirik gözlemlerden oluşan anlamadan önce gelmektedir. Burada insanın doğuştan sahip olduğu ve onun şuurluluğunu oluşturan içsel ilkeler elde edilen verilerin anlaşılmasında başrol oynar. Bu da 18. ve 19. yüzyıllarda kendini gösteren Alman idealizmi, yani Gestalt felsefesinin özünü oluşturmaktadır. Bu felsefeye göre, bütün kendisini oluşturan parçaların hepsinin toplamından farklıdır. Sadece parça incelenerek bütüne ulaşılamaz. Bir başka deyişle, bir olay hakkında bilgi sahibi olmak bu parçalar arasındaki ilişkinin ortaya çıkarılması ile mümkün olur.

Fenomenolojik sosyolojinin çıkış sebebi, pozitif bilimin ve dayandığı ölçüm araçlarının gerçeği irdelemede tatmin edici olmamalarıdır. Edmound Hussel, Wilhelm Dilthey ve Max Weber gibi sosyologlar sosyal olayları açıklarken yapısal bir yaklaşımı bir kenara bırakarak bireylerin sosyal olguları nasıl algıladıklarını ön plana çıkarmışlardır. Örneğin, Dilthey sosyal bir bütünün parçalarına bakılmaksızın anlaşılabilmesinin mümkün olmadığını iddia etmiştir. (Akt: Burrell, Morgan, 1988) Bir cümle içerisindeki kelimeler de bağlama bakılmaksızın anlaşılamaz.

Dilthey, Hermeneutics (sosyal ve kültürel dünyayı oluşturan ve insan zihninin ürünleri olan her şeyin anlaşılması ve yorumlanması bilimi) yaklaşımını ortaya atarak, sosyal olayların (fenomenlerin), anlamlarının ve önemlerinin anlaşılması için metinler halinde detaylı bir şekilde analiz edilip yorumlanması gerektiğini öne

sürmüştür. Dolayısıyla, Hermeneutics bilimi doğa bilimlerinden öte bilim adamlarının yazılı belge analizlerini yapmalarını savunmaktadır. Kısacası metin analizi, anlam ve mana açısından gerçeğin araştırılmasında daha uygun olduğu öngörülmüştür.

Buradaki amaç örneklemlerin dünyalarına girmektir. Gerçek toplum tarafından oluşturulur. Herkesin bir olguya farklı bir bakış açısı vardır ve farklı bir açıklama getirir. İnsanların deneyimleri ve bu deneyimlerin kendileri tarafından nasıl yorumlandığı önemlidir. Eğer, gerçeği ortaya çıkarmak ve anlamak isteniyorsa, öncelikle insanların bu gerçekleri nasıl algıladıklarını incelemek gerekir ve dolayısıyla onlarla aynı ortam paylaşılmalı, onlarla konuşulmalı ve davranışları gözlemlenmelidir. Gözlem, görüşme ve diğer nitel yöntemler insanların davranışlarını açıklamada önemli katkılar sağlar.

Bu araştırmada nicel metot uygulanmış olsaydı, araştırmacı örneklemlerin matematiksel kavramlamada yapmış oldukları hataları, eksiklikleri ve değişik yaklaşımları gözlemlenebilir ve somut sebeplere dayalı olduğunu ispat etmeye çalışırdı. Hâlbuki nitel araştırma metodu ile araştırmacı bu kavram yanılgılarını, kavramlardaki eksiklikleri ve değişik yaklaşımları kişisel bazda nasıl meydana geldiğini, matriksel olarak birbiri ile bağlantılı olan soyut ilişkileri de irdeleyerek ortaya çıkarttı. Bu nedenle araştırma nitel yapıldı.

Bu araştırmada, matematik eğitiminde türev öğrenimi ve öğretimi ile ilgili dünyanın farklı ülkelerindeki öğretmen ve öğrencilerin, anlayamadıkları veya anlamakta zorluk çektikleri ve “Ask Dr. Math” adlı uluslararası bir İnternet eğitim sitesine sordukları sorulardan bazı etkin ve ilginç olanları öncelikle seçildi ve bu seçilen sorular hakkında öğrencilerin ve öğretim elemanlarının görüşleri derinlemesine görüşmeler yapılarak alındı.

Bu bağlamda öncelikle bir öğrenci ile taslak bir görüşme yapıldı. Öğrencinin söylediklerinin hangilerinin önemli olduğu hem araştırmacı hem de bir matematik öğretim elemanı tarafından ortaya kondu. Sonra bir kıyaslama yapıldı. Ortak olarak önemli bulunan noktalar belirlenerek, asıl görüşmelerde bu çerçevede kategoriler çıkarıldı. Görüşmelerin her biri yaklaşık 30–35 dakika sürdü. Görüşmeler ses kayıt cihazına kaydedildi. Daha sonra görüşmeler kelime kelime yazıya geçirildi ve bu yazılı metin üzerinde söylemler gözden kaçan noktalar olmayacak şekilde incelenerek analiz yapıldı.

### 3.3 Veri Analiz Yöntemi

Toplanan veriler, nitel araştırmanın başlıca örüntüleri belirleme, kodlama ve kategorilere (temalara) ayırma işlemlerini kapsayan "içerik analizi" tekniğiyle analiz edildi. Ayrıca, görüşülen ve gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara yer verildi. Elde edilen bulgular düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde okuyucuya sunuldu.

# BÖLÜM 4

# BULGULAR, YORUMLAR VE TARTIŞMALAR

Bu bölümde, birinci bölümde ifade edilen araştırma problemi ile ilgili toplanan verilerin içerik analizi yapılması sonucunda elde edilen araştırmanın bulguları, bunlara ilişkin yorumlar, tartışmalar ve araştırma sorularına ilişkin "Ask Dr. Math" uluslararası İnternet eğitim sitesine sorulan sorulara matematik doktorlarının verdikleri cevaplar yer almaktadır.

## 4.1. Görüşülen Bireylere İlişkin Kişisel Bilgiler

Araştırma Kara Harp Okulunun ikisi aynı (birey no: 1 ve 3), biri (birey no: 2) farklı kısımlarında okuyan 3 birinci sınıf öğrencisi ve bu okulda matematik dersi veren 2 matematik öğretim elemanı olmak üzere toplam 5 kişinin katılımıyla yapıldı. Öğrenciler, kısımlarında başarılı olan ve matematik dersine ilgi duyan öğrencilerden seçildi. Verilerin analizi yapılırken görüşülen bireylere 1–5 arasında birer numara verildi. Tablo 1 görüşülen bireylere ait kişisel bilgileri ve numaraları göstermektedir.

**Tablo 1. Görüşülen Bireylere Ait Kişisel Bilgiler**

| Birey No | Görüşülen Bireyin Mesleği | Öğretim Deneyimi (Yıl) |
|---|---|---|
| 1 | Öğrenci (1 inci sınıf) | - |
| 2 | Öğrenci (1 inci sınıf) | - |
| 3 | Öğrenci (1 inci sınıf) | - |
| 4 | Öğretim Elemanı | 16 |
| 5 | Öğretim Elemanı | 27 |

## 4.2 Görüşmelere İlişkin Açıklamalar

Araştırmada veriler, standartlaştırılmış açık uçlu görüşmeler sonucunda toplandı. Bunun için "Ask Dr. Math" sitesine sorulan sorulardan bazı etkin olanları seçilerek dikkatlice yazıldı ve belirli bir sıraya konularak oluşturuldu. Böylelikle,

yanıtlarda görüşmecilerin becerileri, yanlılıkları veya öznelliklerinden kaynaklanabilecek farklılıkların azaltılması ve sorular hakkında daha ayrıntılı yanıtlar verilmesi amaçlandı. Görüşmeler esnasında sorular sorgulayıcı bir tutumla değil, bilgi vermeye davet edici sohbet tarzında sorulmaya çalışıldı. Böylece, görüşülen bireylerin sorulara samimi olarak cevap verdikleri düşüncesine ulaşıldı.

Öğrencilere sorulan sorular farklı üslup kullanılarak öğretim elemanlarına da soruldu ve görüşülen bireylerin matematik eğitiminde türev öğrenimi ve öğretimi ile ilgili görüşleri fenomenografik yaklaşım kullanılarak ortaya konuldu.

### 4.3 Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Bulgular ve Yorumlar

Matematik eğitiminde türev öğrenimi ve öğretimi ile ilgili öğrencilere ve öğretim elemanlarına aynı tarzda ve sırada olmak üzere 12 ‘şer açık uçlu soru soruldu. Bu kısımda, hem öğrenciler hem de öğretim elemanları için yapılan tablolarda, elde edilen verilerden kategoriler oluşturularak bulgular karşılaştırıldı ve araştırmacının görüş ve yorumlarına yer verildi.

**Tablo 2. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 1. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 1: Sizce türev nedir? Bu kavram hakkında bilgi verebilir misiniz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğrencilerin Açıklamaları |
| 1. İndirgeme (1,3) | ✓ Türev, limit ve süreklilik kavramlarının birbiri içinde yoğrulması sonucu ortaya çıkan bir tür indirgemedir (1).<br>✓ Bir doğrunun veya bir eğrinin eğimini bulmada bize yardım eden bir tür indirgemedir (3). |
| 2. Eğim (1,3) | ✓ Matematikte türevle ilgili aklıma gelen şey bir fonksiyonun, bir eğrinin eğimidir (1).<br>✓ Bir doğrunun da eğimi olabilir (1).<br>✓ Türev, bize eğimi bulmada yardımcı olmaktadır (3). |

| | |
|---|---|
| 3. Yardımcı olan fonksiyon (2) | ✓ Türev, integral için integrali bulmada, alan hesabı ve hacim hesabı yapmada yardımcı olan fonksiyondur (2).<br>✓ Çeşitli alan hesapları veya hacim hesapları için veya fiziksel yorumu ile hız, zaman ve yol arasında alternatifler sunabilen, bağıntılar ortaya koyabilen bir fonksiyon çeşididir (2). |

Tablo 2 incelendiğinde, öğrencilerin türev kavramı hakkında görüşleri indirgeme, eğim ve yardımcı olan fonksiyon olmak üzere üç kategoride toplanmaktadır. Öğrencilerden ikisi (1,3), matematikte türev kavramını bir tür indirgeme ve bir fonksiyonun eğimi olarak tanımladı ve bu öğrencilerden biri (1), düşüncesini ifade ederken türevi; limit ve süreklilik kavramları ile ilişkilendirdi, fakat ilişkilendirme biçimi ile ilgili değerlendirme yapmadı. Diğeri ise (3), türevin eğimi bulmada kendilerine yardımcı olduğunu belirtti ve bu düşüncesini şu şekilde bir örnek vererek açıkladı:

> *"Örnek verecek olursak,* $y = x^2$ *eğrisini ele alalım. Biz bu eğrinin herhangi bir noktasındaki eğimini istiyoruz. Bu fonksiyonun, eğrinin türevini alarak, yani* $x^2$ *'nin türevini alırken* $2x$ *olarak; mesela 1 noktasındaki eğimini istediğimiz zaman, türevinde 1 koyarak bunun eğimini buluruz. Dolayısıyla, türev bize eğimi bulmada yardımcı olmaktadır (3)."*

Bu öğrenciler (1,3), türevi bir tür indirgeme olarak tanımlarken, sadece polinom fonksiyonların türevini değerlendirdikleri, trigonometrik, ters trigonometrik, parametrik, üstel ve logaritmik gibi fonksiyonların türevlerini değerlendirmedikleri düşünülebilir.

Öğrencilerden bir başkası (2) türevi, integrali bulmada yardımcı olan; çeşitli alan hesapları veya hacim hesapları için veya hız, zaman ve yol kavramları arasında bağıntılar oluşturan bir fonksiyon olarak tanımladı.

Öğrenci, "türevin tersi integraldir" şeklinde yaygın bir düşünceden yola çıkarak ve fizik derslerinde öğrendiği bazı bağıntıları elde etmek için türevi

kullandıklarını göz önüne alarak bu şekilde bir açıklama yapmış olabilir. Bu açıklamaya göre, öğrencinin türevi sadece integral kurallarını bulmada ve fizik derslerinde öğrendiği bazı bağıntıları elde etmede yardımcı olan bir fonksiyon olarak değerlendirdiği ve türev kavramı hakkında öğrendiklerinin yüzeysel seviyede kaldığı düşünülebilir (2).

Orton (2003), " Ergenlerde ve genç yetişkinlerde temel kalkülüsü anlama" adlı çalışmasında da benzer sonuçlara varmıştır. Öğrencilerin genellikle polinomların türevlerini doğru olarak hesaplayabildiklerini, "$x = 3$ noktasında $y = x^3 - 3x^2 + 4$ eğrisine çizilen teğetin eğimini bulunuz" gibi ödevlerde aynı şekilde başarılı olduklarını, ancak benzer karmaşıklıktaki fonksiyonlar için grafikten bu aynı artma oranlarını değerlendirirken göz ardı edilemeyecek hatalar yaptıklarını ve grafiksel bağlamda limit olarak türevin ifade edilişinin çok zayıf bir şekilde anlaşıldığını tespit etmiştir.

**Tablo 3. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 1. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 1: Öğrencilerin türev tanımı hakkında kavramsal olarak hangi bilgilere sahip olmalarını beklersiniz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğretim Elemanlarının Açıklamaları |
| 1. Teğet doğrunun eğimi (4,5) | ✓ Öğrencilerin aklına ilk önce kabaca türev kavramı ile eğim arasında ilişki olduğu gelmelidir (4).<br>✓ Öğrencilerin analitik geometrideki doğru denklemini, doğrunun eğimini, bir doğrunun x ekseni ile yaptığı açıların yönünün önemini bilmelerini beklerim (5).<br>✓ Bir doğrunun x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açının tanjantına eğim denir (5).<br>✓ Eğimden hareketle türevi genel olarak tanıma dahil edebiliriz (5).<br>✓ Öğrenci, eğim nedir; bir açının tanjantı nasıl bulunur; doğrunun denklemini, iki noktası belli olan doğrunun hem denklemini hem de eğimini nasıl bulabiliriz; teğetin anlamı nedir? Bunları bilmesi gerekir (5). |

| | |
|---|---|
| 2. Limit hesabı (4,5) | ✓ Öğrenciler, türevin aynı zamanda bir limit hesabı olduğunu bilmelidirler (4).<br>✓ Bir $f(x)$ fonksiyonunda x değişkenine vereceğimiz bir artmanın fonksiyonun alacağı değerlerde meydana getireceği değişkenliğin limit durumunda ne değer alacağını bilmelidir (4).<br>✓ Öğrencinin ileri safahatta bilmesi gereken diğer unsurda limittir (5).<br>✓ Limiti, soldan limiti, sağdan limiti, fonksiyonun hangi noktalarda tanımlı ya da tanımsız olduğunu bilmesi gerekir (5).<br>✓ Fonksiyonun limitinin olmaması durumunda türevin olup olmayacağı konusunda karar verebilirler (5). |

Tablo 3 incelendiğinde, öğretim elemanları öğrencilerinden türev tanımı hakkında öncelikle doğrunun eğimi bilgisine sahip olmalarını beklemektedirler (4,5). Bu beklentisini öğretim elemanlarından biri (4) şöyle belirtti:

> *"Öğrencilerin aklına ilk önce kabaca türev kavramı ile eğim arasında ilişki olduğu gelmelidir (4)."*

Öğrencilerin kavram olarak türev ile ilgili bilgiye sahip olması için analitik geometrideki doğru denklemini, doğrunun eğimini, bir açının tanjantının nasıl bulunduğunu, bir doğrunun x ekseni ile yaptığı açıların yönünün önemini, önemli olup olmadığını bilmelerini beklediğini ifade eden öğretim elemanı (5), öğrencilerin neden bunları bilmeleri gerektiğini şu şekilde açıkladı:

> *"Çünkü bir doğrunun x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açının tanjantına eğim denir. Bu eğimden hareketle türevi genel olarak tanıma dâhil edebiliriz (5)."*

Öğretim elemanlarına göre, öğrencilerin bilmesi gereken bir diğer önemli kavram da limit hesabıdır (4,5). Bunu destekleyen görüşler şunlardır:

> *"Öğrenciler, türevin aynı zamanda bir limit hesabı olduğunu bilmelidirler (4)."*

> *"Türevi tanım olarak değerlendirebilmesi için öğrencinin ileri safahatta bilmesi gereken diğer unsurda limittir (5)."*

> *"Eğer öğrenci fonksiyonların limitlerinin nerede olduğunu, nasıl olduğunu, limitin oluşması için soldan limit nedir, sağdan limit nedir? Bunları bilir ise soldan limit ile sağdan limitin eşit olmaması durumunda fonksiyonun limitini olmadığını, dolayısıyla limitinin olmaması durumunda türevin olup olmayacağı konusunda karar verebilir (5)."*

Öğretim elemanları, türev tanımı ile ilgili olarak, türevi tanımlayabilmek için, öğrencilerin bir doğrunun eğiminin nasıl bulunduğunu ve bir fonksiyonun limitinin nasıl hesaplandığını bilmeleri gerektiğini düşünüyorlar ve onlardan bekliyorlar.

Buna göre, öğretim elemanlarının öğrencilerden sahip olmasını beklediği türev kavramı hakkındaki bilgilerin, öğrencilerde eksik gerçekleştiği ve yeterli olmadığı düşünülebilir.

**"Ask Dr. Math" sitesine sorulan soru:**

"Türevin kısa ve öz tanımı nedir? Aslında anlamını biraz biliyorum, ama görsel olarak anlayamıyorum. Yardımcı olacak fikirleriniz var mı?"

**Doktor Pat 'in cevabı:**

"Sorunu iki yönden cevaplandıracağım. İlk olarak türevi, bir şey, başka bir şeyle ölçüldükçe değişimdeki oranın ölçümü olarak düşünmen gerekir. Bunu hayatta çok yaparız ve hiç bunun türev olduğunu düşünmeyiz. Örneğin, bir arabadaki hız göstergesi belli bir zaman içinde durumdaki değişimin bir ölçüsüdür. Bu durumda, P seyahat yolu boyunca konum (mil olarak) ve t zaman (saat olarak) anlamında iken $\frac{dP}{dt}$ yazabiliriz.

Tabiî ki, hız göstergesi sadece düz giderken (ileriye doğru) giderken çalışır. Uçaklarda aynı şeyi yükseklik için ölçen bir gösterge vardır. Ne kadar hızlı yukarı (ya da aşağı) gittiğinizi ölçer ve bu tahmin edeceğiniz gibi önemlidir.

Akşam televizyonda borsa raporlarını gördüğünüzde, bu, zaman birimi başına düşen toplam borsa indeksindeki değişimi ölçer. Bu durumda birimler gün başına düşen dolarlardır.

Bir grafikte, görsel model (şekil) bir eğimdir. Eğer borsa kapanış fiyatını gün gün ölçersek, fiyat değişiminin pozitif olduğu günlerde grafiğin yükseldiğini ve negatif olduğunda düştüğünü fark ederiz. Eğimin dikliği, değişimin hızlı ve pozitif olması para kazandığım anlamına gelir.

Bu, türevin tanımlanmasında bir anlam ifade eder. Türev formülünün temel kısmı sadece bir eğim formülüdür. Hemen gelen kısım limit gösteriminin olduğu yerdir. $y = x^2$ gibi basit bir şeye bakalım.

Eğer $x = 3$ de türevi bulmak istersek, bir ipucu için önce grafiğe bakarız. Eğri yukarı mı gidiyor aşağı mı? Eğriye $x = 3$ de bir teğet düşünün. Tanım olarak, teğet doğrusunun eğimi, bu noktadaki eğrinin eğimidir.

$x_1$, $x_2$ ve y ile ilişki $y_1$ , $y_2$ değerleri gibi iki nokta alarak, sayısal olarak eğimi buluruz. Bizim örneğimizde, $x_1 = 3$ ve $y_1 = 9$ dur. Eğer, $x_2$ 'yi $x_1$ 'in sağında alırsak, iki nokta arasındaki eğim $m = \frac{y_2 - 9}{x_2 - 3}$ olarak elde edilir.

Anlık değişimi bulmak için, $x_2$ nin 3 'e daha da yaklaşımına izin veririz. Bu noktada limit kısmı devreye girer: $x_2$, 3 'e giderken x teki değişim (dx olarak adlandırırız) sıfıra doğru gider."

**“Ask Dr. Math” sitesine sorulan soru:**

“Türev kavramının anlamını basitçe açıklayabilir misiniz?”

**Doktor Scott ‘in cevabı:**

“Muhtemelen türevin bir noktada eğriye çizilen teğet doğrusunun eğimi olduğunu öğrendiniz. Türev bu noktada fonksiyonun değişim oranı olarak tanımlanır. Gerçekte, bu oran bu noktada fonksiyonun değişiminin “anlık” oranıdır.

Örneğin, bir balonu şişirirseniz, balonun hacmi balonun yarıçapına bağlı olur. Bu, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ tür. $V$ nin türevi (r ‘ye göre) size, yarıçap değiştikçe hacmin ne kadar değişeceğini söyleyecektir.”

**Tablo 4. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 2. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 2: $f(x) = x$ şeklinde tanımlanan $f$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f$ nin grafiğinin her noktasında teğet doğrusunun eğimi 1 dir. Bunun nedenini açıklar mısınız?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğrencilerin Açıklamaları |
| 1. $f(x) = x$ fonksiyonu eğimi 1 olan doğrudur (1,2,3). | ✓ $f(x) = x$ fonksiyonu analitik düzlem üzerinde $45°$ lik açı yapan bir doğrudur (1).<br>✓ Tanjant $45°$ in 1 ‘e eşit olduğunu görüyoruz (1).<br>✓ Teğetin eğimini, teğetin yaptığı hareketteki açı ile bulabiliyoruz. Yaptığı açı $\theta$ ise, $\tan\theta$ eşittir, $y = x$ fonksiyonu için $\frac{y}{x} = 1$ dir (2).<br>✓ $f(x) = x$ ,yani $y = x$ doğrusunu ele aldığımızda…(3).<br>✓ Bu doğruyu koordinata çizdiğimiz zaman, $\tan\alpha$ bize eğimi verir (3).<br>✓ $y = x$ grafiğinde herhangi aldığımız bir noktanın eğimi, açımız $45°$ olduğu için koordinat düzleminde $\tan 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°}$ den 1 ‘e eşittir (3). |

| | |
|---|---|
| 2. Eğim bir doğrunun türevidir (1,3). | ✓ Biz türevi aynı zamanda bir doğrunun veya bir eğriye çizilen teğetin eğimi olduğunu biliyoruz (1).<br>✓ $y = x$ fonksiyonunun her noktasındaki eğimi, yani türevi 1 dir (3). |
| 3. $f(x) = x$ fonksiyonun ordinatları ile apsisleri eşittir (2,5). | ✓ $y = x$ fonksiyonunda x 'in bütün değerleri y 'e eşit olduğundan $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{x}$ 'e veya $\frac{y}{y}$ 'e eşit olacaktır. Bu da bize 1 değerini vermektedir (2). |

Tablo 4 incelendiğinde, öğrencilerin ortak görüşünün, $f(x) = x$ fonksiyonunun, eğimi 1 'e eşit olan bir doğru olduğu görülmektedir. Öğrenciler, öncelikle $f(x) = x$ fonksiyonunun analitik düzlemde bir doğru olduğunu zihinlerinde görselleştirdiler ve daha sonra bir doğrunun eğiminin, doğrunun $x$ ekseni ile yaptığı açının tanjantına eşit olduğunu düşündüler. Bu düşünceler ışığında öğrencilerden ikisi (1,3), fonksiyonun $x$ ekseni ile yaptığı açının $45°$, buradan da tanjant $45°$ 'in $1$ 'e eşit olduğunu, dolayısıyla fonksiyonun eğiminin 1 olduğunu söyledi. Diğer yandan bu öğrencilerden biri (3), $f(x) = x$ fonksiyonunun eğiminin 1 olduğunu bir başka yöntemle şu şekilde de açıkladı:

> *"Biz eğimi normalde öğrendiğimiz direk kurallara göre, $y = x$ den $x$ 'in katsayısı olan 1 'i, yani eğim eşittir 1 olarak buluruz (3)."*

Aynı öğrenciler (1,3), yukarıda yaptıkları açıklamalardan sonra, $y = x$ fonksiyonunun her noktasındaki eğiminin 1 olduğu, dolayısıyla türevinin de 1 olduğu sonucuna vardılar. Burada bu öğrencilerin eğim kavramını analitik geometri bilgilerinin yanı sıra, türev kavramı ile de ilişkilendirebilmede başarılı oldukları düşünülebilir.

Diğer öğrenci ise (2), $tan\theta = \frac{y}{x}$ ve $y = x$ olduğundan eğimin 1 ve bu değerin de her nokta için sabit olduğunu söyledi. Buna göre, öğrencinin eğimi bir

fonksiyonun türevi olarak düşünmediği, sadece eğimin analitik geometri derslerinde öğrendiği bir kavram olarak sınırlı kaldığı değerlendirebilir.

Brooks & Brooks da (1993), yaptığı araştırmada şu sonuca varmıştır: Öğrencilerin, anlamanın derinliğini açıkça göstermeleri için, öğrenim deneyimlerinin onlara bunu yapacak uygun araç ve bağlamları sağlaması gerekir. Yapısalcı felsefeye sıkı sıkıya bağlı olan öğretim stratejileri (instructional strategies), öğrencilerin açıklama, uygulama ve kendi bilgileri ile ilişkili beceriler geliştirdiği arenayı sağlar. Perkins & Blythe de (1994), konular üretken olduğunda, anlama hakkındaki amaçlar açık olduğunda ve öğrenciler çok sayıda performans gösterme fırsatıyla karşı karşıya olduğunda, öğrencilerin ana konu hakkında derin bir anlamayı açıkça gösterebileceklerini ortaya koymuştur.

**Tablo 5. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 2. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 2: $f(x)=x$ şeklinde tanımlanan $f$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f$ nin grafiğinin her noktasında teğet doğrusunun eğimi 1 dir. Bunun nedenini öğrencilerinize nasıl açıklarsınız?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğretim Elemanlarının Açıklamaları |
| 1. $f(x)=x$ fonksiyonu eğimi 1 olan bir doğrudur (4,5). | ✓ $f(x)=x$ ve $y=x$ bir doğrudur (4).<br>✓ Orijinden, (1,1), (-1,-1), (5,5) gibi noktalardan geçen ve eğimi 1 olan bir doğrudur (4).<br>✓ $y=x$, yani $f(x)=x$ doğrusunun grafiğini çizdirebiliriz (5).<br>✓ Pozitif yönlü açı olan $\theta$ 'nın, $\frac{y}{x}$ den her iki (1,1) noktasında yüksekliğin ve yatay uzunluk olan x 'in 1 olduğunu değerlendirerek 1 'in 1 'e oranın da 1 olduğunu bilmesi nedeniyle $y=x$ fonksiyonun eğiminin 1 olduğunu ve her noktada aynı olduğunu değerlendirebiliriz (5). |

| | |
|---|---|
| 2. $f(x) = x$ fonksiyonun türevi $y = x$ doğrusunun eğimine eşittir (4,5). | ✓ Öğrencilere türev kurallarına bağlı olarak x 'in türevinin 1 olduğunu ve bu 1 değerinin de bize türev tanımından dolayı eğim olması gerektiğini değerlendiririm (5).<br>✓ Doğrunun eğimi değişmeyeceğine göre, her noktada eğim aynı (4).<br>✓ Fonksiyonun bir noktadaki türevi, o noktadan geçen teğetin eğimidir (4).<br>✓ $f$ 'in bir a noktasındaki türevi 1 'e eşittir (4). |
| 3. $f(x) = x$ fonksiyonun ordinatları ile apsisleri eşittir (5,4,2). | ✓ Ordinatlar farkının apsisler farkına oranının 1 olduğunu öğrenci görecektir (5).<br>✓ $f(x) = x$ fonksiyonu orijinden, (1,1), (-1,-1), (5,5) gibi noktalardan geçer (4). |

Öğretim elemanları, $f(x) = x$ fonksiyonunun grafiğinin her noktasındaki teğet doğrusunun eğimi 1 olduğunun nedenini öğrencilerine nasıl açıklayacakları konusunda benzer değerlendirmeler yaptılar, fakat açıklama yöntemleri farklı oldu. Öğretim elemanlarından biri (4), önce $f(x) = x$ fonksiyonunun, koordinat düzleminde ordinatları ve apsisleri birbirine eşit olan bir doğru olduğunu söyledi. Buna bağlı olarak eğiminin 1 olduğunu ve doğrunun eğiminin değişmeyeceğini, dolayısıyla her noktada eğimin aynı olacağını belirtti. Sonra, fonksiyonun bir noktadaki türevinin, o noktadan geçen teğetinin eğimi olduğu söyleyerek $f(x)$ 'in bir $a$ noktasındaki türevinin 1 'e eşit olduğu sonucuna vardı.

Diğer öğretim elemanı ise (5), önce türev kurallarına bağlı olarak fonksiyonun türevinin 1 ve bu 1 değerinin de türev tanımından dolayı eğim olduğunu değerlendirdi. Daha sonra, ikinci değerlendirmesine geçti:

> *" $y = x$ , yani $f(x) = x$ doğrusunun grafiğini çizdirebiliriz. Doğru üzerinde alacağımız iki noktanın $x$ lerini ve $y$ lerini göz önüne alarak, ordinatlar farkının apsisler farkına oranına bakmasını değerlendiririm. Ordinatlar farkının apsisler farkına oranının 1 olduğunu öğrenci görecektir (5)."*

Ayrıca, çizimden dik üçgen değerlendirmesi yapan öğretim elemanı (5), fonksiyon üzerinde örnek bir (1,1) noktası alarak, $\frac{y}{x}$ den yüksekliğin ve yatay uzunluğun 1, dolayısıyla bu oranın 1 ve bu nedenle de $y = x$ fonksiyonunun eğiminin 1 olduğunu ve her noktada aynı olduğunu belirtti.

Öğrencilerin açıklamaları göz önüne alındığında, öğretim elemanlarının bu açıklamalarından pek farklı olmadığı ve her iki grubun da bir doğru fonksiyonunun her noktasındaki eğiminin, türevine eşit olduğunu değerlendirdikleri sonucuna varılabilir.

**"Ask Dr. Math" sitesine sorulan soru:**

"Yüksek okulda kalkülüs sınıflarının en zoruna kayıtlı bir öğrenciyim. İnternet üzerinden kalkülüsü bana öğretebilir misiniz?"

**Doktor Barney 'in cevabı:**

Bazı fonksiyonların grafiklerini çizerek kalkülüsü kendi kendinize öğretebilirsiniz. $f(x) = x$ fonksiyonu ile başlayalım Herhangi bir kağıt üzerine grafiğini çiziniz. Bu düz bir doğrudur, değil mi? Şimdi $f(x)$ 'in türevi olarak $f'(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $f(x)$ 'in türevi, verilen herhangi bir noktadaki değeri bu noktadaki $f(x)$ 'in eğimi olan fonksiyondur. Örneğimizde $f(x)$ 'in türevi nedir? $f(x) = x$ fonksiyonu $x$ 'in bütün değerleri için eğimi 1 'e eşit olan düz bir doğrudur ve $f'(x) = 1$ dir.

**Tablo 6. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 3. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 3: Türevin fiziksel anlamı hakkında bilgi verebilir misiniz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğrencilerin Açıklamaları |
| 1. Hız bulma (1,2,3). | ✓ Fonksiyonun birinci türevi bize hızı verir (2).<br>✓ Bir hız-zaman grafiği çizilirken, hızdan ivmeye geçilirken veya zaman grafiğinden hıza geçilirken türev alınarak hesaplanabilir (3).<br>✓ Bir hızı bulabilmek için, bunun belli bir zaman içinde aldığı yolun o gereken zamana bölünmesi ile ortaya çıkmaktadır (1).<br>✓ Türevin tanımından yola çıkacak olursak, $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ yani karşılığında $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ cinsinden bir ifade çıkmaktadır. Bu oranın limitini almamız gerekecek (1). |
| 2. Somutlaştırma (2). | ✓ Soyut bir kavram olan türev fiziksel yorumu ile somut hale geçer (2).<br>✓ Değişken olan x 'i sabitler, somut hale getirir (2). |

Tablo 6 incelendiğinde, öğrencilerin türevin fiziksel anlamı ile ilgili ortak düşünceleri hız bulma kavramı olduğu görülmektedir. Fakat öğrenciler, türevi hız bulmada kullandıklarını belirtirken farklı görüşler ortaya koydular:

> *"Türevin fiziksel anlamı hakkında fizikten yola çıkarak bilgi vermek istiyorum. Örneğin, bir hızı bulabilmek için bunun belli bir zaman içinde aldığı yolun o gereken zamana bölünmesi ile ortaya çıkmaktadır. Bu zaman aralığında hız belli şeyler değil de belirsiz bir şekilde yani düzensiz bir şekilde değişiyorsa bunu bulabilmek için o zaman aralığını daha küçük bir zaman aralığına indirgememiz gerekiyor. Burdan da aldığı yolu oradaki zaman aralına bölersek burda daha yakın bir sonuç elde edebiliriz. Fiziksel anlamı konusunda bu şekilde örneklendirebiliriz (1)."*

*"Belli bir zaman aralığında aldığı yolun o zamana bölünmesiyle* $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ *yani karşılığında* $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ *cinsinden bir ifade çıkmaktadır. Bu oranın limitini almamız gerekecek. Bu da türevin tanımından yola çıkarak bulduğumuz bir denklemdir. Bu da doğal olarak hızı vermektedir (1)."*

*"Türevi fizik uygulamalarında mesela bir hız-zaman grafiği çizildiği zaman, hızdan ivmeye geçilirken veya zaman grafiğinden hıza geçilirken türev alınarak hesaplanabilir. Tam tersinde de ivmeden hıza ya da hızdan zamana geçerken integralini alarak sonuca ulaşabiliriz (3).*

*"Yol, zamana ve hıza bağlı bir değişkendir. Bizim hızımızın artması veya azalması, zamandan geçen süreyi veya ulaşacağımız yolu etkiler. Dolayısıyla bu etkiyi, ne şekilde arttığını ne şekilde azaldığını bir şekilde sabitlememiz gerekiyor. Bunun için türev bize yardımcı oluyor (2)."*

Ayrıca öğrencilerden biri (2), türevi soyut bir kavram olarak belirtti ve fiziksel yorumu ile somutlaşacağını söyledi. Öğrenci, burada bir hareketlinin hızının bilinmesini somut bir durum olarak düşünmüş olabilir.

Orton 'un" Ergenlerde ve genç yetişkinlerde temel kalkülüsü anlama" adlı çalışmasında, öğrencilerin ortalama ve anlık artma oranlarını ayırt edemediklerini ve sadece fonksiyonun verilen noktadaki değerini bulduklarını tespit etmiştir. Marrongelle (2004), öğrencilerin matematik problemlerini çözmek için bağlam kattıklarını ve bu sonucun, öğrencilerin bağlam içinde problemleri çözmede yaşadığı güçlüğe işaret eden eski araştırmaların aksine, öğrencilerin matematik problemlerini çözmek için bağlamları anlamlı biçimlerde kullanabildiklerini ve elde ettiği kanıtların, öğrencilerin fiziksel olayları hatırlayarak ya da imgeleyerek matematiksel tasvirlerin yanı sıra grafikleri de anlamaya başladığı görüşünü daha da desteklemekte olduğunu belirtmiştir. Schwalbach ve Dosemagen ise, (2000), öğrencilerin, disiplinler arasında, (kendi çalışmasında, matematik ve fen arasında) bağlar kurmasının hem daha zengin semantik anlamalar hem de prosedüre yönelik bilgi geliştirebildiğini öne sürmüştür.

**Tablo 7. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 3. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 3: Türevin fiziksel anlamı hakkında öğrencilerinize ne gibi bilgiler veriyorsunuz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğretim Elemanlarının Açıklamaları |
| 1. Hız ve ivme bulma (4,5). | ✓ Yolun zamana göre değişimi hızı verecektir (4).<br>✓ Aynı mantıkla ivme, hızın zamana göre değişimi olacaktır (4).<br>✓ Fiziksel bazda birinci türevin hızı, fonksiyonun o noktadaki ikinci türevinin ise ivmeyi verdiği değerlendirmesi yapabileceğini anlatırız (5). |
| 2. Günlük yaşamla ilişkilendirme (5). | ✓ Uçaksavarların yapımının, eğik atış problemlerinin, mermilerin çizdiği yolun fiziksel anlamda tamamen türevle iç içe olduğunu anlatırım (5).<br>✓ Füze ve füzenin güdümlü mermilerinin yapımlarının türevle ilgili değerlendirilmesi mühendisler tarafından dikkate alınır (5). |

Öğretim elemanları, derslerinde türevin fiziksel anlamını işlemsel olarak öğrencilere anlattıklarını söylediler. Bir hareketlinin zamana bağlı yol fonksiyonunun (ki bu fonksiyon ikinci dereceden fonksiyon oluyor) birinci türevinin hızı, ikinci türevini ivmeyi verdiği konusunda öğrencileri bilgilendirdiklerini ve böylece öğrencilerin kafalarında fiziksel anlamda bir şeyler oluşmasını sağladıklarını belirttiler.

Öğretim elemanlarından biri (4), türevin fiziksel anlamı hakkında öğrencilerine bilgi verirken hız kavramını, ortalama hız ve anlık hız olarak ayrı ayrı anlattığını ifade etti. Diğer öğretim elemanı ise (5), işlemsel bilgilerin yanında günlük hayattan örnekler vererek fiziksel anlam olarak öğrencilerin, türevin ne kadar önemli olduğunu düşünebileceklerini söyledi:

> *"Genellikle dağların şekillerini göz önüne aldığımız zaman bir yol yapım projesinde, yollardaki uçurumların toprakla doldurulması veya dağların dozerle yarılması işlemlerinde fiziksel anlamda türevle ilgisinin olduğunu söylüyorum (5)."*

Öğretim elemanlarının, türevin fiziksel anlamını öğrencilere işlemsel bazda anlattıkları, sadece nerelerde kullanılabileceğine dair bazı açıklamalarda bulundukları ve günlük hayatla ilgili örneklerin verilme sorumluluğunu fizik öğretim elemanlarına bıraktıkları düşünülebilir. Bundan dolayı da, öğrencilerin türevin fiziksel anlamını işlemsel bilgilerle yorumlayabildikleri ve günlük hayatla ilişkilendirme yoluna gitmedikleri değerlendirebilir.

**"Ask Dr. Math" sitesine sorulan soru:**

"Türev kavramının anlamını basitçe açıklayabilir misiniz?"

**Doktor Ken 'in cevabı:**

"İşte türev ve onun ne anlama geldiğine dair bir örnek. $f(x)$ şeklinde bir fonksiyonumuz olsun. $f$ 'in türevi $f'(x)$, size $f$ 'in ne kadar değiştiğini gösterir. Eğer türev pozitif ise, $f$ artandır ve eğer türev negatif ise, $f$ azalandır. Eğer türev sıfır ise, o zaman $f$ bu noktada ne artandır ne de azalandır.

$f(x)$ 'in $x$ zamanda düz bir yol üzerinde bir arabanın konumunu gösterdiğini varsayalım. Bu durumda $f'(x)$ türevi, size $x$ zamanda arabanın hızını söyler. Eğer, araba ileriye doğru giderse, hız pozitif ve geriye doğru giderse hız negatif olacaktır.

Bir daha türev alırsanız, ona $f''(x)$ diyeceksiniz ve bu size $x$ zamanda arabanın ivmesini gösterir. Eğer, arabanın hızını arttırırsanız ivme pozitif ve hızı yavaşlatırsanız da ivme negatif olacaktır.

Burada size söyleyeceğim küçük bilinen bir olgu (durum) var. Eğer, bir daha türev alırsanız, Bu "ani çekiş" ("jerk") diye adlandırılır ve $f'''(x)$ şeklinde yazarız. Ani çekiş 'in fiziksel yorumunun ne olduğunu hesaplayarak bulabilir misiniz?

Türevin fizikteki bütün zamanları kullanıldı."

**Tablo 8. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 4. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 4: Bir fonksiyonun grafiğinin kritik noktası (noktaları) denince ne anlıyorsunuz? Bir fonksiyonun kritik noktası (noktaları) olması için gerek ve yeter koşul sizce nedir? Kritik noktaları sınıflandırabilir miyiz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğrencilerin Açıklamaları |
| 1. Birinci türevin kökleri (1,3). | ✓ Bir fonksiyonun türevinin alınmasından ve sıfıra eşitlenmesinden sonra bulunan köklere kritik noktalar diyebiliriz (1).<br>✓ Bir fonksiyonun birinci türevini aldığımız zaman bize kritik noktalarını verir (3).<br>✓ Birinci türevin kökleri bize kritik noktaları verir (3). |
| 2. Birinci türevin olmadığı noktalar (1,2). | ✓ Fonksiyonun birinci türevini sıfıra eşitleyerek elde ettiğimiz fonksiyonu tanımsız yapan x değerleri kritik noktalardır (2).<br>✓ Kritik nokta türevi tanımlamakta zorlandığımız şu anki matematik bilgileriyle tanımlayamadığımız noktalardır (2).<br>✓ Bulduğumuz türev rasyonel bir ifade ise, onu tanımsız yapan noktalar da kritik nokta olarak düşünülebilir (1). |
| 3. Fonksiyonun grafiğini tanımsız yapan değerler (2,3) | ✓ Kritik nokta dendiği zaman fonksiyonu tanımsız yapan noktalar aklıma geliyor (3).<br>✓ Bir fonksiyonun kritik noktası olması için bir noktada tanımsız olması bizim için yeterlidir (2). |
| 4. Sınıflandırabiliriz (1,2,3). | ✓ Kritik noktaları yerel minimum, yerel maksimum ya da mutlak minimum, mutlak maksimum şeklinde sınıflandırabiliriz (3).<br>✓ Her kritik nokta illa yerel minimum ya da mutlak minimum nokta olmak zorunda değildir (3).<br>✓ Kritik noktaları ekstremum noktaları veya dönüm noktası diye ayırabiliriz. Ekstremum noktaları da yerel minimum ve yerel maksimum diye ayırabiliriz (1).<br>✓ Fonksiyonun birinci türevini sıfıra eşitlediğimizde oradan bulduğumuz kökler ekstremum noktaları diyemeyiz (1).<br>✓ Kritik noktaları sınıflandırmak elbette mümkündür (2).<br>✓ Tanımlanamayan fonksiyonların paydasındaki değer sıfıra eşit olabilir. Örneğin, tam değerin içi tam olabilir veya mutlak değerin |

| | |
|---|---|
| | içi sıfıra eşit olabilir. Köklü ifadelerde, irrasyonel sayılarda tanımlanamaz bir fonksiyon olabilir. Kritik noktaları bu şekilde sınıflandırmak mümkündür (2). |

Tablo 8 incelendiğinde, bir fonksiyonun grafiğinin kritik noktaları konusunda öğrenciler arasında benzer görüşlerin yanı sıra farklı görüşlerinde olduğu görülüyor. Öğrencilerden ikisi (1,3), kritik noktaları birinci türevin kökleri olarak tanımladı. Her ikisi de bir fonksiyonun türevinin sıfıra eşitlenmesinden ortaya çıkan köklerin kritik noktalar olduğunu belirtti. Bu öğrencilerden biri (3), aynı zamanda fonksiyonu tanımsız yapan noktaların da kritik noktalar olduğunu söyledi ve bu düşüncesini desteklemek için şu şekilde bir örnek verdi:

> *"Bir fonksiyon rasyonel bir ifadedir. Bir bölme halindedir. Örneğin,* $y = \frac{x}{x-1}$ *fonksiyonunun grafiğini çizdiğimiz zaman, 1 noktasında tanımsızdır. Bu fonksiyonda x yerine 1 koyduğumuzda payda sıfır yaptığı için, 1 değeri fonksiyonu tanımsız yapmaktadır. Bu* $x = 1$ *değeri bir kritik nokta olarak aklıma gelmektedir (3)."*

Öğrencinin bu düşüncesine paralel bir açıklamayı diğer bir öğrenci de (2) şöyle yaptı:

> *"Fonksiyonun bazı noktalarda hareketini bulunduğu noktayı tespit edemeyiz. Örneğin, sayı bölü x; x 'e sıfır verdiğimiz zaman fonksiyonun hareketi sonsuzda gerçekleşen bir hareket veya sonsuzda bulunan bir nokta olduğu için bu noktayı şu anki matematik bilgileriyle bulamıyoruz (2)."*

Aynı öğrenci (2), aynı zamanda birinci türevin olmadığı noktalar için de kritik nokta tanımlaması yaptı. Kritik noktayı, türevi tanımlamakta zorlandığı veya mevcut matematik bilgileriyle tanımlayamadığı noktalar olarak ifade eden öğrenci, düşüncesine özel tanımlı fonksiyonlardan bahsederek açıklık getirmeye çalıştı:

> *"Örneğin, tam değer ve signum fonksiyonlarının birinci türevlerini göz önüne alalım. Tam değer fonksiyonu için içinin tam olduğunda veya signum fonksiyonu için içinin sıfır olduğu değerlerde birinci türevi tespit edemiyoruz. Bu noktada türevsizdir diyoruz (2)."*

Tablo incelendiğinde, bu düşünceye bir öğrencinin (1) daha katıldığı görülmektedir.

Öğrencilerin, bir fonksiyonun kritik noktası (noktaları) olması için gerek ve yeter koşulun ne olduğunu bazı kavram yanılgıları olmasına rağmen bildikleri sonucuna varılabilir. Fonksiyonu tanımsız yapan noktaların da kritik nokta olarak düşünülmesinin bir kavram yanılgısı olduğu ve bunun da nedeninin derslerde bazı öğretim elemanlarının bu noktaları kritik nokta şeklinde ifade etmelerinden kaynaklandığı değerlendirilebilir.

Diğer yandan, öğrencilerin hepsi kritik noktaların sınıflandırılabileceğini söyledi. Fakat sınıflandırmayı her biri farklı şekilde yaptı. Birisi (3), yerel maksimum, yerel minimum, mutlak maksimum, mutlak minimum veya hiçbiri şeklinde yaparken, diğeri (1) ekstremum noktaları (yerel maksimum ve yerel minimum) veya dönüm noktası olarak sınıflandırdı. Bir diğeri de (2), bir fonksiyonu tanımsız kılan noktaları sınıflandırma içine dâhil etti.

Vinner (1991), teknik bağlamlarda, tanımların son derece önemli roller oynayabileceğini, sadece kavram imajı oluşturmaya yardımcı olmadıklarını, kavramaya ve idrak etmeye ilişkin ödevlerde de çoğu kez çok önemli rol oynadıklarını ve kavram imajı ile hazırlanan birçok tuzaktan öğrencileri koruma gücü olduğunu belirtmiştir.

**Tablo 9. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 4. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 4: Bir fonksiyonun grafiğinin kritik noktası (noktaları) hakkında öğrencilerinize hangi bilgileri veriyorsunuz? Öğrencileriniz kritik noktaları sınıflandırabiliyorlar mı?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğretim Elemanlarının Açıklamaları |
| 1. Birinci türevin kökleri (4,5) | ✓ Birinci türevi sıfır yapan noktalara kritik noktalar denir (4).<br>✓ Fonksiyonun tanımlı olduğu bir noktadaki kritik noktasının, türevini sıfır yapması gerekir (5).<br>✓ Öğrenciler genellikle kritik noktaları eksenleri kesen noktalar olarak yanlış algılıyorlar (4).<br>✓ Kritik noktaların birinci anlamda türevle ilgisinin olduğunu değerlendiririm (5). |
| 2. Sınıflandırabiliyorlar (4,5) | ✓ Yerel maksimum ve yerel minimum noktaların bulunmasını anlatıyoruz (4).<br>✓ İlk etapta yerel maksimum ve yerel minimum noktanın tespiti için öğrencilerin birinci dereceden, ikinci dereceden, üçüncü dereceden fonksiyonların işaretinin incelenmesini bilmesi gerekir. Bu da alt yapı olarak gerekir. İşaret tablosunu iyi anlayan bir öğrenci kritik noktaları sınıflandırabilir (5). |

Tablo 9 incelendiğinde, bir fonksiyonun grafiğinin kritik noktalarının, fonksiyonun birinci türevinin kökleri olduğu öğretim elemanlarının ortak düşüncesi olarak görülmektedir. Öğretim elemanları öncelikle kritik noktaları fonksiyonun birinci türevini sıfır yapan değerler şeklinde tanımladılar. Öğretim elemanlarından biri (4), diğer öğretim elemanından farklı olarak, öğrencilere verdiği tanıma şu şekilde bir ekleme yaptı:

> "*Ayrıca, herhangi bir noktada türevsizlik söz konusu ise o noktanın da bir kritik nokta olduğunu belirtiyorum (4).*"

Öğrencilere kritik noktalar hakkında bilgi verilirken, az rastlanan bir durum olmasından dolayı, fonksiyonun birinci türevinin olmadığı noktaların, kritik noktalar olarak öğretim elemanları tarafından değerlendirilmemiş olduğu düşünülebilir.

Kritik noktaların sınıflandırılması konusunda öğretim elemanlarından biri (5), öğrencilerin, fonksiyonların eşitsizliğini ve işaretinin incelenmesini tam olarak öğrenememiş oldukları takdirde kritik noktaların sınıflamasını güç anlayabileceklerini belirterek, ancak işaret tablosunu iyi anlayan bir öğrencinin kritik noktaları yerel maksimum veya yerel minimum şeklinde sınıflandırabileceğini söyledi. Diğer öğretim elemanı (4) ise, yerel maksimum ve yerel minimum noktaların nasıl bulunduğunu öğrencilere anlattığını belirtti.

**"Ask Dr. Math" sitesine sorulan soru:**

"Bu kalkülüs kitabımda olan bir problemdir. Aşağıdaki fonksiyonun kritik noktalarını bulunuz.

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

**Doktor Sydney 'in cevabı:**

"Bir fonksiyonun kritik noktaları türevinin sıfır olduğu noktalardır. (bu noktalarda, fonksiyonlar bir yerel maksimum, bir yerel minimum veya eyer noktasına ulaşırlar). Bunun neden doğru olduğunu görebilirsiniz... türev, fonksiyona teğet olan doğrunun eğimidir, değil mi? O halde, türev sıfır ise, fonksiyon yere doğru yapışmıştır ("flattened out"). $y = x^2$ nin grafiğini örnek olarak alalım. Bu fonksiyonun grafiğinin $U$ şekline benzediğini biliyoruz. Teğet doğrusunun yatay (horizontal) olduğu yer, grafiğin $(0,0)$ noktasında bir yerel minimuma sahip olduğu yerdir. Bu nokta kesin olarak türevin sıfır olduğu noktadır. Zaten, fonksiyonunuzun kritik noktalarını bulmak için, türevin sıfır olduğu noktaları bulmalıyız."

**Doktor Sam 'in kritik noktalar için açıklaması:**

"Birinci türevin sıfır olduğu veya mevcut olmadığı noktalara fonksiyonun "kritik noktaları" denir. Çünkü, onlar fonksiyonun bir maksimumu veya bir minimumu olduğu yerlerin analizi için kritiktirler."

**Tablo 10. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 5. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 5: Bir fonksiyonun kritik noktalarının, fonksiyonun yerel ekstremum (yerel maksimum ve yerel minimum) noktaları olması hangi durumlara bağlıdır? Bir fonksiyonun kritik noktaları ile ekstremum noktaları arasındaki ilişkiyi bulmak için kullanabileceğiniz yöntemler nelerdir?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğrencilerin Açıklamaları |
| 1. İşaret tablosu oluşturma (1,2,3). | ✓ Birinci türevin köklerinin yerel maksimum veya yerel minimum noktaları olduğunu anlayabilmek için bildiğim yöntem tablo çizmektir. (1).<br>✓ Öncelikle $f'(x)$ fonksiyonunun artı eksi, daha sonra $f(x)$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları tablo çizme yöntemiyle bulabiliriz (1).<br>✓ Bu durumu fonksiyonun hareketini izleyen yapacağımız bir tablo ile çıkarmak mümkündür (2).<br>✓ Birinci türevi aldığımız zaman köklerini tabloya koyduğumuzda…(3).<br>✓ İşaret değişikliği olması gerekir (3). |
| 2. İkinci türevden yararlanma (1,3). | ✓ Bulduğumuz birinci türevin köklerinin yerel maksimum veya yerel minimum noktaları olduğunu anlayabilmek için ikinci türevi alıp, bulduğumuz kökleri ikinci türevine koyarız (1).<br>✓ İkinci türev yardımıyla bulabiliriz (3).<br>✓ İkinci türevini alıp o noktayı koyduğum zaman, eğer o ikinci fonksiyon sıfırdan küçük oluyorsa bu bana yerel maksimumu verir (3). |
| 3. Başka bir yöntem yok (2). | ✓ Başka bir yöntem ile bulunması şu anki matematik bilgileri ile mümkün değil sanıyorum (2).<br>✓ Fonksiyonun birinci türevi, bize kritik nokta ve ekstremum noktaları hakkındaki bağlantıyı veren esas nokta (2). |

Öğrencilerin hepsi de (1,2,3) bir fonksiyonun kritik noktaları ile ekstremum noktaları arasındaki ilişkinin işaret tablosu ile tespit edilebileceği görüşündedir. Öğrenciler birinci türev fonksiyonu için yapılacak işaret tablosunda, artı eksi işaretlerin ve buna bağlı olarak fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkların tespitinden sonra ekstremum noktaların neler olabileceğini veya neler olamayacağını belirttiler. Bu konuda iki öğrencinin açıklamaları şu şekildedir:

> *"Fonksiyon artan bir aralıktan azalan bir aralığa dönmüşse bunu tablodan takip edebiliriz. Bu nokta yerel maksimum noktayı verir. Azalan bir aralıktan artan bir aralığa hareketini değiştirmişse, fonksiyonun bu noktası bize yerel minimum noktayı verir (2)."*

> *"Birinci türevi aldığımız zaman köklerini tabloya koyduğumuzda eğer artıdan eksiye bir geçiş varsa, bu eksiden artıya da geçmiş olabilir. Yerel maksimum, yerel minimum değerini bu şekilde bulabiliriz. İşaret değişikliği olması gerekir. İşaret değişikliği olmadığı zaman o noktamız sadece kritik nokta olarak kalır (3)."*

Öğrencilerden ikisi (1,3), bir fonksiyonun kritik noktaları ile ekstremum noktaları arasındaki ilişkiyi ikinci türevden yararlanarak da bulunabileceğini söyledi. Öğrenciler, fonksiyonun birinci türevinden elde edilen kökün fonksiyonun ikinci türevine konulduğunda ortaya çıkan değerin sıfırdan büyük olması durumunda bu kökün fonksiyonun bir yerel minimum noktası, sıfırdan küçük çıkması durumunda da kökün fonksiyonun bir yerel maksimum noktası olduğunu açıkladılar. Bu öğrencilerden biri (1), rasyonel bir fonksiyonun türevini tanımsız yapan noktaların kritik nokta ve bu noktanın fonksiyonun bir ekstremum nokta adayı olarak düşünülebileceğini söylemesine rağmen, böyle bir noktanın bir ekstremum nokta olup olmadığını tespit etme konusunda nasıl bir yöntem uyguladığına dair herhangi bir açıklama getirmedi. Öğrenci, genelde derslerde bütün fonksiyonların türevlenebilir olduğu kabul edildiğinden ve bu tür fonksiyonlarla uygulamalar yapıldığından bu konuda bir açıklama getirememiş olabilir.

Bir başka öğrenci de (2), başka bir yöntem ile bulunmasının mümkün olmadığını söyledi. Öğrencinin bu şekilde düşünmesi, bir fonksiyonun kritik noktaları ile ekstremum noktaları arasındaki ilişkiyi yalnızca fonksiyonun birinci türevi ile bağlaştırmasından kaynaklanıyor olabilir.

**Tablo 11. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 5. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 5: Bir fonksiyonun kritik noktalarının, fonksiyonun yerel ekstremum (yerel maksimum ve yerel minimum) noktaları olup olmadığını tespit etmede öğrencilerinize hangi açıklamalarda bulunuyorsunuz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğretim Elemanlarının Açıklamaları |
| 1. İşaret inceleme tablosu yapma (4,5). | ✓ Mutlaka işaret inceleme tablosu yapmaları gerektiğini vurguluyorum (4).<br>✓ Türevi sıfır yapan değerin solunda artı işareti sağında eksi işareti var ise, bu noktada yerel maksimum olacağı; diğer taraftan fonksiyonun türevini sıfır yapan noktanın türev işareti solda eksi sağda ise pozitifse bu kritik noktanın da yerel minimum olduğunu rahatlıkla söyleyebiliriz (5). |
| 2. Her kritik nokta bir yerel ekstremum nokta değildir (4,5). | ✓ Birinci türevden bulunan kritik noktalar için hemen maksimum veya minimum noktalar demenin hata olduğunu vurguluyorum (4).<br>✓ Öğrencilerimize herhangi bir fonksiyonun kritik noktalarının yerel maksimum veya yerel minimum noktaları olmayacağı gibi birden fazla da olabileceğini dikkate almalarını örneklerle açıklıyoruz (5). |

Öğretim elemanları bir fonksiyonun kritik noktalarının, fonksiyonun yerel ekstremum (yerel maksimum ve yerel minimum) noktaları olup olmadığını tespit etme konusunda öğrencilerine işaret inceleme tablosu yaptırdıklarını söylediler. Fonksiyonu kritik noktalarının fonksiyonun bir ekstremum noktası olabilmesi için işaret tablosundaki işaretlerin hangi durumlarda olması gerektiğine dair açıklamalarda bulundular. Öğretim elemanlarından biri (4), bu durumu öğrencilerine şöyle açıkladığını ifade etti:

> *"İşaret incelemesi sonucunda kritik noktada işaret değişikliği gerçekleşiyorsa, o nokta ekstremum noktadır. Yani, artıdan eksiye veya eksiden artıya geçişin gerçekleşmesi gerektiğini vurguluyorum (4)."*

Öğrencilerin ve öğretim elemanlarının görüşleri dikkate alındığında, bir fonksiyonun kritik noktalarının, fonksiyonun yerel ekstremum (yerel maksimum ve

yerel minimum) noktaları olup olmadığını tespit etmek için işaret tablosu oluşturma yönteminin yaygın olduğu değerlendirilebilir.

Ayrıca öğretim elemanları, elde edilen kritik noktaların hepsinin fonksiyonun mutlaka bir yerel ekstremum noktaları (yerel maksimum veya yerel minimum) olacağı gibi düşüncenin hata olduğu değerlendirmesini de öğrencilerine anlattıklarını belirttiler.

**"Ask Dr. Math" sitesine sorulan soru:**

" $f(x)=15x^{\frac{2}{3}}+5x$ fonksiyonunun yerel maksimum ve yerel minimum koordinatlarını bulmakta zorluk çekiyorum. Ve hangi $x$ değerleri için fonksiyon aşağı bükeydir?"

**Doktor Ken 'in cevabı:**

" $f(x)$ 'in birinci türevini almalısınız ve daha sonra $f'(x)$ 'i sıfır yapan $x$ değerleri ile türevinin olmadığı $x$ değerlerine bakınız. Bunlar yerel maksimum ve yerel minimum için adaylar olacaktır.

$f(x)=15x^{\frac{2}{3}}+5x$ fonksiyonumuz var. $f'(x)=\frac{10}{x^{\frac{1}{3}}}+5$ olur. Daha sonra, bu ifadeyi sıfıra eşitleyiniz ve $x$ için çözünüz. Bu durumda $x=-8$ 'i elde ederiz. Ve $x=0$ olduğu zaman türev yoktur. O halde bunlar yerel maksimum ve yerel minimum için sadece adaylarımızdır. $f$ de yerine koyarsak, bu noktaların koordinatlarının $(-8,20)$ ve $(0,0)$ olduğunu görürüz.

Ama hala bunların gerçekten yerel ekstremum olup olmadığını kontrol etmeye ihtiyacımız var. Öyleyse bunu yapalım. En iyi yol orijinal fonksiyonun ikinci türevini almaktır. $x$ değerlerini koyalım ve bir pozitif veya bir negatif sayı çıkıp çıkmadığını

görelim. Eğer, ikinci türev burada pozitif ise, fonksiyon yukarı bükey ve eğer negatif ise fonksiyon aşağı bükeydir.

Bu fonksiyonun aşağı bükey olduğu bütün $x$ değerlerini bilmek istediğiniz için, bir taşla iki matematik kuşu vuracağız.

Fonksiyonun ikinci türevi $f''(x) = \frac{-10}{3x^{\frac{4}{3}}}$ tür. O halde bu ne zaman sıfırdan küçüktür.

Öğrenmek için eşitsizliği oluşturalım. $\frac{-10}{3x^{\frac{4}{3}}} < 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^{\frac{4}{3}} > 0 \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{4}{3}} > 0$

olur.

Bazen gerçekten, $x$ 'in kuvveti kesirli olduğu zaman, bu karışık olabilir. Her durumda, bir şeyin $\frac{4}{3}$ kuvvetini almak istediğinizde, onun küp kökünü ve daha sonra dördündü kuvvetini alırsınız. Böylece, her zaman pozitif bir sayı ile sonuçlandıracaksınız. Bu durum ikinci türev üzerinde her zaman başarılı olur. Örneğin, her yerde fonksiyon aşağı bükeydir.

Sıfır hariç (istisna). Bu da problemin hileli tarafıdır. İkinci türevimize sıfırı dahil edemeyeceğimize dikkat edin (hatta birinci türeve de). Çünkü o zaman sıfırla bölecektik. Onun için sıfırı elle kontrol etmeliyiz. $f(0) = 0$ olduğu için, sıfır yerel bir minimummuş gibi görünüyor. Sıfırın sağına veya soluna herhangi bir şey koyarsanız, pozitif bir sonuç elde edersiniz. Örneğin, sıfırdan büyük (bunu nasıl kontrol edeceğinizi ve mutlak olarak emin olacağınızı biliyor musunuz?). Onun için sıfır yerel bir minimumdur.

Elde ettiğimiz sonuç şudur. Bir nokta hariç her yerde aşağı bükey (iç bükey) olan bir fonksiyonumuz var. Fonksiyonumuz $(-8,20)$ de bir yerel maksimuma ve $(0,0)$ da bir yerel minimuma sahiptir. Ne kadar süper bir problem! $(0,0)$ noktasındaki küçük sivri noktaya dikkat edin; bundan dolayı burada türev yoktur."

**Tablo 12. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 6. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 6: Fonksiyonun türevinin olmadığı nokta, fonksiyonun bir ekstremum noktası olabilir mi? Bir örnekle açıklayabilir misiniz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğrencilerin Açıklamaları |
| 1. Olabilir (1,2). | ✓ Olabilir. Örneğin, $f(x)=\|x\|$ fonksiyonun grafiğini ele alalım. Fonksiyon sıfırda türevli değildir. Sıfır orda bir kritik noktası diye açıklayabiliriz. Fakat fonksiyonun $x=0$ da bir ekstremum noktası vardır diyebiliriz (1).<br>✓ Bir ekstremum noktası olabilir. Fakat şu anki matematik bilgileri ile kesindir dememiz yanlış olur. (2). |
| 2. Olamaz (3). | ✓ Bir fonksiyonun türevini aldığımız zaman $\frac{2}{x-2}$ olsun. Birinci türev bu şekilde olsun. Dolayısıyla 2 noktası bu ifadeyi birinci türevi tanımsız yapıyor. Tabloda koyduğumuz zaman tanımsız yaptığı için kök olmadığı için işaret değiştirmeyeceği için ekstremum noktası olamaz (3). |

Öğrencilerden ikisi (1,2), fonksiyonun türevinin olmadığı noktanın fonksiyonun bir ekstremum noktası olabileceğini söyledi. Fakat böyle bir noktanın fonksiyonun bir ekstremum noktası olabileceğine ilişkin açıklamaları farklı oldu. Birisi (1), tablo 12 de görüldüğü gibi $f(x)=|x|$ fonksiyonunun grafiğini ve bu fonksiyonun türevini göz önüne alarak bir açıklama getirdi. Diğeri ise (2), fonksiyonun türevinin olmadığı noktanın bir ekstremum nokta olabileceğini, fakat bunu mevcut matematik bilgileriyle kesin olarak söylemenin doğru olmayacağını belirtti ve bunun sebebini şu şekilde açıkladı:

> *"Çünkü fonksiyonun sonsuza gittiği noktalarda fonksiyonun hareketini takip edemiyoruz. Dolayısıyla burada bir belirsizlik var. Burada bir ekstremum nokta olabileceği gibi fonksiyon monoton, yani sabit hareketine devam ediyor da olabilir. Bu yüzden bu noktada bir ekstremum noktası olabilir (3)."*

Burada öğrenci, çift katlı veya tek katlı düşey asimptota sahip bir fonksiyonun grafiğini göz önüne alarak böyle bir değerlendirme yapmış olabilir.

Diğer bir öğrenci de (3), birinci türevi $\frac{2}{x-2}$ olan ifadeyi örnek göstererek fonksiyonun türevinin olmadığı noktanın fonksiyonun bir ekstremum noktası olamayacağını söyledi. Neden olamayacağına dair yaptığı açıklama tablo 12 de görülmektedir. Öğrenci burada, bir fonksiyonun birinci türevinin olmadığı noktaların kritik noktalar olamayacağını düşünmüş olabilir.

Genel olarak, matematikte görselleştirme yeteneğinin avantajlı olduğu düşünülür; ama Aspinwall, Shaw ve Presmeg 1997'de güçlü zihinsel imgelerin, sonsuza artan eğimleri olan bir cebirsel fonksiyonun grafiğini düşünme yeteneğini engelleyen bir kalkülüs öğrencisiyle ilgili vakayı bildirmişlerdir. Vinner (1989) ve Tall 'ın (1991) çalışmaları, öğrencilerin anlamasının tipik olarak görsel değil, analitik olduğunu tutarlı biçimde göstermiştir.

**Tablo 13. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 6. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 6: Öğrencilerinizden biri size *"Fonksiyonun türevinin olmadığı nokta, fonksiyonun bir ekstremum noktası olabilir mi?"* şeklinde bir soru yöneltse ona nasıl bir cevap verirdiniz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğretim Elemanlarının Açıklamaları |
| 1. Olabilir (4). | ✓ Örneğin, özel tanımlı fonksiyonlarda $y=\|x\|$ fonksiyonun grafiğini çizdiğimizde $(0,0)$ noktasında türevi yoktur. Fakat bu nokta fonksiyonun minimum noktasıdır (4).<br>✓ Genel olarak özel tanımlı fonksiyonlarda karşılaşırız (4). |
| 2. Fonksiyon ekstremum noktalarda tanımlı olmalı (5). | ✓ Fonksiyonun tanımlı olduğu noktalarda, kritik nokta ya da yerel maksimum yerel minimum olduğunu söyleyebiliriz (5).<br>✓ Rasyonel bir fonksiyonda paydayı sıfır yapan bir $x=1$ , $x=2$ için, fonksiyonun tanımsızlığından dolayı herhangi bir değerin bulunamayacağını söylemesi gerekir (5). |

Tablo 13 incelendiğinde, öğretim elemanlarının bir öğrencisi tarafından kendilerine yöneltilebilecek, "fonksiyonun türevinin olmadığı nokta, fonksiyonun bir ekstremum noktası olabilir mi?" şeklindeki soruya farklı cevaplar verdikleri görülmektedir. Öğretim elemanlarından biri (4), $y=|x|$ fonksiyonunun grafiğini örnek göstererek böyle bir durumun olabileceği, ayrıca $y=|1-x^2|$ fonksiyonu örnek verilerek de söylenebileceği ve genel olarak ta özel tanımlı fonksiyonlarda karşılaşıldığı şeklinde öğrencisine cevap verebileceğini belirtti.

Soruyu yönelten öğrencisine, sorduğu sorunun zor ve cevaplandırılmasının güç olduğunu söyleyebileceğini ifade eden diğer öğretim elemanı ise (5), kesirli bir fonksiyonun paydasını sıfır yapan bir değer için fonksiyonun grafiğini çizemeyeceğinden bu noktanın fonksiyonun kritik noktası olamayacağını, öncelikle fonksiyonun tanımlı olduğu noktalarda yerel ekstremum noktalarından bahsedilebileceğini ve dolayısıyla fonksiyonu tanımsız yapan değerler için bir yerel ekstremum nokta bulunamayacağını öğrencisine açıklayabileceğini söyledi. Öğretim elemanı tablo 9 da da görüleceği gibi bir fonksiyonun türevinin tanımsız olduğu noktaları kritik nokta tanımına dahil etmemiş, fonksiyonun tanımlı olduğu noktalarda kritik noktalardan bahsedilebileceğini söylemişti. Bundan dolayı, fonksiyonun türevinin olmadığı noktaların fonksiyonun bir ekstremum noktası olamayacağını değerlendirmiş olabilir.

**Doktor Sam 'in soru 6 için açıklaması:**

"Bir fonksiyonun maksimum değerlerini bulmak için bir tane yol vardır: Birinci türevin pozitiften negatife işaret değiştirdiği noktalara bakmak. Bu noktalarda birinci türevin değeri çoğunlukla sıfırdır, ama bazen grafiğin bir sivri ucu olabilir ( $y=|x|$ fonksiyonun $x=0$ da olduğu gibi). Burada birinci türev mevcut değildir. $x=0$ da mutlak değer fonksiyonuna teğet çizmek mümkün değildir. Ama $y=|x|$ 'in eğimleri bu noktada negatiften pozitife değişir."

Ayrıca, soru 6 için, tablo 11 'in altında yer alan Doktor Ken 'in açıklamalarına bakılabilir.

**Tablo 14. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 7. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 7: Mutlak ekstremum noktaları ile yerel ekstremum noktalarının neler olduğu hakkında bilgi verebilir misiniz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğrencilerin Açıklamaları |
| 1. Mutlak ve yerel ekstremum noktaları birinci türevin kökleridir (1,2,3). | ✓ Mutlak ekstremum noktaları birinci türevin kökleri olmak zorundadır (3).<br>✓ Mutlak ekstremum noktaları ile yerel ekstremum noktaları arasındaki ilişki sadece birinci türevi sıfıra eşitlediğimizde bulduğumuz köklerdir (1).<br>✓ Bir fonksiyonun türevinin hareketini incelediğimizde birçok noktada maksimum nokta, birçok noktada minimum nokta bulunabilir. Fakat bu fonksiyonun en tepesinde bir nokta bulunur ki buraya biz mutlak maksimum nokta deriz (2). |
| 2. Bir fonksiyonun grafiğinin mutlak ekstremum noktası varsa, tektir (1,2,3). | ✓ Mutlak ekstremum noktaları bir fonksiyonun alabileceği en yüksek noktayı veya en küçük noktayı belirler (1).<br>✓ Her bulduğumuz ekstremum nokta mutlak ekstremum nokta olamaz (1).<br>✓ Bir fonksiyonda birçok yerel maksimum nokta vardır. Fakat bunların en maksimumu yani en tepedeki noktası mutlak maksimum noktasıdır (2).<br>✓ $y = x^2$ eğrisini örnek olarak vermiştim. Burda sıfır noktası bize kritik noktasını verir. Bu nokta minimumdur. Ama biz buna yerel minimum demeyiz. Çünkü başka minimum noktası olmadığı için mutlak minimum noktası deriz (3). |

Tablo 14 incelendiğinde, öğrencilerin hepsinin de bir fonksiyonun grafiğinin var olan mutlak ekstremum noktaları ile yerel ekstremum noktalarının, fonksiyonun birinci türevinin kökleri olduğu düşüncesinde oldukları görülmektedir. Öğrenciler, $f:[a,b] \to R$ tanımlı fonksiyonları değerlendirmeyip, sadece $f: R \to R$ tanımlı fonksiyonları değerlendirerek bu şekilde söylemiş olabilirler. Öğrencilerden biri (1),

mutlak ekstremum noktalarının bulunması ile ilgili olarak şu şekilde bir değerlendirme yaptı:

> *"Bir $f'(x)$ fonksiyonundan bulduğumuz kökü eğer o fonksiyona verdiğimizde en büyük değeri veriyorsa o mutlak maksimum noktasıdır diyebiliriz (1)."*

Öğrenciler aynı zaman da fonksiyonun grafiğinde bulunan yerel ekstremum noktalarından en büyüğüne mutlak maksimum ve en küçüğüne de mutlak minimum noktası denildiğini belirttiler. Öğrencilerin bu şekilde düşünmelerinin nedeni, derslerde veya ders kitaplarında birden fazla mutlak maksimuma veya mutlak minimuma sahip fonksiyonların grafikleri ile karşılaştırmadıkları olabilir.

Öğrencilerin anlamasının görsel değil, analitik olduğu söylenebilir. Aspinwall ve Shaw (2002), bunun olası iki nedenini, grafik biçim yerine analitik biçimin öğretimde yaygın biçimde kullanılması ve öğrencilerin ya da öğretmenlerin çoğunlukla kalkülüs yapmanın semboller ve sayıları ustalıklı bir şekilde manipüle etmek olduğuna inanmaları olarak belirtmişlerdir. Ayrıca, diğer literatür, (örneğin, Lesh, Post ve Behr (1987); Janvier (1987); NTCM (2000)) matematiksel kavramları göstermek için birden fazla yol kullanmanın – örneğin, grafik ve analitik – yararlı olduğunu açıkça göstermektedir.

**Tablo 15. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 7. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 7: Mutlak ekstremum noktaları ile yerel ekstremum noktaları kavramlarını ve aralarındaki ilişkiyi öğrencilerinize nasıl açıklıyorsunuz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğretim Elemanlarının Açıklamaları |
| 1. Mutlak ve yerel ekstremum noktaları birinci türevin kökleridir (4). | ✓ Türevi alınınca 2 veya 3 tane kökü çıkan bir 3 ncü veya 4 ncü dereceden polinom fonksiyonunda türevin köklerinin işaret incelemesini yaparak tablo üzerinde maksimum veya minimum noktaları göstermeyi ve bunların içinde en büyük ve en küçüğü tespit ederek mutlak maksimum ve mutlak minimumu grafik çiziminden önce gösterirdim (4). |

| | |
|---|---|
| 2. Mutlak ekstremum noktaları türevle ilgili değil, yerel ekstremum noktaları türevle ilgilidir (5). | ✓ Mutlak ekstremum noktalarının türevle ilgili hiçbir bağlantısının olmayabileceğini, ancak yerel ekstremum noktalarının ise tamamen birinci türevi sıfır yapan noktaların solunda ve sağında işaretlerin farklı olduğu durumda söylenebileceğini değerlendirebiliriz (5).<br>✓ Ancak bazen mutlak ekstremum noktaları tesadüfen yerel ekstremum noktalarla çakışabilir (5). |
| 3. Bir fonksiyonun grafiğinin mutlak ekstremum noktası varsa, tektir (4,5). | ✓ Mutlak ekstremum noktalarının bir fonksiyonun belli bir aralıktaki alabileceği en büyük nokta yada en küçük nokta olduğunu değerlendirebilirim (5).<br>✓ Mutlak ekstremum ile yerel ekstremum arasındaki ilişkiyi kabaca bir grafik çizerek ki bu grafikte en az farklı 2–3 maksimum, 2–3 tane minimum nokta olur. Bu noktalardan en büyüğüne mutlak maksimum, en küçüğüne mutlak minimum denileceğini grafik üzerinden açıklarım (4). |

Öğretim elemanları, mutlak ekstremum noktaları ile yerel ekstremum noktaları kavramlarını ve aralarındaki ilişkiyi öğrencilerine açıklama konusunda benzer değerlendirmelerin yanı sıra farklı değerlendirmelerde de bulundular. Öncelikle, öğretim elemanları bir fonksiyonun grafiğinde birden fazla yerel ekstremum nokta (yerel maksimum ve yerel minimum) olabileceği, eğer varsa mutlak ekstremumların da bir tane olacağı konusunda hem fikirler. Bu konuda, öğrencilerin görüşlerine paralel görüşler belirten öğretim elemanları, birden fazla mutlak ekstremum noktaya sahip fonksiyonları değerlendirme kapsamına almamış olabilir.

Diğer yandan farklı düşüncelere sahip oldukları husus ise, mutlak ve yerel ekstremum noktalarının türevle ilişkili olup olmama durumudur. Öğretim elemanlarından biri (4), bir fonksiyonun hem yerel hem de mutlak ekstremum noktalarının fonksiyonun birinci türevinin kökleri olduğunu belirtti. Tablo 14 ‘e baktığımızda, bu konuda öğrencilerin görüşlerinin de bu doğrultuda olduğu görülmektedir. Diğer öğretim elemanı ise (5), yerel ekstremum noktalarının tamamen birinci türevin kökleri ile ilgili olduğunu, buna karşın mutlak ekstremum noktaların

da türevle bağlantısının olmayabileceğini, ancak bazı fonksiyonlar için yerel ekstremum noktalardan birinin mutlak ekstremum nokta olabileceğini söyledi. Bu durumu şu şekilde izah etti:

> *"Bazen mutlak ekstremum noktaları tesadüfen yerel ekstremum noktalarla çakışabilir. Bunun da türev alındığında bulduğumuz yerel ekstremum noktalar ile tanımlı olan fonksiyonun o aralıktaki alabileceği mutlak maksimum ya da mutlak minimum noktaları ile aynı olabilmesinden kaynaklanır (5)."*

Öğretim elemanının bu düşüncesinden, belli bir aralıkta tanımlı olan bir fonksiyonun mutlak ekstremum noktasının, fonksiyonun uç noktalarında olabileceği gibi, fonksiyonun yerel ekstremum noktasına da eşit olabileceği sonucu çıkarılabilir.

**Tablo 16. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 8. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 8: *"Bir fonksiyonun birinci türevinin sıfır olduğu noktada ikinci türev negatif ise, bu nokta fonksiyonun bir maksimum noktasıdır*" ifadesinin nedeni hakkında bilgi verebilir misiniz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğrencilerin Açıklamaları |
| 1. Fonksiyonun grafiğinin konkav olduğu aralıkta bir maksimum noktası vardır (1,2). | ✓ İkinci türev negatif olması o fonksiyon eğrisinin iç bükey (konkav) olduğu anlamına gelir. Bu iç bükeylik de zaten koordinat düzlemindeki fonksiyon eğrisinin bir maksimum noktası olduğunu bize gösterir (1).<br>✓ İkinci türev bize fonksiyonun konveks mi yoksa konkav mı hareket ettiğini söylüyor. Tabloda incelediğimizde negatif olan değerler için fonksiyonun ayaklarının aşağı doğru baktığını yani tepede bir maksimum nokta olduğunu görürüz (2). |
| 2. Kullanıyorum ama nedenini bilmiyorum (3). | ✓ Bir noktada bir fonksiyonun ikinci türevi negatif ise, bu noktada bu fonksiyon maksimuma ulaşmıştır (3).<br>✓ Birinci türevi aldıktan sonra tekrar ikinci türevi aldığımızda bu değer sıfırdan küçük çıkıyorsa bu bize maksimum olduğunu verir. Büyük çıktığı zaman bu noktanın minimum olduğunu verir. (3).<br>✓ Geometrik yorumundan anlıyoruz (3). |

İki öğrenci (1,2), önce ikinci türevin işaretinin fonksiyonun konkav ve konveks olduğu aralıkları belirttiğini ifade ettiler. Daha sonra fonksiyonun ikinci türevinin negatif olduğu aralıkta fonksiyonun grafiğinin konkav olduğu ya da ayaklarının aşağı doğru baktığı, dolayısıyla bu durumun kendilerine, bu aralıkta fonksiyonun bir maksimum noktasının var olduğunu gösterdiğini söylediler. Burada öğrenciler, teoremlerin ispatına yönelik ders içi ve ders dışı çalışma yapmamış, dolayısıyla ifadeyi tepe noktaları olan aşağı bükey şekilleri göz önüne alarak sezgisel değerlendirmiş olabilirler.

Tablo 16 incelendiğinde, diğer öğrencinin (3), bu ifadeyi fonksiyonun ekstremum noktalarını tespit etmek için kullandığı, kullanmasına rağmen ifadenin nedeni hakkında bir fikir sahibi olmadığı düşünülebilir.

Birçok yazar öğrencilerin grafiksel türev bilgisi konusunda yaşadığı belli problemleri tartışmışlardır. Örneğin, Ferrini-Mundy ve Graham (1994), öğrencilerin temel kalkülüs kavramları konusunda yaşadığı birtakım güçlükleri anlatmışlar ve bir öğrencinin türevin grafiğini çizmeyi denemeden önce, grafik olarak gösterilen bir fonksiyonun denklemini bulma isteğini ayrıntılarıyla tartışmışlardır. Orton (1983), öğrencilerin diferansiyel almadaki rutin performanslarının yeterli olduğuna, ama türev kavramına dair sezgisel ya da kavramsal anlamanın çok az olduğuna dikkat çekmiştir. Eisenberg (1992), öğrencilerin görselleştirmeden kaçındıklarını bildirmiştir.

**Tablo 17. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 8. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 8: Dersinizde ikinci türevin yerel ekstremum noktaları ile ilişkisi konusunu işlerken *"Birinci türevin sıfır olduğu noktada ikinci türev negatif ise, bu nokta fonksiyonun bir maksimum noktasıdır*" ifadesini söylüyorsunuz. Öğrencilerinizden biri bunun nedenini size sorduğunda onlara nasıl bir açıklama yapardınız?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğretim Elemanlarının Açıklamaları |
| 1. Fonksiyonun konkav ve konveks olduğu aralıkları değerlendirerek açıklama (4). | ✓ Koordinat düzleminde birkaç maksimum ve minimum nokta içeren eğrisel bir grafik çizip, tepelerin en uç ve çukurların en alt noktasında birinci türev sıfırdır. Tepeyi alırsak, şekil konkavdır. Öyleyse burada ikinci türev negatiftir. (4). |

| | |
|---|---|
| | ✓ Çukurlar için de konvekslik söz konusu olduğundan ikinci türev pozitiftir. Bu şekilde bir açıklama yaparım (4). |
| 2. Fonksiyonun birinci türevinin grafiğini değerlendirerek açıklama (5). | ✓ Fonksiyonun birinci türevinin grafiği çizilir. Sonra birinci türevi sıfır yapan noktadan öğrencinin eğriye herhangi bir teğet çizmesi istenir. Eğer o noktadan öğrencinin çizdiği teğet x-ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açı geniş açı oluyor ise, bunun anlamı ikinci türevin negatif olacağı, bu nedenle de bu noktada yerel maksimum nokta olduğu anlaşılır (5).<br>✓ Eğer, o noktadan öğrenci teğeti çizdiğinde x-ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açı dar açı oluyorsa, bunun anlamı ikinci türevin sıfırdan büyük olduğu, dolayısıyla o noktanın yerel minimum olduğunu değerlendiririz (5). |

Tablo 17 incelendiğinde, öğretim elemanlarının, *"Birinci türevin sıfır olduğu noktada ikinci türev negatif ise, bu nokta fonksiyonun bir maksimum noktasıdır*" ifadesinin nedenini sorabilecek bir öğrencisine farklı yöntemlerle açıklama yapacakları anlaşılmaktadır.

Böyle bir ifadeyi söylediğinde bunun nedenini öğrenciler sormadan önce izah etmek zorunda olduğunu belirten öğretim elemanı (4), bu ifadenin nedenini fonksiyonun grafiğinin konkav ve konveks olduğu aralıkları göz önüne aldı. Maksimum noktaların bulunduğu aralıklarda fonksiyonun konkav olduğu, dolayısıyla bu aralıklarda ikinci türevin negatif olduğu şeklinde bir açıklama yapabileceğini söyledi.

Soruyu soran öğrencinin, bir fonksiyonun grafiğini doğru değerlendirebildiği takdirde, sorunun cevabını rahatlıkla ve kolayca anlayabileceğini belirten öğretim elemanı ise (5), bu ifadenin nedenini fonksiyonun birinci türevinin grafiğini çizerek açıklayabileceğini söyledi. Öğrenciye birinci türevi sıfır yapan noktadan eğriye bir teğet çizdireceğini belirttikten sonra açıklamasına şu şekilde devam etti:

> *"Eğer, o noktadan öğrencinin çizdiği teğet x-ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açı geniş açı oluyor ise, bu durumda* $\tan\theta$ *nın* $90°$ *den büyük olması durumunda alacağı değerin negatif olması düşünüldüğünde ikinci türevin negatif olacağı ve bu nedenle de teğetin çizilmesinden dolayı verdiğimiz bu noktada yerel maksimum nokta olduğu anlaşılır (5)."*

Bu görüşler ve tablo 16 da öğrencilerin görüşleri değerlendirildiğinde, öğretim elemanlarının derslerde öğrettikleri teoremlerin, ispatları ile verilmesinin faydalı olacağı, dolayısıyla öğrenciler tarafından kullanmaları istenen teoremlerin öğrencilerin kafalarında anlam kazanacağı sonucu çıkarılabilir.

**"Ask Dr. Math" sitesine sorulan soru:**

"Bir noktanın ikinci türevi negatif olduğu zaman, niçin bu noktanın maksimum olduğu söylenir? Ben bir öğretmenim ve bu bilgiyi kolayca ifade ediyorum, fakat nedenini asla açıklayamıyorum."

**Doktor Sam 'in cevabı:**

Genel olarak bir noktada fonksiyonun ikinci türevi negatif olduğu zaman, fonksiyonun bir maksimuma sahip olduğu doğru değildir. Örneğin, $y = 2 - x^2$ fonksiyonunun birinci türevi $y' = -2x$ ve ikinci türevi $y'' = -2$ dir. Bu, her nokta için (noktada) ikinci türev negatiftir, ama fonksiyonun sadece $x = 0$ da bir maksimumu vardır.

"Birinci türevin sıfır olduğu noktada" ikinci türev negatif ise, bu noktanın fonksiyonun bir maksimum değeri olacağı doğrudur.

Bir noktada fonksiyonun birinci türevi, bu noktada fonksiyonun grafiğine çizilen teğet doğrusunun eğimidir. O halde, $y = 2 - x^2$ (öyle ki $y' = -2x$) ise, bu parabole $x = 3$ noktasında teğet olan doğrunun eğimi $-6$ dır.

Genel olarak, birinci türev negatif olduğu zaman, grafik bu noktada aşağı eğimlidir ve bu nedenle fonksiyon azalandır. Bir noktada birinci türev pozitif ise, fonksiyon artandır.

Bir fonksiyonun bir yerel maksimum değeri kendisine yakın bütün noktalar içinde en yüksek noktadır. (Eğer tepelik bir bölgede yürüyüş yaparsanız, tepenin en üstünde durmuş olabilirsiniz ve böylece yakınındaki noktalardan daha yüksekte olursunuz. Fakat henüz en yüksek tepede değilsiniz). Azalan $x$ değerlerinizle grafik boyunca yürüdüğünüzü farz ederseniz, bir yerel maksimuma ulaşana kadar grafiğin yukarılarına doğru yürümek zorundasınız. Ve daha sonra maksimum noktasında ayrılırken, grafiğin aşağısına doğru yürümek zorundasınız. Bunun anlamı, bir maksimuma yaklaşırken grafiğin eğimi pozitif olmak zorunda ve yüksek noktayı terk ederken eğim negatif olmak zorundadır. Bir fonksiyonun maksimum değerlerini bulmak için bir tane yol vardır: Birinci türevin pozitiften negatife işaret değiştirdiği noktalara bakmak. Bu noktalarda birinci türevin değeri çoğunlukla sıfırdır, ama bazen grafiğin bir sivri ucu olabilir ( $y = |x|$ fonksiyonun $x = 0$ da olduğu gibi). Burada birinci türev mevcut değildir. $x = 0$ da mutlak değer fonksiyonuna teğet çizmek mümkün değildir. Ama $y = |x|$ 'in eğimleri bu noktada negatiften pozitife değişir.

Birinci türevin sıfır olduğu veya mevcut olmadığı noktalara fonksiyonun "kritik noktaları" denir. Çünkü, onlar fonksiyonun bir maksimumu veya bir minimumu olduğu yerlerin analizi için kritiktirler.

Ama siz ikinci türevi soruyorsunuz. İkinci türevi "birinci türevin türevi" gibi düşünürseniz, negatif ikinci türev, türev grafiğinin eğiminin negatif olduğu anlamına gelir. Yani, türev azalandır. Birinci türev azalan ise, bu orijinal fonksiyonun eğimlerinin azaldığını ifade eder. Eğer eğimleri gittikçe küçülen bir eğri çizmeye kalkışırsanız, aşağı doğru konkav olan bir eğri (ters çevrilmiş bir kase gibi) çizmeniz gerektiğini görürsünüz. Aynı şekilde ikinci türev pozitif ise, fonksiyonun eğimleri artmaktadır ve böylece orijinal fonksiyon yukarı doğru konkavdır ($U$ gibi).

Öyleyse ikinci türev, bir fonksiyonun konkavlığı hakkında bize fikir verir. Sonuç olarak işte aradığınız sebep:

Eğer bir fonksiyonun ikinci türevi bir kritik noktada negatif ise, fonksiyonun bu noktada bir yerel maksimumu vardır.

Sebep grafiğin düzleştiği bir noktada grafiğin aşağı konkav olmasıdır... tepenin en üstü gibi. Bu ikinci türev testi olarak adlandırılır. Testin diğer yarısı da:
Eğer bir fonksiyonun ikinci türevi bir kritik noktada pozitif ise, fonksiyonun bu noktada bir yerel minimumu vardır.

Bu, grafiğin kritik bir noktada yukarı konkav olmasından dolayıdır ki bu da $y = x^2$ gibi şekillerde meydana gelir."

**Tablo 18. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 9. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 9: Bir fonksiyonun büküm (dönüm) noktasını nasıl tanımlıyorsunuz? Fonksiyonun büküm (dönüm) noktasını nasıl buluyorsunuz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğrencilerin Açıklamaları |
| 1. Fonksiyonun ikinci türevinin çakışık olmayan kökleridir (1,2). | ✓ Fonksiyonun büküm noktası ikinci türevinin sıfıra eşitlenmesi sonucunda bulunan köklere fonksiyonun büküm noktası diyebiliriz (1).<br>✓ Fonksiyon polinom ifade olduğu zaman bulduğumuz oradaki kök eğer çakışık kök ise dönüm noktası olma gibi bir durum yok (1).<br>✓ Fonksiyonun ikinci türevini sıfıra eşitleyerek elde ettiğimiz x değerleri ile bulabiliriz (2).<br>✓ Büküm noktalarını bilmemiz için sadece x değerlerini bulmak yeterli değildir (2).<br>✓ Bu x değerlerini işaret tablosunda inceleyerek fonksiyonun hareketinin değiştiği noktaları tespit etmemiz gerekir (2). |
| 2. Fonksiyonun ikinci türevini sıfır yapan bütün köklerdir (3). | ✓ Geometrik yorumu olarak fonksiyonun ikinci türevinin kökü bize dönüm noktasını verir (3). |

| | |
|---|---|
| | ✓ İkinci türevin köklerini, sıfır yapan bütün x değerlerini fonksiyonun dönüm noktası olarak biliyorum (3).<br>✓ Mutlaka çıkan değerler fonksiyonun dönüm noktasıdır (3). |
| 3. Fonksiyonun çukurluğunun yön değiştirdiği noktadır (2). | ✓ Fonksiyonun hareketinin değiştiği noktalar büküm noktalarıdır (2).<br>✓ Fonksiyonun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği noktalar vardır. Bu noktalara biz büküm noktası deriz (2). |

Tablo 18 incelendiğinde, öğrencilerden ikisinin (1,3), bir fonksiyonun büküm noktasının tanımını, fonksiyonun büküm noktalarını bulurken kullandıkları yolu açıklayarak yaptıkları görülmektedir. Yani, her iki öğrenci de büküm noktasını fonksiyonun ikinci türevinin kökleri olarak tanımladı.

Bu öğrencilerden biri (3), ikinci türevin elde edilen bütün köklerinin fonksiyonun büküm noktaları olacağını söylerken, diğer öğrenci (1) fonksiyonun ikinci türevinin sıfır olduğu noktanın çakışık kök olması durumunda bir büküm noktası olmayacağını belirtti. Bu düşünceye bir başka öğrenci de (2) katıldı:

> *"Sadece x değerlerini bulmamız yeterli değildir. Bu x değerlerini işaret tablosunda inceleyerek fonksiyonun hareketinin değiştiği noktaları tespit etmemiz gerekir (2)."*

Bu öğrenci (2) aynı zamanda büküm noktasını, fonksiyonun çukurluğunun yön değiştirdiği nokta olarak tanımladı.

> *"Fonksiyonun hareketinin değiştiği noktalar büküm noktalarıdır (2)."*

Matematikte, öğrencilerin istenen hedef davranışları kazanabilmeleri ve başarılı olabilmeleri için, işlenen konu ile ilgili tanım ve teoremleri iyi şekilde öğrenmeleri öncelikli hedef olmalıdır. Öğretim elemanlarının bu hedef doğrultusunda

çaba göstermeleri önemlidir. Aksi takdirde öğrencilerin kavram yanılgılarına düşmeleri kaçınılmaz olacaktır.

Vinner ‘in (1991) yaptığı bir araştırma, kavramların tanımına verilen önemin vurgulanmasına rağmen, öğrencilerin çoğunun formal tanımları kullanmaları gereken ödevler üzerinde çalışırken tanımları kullanmadıklarını göstermiştir.

**Tablo 19. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 9. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 9: Öğrencilerinize bir fonksiyonun büküm (dönüm) noktası hakkında hangi bilgileri veriyorsunuz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğretim Elemanlarının Açıklamaları |
| 1. Fonksiyonun ikinci türevinin sıfır olduğu ve ikinci türevin işaret değiştirdiği noktadır (4,5). | ✓ Fonksiyonun ikinci türevinin kökleri bulunup tabloda işaret incelemesi yapılır ve köklerde işaret değişikliği oluyorsa dönüm noktası olur yoksa olmaz şeklinde açıklama yaparım (4).<br>✓ Bütün ikinci türevin kökleri dönüm noktasıdır demenin doğru olmadığını belirtirim (4).<br>✓ Fonksiyonun ikinci türevinin alınması, ikinci türevin sıfır olduğu noktaların bulunması ve ikinci türevin işaretinin incelenmesi gerektiğini değerlendiririz (5).<br>✓ İkinci türev işareti farklı işaretleri alıyorsa bu durumda fonksiyonun bu noktalarda büküm ya da kıvrım noktası olabileceğini değerlendiririz (5). |
| 2. Fonksiyonun çukurluğunun yön değiştirdiği noktadır (4,5). | ✓ Konvekslikten konkavlığa veya tersi geçiş noktasıdır derim (4).<br>✓ İkinci türevin sıfırdan büyük olması durumunda fonksiyonun dış bükey, ama ikinci türevin negatif olduğu yerlerde de fonksiyonun iç bükey eğriler çizdiğini açıklarız. Bu bükeyliğin değiştiği noktalar dönüm noktalarıdır şeklinde bilgiler veririz (5). |

Tablo 19 incelendiğinde, öğretim elemanlarının bir fonksiyonun büküm veya dönüm noktası hakkında öğrencilerine benzer bilgiler verdikleri değerlendirilebilir. Öğretim elemanlarının her ikisi de öğrencilerine büküm noktası hakkında açıklama yaparken, fonksiyonun ikinci türevini sıfır yapan noktanın, fonksiyonun büküm

noktası için sadece bir aday nokta olduğunu, bu noktanın fonksiyonun büküm noktası olup olmadığını tespit etmek için işaret tablosunda ikinci türevin işaretinin incelenmesi gerektiğini vurguladılar. İnceleme esnasında, ikinci türevi sıfır yapan noktanın sağında ve solunda farklı işaretler olması durumunda fonksiyonun bu noktada ancak bir dönüm noktası olabileceğini değerlendirdiler.

Diğer yandan öğretim elemanları (4,5), dönüm noktasının fonksiyonun çukurluğunun yön değiştirdiği yani konkavlıktan konvekşliğe veya konvekslikten konkavlığa geçtiği nokta olarak öğrencilerine tanımladıklarını belirttiler. Öğretim elemanlarından biri (4), dönüm noktasını bu şekilde tanımlarken, öğrencilere dönüm noktasını şekille gösterdiğini ve bunun için de ellerini kullandığını söyledi:

> *"Ellerimi çukur yapıp, bir el içe, diğer el dışa bakar şekilde tırnakları birbirine değdirdiğimizde parmak uçları dönüm noktası olur. Bir el konveks, diğer el konkav olduğuna göre, tırnakların değdiği yer dönüm noktası yani konvekslikten konkavlığa veya tersi geçiş noktasıdır derim (4)."*

**Tablo 20. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 10. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 10: Verilen bir f fonksiyonu için, fonksiyonun artan/azalan ve yukarı/aşağı bükey olduğu aralıkları belirttiğimiz cevaplarda bitim noktalarını dâhil etmeli miyiz? Nedenini açıklayabilir misiniz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğrencilerin Açıklamaları |
| 1. Dâhil edilmemelidir (1,2,3). | ✓ Fonksiyonun birinci türevinde artan/azalan olarak incelediğimiz aralıkların arasında kalan yani bitim noktaları o fonksiyonun yerel ekstremum noktalarıdır. Yerel ekstremum noktaları da o fonksiyon için artan/azalan bir ifade teşkil etmez. Bu yüzden bitim noktalarını dâhil etmemeliyiz (1).<br>✓ Fonksiyonun ikinci türevinden bulduğumuz bitim noktaları yukarı/aşağı bükey aralıklar arasında bir geçiş sağlamaktadır. Bu bitim noktalarında eğriliğin değişimi söz konusudur. Bu yüzden dâhil etmememiz gerekir (1).<br>✓ Bence etmemeliyiz. Bu noktalarda fonksiyonun konveks/konkav veya artan/azalan olduğu kanısında ikileme düşeriz (2). |

| | |
|---|---|
| | ✓ Dahil etmememiz gerekiyor. Açık olarak göstermemiz gerekiyor (3).<br>✓ Örneğin, 2 ve 3 ikinci türevin kökleri olsun. 2 ve 3 arasında bu fonksiyon ya konkav ya da konvekstir. 2,3 noktaları fonksiyonun dönüm noktalarıdır. O yüzden dahil etmememiz gerekiyor (3). |

Tablo 20, öğrencilerin hepsinin (1,2,3), verilen bir f fonksiyonu için, fonksiyonun artan/azalan ve yukarı/aşağı bükey olduğu aralıkları belirttiğimiz cevaplarda bitim noktalarını dâhil edilmemesi düşüncesine sahip olduklarını göstermektedir. Öğrenciler, bu bitim noktalarının, fonksiyonun artan/azalan olduğu aralıkların belirtildiği cevaplarda fonksiyonun yerel ekstremum noktaları, yukarı/aşağı bükey olduğu aralıkların belirtildiği cevaplarda da fonksiyonun dönüm noktası olduğunu; dolayısıyla aralık olarak belirtilen cevaplarda hangi tarafa dahil edileceği konusunda karar verilemeyeceğini dahil edilmeme nedeni olarak açıkladılar.

Tablodaki örneği veren öğrenci (3), benzer şekilde artan/azalan aralıkları belirtirken de dahil etmemek gerektiğini söyledikten sonra, açıklamalarına aşağıdaki örneği vererek devam etti:

> *"Bir tane örnek alalım. Bir fonksiyonun birinci türevi* $x^2-2x-3$ *olsun. Bunun kökleri* $x=3$ *ve* $x=-1$ *çıkar. Tablosunu oluşturduğumuz zaman,* $-\infty$ *dan –1 aralığında bu ifademiz artıyor. Tabi ekstremum noktalarını belirtirken –1 noktası yerel maksimum, 3 noktası yerel minimumdur. Bu noktalar fonksiyonun kökü oluyor.* Dâhil *etmememiz gerekiyor (3)."*

Bu açıklamaları söyleyen öğrenci (3) ile yapılan görüşme, şu şekilde bir diyalog ile sonuçlandı:

***Araştırmacı:*** *-1 noktasını dâhil ettiğinizi düşünün!*

***Öğrenci:*** $(-\infty,-1)$ *aralığını* $(-\infty,-1]$ *olarak dâhil ettik. O zaman* $(-1,3)$ *aralığında dâhil etmeyeceğiz.*

***Araştırmacı:*** *Neden* $(-\infty,-1]$ *aralığına dâhil ettiniz de* $(-1,3)$ *aralığına dâhil etmediniz?*

***Öğrenci:*** *Doğru, -1 'i artan aralığa mı yoksa azalan aralığa mı dâhil edeceğiz? Aklıma bir fikir gelmiyor.*

Kalkülüs kitaplarında, bu konu hakkında verilen tanım ve teoremlerde farklılıklar olduğu için öğrenci (3) bu şekilde bir ikileme düşmüş olabilir. Buna rağmen, öğrencilerin ortaya koyduğu nedenlerin geçerli olabileceği düşünülebilir.

Vinner (1991), matematiksel düşünmede tanımın rolünün, resmi bağlamlarda (test kitapları, matematik öğretiminin hedefleri hakkındaki dokümanlar) önem verilmediğini belirtmiştir. Diğer yandan, Borgen ve Manu (2002), "öğrenciler gerçekte ne anlarlar?" adlı çalışmalarında, doğru yanıtların mutlaka anlamayı (understanding) göstermediğini ortaya koymuşlardır.

**Tablo 21. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 10. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 10: Verilen bir f fonksiyonu için, fonksiyonun artan/azalan ve yukarı/aşağı bükey olduğu aralıkları belirttiğimiz cevaplarda bitim noktalarını dâhil etmemeleri gerektiğinin nedenini öğrencilerinize nasıl açıklıyorsunuz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğretim Elemanlarının Açıklamaları |
| 1. Dâhil edilmemelidir (4,5). | ✓ Bitim noktaları dâhil edilmez. Çünkü noktasal kavramlar değildir (4).<br>✓ Noktanın artanlığı, azalanlığı ya da konveksliği, konkavlığının anlamı yoktur (4).<br>✓ Artan ve azalan olma durumunda birinci türevi sıfır yapan değerlerin solundaki ve sağındaki işaret tablosuna bakılır. Türevde, bu noktalardaki değerlendirme sıfır yaptığı için bu noktaların dâhil edilmemesi gerektiği değerlendirilir (5). |

| | |
|---|---|
| | ✓ $-\infty$ ve $+\infty$ sonsuz değerler olduğu için dahil edebileceğimiz bir değer olmaz (5).<br>✓ Kesirli ya da rasyonel fonksiyonlarda paydayı sıfır yapan değerler fonksiyonu tanımsız kıldığı için bu noktaların dâhil edilmemesi gerektiğini öğrencilere belirtiriz (5). |

Öğretim elemanları (4,5), tablo 21 deki kendilerine yöneltilen soru için herhangi bir olumsuz düşüncede bulunmadılar. Yani bitim noktaları dâhil edilebilir şeklinde aksi bir fikir beyan etmediler. Her iki öğretim elemanı da, tablo 21 de görüldüğü gibi bitim noktalarının dahil edilmemesi gerektiği düşüncesine katıldılar ve bunun nedeni için öğrencilerine yönelik yapacakları değişik açıklamalarda bulundular.

Öğretim elemanlarında biri (4), artanlık ve azalanlığın veya konvekslik ve konkavlığın noktasal kavramlar olmadığı, bu kavramların nokta olarak ifade edilemeyeceği, bu nedenle de çözüm aralığını belirtirken dâhil edilmemesi gerektiği şeklinde öğrencilerine açıklayacağını söyledi. Diğer öğretim elemanı ise (5), artan ve azalan aralıkların tespitinin birinci türev kullanılarak yapılacağını, bunun içinde birinci türevin işaret tablosunda artı ve eksi aralıkların göz önüne alınacağını, ancak birinci türevi sıfır yapan noktaların dâhil edilmemesi gerektiği değerlendirmesini öğrencilerine yapacağını söyledi.

Aynı zamanda $-\infty$ ve $+\infty$ ifadeleri ile fonksiyonu tanımsız yapan noktaların da açık aralık olarak ele alınması gerektiğini belirten öğretim elemanı son olarak şu değerlendirmeyi yaptı:

> *"Benzer biçimde, ikinci türevin sıfır olduğu bazı noktaların da, büküm noktalarının da dâhil edilmediğini özellikle vurgularız (5)."*

**“Ask Dr. Math” sitesine sorulan soru:**

“Artan/azalan fonksiyonlar ve ek olarak yukarı/aşağı bükey fonksiyonlarla ilgili olan bir problem üzerinde sınıfta tartışmıştık. Problemimiz “ $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ şeklinde verilen fonksiyonun artan/azalan ve yukarı/aşağı konkav olduğu aralıkları bulunuz” şeklindedir.

Problemin cevabını aralık olarak ifade ettiğimizde, bitim noktalarının dahil olduğu köşeli parantez mi yoksa bitim noktalarının dahil olmadığı açık parantez mi kullanmalıyım?

**Doktor Sam ‘in cevabı:**

Sorunuzu özel bir durum içinde cevaplandıracağım, ama fikir artan/azalan ve yukarı/aşağı konkav için uygulanabilirdir.

Farklı kitaplar, öğretmenler ve matematikçiler artan fonksiyonların tanımını ufak farklılıklarla kullanırlar. Fakat bu farklı kullanımlardan herhangi birinin kesinlikle doğru olduğu anlamı taşımaz. Artan bir fonksiyonun tanımının şu şekilde olduğunu düşünün: $f$ , $I$ aralığında artandır, eğer $I$ da her bir $p$ ve $q$ noktaları için, $p < q$ ise $f(p) < f(q)$ dur.

$R$ de tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f$ ‘in $I$ aralığında artan olup olmadığına karar vermek için alışılmış yöntem $f'(x) = 2x$ ‘i hesaplamaktır. Şu teoremi kullanıyoruz: Eğer $f$ , $J$ açık aralığında türevlenebilir ve $J$ deki her $x$ için $f'(x) > 0$ ise, $f$ , $J$ de artandır.

O halde, $f(x) = x^2$ için bunu uygulayalım. Elbette $f$ , $(0,\infty)$ da artan ve $(-\infty,0)$ da azalandır. $[0,\infty)$ ne demek oluyor? Teorem söylendiği gibi sessizdir. Ancak, artanlık tanımına geri dönülebilir. $f$ ‘in $I = [0,\infty)$ da artan olduğunu göstermek için, $u$ ve $v$ , $I$ da ve $u < v$ olsun. Eğer, $0 < u$ ise, teorem uygulanır. Aksi takdirde, $0 = u < v$ ve $f(u) = 0 < f(v) = v^2$ olduğunu görürüz.

Bazı öğretmenler, kitaplar ve hatta sınavlar bitim noktasını göz önüne almayı genellikle atlarlar. Eğer, çok emin olmak istiyorsanız, yukarıdaki analizi yapabilirsiniz.

Yukarı/aşağı konkavlık, tanımının kullanımı daha hantal olduğundan titizlik gösterir. Çoğunlukla, bu, $f$ 'in $J$ aralığında yukarı konkav olduğu söylenerek tanımlanır. Bu $J$ aralığında, $f$ 'in grafiği, aynı şekildeki genel fikirlere rağmen bu aralıktaki $f$ 'in kesen doğrularının her birinin üstünde bulunur."

**Tablo 22. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 11. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 11: Sizce türev kavramı günlük hayatta nerelerde kullanılır?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğrencilerin Açıklamaları |
| 1. Bir cismin hızını ve ivmesini bulmada kullanılır (1,3). | ✓ Bir hareketlinin zamana bağlı yol denkleminin indirgenip hızının bulunması veya hızın indirgenip ivmenin bulunmasında karşımıza çıkmaktadır (1).<br>✓ Zamana bağlı bir yol denkleminde türevini alarak hızı bulabiliyoruz ve buradan da ivmeye ulaşabiliriz. Fizikçiler burada kullanıyor (3). |
| 2. Mühendislikte kullanılır (1,2,3). | ✓ Büyük araba firmaları yüksek mühendisler vasıtasıyla bir arabanın iç hacmini hesaplamada türevden faydalanabilir (2).<br>✓ Mühendislikte eğimden faydalanmak için mutlaka türev kullanılıyor (3).<br>✓ Üniversitede gösterilen mühendislik dallarında türev kullanılmaktadır (1). |
| 3. Maliye, ekonomi derslerinde kullanılır (1). | ✓ Maliye, ekonomi yönetimi gibi okutulan derslerde zarar-kar hesaplamalarında kullanılıyor diye biliyorum (1). |

Tablo 22 incelendiğinde, öğrencilerin türev kavramının günlük hayatta kullanıldığını düşündükleri ortak alanın mühendislik olduğu görülmektedir. Fakat mühendislik dallarının hangisinde, ne şekilde kullanıldığına ilişkin somut ve derin

açıklamalarda bulunmadılar. Sadece bir öğrenci (2), otomobil üreten büyük şirketlerin ürettikleri araçların iç hacmini hesaplamada türevi kullandıklarını belirtti. Aynı öğrenci (2), şöyle bir örnek daha verdi:

> *"Çeşitli şekillerde içecek kapları bulunabiliyor. Normal bilgilerimizle bunların hacmini, kapladığı alanı bilmemiz mümkün değil. Fakat bakıyoruz bunların üzerinde 1 lt., 2 lt, gibi tanımlanmış belirteçler var. Dolayısıyla bunların alanı, hacmi hesaplanabilmiş. Bunu nasıl yapmışlar? Tabi ki türev yardımıyla (2)."*

Ayrıca öğrencilerden ikisi (1,3), türevin fiziksel anlamını düşünerek bir hareketlinin hızını ve ivmesini bulmada türevin kullanıldığını söyledi. Bu öğrencilerden biri (1), diğerlerinden farklı olarak maliye ve ekonomi alanlarında kar-zarar hesaplamaları yapmak amacıyla kullanıldığını söyledi.

Öğrencilerin türev kavramının günlük hayatta kullanıldığı alanlara ilişkin örneklerle pek karşılaşmadıkları düşünülebilir. Sadece bu konudaki bilgilerinin fizik derslerinde gördükleri birkaç örnekle sınırlı kaldığı değerlendirilebilir.

Schwalbach & Dosemagen (2000), birçok kalkülüs öğrencisinin, matematik konusunda yetenekli olmakla birlikte formülleri ezberleme ve onları ezberden mekanik bir şekilde uygulamaya bel bağladığını söylemişlerdir. Boix-Mansilla ve Gardner (1997) da şuna işaret etmişlerdir: "Anlama, salt bir dağınık şekilde organize olmuş eylemler kümesi değildir. Tersine anlama, matematik, tarih, seramik sanatı ya da dans gibi belli bir alanda uygun uygulama standartlarına (the standarts of good practice) göre bilgiyle düşünme yeteneğidir" (Aktaran: Schwalbach & Dosemagen, 2000).

**Tablo 23. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 11. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 11: Öğrencilerinize türev kavramının günlük hayatta nerelerde kullanıldığı hakkında ne gibi bilgiler veriyorsunuz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğretim Elemanlarının Açıklamaları |
| 1. Bir cismin hızını ve ivmesini bulmada kullanılır (4,5). | ✓ Bir araca bindiklerinde aracın hızının ve ivmesinin bulunabileceğini açıklıyorum (5).<br>✓ Fizikte hız, ivme kavramlarının açıklanmasında, kullanılması ile ilgili problemlerin çözümünde kullanabilirler (4). |
| 2 . Askeri alanlarda kullanılır (5). | ✓ Uçaksavar, tanksavar atışlarında hatta tabanca, tüfek atışlarında mermi yolu izlerinin hesaplanmasında kullanılır (5).<br>✓ Bir merminin ne zaman en yüksek noktaya ulaşabileceğini bulabilirler (5). |
| 3. Mühendislikte kullanılır (4,5). | ✓ Bir bina yapımında kullanılacak hacme göre, kaç tuğla, ne kadar kum, ne kadar beton kullanılacağını ölçüler verilmesi şartıyla rahatlıkla türev kullanarak bulabilirler (5).<br>✓ Yol çalışmalarında, baraj çalışmalarında kullanılır (5).<br>✓ Kimyada alanında, termodinamikte ve reaksiyon hızının hesaplanmasında kullanılır ( 4).<br>✓ Fabrikalardaki üretimlerde arz talep ilişkilerine göre, en çok verim ya da üretimin en az emekle nasıl elde edilebileceğini söyleyerek bilgi veriyoruz (5). |
| 4. Maksimum-Minimum problemlerinde kullanılır (4,5). | ✓ Matematikte maksimum ve minimum problemlerinin çözümünde kullanabilirler (4).<br>✓ Bir küpün içine maksimum hacimli bir silindir yerleştirmek gibi maksimum minimum sorularıyla enteresan şekilde değerlendirmeler yapılabilir (5). |

Tablo 23 incelendiğinde, öğretim elemanlarının (4,5), türev kavramının günlük hayatta nerelerde kullanıldığı hakkında öğrencilerine verdikleri bilgilerin; bir cismin hızını ve ivmesini bulmada, mühendislik dallarında ve maksimum-minimum problemlerinin çözümünde olduğu görülmektedir. Diğer taraftan öğretim

elemanlarından birinin (4), bu bilgileri öğrencilerine aktarırken fazla detaya girmediği, diğer öğretim elemanının ise (5), öğrencilerine daha derin örneklerle pekiştirilmiş bilgiler verdiği de görülmektedir. Aynı zamanda, öğrencilerinin mesleği alanında da türevin kullanıldığına dair açıklamalarda bulunan bu öğretim elemanı (5), türev kavramının günlük hayatta kullanılması ile ilgili öğrencileri hakkında şunu söyledi:

> *"Öğrenciler, gözlemlediğim kadarıyla türev hesabı yapabilirler, ancak basit olarak türevi günlük hayatta kullanabileceklerini düşünmüyorum (5)."*

Hem NCTM Müfredat Programı ve Değerlendirme Standartları (1989) hem de Profesyonel Matematik Öğretim Standartları (1991), matematik müfredat programı ve eğitiminde bağlantının önemini vurgulamıştır. Örneğin, Profesyonel Matematik Öğretim Standartlarının 1. Standardı, öğretmenlerin "öğrencileri bağlantılar kurmaya ve matematik fikirlerine yönelik tutarlı bir çalışma çerçevesi geliştirmeye teşvik eden" ödevler tasarlamalarını önerir (NCTM 1991:25). 4. Standart, bir öğretmenin öğrencileri, "matematiksel kavramları, yöntemleri ve bağlantıları anlamayı" kolaylaştıran matematiksel etkinliklere ve söyleşilere dâhil etmesi gerektiğini ifade eder (NCTM 1991:89). Öğretmenlerin aynı zamanda "matematiği birbiriyle bağlantılı bir kavramlar ve yöntemler (procedures) ağı olarak göstermeleri; ve matematik ile diğer disiplinler arasındaki bağlarla günlük yaşam arasındaki bağları vurgulamaları" gerekir (NCTM 1991:89). (Aktaran: Schwalbach & Dosemagen, 2000). Schwalbach & Dosemagen 'ın (2000), araştırmalarının sonuçları; disiplinler arası öğretimin, öğretmenler açısından zaman, kendini adama, sabır ve esneklik gerektirmekle birlikte; bu çabaların verimli olabileceğini göstermiştir.

**"Ask Dr. Math" sitesine sorulan soru:**

"Bir şeyin türevinin nasıl hesaplandığını biliyorum, ama bunu yapmamızdaki amaç nedir?"

**Doktor Ken 'in cevabı:**

"Bir şeyin türevini almak istememizin bir çok sebebi vardır. Bunlardan birincisi, yeni gıcır spor arabanızı kullandığınızı farz edelim ve dünyada en iyi mesafe ölçere sahipsiniz. O size ne kadar gittiğinizi en hassas biçimde size gösteriyor. Eğer, mesafe ölçerin zamanın bir fonksiyonu olarak size gösterdiğinin grafiğini çizerseniz (öyle ki zaman x-ekseni üzerinde, mesafe y-ekseni üzerinde), fonksiyonun türevini alabilirsiniz ve seyahatınızın her bir noktasındaki hızınızı bulabilirsiniz.

Türevlerin nasıl alındığını bildiğiniz sürece, hız, ivme ve her şey hakkındaki bütün bilgileri mesafe ölçerden elde edebilirsiniz.

İşte kalkülüs öğretmenimin bir zamanlar bana sorduğu soru: Arabalarda hem mesafe ölçer hem de hızölçer var. Aslında, hızölçer mesafe ölçer bilgisinin türevini hesaplıyor (gerçi mesafe ölçerden değil doğrudan tekerleklerden alıyor). Bunu nasıl yapıyor? Araçlara bilgisayarlar yüklenmeden önce de bunu yapıyordu. Dolayısıyla temelde türev almak için tamamen mekanik bir yol buldular. Düzgün iş araştırmaya değer.

Bana göre türev, aynı zamanda oldukça sezgisel bir kavramdır. Duvarınızda bir büyüme tablosu olduğunu düşünelim. Eğer insansanız (ki öyle olduğunuzu biliyorum), hayatınızdaki diğer zamanlardan daha hızlı büyüdüğünüz birkaç dönem olacaktır. İşaretler düzenli aralıklarla konmuşsa, belli dönemlerde daha yayılmış, başka dönemlerde ise daha kümelenmiş olacaktır. Onun için, hızlı büyüme zamanlarında diğer bütün zamanlara göre daha fazla büyüdüğünüzü bu tablodan öğrenmek zor olmayacaktır. Ne kadar hızlı büyüdüğünüz o andaki boy uzunluğunuzun zamana göre türevidir. Dolayısıyla türev bazen büyük bazen küçük olacak ve siz 40 yaşına geldiğinizde negatif olacaktır (bazı insanlara göre). Bunlar birkaç gerçek yaşam örneğidir."

**Doktor Elizabeth 'in cevabı:**

"Türevler ile yapabileceğiniz en güzel şeylerden biri bir fonksiyonun maksimum değerlerinin nerede olduğunu öğrenmektir (bilinmesi çok yararlı olabilir). Bir fonksiyonun türevi fonksiyonun verilen herhangi bir noktasındaki eğimidir. (Aslında türev, noktaya teğet doğrunun eğimidir, ama buna rağmen bir nokta bir eğime sahip olmayabilir, ben türevi bu yolla düşünmeyi kolay buldum). Fonksiyonun en yüksek noktasında ( onun maksimum değeri), değerini alabildiği kadar aldı ve tekrar fonksiyon azalmaya başladı. Sonra, bu noktadaki eğimi daha yüksek bir değer alamadığından ve de azalamadığından sıfır olacaktır.

Farz edelim ki bir fonksiyonumuz var ve bu fonksiyonun kesin olarak nerede maksimum değerine ulaşacağını bilmek istiyorsunuz (size bunun bir dakika içinde nasıl bulabileceğinizi bir örnekle açıklayacağım). Fonksiyonun türevini alınız ve bunu sıfıra eşitleyiniz. Daha sonra x değeri ya da çitin uzunluğunu veren sayı ya da kurbağaların sayısı vb. için çözünüz.

İşte benim örneğim: 6 m/sn hızla havanın kesinlikle olmadığı (hava direnci yok) bir yerde, yukarı doğru bir top fırlatıyorum. Ne zaman en yüksek noktaya ulaşır?"

**Tablo 24. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğrencilerin 12. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 12: Bir fonksiyonun maksimum ve minimum noktaları matematikte, diğer disiplinlerde veya günlük hayatta birçok problemin (veya sorunun) çözülmesinde kullanılır. Aklınıza gelen birkaç problem söyleyebilir misiniz? Bu problemleri çözmek için nasıl bir yöntem uyguluyorsunuz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğrencilerin Açıklamaları |
| 1. Matematikten örnek (1,3). | ✓ Çevre uzunluğu verilen bir dikdörtgenin maksimum alanı nedir? diye bir soru karşımıza çıkabilir (1).<br>✓ Örneğin, iki sayının toplamının 20 olduğunu varsayalım. Bizden bu sayıların kareleri toplamının maksimum değeri istenir (3). |

| | |
|---|---|
| 2. Fizik ve kimyadan örnek (1,2). | ✓ Fizikte ise, örneğin x zamana bağlı bir fonksiyondur. Buradan yola çıkarak en fazla ne kadar hıza ulaşılabilir yada kimyada reaksiyonların hız denklemlerini hesaplarken türev yardımıyla maksimum veya minimum noktaları türev yardımıyla bulunur (1).<br>✓ Türevin fiziksel anlamı demiştik. Bir şoförün ne kadar zamanda, ne kadar hızda ne kadar yol alabileceğini hesaplamak için kullanılır (2).<br>✓ Bir işi yetiştirmekte en verimli sonuca varmak için maksimum minimum noktaları kullanılır (2). |
| 3. Günlük hayattan örnek (2). | ✓ Görevimiz itibarıyla ilerde çeşitli işler yapacağız. Bir çukur kazmamız gerektiğinde; kaç kişi ile kaç saat çalışarak, ne kadar derinlikte, ne kadar genişlikte... Bunlar türev yardımıyla bulunabilir. (2). |

Tablo 24 incelendiğinde, öğrencilerden ikisinin (1,3) sadece matematikten somut olarak örnek verebildiği, diğer bilim dallarından ve günlük hayattan maksimum ve minimum noktaların kullanılması ile çözülebilen problemlere somut örnekler veremediği görülmektedir. Sadece fizik, kimya bilim dalları ve günlük hayatla ilgili sezgisel olarak örnekler vermeye çalıştılar. Hatta öğrencilerden biri (3), günlük hayatla veya diğer bilim dallarıyla ilgili problemlere şu ana kadar hiç karşılaşmadığını, genelde matematikte karşısına çıktığını söyledi.

Bir fonksiyonun maksimum veya minimum noktalarının kullanılması ile çözülebilen problemleri çözmek için, öğrencilere nasıl bir yöntem uyguladıkları sorulduğunda, her biri farklı cevaplar verdiler. Öğrencilerden birinin (2) verdiği cevap hayli ilginçti:

> *"Bu problemleri çözmek için matematik disiplininde olduğu gibi türev ve integral kullanmak, şu an benim için veya gelecekteki kuşaklar için bir alternatif, fakat günümüz itibariyle insanlar daha çok geçmişten gelen, ananeleri olan, atalarından gördüğü pratik metotları kullanıyorlar. Bazen bunlar çok verimli sonuçlar vermese de en pratik çözüm olduğu için kullanılıyor. Fakat ilerde verimli bir sonuç alabilmek kesin bir ihtiyaç olacağından türev ve integral büyük yardım sağlayacaktır (2)."*

Diğer öğrenciler ise (1,3), bu tür problemleri çözerken verilen sorunun şekline göre bir denklem kurduklarını, bu denklemin birinci türevinin kökünün maksimum veya minimum noktayı vereceğini ve sonuç olarak da soruda istenen değer hangisi ise onu kullanarak sorunun cevabına varabileceklerini söylediler. Burada, öğrencilerin diğer bilim dallarından ve günlük hayattan maksimum ve minimum noktaların kullanılması ile çözülebilen problemlere somut örnekler verememelerine rağmen, maksimum ve minimum noktaların hangi amaca hizmet ettiğini bildikleri düşünülebilir.

Gravemıjer ve Doorman (1999), öğrencilerin formal matematikle ciddi bir şekilde ilgilenmeleri konusunda, bağlam problemlerinin önemli bir rol oynadığını vurgulamışlardır. Bağlam problemlerini, öğrenci için tecrübeye dayalı (deneysel) gerçek olan problem durumları olarak tanımlayan yazarlar, öğrencilerin matematiğin yeniden keşif sürecini tecrübenin gelişmesi olarak deneyimledikleri takdirde, günlük yaşam deneyimleriyle matematik arasında hiçbir ayrılık yaşamayacakları sonucuna varmışladır. Bu nedenle, öğretim elemanları kalkülüs derslerinde bağlam problemlerine gereken önemi vererek, öğrencilerin kendi gerçekliklerini genişletmelerine yardımcı olmalıdırlar.

**Tablo 25. Matematik Eğitiminde Türev Öğrenimi ve Öğretimi İle İlgili Öğretim Elemanlarının 12. Sorusuna Verilen Cevapların Analizi**

| **Soru 12: Bir fonksiyonun maksimum ve minimum noktaları matematikte, diğer disiplinlerde veya günlük hayatta birçok problemin (veya sorunun) çözülmesinde kullanılır. Bu problemleri çözmek için öğrencilerinize uygulamaları için nasıl bir yöntem öğretiyorsunuz?** | |
|---|---|
| Kategoriler | Öğretim Elemanlarının Açıklamaları |
| 1. Matematikle ilgili problemlere ilişkin yöntem (4,5). | ✓ Bir alanın, hacmin, uzunluğun en fazla ya da en az olma durumları ile ilgili problemlerde verilenleri bir fonksiyonla ifade edebiliyorsak sonucu bulmak için türevden yararlanabiliriz (4).<br>✓ Problemlerle ilgili denklem kurup, bunu bir değişkenli hale getirebiliyorsak, fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini bulmak için nasıl birinci türevden yararlanıyorsak, aynı mantığı burada da kullanabiliriz (4). |

| | |
|---|---|
| | ✓ Bazı dörtgenlerin içlerinde çizilecek şekillerin alanlarının en fazla olabileceği değerlerin bulunmasını; en kısa en yakın mesafe hesaplamalarını; küp, küre, silindir gibi benzer cisimlerin içindeki cisimlerin maksimum hacimlerinin hesaplanmasını öğrencilerin anlamasını sağlamaya çalışıyoruz (5). |

Tablo 25 incelendiğinde, öğretim elemanlarının (4,5), bir fonksiyonun maksimum ve minimum noktalarının kullanılması ile çözülebilen problemlerin çözümü için öğrencilerine öğrettikleri yöntemin matematik problemlerine ilişkin olduğu görülmektedir. Öğretim elemanlarından birinin (4), bir fonksiyonun alacağı maksimum ve minimum değerlerin günlük hayatta önemli olduğunu söylemesine rağmen, açıklamaları ve verdiği örnek matematik problemleri üzerine oldu:

> *"Örneğin, kenar uzunlukları toplam 60 cm. olan dikdörtgenin alanı maksimum kaç olur? sorusunu çözerken… (4)."*

**"Ask Dr. Math" sitesine sorulan birkaç örnek soru:**

"Belli bir ürünün x birim üretim maliyeti $C = 10.000 + 5x + \frac{1}{9}x^2$ olarak veriliyor. Minimum ortalama maliyeti veren x değerini bulunuz"

"80 cm. uzunluğunda bir tel iki parçaya kesiliyor. Parçanın biri eğilerek kare, diğer parça ise eşkenar üçgen yapılıyor. İki parça olarak etrafı çevrilen toplam birleştirilmiş alanın en büyük olması için tel hangi uzunluklarda kesilmelidir?"

"Betondan yapılan sulama kanalının üç kenarı 4 metre uzunluğunda olan ikizkenar yamuk şeklinde bir kesiti alınmıştır. Maksimum alanı elde etmek için kanal kesiti nasıl biçimlendirilmelidir?"

“Bir meyve bahçesinde 800 tane portakal ağacı vardır. Her bir ağaç bir mevsimde 120 portakal ürün vermektedir. Meyve bahçesine eklenen her bir yeni ağaç için sezonda ağaç başına ürün 2 portakal eksiliyor. Meyve bahçesinin ürününün en fazla olması için ağaç sayısını belirleyiniz?”

“Boston Red Sox takımının başkanı zor durumdadır. Takımı çok iyi top oynamaktadır ve muhtemelen şampiyon olacaktır. Başkan, gelecek yıl daha iyi transferler yapmak amacıyla gelirini arttırmak için lig maçları boyunca biletler için daha fazla fiyat talep etmek istemektedir. Ekibi bir taraftar yoklaması yaptı ve bilet fiyatında her 1 $ artış için 200 daha az taraftar geleceğini araştırarak ortaya koydular. Eğer, ortalama bilet fiyatı 18 $ ve maç başına ortalama katılım 21.000 taraftar olursa, geliri en fazla yapmak için ne kadar fiyat talebinde bulunulmalıdır? Maksimum gelir ne olacaktır?”

# BÖLÜM 5

# SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde, araştırmada elde edilen bulgulara dayalı sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca araştırma bulguları çerçevesinde, bu uygulama ile ilgili olarak eğitimcilere ve bu konuda çalışma yapmak isteyen araştırmacılara önerilerde bulunulmuştur.

## 5.1 Sonuçlar

Bu araştırmada, matematik eğitiminde kalkülüs ‘un türev konusunun öğrenimi ve öğretimi ile ilgili “Ask Dr. Math.” adlı uluslararası İnternet sitesine sorulmuş sorulardan bazı etkin olanları ve bunlara verilen cevaplar hakkında öğrencilerin ve öğretim elemanlarının görüşleri alınmış ve analiz edilmiştir. Araştırmaya katılan öğrencilerin türev konusunda yetenekli olmalarına rağmen, hala formülleri ezberleme ve onları ezberden mekanik bir şekilde uygulamaya bel bağladıkları düşünülebilir. Bununla beraber, öğrencilerde mevcut kavram yanılgılarının, kavramlardaki eksikliklerin ve yanlış kavram imajları ile açıklanan değişik yaklaşımların olduğu da söylenebilir.

Öğrencilere türev kavramı hakkındaki görüşleri sorulduğunda; matematikte türev kavramını bir tür indirgeme, bir fonksiyonun eğimi ve integrali bulmada yardımcı olan bir fonksiyon olarak tanımlamışlardır. Diğer yandan öğretim elemanları, öğrencilerinden türev tanımı hakkında doğrunun eğimi bilgisine sahip olmalarını ve limit kavramını bilmelerini beklemektedirler. Buradan, türev kavramının anlamlı olarak öğrenilmediği sonucuna varılabilir.

Öğrencilerin çoğunluğu “ $f(x) = x$ şeklinde tanımlanan $f$ fonksiyonunun grafiğinin her noktasında teğet doğrusunun eğimi 1 dir.” ifadesinin nedenini

açıklamada başarılı olmuşlardır. Öğrenciler, öğretim elemanlarının açıklamalarına paralel olarak, eğim kavramını analitik geometri bilgilerinin yanı sıra, türev kavramı ile de ilişkilendirebilmişlerdir.

Öğrencilerin fiziksel olayları hatırlayarak ya da imgeleyerek matematiksel temsillerin yanı sıra grafikleri de anlayabildikleri söylenebilir. Öğrencilerin matematik ve fizik disiplinleri arasında bağlar kurmasının, hem daha zengin anlamsal bilgiler hem de yönteme yönelik bilgi geliştirebileceklerini göstermiştir. Matematik öğretim elemanları, türevin fiziksel anlamı ile ilgili günlük hayattan örneklerin verilme sorumluluğunu fizik öğretim elemanlarına bırakmışlardır.

Öğrencilerin, bir fonksiyonun kritik noktası (noktaları) olması için gerek ve yeter koşulun ne olduğunu bazı kavram yanılgıları olmasına rağmen bildikleri sonucuna varılabilir. Fonksiyonu tanımsız yapan noktaların da kritik nokta olarak düşünülmesinin bir kavram yanılgısı olduğu değerlendirilebilir. Ayrıca, öğrencilere kritik noktalar hakkında bilgi verilirken, az rastlanan bir durum olsa bile, fonksiyonun birinci türevinin olmadığı noktaların, kritik noktalar olarak değerlendirmek gerektiğini, öğretim elemanları dikkate almalıdırlar.

Öğrencilerin tümü bir fonksiyonun kritik noktaları ile ekstremum noktaları arasındaki ilişkinin işaret tablosu ile tespit edilebileceği görüşünü bildirmişledir. Öğrencilerin üçte ikisi ikinci türevden yararlanarak ta bulunabileceğini söylemiştir. Öğretim elemanları ise, bu konuda öğrencilerine işaret tablosu yaptırarak incelettiklerini belirtmiştir. Bu yöntemin yaygın olduğu değerlendirilebilir. Diğer taraftan bir fonksiyonun türevinin olmadığı bir nokta için nasıl bir yol izlendiğine dair her iki grup tarafından herhangi bir fikir beyan edilmemiştir.

Bir fonksiyonun türevinin olmadığı nokta, fonksiyonun bir ekstremum noktası olup olmadığı konusuna cevap vermede hem öğrenciler hem de öğretim elemanları zorluk çekmişlerdir. Genelde, mutlak değer fonksiyonunun grafiği göz

önüne alınarak cevap verilmeye çalışılmıştır. Birinci türevinin olmadığı noktaya sahip fonksiyonları akıllarına getirmemişlerdir. Burada bir fonksiyonu ve onun türevini, grafik olarak yorumlamada güçlük yaşandığı ve görselleştirmeden kaçınıldığı söylenebilir.

Mutlak ekstremum noktaları ile yerel ekstremum noktaları arasındaki ilişki hakkında, öğrencilerin tamamı bir fonksiyonun grafiğinin var olan mutlak ekstremum noktaları ile yerel ekstremum noktalarının, fonksiyonun birinci türevinin kökleri olduğu düşüncesinde birleşmişlerdir. Aynı zamanda, fonksiyonun grafiğinde bulunan yerel ekstremum noktalarından en büyüğüne mutlak maksimum ve en küçüğüne de mutlak minimum noktası denildiğini belirtmişlerdir. Öğrencilerin bu düşüncelerine bir öğretim elemanı da katılmıştır. Fakat tecrübeli öğretim elemanı bu düşüncelerden farklı olarak, yerel ekstremum noktalarının tamamen birinci türevin kökleri ile ilgili olduğunu, buna karşın mutlak ekstremum noktaların da türevle bağlantısının olmayabileceğini söylemiştir. Dolayısıyla, kavram eksikliklerinin oluşmaması ve anlamanın tam gerçekleşmesi için, grafik ve analitik gibi birden fazla yol kullanmanın yararlı olabileceği değerlendirilebilir.

Öğrenciler, öğrendikleri ve kullandıkları ikinci türev testi teoreminin ispatına yönelik ders içi ve ders dışı çalışma yapmadıkları görülmüştür. Bu teorem üzerindeki değerlendirmeleri sezgisel olmuştur. Eğer öğretim elemanları derslerinde gösterdikleri ve öğrencilerden kullanmalarını istediği teoremlerin ispatına yönelik çalışmalar yaparlarsa, öğrencilerin kavramsal anlamlarını sağlayacak ve onlara matematikte güçlü oldukları hissini kazandıracaklardır.

Öğrenciler, bir fonksiyonun büküm noktasının formal tanımından çok, fonksiyonun büküm noktalarını bulurken kullandıkları yola odaklandılar. Bazı öğrencilerin ise, büküm noktaları hakkında kavram yanılgıları olduğu görüldü. Öğretim elemanlarının formal tanıma özellikle vurgu yapmalarına rağmen, öğrencilerin bu formal tanıma gereken önemi pek vermedikleri görüldü.

Verilen bir $f$ fonksiyonu için, fonksiyonun artan/azalan ve yukarı/aşağı bükey olduğu aralıkları belirttiğimiz cevaplarda bitim noktalarını dâhil edilip edilmediğine ilişkin soruya öğrencilerin tümü dâhil edilmemesi yönünde cevap vermişlerdir. Öğretim elemanları da aynı yönde görüş beyan etmişlerdir. Diğer yandan, "Ask Dr. Math" sitesinden Doktor Sam, bu konuda bazı öğretmenlerin, kitapların ve hatta sınavların bitim noktasını göz ardı ettiklerini, birinin diğerinden kesinlikle doğru olduğu anlamı taşımayan farklı kullanımların olduğunu söylemiştir.

Öğrenciler türevin günlük hayatta kullanıldığı alanlar veya diğer disiplinlerle ilişkisi konusunda somut örnekler sunamamışlardır. Sadece fizik derslerinde öğrendikleri konum, hız ve ivme kavramları ile türev kavramını arasındaki bağı açıklayabilmişlerdir. Burada öğretmenlerin, türev ile diğer disiplinler arasındaki bağlarla günlük yaşam arasındaki bağları vurgulamadıkları söylenebilir.

Hem öğrenciler hem de öğretim elemanları bir fonksiyonun maksimum ve minimum noktalarının kullanılması ile çözülebilen problemlere sadece matematikten somut örnekler vermişlerdir. Diğer disiplinlerle ilgili somut örnekler ortaya konmamıştır. Buna karşın öğrencilerin maksimum ve minimum noktaların bu tür problemlerin çözümünde hangi amaca hizmet ettiğini bildikleri anlaşılmıştır. Bu sonuca göre, ders kitaplarında veya matematikle ilgili yardımcı kaynak kitaplarda çoğunlukla matematiğe ilişkin örneklerin yer aldığı ileri sürülebilir.

## 5.2 Öneriler

Bu kısımda elde edilen bulgular çerçevesinde tez çalışması ile ilgili, öğretmenlere, öğretim elemanlarına, eğitimcilere ve araştırmacılara sunulan önerilere yer verilmiştir.

### 5.2.1. Öğretmenlere ve Öğretim Elemanlarına Yönelik Öneriler

1. Türev kavramını öğretmede grafikler üzerine çok daha fazla zaman harcanmalıdır.

2. Grafikler kullanılarak cebir geometri arasındaki etkileşim sağlanmalıdır.

3. Türevin formal tanımına önem verilmeli ve öğrencilerin kafasında türev kavramına ilişkin doğru kavram imajı oluşturulmalıdır.

4. Türev kavramının tanımına ilişkin işlemsel ve teknik uygulamalar geliştirilmelidir.

5. Öğrencilerin kavrama yeteneklerini harekete geçiren ve derin kavramsal anlamları arttıran kritik durumlar geliştirilmeli ve öğretici, bilgi verici örnekler çoğaltılmalıdır.

6. Yalnızca belirli bir konu üzerinde öğrencilere konferans vermek, çoğu öğrencinin sahip olduğu kavram yanılgılarını terk etmelerine yardımcı olmayacaktır. Öğrenciler bilgilerini aktif olarak oluşturdukları için, öğretmenler ve öğretim elemanları öğrencilerin kavram yanılgılarını söküp atmalarına aktif olarak yardım etmelidirler.

7. Öğretmenler ve öğretim elemanları, öğrencilerin gelecekteki öğrenmelerine rehberlik edecek önemli ve ön koşul kavramları yeniden oluşturmada onlara yardımcı olmalıdırlar.

8. Öğretmenin ve öğretim elemanının yol gösterici olduğu aktif bir sınıf tartışmasında, öğretmenler ve öğretim elemanları, öğrencilerin kavram yanılgılarını ortaya çıkarmalarına ve birlikte, tamamen kavram yanılgılarının üstesinden gelmelerine yardımcı olmalıdırlar.

9. Öğretmenler ve öğretim elemanları, öğrencileri matematiksel etkinliklere dâhil etmeli ve onların matematiksel kavramları, yöntemleri ve bağları anlamasını kolaylaştıran tartışmalara derslerinde yer vermelidirler. Aynı zamanda öğretmenler ve öğretim elemanları matematik ile diğer disiplinler arasındaki bağlarla günlük yaşam arasındaki bağları somut örnekler ve ödevlerle vurgulamalıdırlar.

10. Öğretmenler ve öğretim elemanları, öğrencilerin olası kavram yanılgılarının farkında olurlarsa, bu durum öğretimi geliştirmede onlara yardımcı olabilir.

11. Matematik öğreniminde ve öğretiminde ispatlar önemli bir yer tutar. Öğretmenler ve öğretim elemanları gerekli gördükleri teoremlerin ispatına yönelik çalışmalar yaparlarsa, öğrencilerin kavramsal anlamalarını geliştirebilir ve motivasyonlarını (isteklerini) arttırabilirler.

12. Sınav soruları, öğrencilerin matematiksel kavramları anlamalarını desteklemeye yönelik düzenlenmeli ve değerlendirme buna göre yapılmalıdır.

13. Öğretmenler ve öğretim elemanları işledikleri konu ile ilgili olarak az rastlanan ve dolayısıyla yeteri kadar önem verilmeyen bazı durumları gözden kaçırmamak için sadece bir kitaba (ders kitabı gibi) bağlı kalmamalı, farklı diğer kaynakları da inceleyerek derslerinde kullanmalıdır.

14. Sıra dışı örneklere yer verilmeli ve bu örneklerin tartışılmasına yol açabilecek ders ortamı oluşturulmalıdır.

### 5.2.2. Eğitimcilere Yönelik Öneriler

1. Matematik öğreniminde ve öğretimde, öğrencilerin hedef davranışları kazanamamaları ve başarının düşük çıktığı durumlarda, sürenin yetersizliği her zaman öncelikli bir neden olarak ileri sürülmektedir. Eğer süre artırılmıyorsa, öğretim yöntemlerinin ve programların süreye göre düzenlenmesi uygun olacaktır.

2. Disiplinler arası öğretim, öğretmenler ve öğretim elemanları açısından zaman, kendini adama, sabır ve esneklik gerektirir; ama bu çabaların öğrencilere faydalı olabileceği dikkate alınarak, ders programları bu amaç doğrultusunda yapılandırılabilir.

3. Türev kavramının öğrenciler tarafından daha iyi anlaşılması için, değişik öğretimsel işleyiş biçimleri oluşturulabilir.

4. Türev konusu ile ilgili bilgi yükleme yerine, bilgiyi kullanma ve bilgi üretmeyi amaçlayan eğitim programları geliştirilebilir.

### 5.2.3. Araştırmacılara Yönelik Öneriler

1. Ülkemizde türev öğrenimi ve öğretimine yönelik çok sınırlı sayıda araştırma yapılmıştır. Bu yöndeki araştırmaların çoğaltılması önemlidir.

2. “Ask Dr. Math” sitesinde yer alan kalkülüsün türevden başka diğer konuları ile ilgili benzer bir araştırma yapılabilir.

3. Geleneksel bir kalkülüs dersi alan öğrencilerle, tasarlanacak (geliştirilecek) farklı eğitimsel işleyiş biçimi ile kalkülüs dersi alan öğrencilerin türev konusunda performanslarının karşılaştırılmalı bir analizi yapılabilir.

4. Öğrencilerin türevi grafik olarak ne ölçüde anladıklarına ilişkin bir araştırma yapılabilir.

# KAYNAKÇA

ALKAN, Hüseyin ve ALTUN, Murat. (1989). **Matematik Öğretimi.** T.C. Anadolu Üniversitesi yayınları No: 172

ARTIGUE, Michele. (1991). **Analysis.** In David Tall (Ed). Advanced Mathematical Thinking, ss:167–198. Mahematics Education Library. Volum 11. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

ASIALA, Mark., COTTRILL, Jim., DUBINSKY, Ed. ve SCHWINGERNDORF, Keith E. (1997). **The Development of Student's Graphical Understanding of the Derivative.** Journal of Mathematical Behavior, 16(4), 399–431.

ASPINWALL, Leslie ve SHAW, Kenneth. (2002). **Representations in calculus: two contrasting cases.** Mathematics Teacher 95 no:6

ASPINWALL, Leslie., SHAW, Kenneth. and PRESMEG, Norma. (1997). **Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections between a Function and Its Derivative.** Educational Studies in Mathematics 33, 301–17.

BOGDAN, Robert. C. & BİKLEN Sari Knopp. (1998). **Qualitative research for education: An introduction to theory and methods.** Boston: Allyn and Bacon.

BOIX-MANSILLA, V. & GARDNER, H. (1997). **Of kinds of disciplines and kinds of understanding.** Phi Delta Kappan, 78, 381–386.

BORGEN, Katharina L. & MANU, Sitaniselao Stan. (2002). **What do students really understand.** Journal of Mathematical Behavior, 21, 151–165.

BROOKS, J. G. & BROOKS, M. G. (1993). **In search of understanding: The case for constructivist classrooms.** Association for Supervision and Curriculum Development.

BURRELL, G. VE G. MORGAN (1988). **Sociological Paradigms and Organizational Analysis.** 227–253, ABD: HEİNEMANN

BAKŞİ, Erol, H. KORKMAZ ve U. ADALIOĞLU. (2004). **Lise 3 Matematik Ders Kitabı.** İstanbul: İhlas Gazetecilik A.Ş.

BULUT, Mehmet. (2003). **İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Etkili Matematik Öğretimi ve Öğretmeni ile İlgili Görüşleri.** Ankara: Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi).

COHEN, M. Arjeh, CUYPERS Hans, JIBETEAN Dorina ve SPANBROEK Mark. (2006). **İnteractive Learning and Mathematical Calculus.** Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

COOLEY, Laurel. (2002). **Writing in calculus and reflective abstraction.** Journal of Mathematical Behavior, 21, 255–282.

ÇOLAK, Handan. (2002). **Limit öğretiminde iki farklı eğitim durumunun karşılaştırılması.** Ankara: Gazi Üniversitesi. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi).

DENZIN, N. K. (1978). **The research act.** Chicago, IL: Adline.

DÖNMEZ, Ali. (2005). **Dünya matematik tarihi ansiklopedisi: Matematiğin öyküsü ve serüveni, IX. CİLT İngiliz matematikçiler.** İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları 197. ss:244-251.

EISENBERG, Theodore. (1992). **On the development of a sense for functions.** In Guershon Harel & Ed Dubinsky (Eds). The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, MAA notes 25 ss:153–174. Washington DC: Mathematical Association of America.

EVEN, Ruhama. (1999). **İntegranting Acadenic And Practical Knowledge in a Teacher Leaders' Development Program.** Educational Studies in Mathematics 38: 235-252. Hollanda: Kluwer Academic Publishers.

FERRINI-MUNDY, Joan & GRAHAM, Karen. (1994). **Research in calculus learning: Understanding limits, derivatives and integrals.** Research issues in undergraduate mathematics learning. 33, ss:31–45.

GLASER, B. & STRAUSS, A. L. (1967). **Discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research.** Chicago: Adline.

GÖKER, Lütfi. (1997). **Matematik Tarihi ve Türk İslam Matematikçilerinin Yeri.** İstanbul: Milli Eğitim Bakanlığı yayınları, Bilim ve kültür eserleri dizisi: 909, ss:23-31.

GÖZEN, Şükran. (2001). **Matematik ve Öğretimi.** İstanbul: Evrim yayınevi ve bilgisayar san. tic. ltd. şti. ss:209-212.

GRAVEMEIJER, Koene ve DOORMAN, Michiel. (1999). **Context Problems in Realistics Mathematics Education: A Calculus Course As an Example.** Educational Studies in Mathematics. Netherland: Kluwer Academic Publishers.

JOSE, Mestre. (1989). **Hispanic and Anglo students' Misconceptions in Mathematics. ERIC Digest.** http://erice.net./edo/ED313192.HTM

KARASAR, Niyazi. (1999). **Bilimsel Araştırma Yöntemi.** Ankara: Nobel Yayıncılık.

KARASAR, Niyazi. (2000). **Araştırmalarda Rapor Hazırlama.** Ankara: Nobel Yayıncılık.

KRUTETSKII, V. A. (1976). **The Psychology of Mathematical Abilities in School Children.** Chicago: University of Chicago Press.

KUHN, Thomas S. (1970). **The structure of scientific revolutions.** (2nd ed.). Chicago: University of Chicago Press.

LESH, Richard., POST, Tom and BEHR, Merlyn. (1987). **Representations and Translations among Reperesentations in Mathematics Learning and Problem Solving.** In Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics, edited by Claude Janvier, ss:33–40.

LEWIS, H. Robert. (2000). **Mathematics, The Most Misunderstood Subject.** http://mathforum.org/library/view/12658.htlm

LINCOLN, Y. S. & GUBA, E. G. (1985). **Naturalistic inquiry.** Beverly Hills, CA: Sage publications, Inc.

MARRONGELLE, Karen A. (2004). **How Student Use Physics to Reason About Calculus Tasks.** School Science and Mathematics 104 No: 6.

MARSHALL, C. & ROSSMAN, G. B. (1999). **Designing qualitative research.** (3nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

MONK, S. & NEMIROVSKY, R. (1994). **The case of Dan: Student construction of a fonctional situation through visual attributes.** Research in collegiate mathematics education 1. Providence, RI: American Mathematical Society.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). **Curriculum of evaluation standards for school mathematics.** Reston.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). **Professional standards for teaching mathematics.** Reston.

NEMIROVSKY, R. & NOBLE, T. (1997). **On mathematical visualization and the place where we live.** Educational Studies in Mathematics, 33(2), 99–131.

ORHUN, Nevin. (2005). **Evaluation of 11 th students' cognitive behaviour on some subject of analysis according to gender.** İnternational Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 36, No. 4, ss: 399–405.

ORTON, Alex. (1980). **A cross-sectional study of the understanding of elementary calculus in adolescents and young adults.** Unpublished Ph.D. Thesis, Leeds University, England.

ORTON, Alex. (1983). **Student's understanding differentiation.** Educational Studies in Mathematics, 14, 225–250.

ÖZDEN, Yüksel. (2003). **Öğrenme ve Öğretme.** Ankara: PegemA Yayıncık.

PATTON, M.Q. (1990). **Qualitative Evaluation and Research Methods.** Newbury Park, CA: Sage Publications, Inc.

PERKİNS, D. & BLYTHE, T. (1994). **Putting understanding up front.** Educational Leadership, 51(5), 4–7.

SABAN, Ahmet. (2004). **Öğrenme ve Öğretme Süreci. Yeni Teori ve Yaklaşımlar.** Ankara: Nobel Yayıncılık.

SCHOENFELD, Alan H., SMITH John P., & ARCAVİ, Avram. (1990). **Learning-the microgenetic analysis of one student's understanding of a complex subject matter domain.** Advances in insrtuctional psychology, Vol. 4 ss:55–175.

SCHWALBACH Eileen M.& DOSEMAGEN Debra M. (2000). **Developing Student Understanding: Contextualizing Calculus Concepts.** School Science and Mathematics v100 no2 p90–8.

TALL, David. (1991). **The Psychology of Advanced Mathematical Thinking.** In David Tall (Ed). Advanced Mathematical Thinking, ss:3–13. Mahematics Education Library. Volum 11. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

THOMAS, B. George ve R.L. FINNEY. (2001). **Kalkülüs ve Analitik Geometri Cilt: I.** (Çev.Recep Korkmaz ), İstanbul: Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş.

TRIGWELL, Keith. (2000). **Phenomenography: Variation and Discernment.** İn C. Rust (ed) İmproving Student Learning, Proceedings of the 1999 7. İnternational Symposium. Oxford ss: 75–85.

TUFTE, Fredric W. (1989). **Revision in calculus instruction: Suggestions from cognitive science.** The mathematics curriculum: Towards the year 2000. Content, technology, teachers, dynamics. ss:155-161.

UĞURLU, M. Cemil. (2003). **Atatürk 'te Matematiksel Düşünüş.** Matematik bülteni sayı 2.

VINNER, Shlomo. (1991). **The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics.** In David Tall (Ed). Advanced Mathematical Thinking, ss:65-81. Mahematics Education Library. Volum 11. Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers.

WEBER, R. P. (1985). **Basic content analysis.** Beverly Hills, CA: Sage.

YILDIRIM, Ali ve H. ŞİMŞEK. (2003). **Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri.** Ankara: Seçkin Yayıncılık.

ZANDIEH, M. (2000). **A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative**. Research in Collegiate Mathematics Education IV (ss: 103–127). Providence, RI: American Mathematical Society.

**EK - 1**

## GÖRÜŞME FORMU

Merhaba, matematik eğitiminde türev öğretimi ile ilgili sorulmuş etkin sorular ve cevapları hakkında araştırma yapıyorum ve sizinle bu sorular ve cevapları konusunda konuşmak istiyorum. Bu görüşmede amacım, türev ile ilgili "Ask Dr. Math." adlı uluslararası İnternet sitesine sorulmuş sorulardan etkin olanları ve bunlara verilen cevaplar hakkında çeşitli boyutları ile ilgili öğrencilerin ve öğretmenlerin ne düşündüklerini ortaya çıkarmaktır. Bu araştırmada ortaya çıkacak sonuçların, bundan sonra yapılacak derslerde, türev konusunun işlenmesinin niteliğinin arttırılmasına katkıda bulunacağını ümit ediyorum.

Araştırma sonuçlarını yazarken görüştüğümüz bireylerin isimlerini kesinlikle rapora yansıtmayacağım.

Başlamadan önce, belirtmek istediğiniz bir düşünce yada sormak istediğiniz bir soru var mı? Görüşmeyi izin verirseniz kaydetmek istiyorum. Bu görüşmenin yaklaşık bir saat süreceğini tahmin ediyorum. Araştırmaya katıldığınız için şimdiden teşekkür ediyorum. İzin verirseniz sorulara başlamak istiyorum.

**EK - 2**

## ÖĞRENCİLERE YÖNELTİLEN GÖRÜŞME SORULARI

**1.** Sizce türev nedir? Bu kavram hakkında bilgi verebilir misiniz?

**2.** $f(x) = x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunu göz önüne alalım. f nin grafiğinin her noktasında teğet doğrusunun eğimi 1 dir. Bunun nedenini açıklar mısınız?

**3.** Türevin fiziksel anlamı hakkında bilgi verebilir misiniz?

**4.** Bir fonksiyonun grafiğinin kritik noktası (noktaları) denince ne anlıyorsunuz? Bir fonksiyonun kritik noktası (noktaları) olması için gerek ve yeter koşul sizce nedir? Kritik noktaları sınıflandırabilir miyiz?

**5.** Bir fonksiyonun kritik noktalarının, fonksiyonun yerel ekstremum (yerel maksimum ve yerel minimum) noktaları olması hangi durumlara bağlıdır? Bir fonksiyonun kritik noktaları ile ekstremum noktaları arasındaki ilişkiyi bulmak için kullanabileceğiniz yöntemler nelerdir?

**6.** Fonksiyonun türevinin olmadığı nokta, fonksiyonun bir ekstremum noktası olabilir mi? Bir örnekle açıklayabilir misiniz?

**7.** Mutlak ekstremum noktaları ile yerel ekstremum noktalarının neler olduğu hakkında bilgi verebilir misiniz?

**8. "Bir fonksiyonun birinci türevinin sıfır olduğu noktada ikinci türev negatif ise, bu nokta fonksiyonun bir maksimum noktasıdır**" ifadesinin nedeni hakkında bilgi verebilir misiniz?

**9.** Bir fonksiyonun büküm (dönüm) noktasını nasıl tanımlıyorsunuz? Fonksiyonun büküm (dönüm) noktasını nasıl buluyorsunuz?

**10.** Verilen bir *f* fonksiyonu için, fonksiyonun artan/ azalan ve yukarı/aşağı bükey olduğu aralıkları belirttiğimiz cevaplarda bitim noktalarını dâhil etmeli miyiz? Nedenini açıklayabilir misiniz?

**11.** Sizce türev kavramı, günlük hayatta nerelerde kullanılır?

**12.** Bir fonksiyonun maksimum ve minimum noktaları matematikte, diğer disiplinlerde veya günlük hayatta birçok problemin (veya sorunun) çözülmesinde kullanılır. Aklınıza gelen birkaç problem söyleyebilir misiniz? Bu problemleri çözmek için nasıl bir yöntem uyguluyorsunuz?

**EK - 3**

## ÖĞRETİM ELEMANLARINA YÖNELTİLEN GÖRÜŞME SORULARI

**1.** Öğrencilerin türev tanımı hakkında kavramsal olarak hangi bilgilere sahip olmalarını beklersiniz?

**2.** $f(x) = x$ şeklinde tanımlanan $f$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $f$ nin grafiğinin her noktasındaki teğet doğrusunun eğimi 1 dir. Bunun nedenini öğrencilerinize nasıl açıklarsınız?

**3.** Türevin fiziksel anlamı hakkında öğrencilerinize ne gibi bilgiler veriyorsunuz?

**4.** Bir fonksiyonun grafiğinin kritik noktası (noktaları) hakkında öğrencilerinize hangi bilgileri veriyorsunuz? Öğrencileriniz kritik noktaları sınıflandırabiliyorlar mı?

**5.** Bir fonksiyonun kritik noktalarının, fonksiyonun yerel ekstremum (yerel maksimum ve yerel minimum) noktaları olup olmadığını tespit etmede öğrencilerinize hangi açıklamalarda bulunuyorsunuz?

**6.** Öğrencilerinizden biri size **"Fonksiyonun türevinin olmadığı nokta, fonksiyonun bir ekstremum noktası olabilir mi?"** şeklinde bir soru yöneltse ona nasıl bir cevap verirdiniz?

**7.** Mutlak ekstremum noktaları ile yerel ekstremum noktaları kavramlarını ve aralarındaki ilişkiyi öğrencilerinize nasıl açıklıyorsunuz?

**8.** Dersinizde ikinci türevin yerel ekstremum noktaları ile ilişkisi konusunu işlerken **"Birinci türevin sıfır olduğu noktada ikinci türev negatif ise, bu nokta fonksiyonun bir maksimum noktasıdır."** ifadesini söylüyorsunuz. Öğrencilerinizden biri bunun nedenini size sorduğunda, onlara nasıl bir açıklama yapardınız?

**9.** Öğrencilerinize bir fonksiyonun büküm (dönüm) noktası hakkında hangi bilgileri veriyorsunuz?

**10.** Verilen bir $f$ fonksiyonu için, fonksiyonun artan/ azalan ve yukarı/aşağı bükey olduğu aralıkları belirttiğimiz cevaplarda bitim noktalarını dahil etmemeleri gerektiğinin nedenini öğrencilerinize nasıl açıklıyorsunuz?

**11.** Öğrencilerinize türev kavramının günlük hayatta nerelerde kullanıldığı hakkında ne gibi bilgiler veriyorsunuz?

**12.** Bir fonksiyonun maksimum ve minimum noktaları matematikte, diğer disiplinlerde veya günlük hayatta birçok problemin (veya sorunun) çözülmesinde kullanılır. Bu problemleri çözmek için öğrencilerinize uygulamaları için nasıl bir yöntem öğretiyorsunuz?

**EK - 4**

**KIT'ASI** : Kara Harp Okulu Dekanlığı ANKARA
**SINIF VE RÜTBESİ**: Öğ. Bnb.
**ADI SOYADI** : Nurettin YILDIZ
**BABA ADI** : Musa
**MEMLEKETİ** : Ankara
**DOĞUM TARİHİ** : 18.07.1966
**DUHULÜ** : 09.09.1984
**NASBI** : 30.08.2004
**SİCİL NO** : 1989-Mat.4

**ÖZÜ:** Yüksek lisans hk.

**KOMUTANLIK ÖNÜNE**

Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Ana Bilim Dalı 'nda "Matematik Eğitiminde kalkülüs öğretimi ile ilgili sorulmuş etkin sorular ve cevapları hakkında öğrenci ve öğretmen görüşleri" adlı yüksek lisans tezi yapmaktayım. Nitel araştırma metotlarından biri olan görüşme tekniğini kullanarak tezimin uygulama kısmını oluşturacağım. Bu nedenle Kara Harp Okulu 'nda üç Harbiyeli ve iki öğretim elemanı ile görüşme yapmam gerekmektedir. Gerekli izinin verilmesine emirlerini arz ederim.

HİZMETE ÖZEL

T.C.
KARA KUVVETLERİ KOMUTANLIĞI
KARA HARP OKULU KOMUTANLIĞI
ANKARA

EK – 5

HRK. : 0530-601-05/DEK.ÖĞT. (107) (3121) 19 ARALIK 2005

KONU : Tez Çalışması.

DEKANLIĞA

1. KHO Dekanlık emrinde görev yapmakta olan Öğ.Bnb.Nurettin YILDIZ (1989-Mat.4) Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Matematik öğretmenliği Ana Bilim Dalında "Matematik Eğitiminde Calculus Öğretimi ile ilgili sorulmuş etkin sorular ve cevapları hakkında öğrenci ve öğretmen görüşleri" adlı yüksek lisans çalışması yapmaktadır.

2. Bahse konu çalışma EK-A'da yer alan Nitel araştırma metodu ile, EK-B'de sunulan örnek sorular ve benzer şekilde Matematik dersi alanında sorulacak sorular ile tez çalışması yapan öğretim elemanı tarafından belirlenecek 3 Harbiyeli ve 2 Matematik öğretiim elemanına uygulanarak icra edilecektir. Öğretim elemanının konuyla ilgili dilekçesi EK-C'dedir.

3. Yüksek lisans tez çalışmasının bir sakınca yaratmayacağı değerlendirilmektedir. Tez çalışmasının bir aşamasını oluşturacak uygulama için, gerekli müsaadenin verilmesini arz ederim.

HARP OKULU KOMUTANI EMRİYLE

Mevlüt AYAZ
Topçu Kur.Alb.
Kurmay Başkanı

EKLER :
EK-A (Nitel Çalışma Metodu)
EK-B (Çalışmada Kullanılacak Soru Örnekleri)
EK-C ( Öğ.Bnb.Nurettin YILDIZ'a Ait Dilekçe)

DAĞITIM :
Gereği :
K.K.K.lığına (Hrk.Bşk.lığına)

Bilgi :
Dekanlığa (EK-A:C Konmadı)

HİZMETE ÖZEL
Tem.Nok. Hrk.ve Eğt.Ş.Md.(2301,2311)

Kayıt No. 1348
Oğlu Tarihi 20/12/2005

HİZMETE ÖZEL

KARA KUVVETLERİ KOMUTANLIĞI

MESAJ FORMU
Message Form

EK – 6

Bu hane Haber Merkezi tarafından doldurulacaktır. (For Comcenter use.) 16606

| Öncelik derecesi - Perecedence | | Tarih Saat Grubu - Date Time Gr. | Haber Talimatı - Message - Insruction |
|---|---|---|---|
| Gereği için - Action: İVEDİ | Bilgi için - Info | 291000 B ARA 05 | |

KİMDEN : KARKOM/ANKARA
FROM

Ön EK - GR.
PREFİX

KİME : KARAHARPOKKOM/ANKARA (14)
TO

BİLGİ :
İNFO

| GİZLİLİK DERECESİ SECURITY CLASSIFICATION | HİZMETE ÖZEL |
|---|---|
| MESAJ NO. | HRK : 0530-495 -05/EĞT. VE OKL.D.ÖĞT.Ş.(2)(1181) |

KGK : BAA

KONU : TEZ ÇALIŞMASI.

İLGİ : (A) KHO K.LIĞININ 19 ARALIK 2005 GÜN VE HRK.: 0530-601-05/DEK.ÖĞT.(107) (3121) SAYILI "TEZ ÇALIŞMASI" YAZISI.

(B) K.K.K.LIĞININ 31 ARALIK 2002 GÜN VE PER.: 4013-294-02/PER.PL. VE YNT.D.MSLK.GLŞ.Ş. (MSLK.YNT.-5) (2835) SAYILI "TEZ ÇALIŞMALARI" EMRİ.

1. İLGİ (A) İLE KHO DEKANLIK EMRİNDE GÖREVLİ ÖĞ.BNB. NURETTİN YILDIZ (1989-MAT-4)'IN GAZİ ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ ORTA ÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ ANA BİLİM DALINDA "MATEMATİK EĞİTİMİNDE CALCULUS ÖĞRETİMİ İLE İLGİLİ SORULMUŞ ETKİN SORULAR VE CEVAPLARI HAKKINDA ÖĞRENCİ VE ÖĞRETMEN GÖRÜŞLERİ" ADLI YÜKSEK LİSANS ÇALIŞMASI YAPTIĞININ BİLDİRİLDİĞİNİ.

2. BAHSE KONU YÜKSEK LİSANS ÇALIŞMASININ; NİTEL ARAŞTIRMA METODU İLE ÜÇ HARBİYELİ VE İKİ MATEMATİK ÖĞRETİM ELEMANINA UYGULANMASININ TEKLİF EDİLDİĞİNİ,

3. ÖĞ.BNB. NURETTİN YILDIZ (1989-MAT-4)'IN ÇALIŞMA YAPMASINA, İLGİ (B) EMİR ESASLARINA GÖRE MÜSAADE EDİLDİĞİNİ (MÜSPET).

| 1 Sayfanın . 1 Sayfası<br>... Page . of .Pages | Referans yapılan mesaj<br>Reference to message<br>No. / Açık. Unclassified<br>Gizli Classified ☐ ☐ | Koordinasyon - Coordination dairesi ve şahıs | Yazarın İsmi,S., Tlf.<br>Drafters Name, Office Tlf.<br>NAZİF ŞAHİN<br>TOPÇU KD.ALB. 4364<br>PLAN SUBAYI |
|---|---|---|---|

| Operatör İçin / For Operatör | GİRİŞ - RECEIVED | | | ÇEKİLİŞ - TRANSMISSION | | | | MÜSADE EDEN İSİM ve İMZA<br>RELEASING OFFICER'S NAME<br>SIGNATURE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | TARİH DATE | SAAT TIME | OPERATÖR | TARİH DATE | SAAT TIME | SİS-TEM | OPERATÖR | |
| | | | | | | | | ERKAL BEKTAŞ<br>TÜMGENERAL<br>HAREKÂT BAŞKANI |

ASLI GİBİDİR

Murat ŞURAL
İsth.Alb.
Hrk. ve Eğt.Ş.Md.V.

YAL KULLANILIR.

HİZMETE ÖZEL

T.C.
KARA KUVVETLERİ KOMUTANLIĞI
KARA HARP OKULU KOMUTANLIĞI
ANKARA

EK – 7

HRK. : 0530-6-06/DEK.ÖĞT. (112) (60)

06 OCAK 2006

KONU : Tez Çalışması.

İVEDİ

DEKANLIĞA

İLGİ: (a) KHO K.lığının 19 Aralık 2005 gün ve HRK.:0530-601-05/(107) (3121) sayılı emri.
(b) KK.K.lığının 29 B Ara 05 TSG'lu HRK.:0530-495-05/Eğt.ve Ok.D.Öğt.Ş.(2) sayılı emri.
(c) K.K.K.lığının 31 Aralık 2002 gün ve PER.:4013-294-02/Per.Pl.ve Ynt.D.-Mslk. Glş.Ş. (Mslk.Ynt.-5) (2835) sayılı "Tez Çalışmaları " konulu emri.
(ç) Lisansüstü Eğitim Yönergesi (KKY-179-4 (A))

1. KHO Dekanlık emrinde görev yapmakta olan Öğ.Bnb.Nurettin YILDIZ (1989-Mat.4) Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Matematik öğretmenliği Ana Bilim Dalında "Matematik Eğitiminde Calculus Öğretimi ile ilgili sorulmuş etkin sorular ve cevapları hakkında öğrenci ve öğretmen görüşleri" adlı yüksek lisans çalışmasını yapması kapsamında; nitel araştırma metodu ile, Matematik dersi alanında sorulacak sorular ile öğretim elemanı tarafından belirlenecek 3 Harbiyeli ve 2 Matematik öğretim elemanı ile bahse konu çalışmayı yapma konusundaki talebi K.K.K.lığına ilgi (a) ile sunulmuştur.

2. Konuyla ilgili olarak ilgi (b) ile adı geçen öğretim elemanının ilgi (c) emir esaslarına uygun olarak çalışmayı yapmasına müsaade edildiği bildirilmiştir. İlgi (b) emir fotokopisi EK'tedir.

3. Dekanlık ve Öğrenci Alay Komutanlığı tarafından öğretim elemanının bahse konu tez çalışması için, ihtiyaç duyduğu çalışmayı yapmasına, ilgi (c,ç) kapsamında gerekli kolaylık gösterilecektir.

4. Adı geçen öğretim elemanı tarafından, bahse konu çalışma kapsamında Enstitü Md.lüğü ve Öğr.A.K.lığı ile çalışmanın tezde kullanılması aşamasında, ilgi (c ve ç) esaslarında gizlilik tedbirlerine riayet etmek, hizmete özel dahil ve daha yüksek gizlilik dereceli bilgilere dokümanlarda yer vermemek, ihtiyaç olması halinde gerçek bilgiler yerine benzetme bilgiler kullanma uygulaması konusu koordine edilecektir.

5. Uygulamadan doğacak görüş ve önerilerin Ok.K.lığına gönderilmesini arz ederim.

HARP OKULU KOMUTANI EMRİYLE

Mevlüt AYAZ
Topçu Kur.Alb.
Kurmay Başkanı

EKİ :
EK-A (İlgi (b) Emir Fotokopisi)
DAĞITIM :
Gereği :
A Planı (4,5,6,7 Hariç)

HİZMETE ÖZEL
Tem.Nok. Hrk.ve Eğt.Ş.Md.(2301,2311)

HİZMETE ÖZEL