ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE
ÜSTEL FONKSİYONUN ÖZELLİKLERİ VE
BAZI UYGULAMALARI

Hülya BİÇİCİOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2009

ANKARA

Hülya BİÇİCİOĞLU tarafından hazırlanan Zaman Skalaları Üzerinde Üstel Fonksiyonun Özellikleri ve Bazı Uygulamaları adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Bahri TURAN
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. , Adil MISIR .
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. , A. Feza GÜVENİLİR
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tarih: 14/05/2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hülya BİÇİCİOĞLU

ZAMAN SKALALARI ÜZERİNDE ÜSTEL FONKSİYONUN ÖZELLİKLERİ VE BAZI UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Hülya BİÇİCİOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2009

ÖZET

Zaman skalası ortaya çıkmasından bugüne matematik dünyasında büyük bir ilgi odağı olmuştur. Ayrıca bu çalışma sahası geniş bir uygulama alanına sahiptir. Öncelikle zaman skalası kavramı ve zaman skalaları üzerinde delta türev, delta integral ve üstel fonksiyon kavramları analiz edildi. Daha sonra belli başlı istenen cebirsel özellikleri koruyan bir zaman skalası logaritması geliştirildi. Özellikle zaman skalası üsteli için tersi rol oynayan ve doğrusal olmayan operatör çalışıldı. İlk olarak skaler durum işleme kondu, onu matris durumu takip etti. Son olarak bazı uygulamalara yer verilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Zaman Skalası, Zaman Skalasında Üstel Fonksiyon
Sayfa Adedi : 42
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Adil Mısır

THE PROPERTIES AND SOME APPLICATIONS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS OVER THE TIME SCALES

(M.Sc. Thesis)

Hülya BİÇİCİOĞLU

GAZI UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCINCE AND TECHNOLOGY

May 2009

ABSTRACT

The time scale has been a focus of interest in the world of mathematics since it was discovered. Moreover, it has a large field of application. Firstly the concept of time scale and delta differential and delta integral on the time scale, and the concept of exponential functions are defined. After then we develop a time scale logarithm that preserves certain desirable algebraic properties. In the particular, a nonlinear operator is developed that acts as an inverse for the time scale exponential in a certain sense. The scalar case is treated first, with a treatment of matrix case following. Finally we present several applications.

Science Code : 204.1.138

Key Words : The Time Scale, Exponential Function on the Time Scale

Page Number : 42

Adviser : Asst. Prof. Dr. Adil Mısır

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yürütebilmem için değerli yardımlarını esirgemeyen tez yöneticim Sayın Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ……..iv

ABSTRACT ……v

TEŞEKKÜR ……vi

İÇİNDEKİLER ……..vii

ŞEKİLLERİN LİSTESİ ……..ix

ÇİZELGELERİN LİSTESİ ……..x

SİMGELER ……xi

1. GİRİŞ ……...1

2. TEMEL KAVRAMLAR ……3

2.1.Zaman Skalası ……3

3. DELTA TÜREV VE TÜREVLENEBİLİRLİK ……8

3.1.Türevlenebilirlik ……...8

4. İNTEGRAL ……...12

4.1. rd-Süreklilik ve Özellikleri ……12

5. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİNAMİK DENKLEMLER ……...17

5.1. Hilger Kompleks Düzlemi ……..17

5.2. Yeni Toplama Grubu ……...……..20

5.3. Üstel Fonksiyon ……..24

6. ZAMAN SKALASI LOGARİTMASI ……..32

Sayfa

6.1. Skaler Durum …….....32

6.2. Matris Durum ……...36

KAYNAKLAR ……..41

ÖZGEÇMİŞ ……...42

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. Noktaların şematik sınıflandırılması ……5
Şekil 2.2. Bazı zaman skalaları ……....7
Şekil 5.1. Hilger kompleks düzlemi ……...18
Şekil 5.2. Hilger kompleks sayıları ……19

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 2.1. Noktaların sınıflandırılması ……4
Çizelge 2.2. Zaman skalasına örnekler ……7
Çizelge 5.1. Toplamsal tersler ……...22

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{T}$	Zaman Skalası
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\sum$	Toplam Sembolü
$\prod$	Çarpım Sembolü
$C_{rd}(A,B)$	A kümesinden B kümesine rd-sürekli fonksiyonların kümesi
$\mathcal{R}(A,B)$	A kümesinden B kümesine regresif fonksiyonların kümesi
$\in$	Elemanıdır.
O	Bileşke
$.^{\Delta}$	Delta türev
$\int_a^b .\,\Delta$	a noktasından b noktasına Delta integral

1. GİRİŞ

Fark denklemler teorisi, matematiğin sistematik olarak gelişmesiyle birlikte ortaya çıkan ilk teorilerden birisidir. Bu teori, zamana bağlı ayrık olayların matematiksel ifadesinde kullanılmıştır. Fark denklemler birçok doğa olayını ifade etmekte kullanılır. Bununla birlikte fark denklemler diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin incelenmesinde de kullanılır. Yani, verilen bir diferansiyel denklemin, ayrık benzeri olan fark denklem ifade edilir ve bu fark denklem, diferansiyel denklemin çözümünün yapısını araştırmak için incelenir. Bu nedenledir ki fark denklem teorisi ve diferansiyel denklem teorisi birbirine çok yakın ve paralel olarak gelişmektedir. Fark denklem teorisi ile diferansiyel denklem teorisi arasında çok fazla benzerlikler olduğu kadar çok önemli farklılıkları da vardır. Örneğin, birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin salınımlı olan çözümleri yok iken bu denkleme ilişkin fark denklemi salınımlı çözümlere sahip olabilmektedir.

Fark denklemler teorisi yaklaşık olarak sekiz asırlık çalışmalar sonunda sistematik bir hale gelmişken, diferansiyel denklemler teorisi dört asırdır çalışılmaktadır. Diferansiyel denklemler teorisinin daha kısa süredir çalışılmasının sebebi, doğa olaylarının kesiksiz olduğunun var sayılmasıdır. Bu yüzden, diferansiyel denklemler teorisi; fizik, kimya, biyoloji, astronomi, ekonomi ve diğer bilimlere ait matematiksel ifade yöntemi olarak kullanılır. Ancak zaman sürekli olarak ilerlese de, olaylarının kendi içinde süreklilik ve süreksizlik hallerinin aynı anda varlığı bir gerçektir. Dolayısıyla, her matematiksel olayı diferansiyel denklemlerle ve fark denklemlerle ifade etmek mümkün değildir.

Fark denklemler Fibonacci tarafından çalışma konusu olarak dikkate alınmıştır ve onun çok başarılı çalışmaları sonucunda birçok matematikçi daha sonralarda bu ilginç alana yönelmiştir. Örneğin, Laplace sabit katsayılı homojen doğrusal fark denklemleri, Guichard ise aynı denklemin homojen olmayan özel hallerini ve Gelgrum bu denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışını inceleme konusu olarak seçmiştir.

Diferansiyel denklemler teorisi ise Leibnitz ve Newton tarafından başlatılıp, Claurit, Frobenious, Euler ve diğer birçok matematikçi tarafından geliştirilmiştir.

Bu teoriye adını veren Leibnitztir.

Yukarıda değinildiği gibi, doğa olayları ne tam olarak sürekli ne de tam olarak kesiklidir. Dolayısıyla, olaylara ilişkin denklemlerin modellemelerinde yeni bir teoriye ihtiyaç duyulmaktadır. İşte bu teorinin adı Zaman Skalasıdır. Zaman skalası teorisi ile birlikte, hem süreklilik hem de süreksizlik içeren olayların denklemlerinin matematiksel modellemesi formülize edilebilmektedir. Zaman skalası üzerinde tanımlı bu denklemlere dinamik denklemler denir. Dinamik denklemler zaman skalasının özel durumlarında, fark denklem ya da diferansiyel denklem haline dönüşür ve Kuantum fiziğinde ortaya çıkan kuantum fark denklemine de dönüşür. Böylece fark denklem ve diferansiyel denklem için ayrı ayrı sonuçlar vermek yerine, keyfi zaman skalaları için geçerli birleştirilmiş sonuçlar verilebilir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Zaman Skalası

2.1. Tanım

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin herhangi bir kapalı alt kümesine bir zaman skalası denir[2] ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir. Bu küme üzerindeki metrik $\mathbb{R}'$ deki alışıldık metrik olarak alınacaktır, yani s,t$\in \mathbb{T}$ d(s,t)=|s-t| olarak alınacaktır.

2.1. Örnek

$\mathbb{R}$,{a},[a,b],$\mathbb{Z}$, Cantor kümesi ve $q^{\overline{\mathbb{Z}}} = q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$ kümeleri kapalı kümelerdir. Bu kümeleri zaman skalalarına örnek olarak verebiliriz.

Q ,(a,b],(a,b) zaman skalası olmayan kümelerdir.

2.2. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için

$\sigma: \mathbb{T} \to \mathbb{T} \quad t \to \sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}; s > t\}$ ile tanımlı σ operatörüne <u>*ileri sıçrama*</u> operatörü denir[2].

2.2. Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}, \quad \sigma: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$n \to \sigma(n) = \inf\{s \in \mathbb{Z} \ ; \ s > n\}$

$= \inf[n+1, n+2, n+3, \dots\dots) = n+1$ (n 'den n+1'e sıçramış oldu)

2.3. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ,$t \in \mathbb{T}$ olsun

$\rho: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$

t $\to \rho$(t)=sup{s$\in \mathbb{T}$; $s < t$} ile tanımlı ρ operatörüne <u>*geri sıçrama*</u> operatörü denir[2].

2.3. Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$

$\rho(n) = \sup\{s \in \mathbb{Z}; \ \ s < n\}$

$= \sup(.., n-3, n-2, n-1,]= n-1$

(n'den n-1'e geri sıçramış oluyoruz)

2.4. Örnek

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \to \sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R}; s > t\} = \inf(t, \infty) = t$ biçiminde olur ki bu birim operatörüyle özdeştir.

2.4. Tanım

Tanım2.2 ve Tanım2.3'e göre zaman skalasının elemanları aşağıdaki gibi sınıflandırılır:

(i) $\sigma(t) = t$ ise, $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sağ yoğun* denir.

(ii) $\sigma(t) > t$ ise, $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sağ saçılımlı* denir.

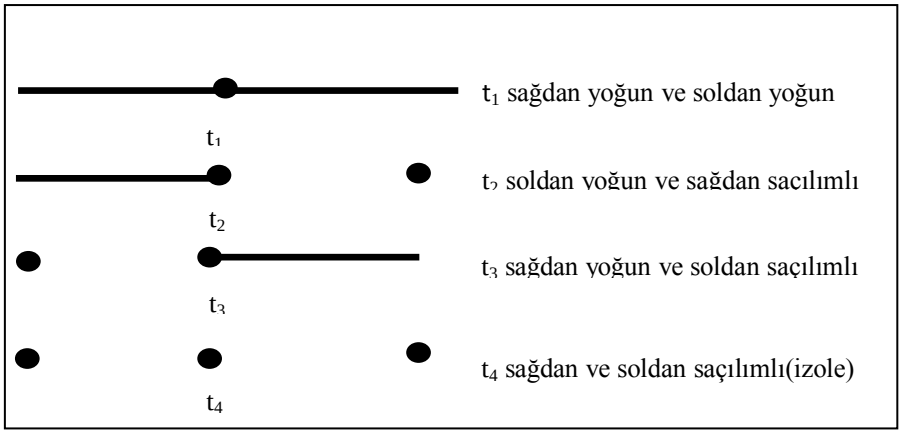
(iii) $\rho(t) = t$ ise, $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sol yoğun* denir.

(iv) $\rho(t) < t$ ise, $t \in \mathbb{T}$ elemanına *sol saçılımlı* denir [2].

Ayrıca hem sağ saçılımlı hem sol saçılımlı noktalara ise *izole noktalar* denir. Noktaların sınıflandırılması Çizelge 2.1 de, Noktaların şematik gösterimi ise Şekil 2.1 de gösterilmiştir.

Çizelge 2.1. Noktaların sınıflandırılması

t sağdan saçılımlı	$\sigma(t) > t$
t sağdan yoğun	$\sigma(t) = t$
t soldan saçılımlı	$\rho(t) < t$
t soldan yoğun	$\rho(t) = t$
t izole	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğun	$\rho(t) = t = \sigma(t)$



Şekil 2.1. Noktaların şematik sınıflandırılması

2.5. Tanım

$\mu:\mathbb{T} \to [0,\infty)$

$t \to \mu(t) = \sigma(t) - t$

ile tanımlı μ fonksiyonuna *grainess(granül)* fonksiyonu denir[2].

2.5. Örnek

Aşağıdaki dört durumu inceleyelim

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa her $t \in \mathbb{R}$ için

$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R}: s > t\} = \inf(t,\infty) = t$

benzer şekilde

$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{R}: s < t\} = \sup(-\infty, t) = t$ olur.

Burada her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğundur. μ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için,

$\mu(t) = 0$ olarak bulunur.

(ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa her $t \in \mathbb{Z}$ için

$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z}: s > t\} = \inf\{t+1, t+2, t+3, \dots\} = t+1$

benzer şekilde

$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\} = \sup\{t-1, t-2, t-3, \dots\} = t-1$

olarak bulunur.

Burada her $t \in \mathbb{Z}$ noktası izole noktadır. μ fonksiyonu

Her $t \in \mathbb{T}$ için, $\mu(t) = 1$ olur.

(iii) $\mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ kümesini düşünelim.

Yığılma noktası olan 0 kümeye dahil olduğu için kapalı kümedir.

$t = 2^n$ olacak şekilde $\exists n \in \mathbb{Z}$ vardır .

O halde $\sigma(t) = 2^{n+1} = 2t$ olarak bulunur.

Benzer şekilde

$\rho(t) = 2^{n-1} = \frac{1}{2}t$ olur.

Burada her $t \in \mathbb{T}$ noktası izole noktadır.

μ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) = \sigma(t) - t$ olduğundan

$\mu(t) = t$ olarak bulunur.

(iv) $\mathbb{T} = \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}_0\}$ olsun.

$t = \sqrt{n}$ olacak şekilde $\exists n \in \mathbb{N}_0$ vardır.

O halde $\sigma(t) = \sqrt{n+1} = \sqrt{t^2+1}$ olur.

Benzer şekilde

$n = 0$ için $\rho(0) = 0$ $n \geq 1$ için $\rho(t) = \sqrt{t^2-1}$ olur.

2.6. Tanım

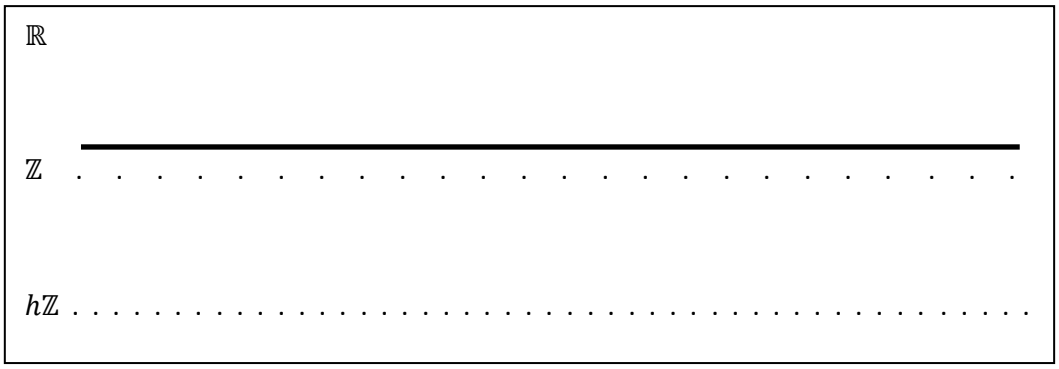
$\mathbb{T}$ zaman skalası verildiginde $\mathbb{T}^K$, $\mathbb{T}'$nin m'de sol-saçılımlı bir maximumu varsa $\mathbb{T}^K = \mathbb{T}\backslash\{m\}$ diğer hallerde $\mathbb{T}^K = \mathbb{T}$ ile tanımlanır.

Bu tanımı kısaca

$$\mathbb{T}^K = \begin{cases} \mathbb{T} - \{sup\mathbb{T}\}, & sup\mathbb{T} < \infty \quad soldan\ saçılımlı \\ \mathbb{T} \qquad\qquad , & sup\mathbb{T} = \infty \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

ile de verebiliriz[2].

Aşağıdaki Şekil 2.2 de bazı zaman skalaları gösterilmiştir. Çizelge 2.2 de zaman skalasına örnekler verilmiştir. Burada farklı zaman skalası alındığında, buna karşılık $\mu(t)$ granül fonksiyonu, $\sigma(t)$ ileri fark operatörü ve $\rho(t)$ geri fark operatörü hesaplanmıştır.



Şekil 2.2. Bazı zaman skalaları

Çizelge 2.2. Zaman skalasına örnekler

$\mathbb{T}$	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
$\mathbb{R}$	*0*	*t*	*t*
$\mathbb{Z}$	*1*	*t+1*	*t-1*
$h\mathbb{Z}$	*h*	*t+h*	*t-h*
$q^{\mathbb{N}}$	*(q-1)t*	*qt*	$^{t}/_{q}$
$2^{\mathbb{N}}$	*T*	$2t$	$^{t}/_{2}$
$\mathbb{N}_0^2$	$2\sqrt{t}+1$	$(\sqrt{t}+1)^2$	$\sqrt{t}-1)^2$

3. DELTA TÜREV VE TÜREVLENEBİLİRLİK

3.1. Türevlenebilirlik

3.1. Tanım

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. Verilen her $\mathcal{E} > 0$ sayısı için t'nin bir U ($\exists \delta > 0$ $için$ U= $(t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ $olacak$ $şekilde$) komşuluğu var ve her $s \in U$ için

$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)| \leq \mathcal{E}|\sigma(t)-s|$ eşitsizliği sağlanıyorsa

$f^{\Delta}(t)$'ye f'nin t-noktasındaki Hilger türevi (Δ-delta türevi) denir[2].

3.1. Sonuç

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun her $t \in \mathbb{T}^K$ için

$$\lim_{\substack{s \to t \\ s \neq \sigma(t)}} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

Limiti mevcut ise bu limite f fonksiyonunun *Delta türevi veya Hilger türevi* denir ve f^{Δ} ile gösterilir[2].

Ayrıca her $t \in \mathbb{T}^K$ için $f^{\Delta}(t)$ mevcut ise f fonksiyonu $\mathbb{T}^K$ da delta(Hilger) türevlenebilirdir denir. Biz bundan sonra buna kısaca türevlenebilir diyeceğiz. Tezde aksi belirtilmedikçe, türev terimi ile delta türev kastedilecektir ve $f^{\Delta}: \mathbb{T}^K \longrightarrow \mathbb{R}$ ile de f nin delta türevini göstereceğiz.

3.1. Örnek

Eğer $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \alpha$ ise $f^{\Delta}(t) \equiv 0$ olur.

Burada $\alpha \in \mathbb{R}$ sabittir. Gerçekten her $\varepsilon > 0$ ve $s \in \mathbb{T}$ için

$|f(\sigma(t)) - f(s) - 0.(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$,

olması sebebiyle doğrudur. Yani sabitin türevi 0 dır.

3.2. Örnek

Eğer $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ ise $f^{\Delta}(t) \equiv 1$ olur. Gerçekten her $\epsilon > 0$ ve her $s \in \mathbb{T}$ için

$\left|f\left(\sigma(t)\right) - f(s) - 1.(\sigma(t) - s)\right| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon\,|\sigma(t) - s|,$
olması sebebiyle doğrudur.

3.1. Teorem

Kabul edelim ki; $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^K$ olsun. O zaman, aşağıdakiler geçerlidir:

(i) f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonu t noktasında süreklidir.

(ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktası sağ saçılımı ise f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$f^{\Delta}(t)=\frac{f\left(\sigma(t)\right)-f(t)}{\mu(t)}$ sağlanır.

(iii) t sağ yoğun olmak üzere f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$\lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limitinin var olmasıdır. Bu durumda $f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ dir.

(iv)f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise

$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t)$ elde edilir[2].

İspat:

(i) f fonksiyonu t'de türevlenebilir ve $0<\varepsilon<1$ olsun.

$\varepsilon^* = \varepsilon.[1 + \left|f^{\Delta}(t)\right| + 2\mu(t)]^{-1}$ olarak tanımlansın.

$\left|f\left(\sigma(t)\right) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon^*|\sigma(t) - s|$

olacak şekilde t noktasının U komşuluğu vardır. Böylece

her $s \in U \cap (t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^*)$ için

$$|f(t) - f(s)| = \left|\left\{f\left(\sigma(t)\right) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right)\right\} - \left\{f\left(\sigma(t)\right) - f(t) - \mu(t)f^{\Delta}(t)\right\} + (t - s)f^{\Delta}(t)|$$

$$\leq \varepsilon^*|\sigma(t) - s| + \varepsilon^*\mu(t) + |t - s|f^{\Delta}(t)$$

$$\leq \varepsilon^*\left[1 + 2\mu(t) + \left|f^{\Delta}(t)\right|\right] = \varepsilon$$

elde edilir. Bu sonuç f fonksiyonunun sürekli olduğu sonucunu verir.

(ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktasında sağdan saçılımlı olsun. Süreklilik tanımından;

$$\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

yazılır. $\varepsilon>0$ için

$$\left|\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}-\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}\right|\leq\varepsilon$$

olur. Her $s\in U$ olacak şekilde t noktasının bir U komşuluğu vardır. Her $s\in U$ için

$$\left|[f(\sigma(t))-f(s)]-\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}[\sigma(t)-s]\right|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

elde edilir. Böylece;

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$$

yazılır.

(iii) f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ve t noktasında sağda yoğun olsun.

Bu taktirde $\varepsilon>0$ için her $s\in U$ olacak şekilde t noktasının bir U komşuluğu vardır. Böylece

$$\left|[f(\sigma(t))-f(s)]-f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]\right|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

yazılabilir. $\sigma(t)=t$ olduğundan,

$$\left|[f(t)-f(s)]-f^{\Delta}(t)(t-s)\right|\leq\varepsilon|t-s|,\ \forall s\in U$$

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}-f^{\Delta}(t)\right|\leq\varepsilon$$

elde edilir. Böylece aranan $s\in U$, $s\neq t$ için

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

olur.

(iv) Eğer $\sigma(t)=t$ ise $\mu(t)=0$ olur ve

$f(\sigma(t))=f(t)+0.f^{\Delta}(t)$ yazılır.

Diğer taraftan eğer $\sigma(t)>t$ ise; (ii)'nin yardımıyla

$$f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$$

elde edilir[2].

3.2. Teorem

Kabul edelim ki;

f,g : $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları t $\in \mathbb{T}^K$ noktasında türeve sahip olsunlar.

O zaman, aşağıdakiler geçerlidir:

(i) $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ toplamı t noktasında türevlenebilirdir ve

$(f + g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$ dır.

(ii) $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ çarpımı t noktasında türevlenebilirdir ve

$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)\, g(t) + f(\sigma(t))\, g^{\Delta}(t)$ dır.

Burada, $fg = gf$ olduğuna da dikkat edilmelidir.

(iii) $f(t) f(\sigma(t)) \neq 0$ olmak üzere, 1/f fonksiyonu t noktasında türeve sahiptir ve

$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t) f(\sigma(t))}$ dır[2].

4. İNTEGRAL

4.1. rd-Süreklilik ve Özellikleri

4.1. Tanım

Bir f : $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sağ yoğun noktalarındaki sağdan limiti var (sonlu) ve sol yoğun noktalarındaki soldan limiti var(sonlu) ise f fonksiyonuna düzenlidir denir [2].

4.2. Tanım

Bir f:$\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sağ yoğun noktalarında sürekli ve sol yoğun noktalarındaki soldan limiti var ise f fonksiyonuna *rd-sürekli* denir.

f : $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ şeklindeki rd-sürekli fonksiyonların kümesi C_{rd} ($\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$) ile gösterilir.

$f \in C_{rd}$ ($\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$) ve $f^{\Delta} \in C_{rd}$ ($\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$) ifadelerini sağlayan fonksiyonların oluşturdukları küme ise C_{rd}^{1} ($\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$) ile gösterilir[2].

4.3. Tanım

Bir f :$\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, bir $D \subset \mathbb{T}^{K}$ bölgesi için, her $t \in D$ noktalarında türevlenebilir ve $\mathbb{T}^{K} \backslash D$ bölgesi sağ saçılımlı nokta içermeyen sayılabilir bir küme ise f fonksiyonuna D bölgesinde *ön-türevlenebilir* denir[2].

4.1. Teorem (Ortalama değer teoremi)

f,g fonksiyonları $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlanmış reel değerli fonksiyonlar ve ikisi de aynı D bölgesinde ön-türevlenebilir olsun. O zaman her t ∈ D için

$|f^{\Delta}(t)| \leq g^{\Delta}(t)$ eşitsizliği sağlanırsa, $t \geq s$ olmak üzere her $t, s \in \mathbb{T}$ için

$|f(t) - f(s)| \leq g(t) - g(s)$

eşitsizliği geçerlidir [2].

4.1. Sonuç

f,g :$\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları aynı D bölgesinde ön-türevlenebilir ve U $\subset \mathbb{T}$, başlangıç ve bitiş noktaları sırasıyla t,s $\in \mathbb{T}$ olan kompakt bir aralık olsun. O zaman,

$$|f(t) - f(s)| \leq \sup_{\eta \in U^{K} \cap \mathbb{R}} |f^{\Delta}(\eta)||t - s|$$

sağlanır [2].

4.2. Teorem

f düzenli olsun. Bu takdirde her t ∈ D için D türevlenebilir bölgesiyle ön-türevlenebilir ve $F^{\Delta}(t) = f(t)$ olacak biçimde bir F fonksiyonu vardır[2].

4.4. Tanım

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli olsun. O zaman, Teorem 4.2' deki gibi olan her F fonksiyonuna f ' nin ön-antitürevi denir. Bu durumda, c keyfi bir sabit olmak üzere,

$$\int f(\eta)\Delta\eta = F(t) + c$$

şeklinde tanımlanan ifadeye düzenli f fonksiyonunun *belirsiz integrali denir.* Cauchy integrali ise

$$\int_{s}^{t} f(\eta)\Delta\eta = F(t) - F(s) \quad her\ t, s \in \mathbb{T}$$

ile tanımlıdır[2].

4.3. Teorem

Her rd-sürekli fonksiyonun bir anti-türevi vardır.

Özel olarak, bir $t_0 \in \mathbb{T}$ ve her $t \in \mathbb{T}$ için

$F(t)=\int_{to}^{t} f(\eta)\Delta\eta$

ile tanımlı fonksiyon, f fonksiyonunun anti-türevidir [2].

4.4. Teorem

$f \in C_{rd}(\mathbb{T})$ ve $t \in \mathbb{T}^{K}$ olmak üzere,

$$\int_{t}^{\sigma(t)} f(\eta)\Delta\eta = \mu(t)f(t)$$

sağlanır [2].

4.5. Teorem

$f^{\Delta} \geq 0$ ise f fonksiyonu azalmayandır[2].

4.6. Teorem

r,s,t $\in \mathbb{T}$, $\curlywedge \in \mathbb{R}$ ve f,g $\in C_{rd}(\mathbb{T})$ olsun. O zaman, aşağıdaki özellikler doğrudur:

(i) $\int_s^t (f+g)(\eta)\Delta\eta = \int_s^t f(\eta)\Delta\eta + \int_s^t g(\eta)\Delta\eta$

(ii) $\int_s^t (\curlywedge f)(\eta)\Delta\eta = \curlywedge \int_s^t f(\eta)\Delta\eta$

(iii) $\int_s^t f(\eta)\Delta\eta = -\int_t^s f(\eta)\Delta\eta$

(iv) $\int_s^t f(\eta)\Delta(\eta) = \int_s^r f(\eta)\Delta\eta + \int_r^t f(\eta)\Delta\eta$

(v) $\int_s^t f\big(\sigma(\eta)\big)g^{\Delta}(\eta)\Delta\eta = (fg)(t) - (fg)(s) - \int_s^t f^{\Delta}(\eta)g(\eta)\Delta\eta$[2].

4.7. Teorem

t,s $\in \mathbb{T}$ ve f $\in C_{rd}(\mathbb{T})$ olsun. Aşağıdakiler doğrudur.

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_s^t f(\eta)\Delta\eta = \int_s^t f(\eta)d\eta$$

dır.

(ii) $\mathbb{T}$ sadece izole(hem sağ hem sol saçılımlı) noktalardan oluşuyorsa,

$$\int_s^t f(\eta)\eta = \sum_{\eta\in[t,s)} f(\eta)\mu(\eta)$$

olur[2].

4.5. Tanım

$t_0 \in \mathbb{T}$ sup$\mathbb{T}=\infty$ ve f $\in C_{rd}$ $([t_0,\infty)_{\mathbb{T}})$ olsun. O zaman, $[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerindeki belirsiz integral

$$\int_{t_0}^{\infty} f(\eta)\Delta\eta \coloneqq \lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(\tau)\Delta\tau$$

ile tanımlıdır.

Eğer bu limit mevcut ise belirsiz integral yakınsaktır, aksi halde de ıraksaktır denir[2].

4.6. Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $\nu: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\widetilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. $\tilde{\sigma}$ ile $\widetilde{\mathbb{T}}$ üzerindeki sıçrama fonksiyonunu ve $\tilde{\Delta}$ ile $\widetilde{\mathbb{T}}$ üzerindeki türevi gösterelim. Bu durumda $\nu \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ \nu$ olur[2].

4.8. Teorem

$\nu: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kesin olarak artan bir fonksiyon ve $\widetilde{\mathbb{T}} = \nu(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. $w: \widetilde{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ alalım. Eğer ν^{Δ}(t) ve $w^{\tilde{\Delta}}\big(\nu(t)\big)\ t \in \mathbb{T}^{K}$ için varsa,

$(w \circ \nu)^{\Delta} = (w^{\tilde{\Delta}} \circ \nu)\nu^{\Delta}$ olur[2].

4.9. Teorem

Kabul edelim ki, f: $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ kesin artan bir fonksiyon ve $\widetilde{\mathbb{T}}$:=f($\mathbb{T}$) bir zaman skalası olsun. Bu durumda g$\in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ve f $\in C^{1}_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olmak üzere, her t,s$\in \mathbb{T}$ için

$$\int_{s}^{t} g(\eta) f^{\Delta}(\eta) \Delta\eta = \int_{f(s)}^{f(t)} (g \circ f^{-1})(\zeta) \tilde{\Delta}\, \zeta$$

olur [2].

4.10. Teorem

Teorem 2.28 deki şartlar altında $\widetilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}$ ise

$$\int_{s}^{t} g(\eta) f^{\Delta}(\eta) \Delta\eta = \int_{f(s)}^{f(t)} (g \circ f^{-1})(\eta) \Delta\, \eta$$

olur [2].

4.11. Teorem (Ara değer teoremi).

f : $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun. t,s$\in \mathbb{T}$ ve t,s$\in \mathbb{T}$ ve $t > s$ olmak üzere,

$f(s)\, f(t) < 0$

sağlanıyorsa

$f(r)=0$ veya $f(r)f(\sigma(r)) < 0$

olacak şekilde $r \in [s,t)_{\mathbb{T}}$ vardır [2].

4.12. Teorem (Leibnitz kuralı).

$s \in \mathbb{T}^K$ ve $f : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $r > s$ ve $r \in \mathbb{T}^K$ olmak üzere (r,r) noktasında sürekli ve

$f^{\Delta}(r, \cdot) \in C_{rd}([s, \sigma(r)]_{\mathbb{T}})$ olsun.

O zaman;

$$g(t) = \int_s^t f(t,n)\Delta\eta$$

ile tanımlanırsa

$$g^{\Delta}(t) = \int_s^t f^{\Delta}(t,\eta)\Delta\eta + f(\sigma(t),t)$$

sağlanır [2].

Yukarıdaki teoremde türev birinci mertebeden uygulanmaktadır.

5. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİNAMİK DENKLEMLER

5.1. Hilger Kompleks Düzlemi

5.1.Tanım

$f: \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Birinci mertebeden dinamik denklem

$$y^{\Delta} = f(t, y, y^{\sigma}) \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer f_1 ve f_2 fonksiyonları için

$f(t, y, y^{\sigma}) = f_1(t)y + f_2(t)$ veya $f(t, y, y^{\sigma}) = f_1(t)y^{\sigma} + f_2(t)$

şeklinde tanımlanırsa, bu taktirde Eş.5.1. dinamik denklemine lineer denklem denir. Eğer $y: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Eş.5.1. in çözümü ise, bu takdirde her $t \in \mathbb{T}^K$ için

$y^{\Delta}(t) = f(t, y(t), y(\sigma(t)))$

denklemini sağlar[2].

Şimdi Hilger kompleks düzleminin tanımı verilecektir.

5.2. Tanım

h>0 olmak üzere, Hilger karmaşık sayıları, Hilger ekseni, Hilger yedek ekseni ve Hilger sanal çemberi sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlıdır.

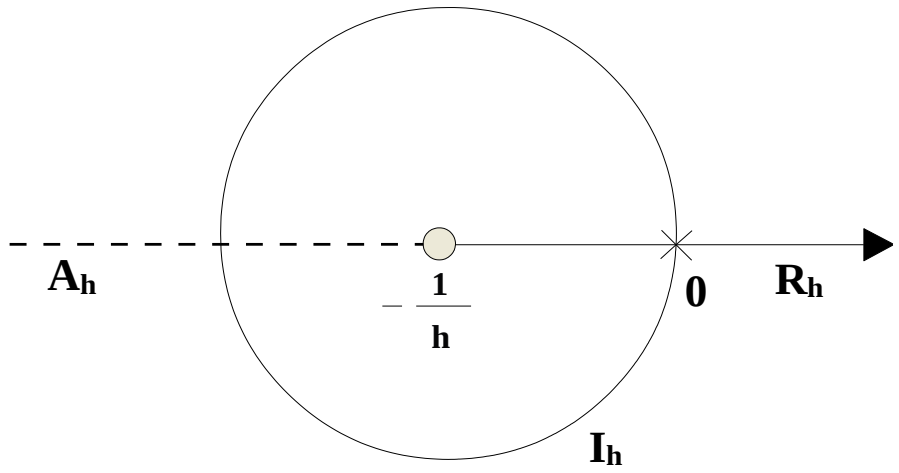
$\mathbb{C}_h := \left\{z \in \mathbb{C}: z \neq -\frac{1}{h}\right\}$,

$\mathbb{R}_h := \left\{z \in \mathbb{C}_h: z \in \mathbb{R} \; ve \; z > -\frac{1}{h}\right\}$,

$\mathbb{A}_h := \left\{z \in \mathbb{C}_h: z \in \mathbb{R} \; ve \; z < -\frac{1}{h}\right\}$,

$\mathbb{I}_h := \left\{z \in \mathbb{C}_h: \left|z + \frac{1}{h}\right| = \frac{1}{h}\right\}$.

h=0 için $\mathbb{C}_0 := \mathbb{C}, \mathbb{R}_0 := \mathbb{R}, \mathbb{I}_0 := i\mathbb{R} \; ve \; \mathbb{A}_0 := \emptyset$ ile tanımlıdır[2].



Şekil 5.1. Hilger kompleks düzlemi

5.3. Tanım

h>0 ve z $\in \mathbb{C}_h$ olsun.

z'nin Hilger reel kısmı; $Re_h(z) := \frac{|zh+1|-1}{h}$

z'nin Hilger imajiner kısmı; $Im_h(z) := \frac{Arg\,(zh+1)}{h}$ ile tanımlıdır[2].

Burada Arg(z), z'nin esas argümentidir.$(-\pi < Arg(z) < \pi)$

Ayrıca $Re_h(z)$ ve $Im_h(z)$

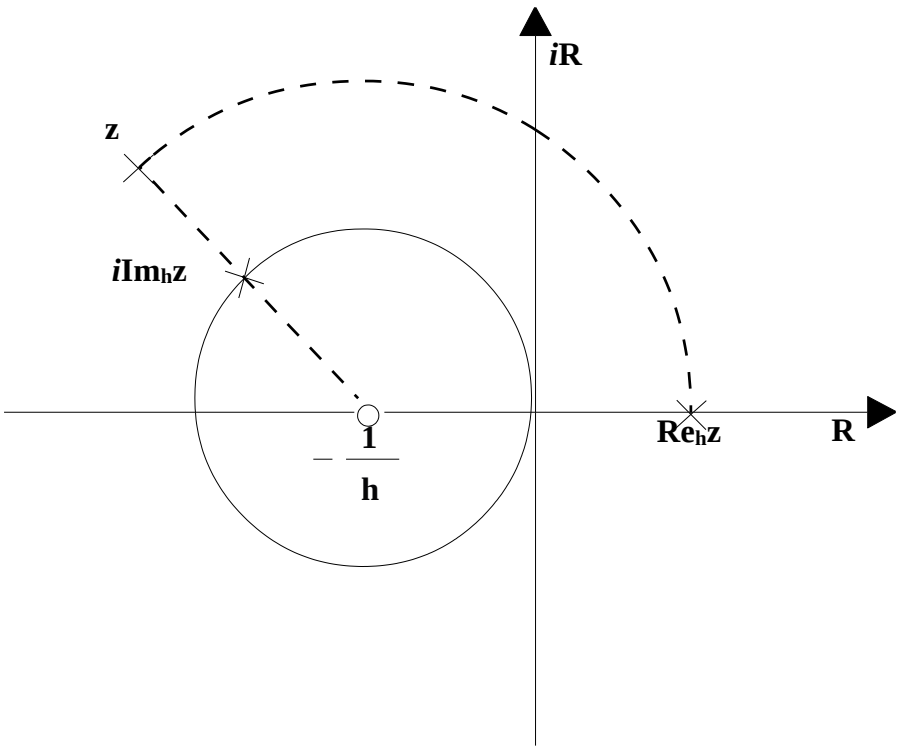
$-\frac{1}{h} < Re_h(z) < \infty$ ve $-\frac{\pi}{h} < Im_h(z) \leq \frac{\pi}{h}$ eşitsizliklerini sağlar.

5.4. Tanım

$-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ olsun. Hilger'in pür imajiner sayısı iw

$iw = \frac{e^{iw\,h}-1}{h}$ ile tanımlanır[2]. (5.2)

$z \in \mathbb{C}_h$ için $iIm_h(z) \in \mathbb{I}_h$ olur.



Şekil 5.2. Hilger kompleks sayıları

5.1. Teorem

Eğer $-\frac{\pi}{h} < w \leq \frac{\pi}{h}$ ise

$|iw|^2 = \frac{4}{h^2} sin^2 \frac{wh}{2}$ olur[2]. (5.3)

İspat:

Eş. 5.2 yi kullanarak

$|iw|^2 = (iw)\overline{(iw)}$

$=\left(\frac{e^{iwh}-1}{h}\right)\left(\frac{e^{iwh}-1}{h}\right)$

$=\frac{2-e^{iwh}-e^{-iwh}}{h^2}$

$=\frac{2}{h^2}(1-\cos(wh))$

$=\frac{4}{h^2} sin^2 \frac{wh}{2}$

sonucunu elde ederiz.

5.2. Yeni Toplama Grubu

5.5. Tanım

$\mathbb{C}_h$ üzerindeki "circle plus" toplama $\oplus$ işlemi

$z \oplus w \coloneqq z + w + zwh$ ile tanımlanır[2].

5.2. Teorem

($\mathbb{C}_h$,$\oplus$) bir Abel grubu olur[2].

İspat:

$z, w \in \mathbb{C}_h$ ve $z \oplus w$ karmaşık sayılardır.

$z \oplus w \neq -\frac{1}{h}$

$1 + h(z \oplus w) = 1 + h(z + w + wzh)$

$= (1 + hz)(1 + hw)$

$\neq 0$

$\mathbb{C}_h$ $\oplus$ işlemi altında kapalıdır.

$z \oplus 0 = 0 \oplus z = z$ olduğundan 0, $\oplus$ için toplamsal özdeş olur. $z \in \mathbb{C}_h$ için z nin $\oplus$ altında ters toplamını bulmak için

$z \oplus w = 0$

$z + w + zwh = 0$

Böylece;

$w = -\frac{z}{1 + zh}$

$\oplus$ işlemi altında z'nin toplamsal tersi olur. ($\mathbb{C}_h$,$\oplus$) gruptur. Aynı zamanda

$z \oplus w = z + w + zwh$

$=w + z + wzh = w \oplus z$

değişme özelliği olduğundan ($\mathbb{C}_h$,$\oplus$) Abel gruptur.

5.3. Teorem

$z \in \mathbb{C}_h$ için

$z = Re_h z \oplus iIm_h z$ olur[2].

İspat:

$z \in \mathbb{C}_h$

$$Re_h z \oplus iIm_h z = \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus i\frac{Arg(zh+1)}{h}$$

$$= \frac{|zh+1|-1}{h} \oplus \frac{\exp\big(iArg(zh+1)\big)-1}{h}$$

$$= \frac{|zh+1|-1}{h} + \frac{\exp\big(iArg(zh+1)\big)-1}{h}$$

$$+ \frac{|zh+1|-1}{h}\,\frac{\exp\big(iArg(zh+1)\big)-1}{h}h$$

$$= \frac{1}{h}\big\{|zh+1|-1+\exp\big(iArg(zh+1)\big)-1\big\}$$

$$+\big\{(|zh+1|-1)(\exp\big(iArg(zh+1)\big)-1)\big\}$$

$$= \frac{1}{h}\big\{|zh+1|\exp\big(iArg(zh+1)\big)-1\big\}$$

$$= \frac{(zh+1)-1}{h} = z$$

5.6. Tanım

$n \in \mathbb{N}$ ve $z \in \mathbb{C}_h$ üzerinde $\odot$ işlemi

$n \odot z = z \oplus z \oplus z \oplus z \oplus \ldots \oplus z$ şeklinde tanımlanır.

Bu son denklemde sağ tarafta n tane terim vardır. Bu nedenle

$$n \odot z = \frac{(zh+1)^n}{h}$$

şeklinde olur[2].

5.7. Tanım

$\oplus$ işlemi altında $z \in \mathbb{C}_h$'nin toplamsal tersi

$\ominus z := \frac{-z}{1+zh}$

olur.

Bu durumda $\mathbb{C}_h$ üzerindeki "circle minus" çıkarma $\ominus$ işlemini

$z \ominus w := z \oplus (\ominus w)$ ile tanımlarız[2]. (5.4)

5.4. Teorem

$z, w \in \mathbb{C}_h$ ve $h \geq 0$ için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $z \ominus z = 0$

(ii) $z \ominus w = \frac{z-w}{1+wh}$

(iii) Eğer $h = 0$ ise $z \ominus w = z - w$

(iv) $z \in \mathbb{C}_h$ ise $\bar{z} = \ominus z$

(v) $\ominus (iw) = \overline{iw}$

Aşağıdaki Çizelge 5.1 de bazı toplamsal ters örnekleri verilmiştir.

Çizelge 5.1. Toplamsal Tersler

z	0	1	i	$\frac{1}{h}$	$-\frac{2}{h}$	$\frac{i-1}{h}$
$\ominus z$	0	$-\frac{1}{1+h}$	$\frac{1}{i-h}$	$-\frac{1}{2h}$	$-\frac{2}{h}$	$-\frac{i+1}{h}$

5.8. Tanım

Eğer $z \in \mathbb{C}_h$ ise z nin genelleştirilmiş karesi

$z^{②} := (-z)(\ominus z) = \frac{z^2}{1+zh}$ (5.5)

şeklinde tanımlanır[2].

5.9.Tanım

h≥0 olmak üzere, $\xi:\mathbb{C}_h \to \mathbb{Z}_h := \left\{z \in \mathbb{C}: -\frac{\pi}{h} < \mathrm{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h}\right\}$ silindir dönüşümü

$$\xi_h(z) := \begin{cases} z & ,h = 0 \\ \frac{1}{h}\log(1+zh) & ,h > 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

ile tanımlıdır.

Ters silindir dönüşümü $\xi_h^{-1}: \mathbb{Z}_h \to \mathbb{C}_h$ ise

$$\xi_h^{-1}(z) := \begin{cases} z, & ,h = 0 \\ \frac{1}{h}(e^{zh} - 1), & h > 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

şeklindedir[2].

Burada Log esas logaritma fonksiyonudur. h=0 için $\xi_0(z) = z$ olur[2].

h>0 olduğunda $\mathbb{Z}_h$ silindir olur. Sınır çizgileri

$$Im(z) = -\frac{\pi}{h}$$

ve

$$Im(z) = \frac{\pi}{h}$$

şeklindedir.

5.10. Tanım

$\mathbb{Z}_h$ üzerindeki toplama işlemi $z, w \in \mathbb{Z}_h$

$$z + w := z + w \quad \left(mod\, \frac{2\pi i}{h}\right) \tag{5.8}$$

ile tanımlanır[2].

5.5. Teorem

Silindir dönüşümü ξ_h, $(\mathbb{C}_h, \oplus)$ dan $(\mathbb{Z}_h, +)$ ya bir grup homomorfizmasıdır.

Buradaki + işlemi $\mathbb{Z}_h$ üzerinde Eş. (5.8) de tanımlanan işlemdir.

İspat:

$h > 0$ ve $z, w \in \mathbb{C}_h$ olsun.

$$\xi_h(z \oplus w) = \frac{1}{h} Log(1 + (z \oplus w)h)$$

$$= \frac{1}{h} Log(1 + zh + wh + zwh^2)$$

$$= \frac{1}{h} Log[(1 + zh)(1 + wh)]$$

$$= \frac{1}{h} Log(1 + zh) + \frac{1}{h} Log(1 + wh)$$

$$= \xi_h(z) + \xi_h(w)$$

Bu $h > 0$ durumunu ispatlar. h=0 için aşikardır.

5.3. Üstel Fonksiyon

Üstel fonksiyonu tanımlamadan önce bazı gerekli tanımlamaları verelim.

5.11.Tanım

$p: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

Eğer her $t \in \mathbb{T}^K$ için $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ özelliği sağlanıyorsa p fonksiyonuna regresifdir denir.

Bütün regresif ve rd-sürekli $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesini $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T}) = \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile göstereceğiz[2].

5.6. Teorem

$\mathcal{R}$, her $t \in \mathbb{T}^K$, $p, q \in \mathcal{R}$ için $\oplus$ işlemi altında Abel gruptur.

$(p \oplus q) = p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)$

Bu grup regresif grup olarak adlandırılır.

5.12. Tanım

$p, q \in \mathcal{R}$ için $\ominus p$ ve $p \ominus q$ fonksiyonları her $t \in \mathbb{T}^K$ için

$$(\ominus p)(t) := -\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)} \tag{5.9}$$

$$(p \ominus q)(t) := \big(p \oplus (\ominus q)\big)(t) \tag{5.10}$$

şeklindedir[2].

5.7. Teorem

$p, q \in \mathcal{R}$ için Eş.5.10 da tanımlanan $\ominus$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar.

$(i)\ p \ominus p = 0$

(ii) $\ominus (\ominus p) = p$

(iii) $p \ominus q \in \mathcal{R}$

(iv) $p \ominus q = \frac{p-q}{1+\mu t}$

(v) $\ominus (p \ominus q) = q \ominus p$

(vi) $\ominus (p \oplus q) = (\ominus p) \oplus (\ominus q)$

5.13. Tanım

$p \in \mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olmak üzere zaman skalası üzerinde üstel fonksiyon her t,s $\in \mathbb{T}$ için

$$e_p(t,s) \coloneqq exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\,(p(\tau))\Delta\tau\right) \tag{5.11}$$

ile tanımlıdır[2].

Buradaki $\xi_h(z)$ Eş. 5.6 da tanımlanan silindir dönüşümüdür.

5.1.Yardımcı Teorem

Eğer $p \in \mathcal{R}$ ise her $r, s, t \in \mathbb{T}$ için

$e_p(t,r)e_p(r,s) = e_p(t,s)$

semigroup(yarı grup) özelliği sağlanır[2].

İspat:

$p \in \mathcal{R}\ ve\ r, s, t \in \mathbb{T}$ olsun.

Eş. 5.11 den

$$e_p(t,r)e_p(r,s) = \exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}\left(p(\tau)\right)\Delta\tau\right)\exp\left(\int_s^r \xi_{\mu(\tau)}\left(p(\tau)\right)\Delta\tau\right)$$

$$= exp\left(\int_r^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau + \int_s^r \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau\right)$$

$$= exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau\right)$$

$$= e_p(t,s)$$

Teorem 4.6' nın (iv) şıkkından yararlandık.

5.14. Tanım

$p \in \mathcal{R}$ ise birinci basamaktan dinamik denklem,

$y^{\Delta} = p(t)y$ (5.12)

regresif olarak tanımlanır.

5.8. Teorem

$e_p(.,t_0)$

$y^{\Delta} = p(t)y \quad y(t_0) = 1 \qquad t_0 \in \mathbb{T}$ (5.13)

başlangıç değer probleminin çözümüdür.

İspat:

$t_0 \in \mathbb{T}^K$ ve $y^{\Delta} = p(t)y$ denklemi regresif olduğundan

$e_p(t_0,t_0) = 1$

olur.

$e_p(t\,,t_0)\,,\, y^{\Delta} = p(t)y(t) \quad t \in \mathbb{T}^K$ dinamik denklemini sağlar.

İki durum vardır.

1.Durum: $\sigma(t) > t$ Yardımcı Teorem 5.1 den

$$e_p^{\Delta}(t,t_0) = \frac{\exp\ (\int_{t_0}^{\sigma(t)} \xi_{\mu(r)}(p(\tau))\Delta\tau) - \exp(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(r)}(p(\tau))\Delta\tau)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{\exp\ (\int_t^{\sigma(t)} \xi_{\mu(r)}(p(\tau))\Delta\tau)\ - 1}{\mu(t)} e_p(t, t_0)$$

$$= \frac{e^{\xi_{\mu(r)}(p(t))\mu(t)} - 1}{\mu(t)} e_p(t, t_0)$$

$$= \xi_{\mu(t)}^{-1}(\xi_{\mu(t)}(p(t)).\, e_p(t, t_0)$$

$$= p(t).\, e_p(t, t_0)$$

2. Durum: $\sigma(t) = t$ Yardımcı Teorem 5.1 i kullanarak

$$|y(t) - y(s) - p(t)y(t)(t-s)| = \left|e_p(t, t_0) - e_p(s, t_0) - p(t)e_p(t, t_0)(t-s)\right|$$

$$= \left|e_p(t, t_0)\right|\left|1 - e_p(s, t_0) - p(t)(t-s)\right|$$

$$= \left|e_p(t, t_0)\right| \left|1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t) + \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - p(t)(t-s)\right|$$

$$\leq \left|e_p(t, t_0)\right| \left|1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t)\right|$$

$$+ \left|e_p(t, t_0)\right| \left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - p(t)(t-s)\right|$$

$$\leq \left|e_p(t, t_0)\right| \left|1 - \int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau - e_p(s, t)\right|$$

$$+ \left|e_p(t, t_0)\right| \left|\int_s^t [\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))\Delta\tau\right|$$

ifadesi elde edilir. $\varepsilon > 0$ olsun. Burada U, t'nin komşuluğudur. Böylece en son eşitsizliğin sağ tarafı $\varepsilon|t-s|$ den küçük olur.

$\sigma(t) = t$ ve $p \in C_{rd}$ olduğundan,

$\lim_{\tau \to t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) = \xi_0(p(t))$

olur. Bu U_1 in t komşuluğunu gösterir.

$$\left|\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) - \xi_0(p(t))\right| < \frac{\varepsilon}{3\left|e_p(t, t_0)\right|} \qquad \forall \tau \in U_1$$

$s \in U_1$ olduğunda,

$$\left|e_p(t,t_0)\right|.\left|\int_s^t \left[\xi_{\mu(\tau)}\left(p(\tau)\right)-\xi_0(p(t))\right]\Delta\tau\right| < \frac{\varepsilon}{3}|t-s| \qquad (5.14)$$

Daha sonra L'Hospital kuralı ile

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-z-e^{-z}}{z}=0$$

Elde edilir. Eğer s∈ U_2 ise t nin U_2 komşuluğu vardır

$$\left|\frac{1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\left(p(\tau)\right)\Delta\tau - e_p(s,t)}{\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau}\right| < \varepsilon^*$$

$$\varepsilon^* = min\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+3\left|p(t)e_p(t,t_0)\right|}\right\}$$

$s \in U = U_1 \cap U_2$ Eş. 5.14 ü kullanarak

$$\left|e_p(t,t_0)\right|.\left|1-\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\left(p(\tau)\right)\Delta\tau - e_p(s,t)\right| < \left|e_p(t,t_0)\right|\varepsilon^*\left|\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right|$$

$$\leq \left|e_p(t,t_0)\right|.\varepsilon^*\left\{\left|\int_s^t \left[\xi_{\mu(\tau)}\left(p(\tau)\right)-\xi_0(p(t))\right]\Delta\tau\right| + |p(t)||t-s|\right\}$$

$$\leq \left|e_p(t,t_0)\right|.\left|\int_s^t \left[\xi_{\mu(\tau)}\left(p(\tau)\right)-\xi_0(p(t))\right]\Delta\tau\right| + \left|e_p(t,t_0)\right|\varepsilon^*|p(t)||t-s|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3}|t-s| + \left|e_p(t,t_0)\right|\varepsilon^*|p(t)||t-s|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3}|t-s| + \frac{\varepsilon}{3}|t-s|$$

$= \frac{2\varepsilon}{3}|t-s|$ bulunur.

5.9. Teorem

Eğer Eş.5.12 regresif ise Eş.5.13'ün tek çözümü $e_p(.,t_0)$ olur[2].

İspat:

y Eş.5.13'ün çözümü olsun. Teorem 3.2 ile

$$\left(\frac{y}{e_p(.,t_0)}\right)^{\Delta}(t) = \frac{y^{\Delta}(t)e_p(t,t_0) - y(t)e_p^{\Delta}(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)}$$

$$= \frac{p(t)y(t)e_p(t,t_0) - y(t)p(t)e_p(t,t_0)}{e_p(t,t_0)e_p(\sigma(t),t_0)} = 0$$

Elde edilir. Böylece

$$\frac{y(t)}{e_p(t,t_0)} \equiv \frac{y(t_0)}{e_p(t_0,t_0)} = \frac{1}{1} = 1$$

ve

$y = e_p(.,t_0)$

olur.

5.10. Teorem

$p, q \in \mathcal{R}$ ise

(i) $e_0(t,s) \equiv 1$ ve $e_p(t,t) \equiv 1$

(ii) $e_p(\sigma(t),s) = \big(1 + \mu(t)p(t)\big)e_p(t,s)$

(iii) $\frac{1}{e_p(t,s)} = e_{\ominus p}(t,s)$

(iv) $e_p(t,s) = \frac{1}{e_p(s,t)} = e_{\ominus p}(s,t)$

(v) $e_p(t,s)e_p(s,r) = e_p(t,r)$

(vii) $e_p(t,s)e_q(t,s) = e_{p\oplus q}(t,s)$

(vii) $\frac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} = e_{p\ominus q}(t,s)$

(viii) $\left(\frac{1}{e_p(.,s)}\right)^{\Delta} = -\frac{p(t)}{e_p^{\sigma}(.,s)}$ [2]

olur.

5.11. Teorem

$p \in \mathcal{R}$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun.

(i) Eğer $\mathbb{T}^K$ üzerinde $1+\mu(t)p(t) > 0$ ise her $t \in \mathbb{T}$ için $e_p(t,t_0) > 0$ olur.

(ii) Eğer $\mathbb{T}^K$ üzerinde $1+\mu(t)p(t) < 0$ ise her $t \in \mathbb{T}$ için $e_p(t,t_0) = \alpha(t,t_0)(-1)^{n_t}$

olur.

Burada

$$\alpha(t,t_0) := exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{log|1+\mu(\tau)p(\tau)|}{\mu(\tau)}\Delta\tau\right) > 0$$

ve

$$n_t = \begin{cases} |[t_0,t)| & eğer \quad t \geq t_0 \\ |[t,t_0)| & eğer \quad t < t_0 \end{cases}$$

olacaktır[2].

5.15. Tanım

$\mathcal{R}'$nin tüm pozitif regresif elementlerinin kümesi $\mathcal{R}^+$

$\mathcal{R}^+ = \mathcal{R}^+(\mathbb{T},\mathbb{R}) = \{p \in \mathcal{R}: 1+\mu(t)p(t) > 0 \; her \; t \in \mathbb{T} \; için\}$

ile tanımlanır[2].

5.2. Yardımcı Teorem

$\mathcal{R}^+$ $\mathcal{R}'$nin bir alt grubudur[2].

İspat:

$\mathcal{R}^+ \subset \mathcal{R}$ ve $0 \in \mathcal{R}^+$ olduğu açıktır.

Buradaki 0 bir her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) \equiv 0$ olacak şekilde bir fonksiyondur.

$p, q \in \mathcal{R}^+$ olsun. $\mathbb{T}$ üzerinde

$1+\mu p > 0 \; ve \; 1+\mu q > 0$ olduğundan,

$1+\mu(p \oplus q) = (1+\mu p)(1+\mu q) > 0$ olur.

Dolayısıyla $p \oplus q \in \mathcal{R}^+$ dır.

Şimdi $p \in \mathcal{R}^+$ olsun. $\mathbb{T}$ üzerinde $1+\mu p > 0$ dir.

Böylece $\mathbb{T}$ üzerinde

$$1+\mu(\ominus p) = 1 - \frac{\mu p}{1+\mu p} = \frac{1}{1+\mu p} > 0$$

olduğundan $\ominus p \in \mathcal{R}^+$ olur.

Bu hesaplamalar $\mathcal{R}^+$ nın $\mathcal{R}'$nin bir alt grubu olduğunu gösterir.

5.12. Teorem (Üstel fonksiyonun işareti).

$f \in \mathcal{R}$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. O zaman,

(i) $f \in \mathcal{R}^+$ ise, her $t \in \mathbb{T}$ için $e_f(t, t_0) > 0$ olur.

(ii) $1+\mu(t)\ f(t)<0$ ifadesini sağlayan $t \in \mathbb{T}^K$ noktaları için

$e_f(t, t_0)e_f(\sigma(t)), t_0) < 0$ olur[2].

6. ZAMAN SKALASI LOGARİTMASI

6.1. Skaler Durum

Zaman skalası logaritması gelişimi uzun bir süredir açık bir problemdir. Bu alandaki bazı araştırmacıların olasılıkları kısaca göz önünde bulundurmalarına rağmen, definitif logaritma ve onun seçimi ile ilgili çok az şey ortaya konuldu.

$\mathbb{T}=\mathbb{R}$ üzerindeki adi logaritmayı göz önüne aldığımızda, ele almaya değer ilk mantıklı soru, zaman skalası logaritmasının hangi istenilir özellikleri almasıdır. Özellikle, biz logaritmanın bilinen cebirsel özelliklerini mi veya bilinen kalkülüs özelliklerini mi korumasını isteyip istemediğimize karar vermeliyiz. Zaman skalası üzerindeki kalkulüsün doğal yapısından dolayı her iki özelliğinde korunabilmesine pek olanak yoktur. Amacımız bu çalışmada A(t) matrisi için $e_A(t,s)=B$ matris eşitliğini çözmek ve cebirsel logaritma özelliklerini koruyan logaritma geliştirmeye çalışmak olacaktır. Diğer bir deyişle üstelin tersi olarak rol oynayan logaritma geliştirmek olacaktır.

Elbette ki, özellikle ters ile ne demek isteniyor bunu belirlemeliyiz. Ne de olsa $f(t)=e_A(t,s)$ fonksiyonunun genellikle örten olmasına gerek yoktur. Buna ek olarak bizim motivasyonumuz yukarıda bahsedildiği gibi üsteli bir fonksiyon almaktansa $\mathcal{R}$ ($\mathbb{T}$,$\mathbb{R}$) üzerinde rol oynayan operatör olarak ele almamız avantajlı olacaktır. Yani p $\in \mathcal{R}$ ($\mathbb{T}$,$\mathbb{R}$) için biz F:$\mathcal{R}$ ($\mathbb{T}$,$\mathbb{R}$) $\longrightarrow C_n^1$ ($\mathbb{T}$,$\mathbb{R}$) operatörü(doğrusal olmayan) tanımlarız. (Burada $\mathcal{R}$ ($\mathbb{T}$,$\mathbb{R}$) $\oplus$ altında regresif olarak sağ yoğun sürekli fonksiyonların kümesi ve C_n^1 ($\mathbb{T}$,$\mathbb{R}$)' da sıfırdan farklı delta diferansiyellenebilen fonksiyonların kolleksiyonudur.) Üstelik bu terimler ışığında düşünmek bize bu operatörün sözde tersini araştırma olanağı sağlar. Bütün bunların ışığında aşağıdakiler ortaya çıkar.

6.1. Tanım

$g:\mathbb{T}\longrightarrow\mathbb{R}$ bir diferansiyellenebilen sıfırdan farklı fonksiyon için, g'nin logaritma tanımı (Gerçekte, g üzerinde bir doğrusal olmayan operatör), $\log_{\mathbb{T}} g(t)$

$\log_{\mathbb{T}} g(t)=\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)}$ ile tanımlanır[5]. (6.1)

Logaritmanın bu tanımı aslında bize üstel bir sol tersini

$$\log_{\mathbb{T}} e_p\,(t,s) = \frac{(e_p\,(t,s))^{\Delta}}{e_p\,(t,s)} = \frac{p\,e_p\,(t,s)}{e_p\,(t,s)} = p(t)$$

olarak verir.

Bizim logaritma tanımımız C_n^1 ($\mathbb{T}$,$\mathbb{R}$) üzerinde doğrusal olmayan operatör meydana getirir. Aşağıdaki teoremin gösterdiği gibi logaritma bir bakımdan sağ ters olarak rol oynar. Böylece yukarıda iddia edildiği gibi üstel için biz aslında yalancı ters meydana getirdik.

6.1. Teorem

Eğer f(t) bir sıfırdan farklı diferansiyellenebilen fonksiyon ise

$f(s)=f_s$ olmak üzere

$$e_{\log_{\mathbb{T}} f}(t,s) = \frac{1}{f_s} f(t) \qquad (6.2)$$

olur [5].

İspat.

$g(t) = \log_{\mathbb{T}} f(t) = \frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)}$ ve $f(s) = f_s$ olsun.

Bu iki eşitlik ODE(Adi Dinamik Denklem) başlangıç koşulu ile $f(t)$ içinde yazılabilir. IVP(Başlangıç Değer Problemi) $f^{\Delta} = gf,\quad f(s) = f_s$ 'nin çözümü;

$$f(t) = f_s e_g(t,s) = f_s e_{\frac{f^{\Delta}}{f}}(t,s) = f_s e_{\log_{\mathbb{T}} f}(t,s)$$

olur. Böylece teorem ispatlanır.

6.2. Teorem

Sıfırdan farklı, diferansiyellenebilir

$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$\log_{\mathbb{T}} f(t)g(t) = \log_{\mathbb{T}} f(t) \oplus \log_{\mathbb{T}} g(t)$

ve

$$\log_{\mathbb{T}} \frac{f(t)}{g(t)} = \log_{\mathbb{T}} f(t) \ominus \log_{\mathbb{T}} g(t)$$

olur[5].

İspat.

İlk iddia şöyledir;

$$\log_{\mathbb{T}} f(t)g(t) = \frac{(f(t)g(t))^{\Delta}}{f(t)g(t)} = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) + f\big(\sigma(t)\big)g^{\Delta}(t)}{f(t)g(t)}$$

$$= \frac{f^{\Delta}(t)g(t) + \Big(f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t)\Big)g^{\Delta}(t)}{f(t)g(t)}$$

$$= \frac{f^{\Delta}(t)g(t) + f(t)g^{\Delta}(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t)g^{\Delta}(t)}{f(t)g(t)}$$

$$= \frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)} + \frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)} + \mu(t)\frac{f^{\Delta}(t)g^{\Delta}(t)}{f(t)g(t)} = \log_{\mathbb{T}} f(t) \oplus \log_{\mathbb{T}} g(t)$$

İkinci iddia;

$$\log_{\mathbb{T}} \frac{1}{g(t)} = \frac{(\frac{1}{g(t)})^{\Delta}}{\frac{1}{g(t)}} = -\frac{g^{\Delta}(t)}{g(\sigma(t))}$$

$$= -\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t) + \mu(t)g^{\Delta}(t)} = -\frac{\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)}}{1 + \mu(t)\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)}} = \ominus \log_{\mathbb{T}} g(t)$$

Böylece ikinci iddia birinciden sonra gelir, oran $\frac{f(t)}{g(t)}$'yi $f(t)$ ve $\frac{1}{g(t)}$ fonksiyonlarının çarpımı olarak düşündük.

Bir önceki teoremi ispatlamak için neden cebirsel argüman kullanılmadığı merak edilebilir. Fakat , $(\mathcal{R}\ (\mathbb{T},\mathbb{R}),\oplus)\ ve\ \ (C_n^1\ (\mathbb{T},\mathbb{R}),\cdot)$ her ikisi de bir gruptur. Yinede unutmamalıyız ki yukarıda tanımlanan operatör F için F'nin görüntü kümesi $C_n^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$ nin codomaini değildir, fakat bu yerin bir alt sınıfıdır. Böylece

$C_n^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$ kümesi fonksiyonların bir alt grubuna kısıtlandığı zaman F: $\mathcal{R}$ ($\mathbb{T}$,$\mathbb{R}$) $\longrightarrow$ C_n^1 ($\mathbb{T}$,$\mathbb{R}$), $F\big(p(t)\big) = e_p(t,s)$ ve $G: C_n^1 \longrightarrow \mathbb{R}(\mathbb{T},\mathbb{R}), G\big(p(t)\big) = \log_{\mathbb{T}} p(t)$ operatörleri grup izomorfizmi olacaktır. Belki önceki teoremin kanıtı $C_n^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$' de ki fonksiyonların tüm alt sınıfı için geçerlidir ve bu daha genel bir sonuçtur. (Aslında bu gerçeğin ışığında G'nin domainini gereksiz yere sınırlamaya gerek yoktur.)

Operatörü bu şekilde tanımladığımız için, eğer g ve g^{Δ} reel değerli ise logaritma reel değerlidir, eğer $t \in \mathbb{T}$ için $g(t) = 0$ olursa logaritma tanımsızdır ve $g(t)$ iki kez diferansiyellenebilir ise logaritma diferansiyellenebilirdir. Sıfırdan farklı her sabit fonksiyonun logaritması sıfırdır, dolayısıyla birçok fonksiyon aynı logaritmaya sahip olacağından logaritma fonksiyonu birebir değildir. Bu da bize logaritmanın fonksiyonların sabit çarpanları arasında ayrım göstermediğini bildirir. Yani $f(t)$ ve $g(t) = cf(t)$ fonksiyonları aynı logaritmaya sahiptir.

$\log_{\mathbb{T}} cf(t) = \log_{\mathbb{T}} c \oplus \log_{\mathbb{T}} f(t) = 0 \oplus \log_{\mathbb{T}} f(t) = \log_{\mathbb{T}} f(t)$

Matris durumunu incelemeden önce, logaritmanın gerçekten ne temsil ettiğini düşünelim. Bu soruya cevap vermek için $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 'de logaritmanın ne olduğunu belirleyelim. Bu zaman skalası üzerinde

$\log_{\mathbb{T}} g(t) = \frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{d}{dt} ln|g(t)|$,

olduğundan zaman skalası logaritması $\mathbb{R}$'deki logaritmanın rolünü oynamaz, fakat onun türevidir.

6.2. Matris Durum

$A(t)$ matrisi için $e_A(t,s) = B$ denklemini çözmek için matrise odaklanalım. [2] ve [3] numaralı kaynaklarda tanımlandığı gibi $e_A\,(t,s)$ matrisi

$X^{\Delta} = A(t)X\,, X(s) = I$ (6.3)

lineer diferansiyel denklem sistemini çözer. Burada A(t) $n \times n$ tipinde sürekli regresif bir matristir.

Üstel operatörün tersini tanımlamak için aşağıdaki tanıma bakalım.

6.2. Tanım

Diferansiyellenebilir ve tersinir olan(invertible) B(t) için, B(t)'nin logaritmasını

$\log_{\mathbb{T}} B(t) = B^{\Delta}(t).B^{-1}\,(t)$ (6.4)

ile tanımlanır[5].

Tanımdan görmek kolaydır ki matris logaritması $\mathbb{M}_{\mathrm{m}}\big(C_n^1(\mathbb{T},\mathbb{R})\big)$ için doğrusal olmayan bir operatördür, $C_n^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$ içinde m×m diferansiyellenebilir ve tersi alınabilir(invertible) matrislerin sınıfıdır. Üstel matris tanımımızdan,

$\log_{\mathbb{T}} e_A\,(t,s) = e_A^{\Delta}(t,s)e_A^{-1}(t,s) = A(t)$

olduğunu görürüz.

Böylece logaritma sol terste rol oynamaz. Sağ terse gelince o da aşağıda ki gibidir.

6.3. Teorem

B(t) diferansiyellenebilir ve tersinir bir matris(invertible), B(s)=B_s olsun. Eğer B_s $\log_{\mathbb{T}} B(t)$ ise

$e_{log_{\mathbb{T}}}$B(t,s)=$B_s^{-1}B(t)$

olur[5].

İspat.

C(t)=$\log_{\mathbb{T}} B(t) = B^{\Delta}\,(t)B^{-1}(t)$ ve $B(s) = B_s$ olsun. Önceden olduğu gibi, bu iki denklem B(t) de birinci basamaktan bir lineer ODE sistemi olarak yazılabilir.

IVP de

$B^{\Delta} = CB, B(s) = B_s$

olur.

Bu IVP' nin çözümü;

$B(t) = B_s e_C(t,s) = B_s e_{B\Delta B^{-1}}(t,s) = B_s e_{\log_{\mathbb{T}} B}(t,s)$

olur.

Böylece iddia önceden olduğu gibi gösterilmiş olur.

6.4. Teorem

A(t) ve B(t) diferansiyellenebilir ve tersinir matrisler olsun. Eğer A(t), B(t) ve$B^{\Delta}(t)$ ile değişimli(commuttative) iseler ;

$\log_{\mathbb{T}} A(t)B(t) = \log_{\mathbb{T}} A(t) \oplus \log_{\mathbb{T}} B(t)$

ve biz eğer $B(\sigma(t))$ ve $B^{\Delta}(t)$ ile değişebileceğini düşünürsek,

$\log_{\mathbb{T}} A(t)B^{-1}(t) = \log_{\mathbb{T}} A(t) \ominus \log_{\mathbb{T}} B(t)$

elde ederiz[5].

İspat:

A(t) ile B(t) ve $B^{\Delta}(t)$'nin komütatiflik varsayımından ilk eşitlik aşağıda ki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\log_{\mathbb{T}} A(t)B(t) &= \big(A(t)B(t)\big)^{\Delta}\,(A(t)B(t))^{-1} \\
&= \Big(A^{\Delta}(t)B\big(\sigma(t)\big) + A(t)B^{\Delta}(t)\Big)\,(B^{-1}(t)A^{-1}(t)) \\
&= A^{\Delta}(t)\Big(B(t) + \mu(t)B^{\Delta}(t)\Big)\big(B^{-1}(t)A^{-1}(t)\big) + B^{\Delta}(t)B^{-1}(t) \\
&= A^{\Delta}(t)A^{-1}(t) + B^{\Delta}(t)B^{-1}(t) + \mu(t)A^{\Delta}(t)A(t)B^{\Delta}(t)B^{-1}(t) \\
&= \log_{\mathbb{T}} A(t) \oplus \log_{\mathbb{T}} B(t).
\end{aligned}$$

İkinci eşitlik ise birinci eşitlik yardımıyla;

$$\begin{aligned}
\log_{\mathbb{T}} A(t)B^{-1}(t) &= \log_{\mathbb{T}} A(t) \oplus \log_{\mathbb{T}} B^{-1}(t) \\
&= \log_{\mathbb{T}} A(t) \oplus ((B^{-1}(t))^{\Delta}B(t)) \\
&= \log_{\mathbb{T}} A(t) \oplus (-(B\big(\sigma(t)\big))^{-1}B^{\Delta}\,(t)) \\
&= \log_{\mathbb{T}} A(t) \oplus \Big(-B^{\Delta}(t)\Big(B(t) + \mu(t)B^{\Delta}(t)\Big)^{-1}\Big) \\
&= \log_{\mathbb{T}} A(t) \oplus \Big(-B^{\Delta}(t)B^{-1}(t)\Big)\,(I + \mu(t)B^{\Delta}(t)B^{-1}(t))^{-1} \\
&= \log_{\mathbb{T}} A(t) \ominus \Big(B^{\Delta}(t)B^{-1}(t)\Big) = \log_{\mathbb{T}} A(t) \ominus \log_{\mathbb{T}} B(t)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Skaler durumda doğru olduğu gibi, cebirsel argümanları kullanabileceğimiz mevcut matrisin bileşenleri olan fonksiyonların sınıfını kısıtlayabilirdik. Fakat böyle yaparak sonucun genelliğinin bir kısmını kaybedecektik.

Matris logaritmasının henüz bir matris ile sabitin çarpımı için incelenmediğini belirtelim. Bu gösterir ki sabit matris logaritması Teorem 6.3 den ve
$\log_{\mathbb{T}} \lambda B(t) = \log_{\mathbb{T}} \lambda I B(t) = \log_{\mathbb{T}} \lambda I \oplus \log_{\mathbb{T}} B(t) = 0 \oplus \log_{\mathbb{T}} B(t) = \log_{\mathbb{T}} B(t)$
olmasından dolayı sıfırdır.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\log_{\mathbb{T}} B(t)$ sıradan matris logaritması değil, onun türevidir. Yani,
$\log_{\mathbb{T}} B(t) = B^{\Delta}(t)B^{-1}(t) = B'(t)B^{-1}(t) = \frac{d}{dt}\log_{\mathbb{T}} B(t)$,
ile son denklem $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ için, eğer A(t) ve $\int_s^t A(\tau)d\tau$ yer değiştirirse(commute), Eş.6.3 denkleminin çözümü $X(t) = e^{\int_s^t A(\tau)d\tau}$ olur.
Şimdi matris logaritmasının bir başka hoş cebirsel yapısını vereceğiz. Yani, benzeşik dönüşümlerin muhafaza etme yeteneğini.

6.5. Teorem
Eğer $B(t) = PC(t)P^{-1}$ ile $P\ ve\ P^{-1}$ sabit matrisler ise;
$\log_{\mathbb{T}} B(t) = P \log_{\mathbb{T}} C(t)P^{-1}$ olur[5].

İspat:

$$\log_{\mathbb{T}} B(t) = \log_{\mathbb{T}} PC\,(t)P^{-1} = (PC(t)P^{-1})^{\Delta}(PC(t)P^{-1})^{-1}$$
$$= (PC^{\Delta}(t)P^{-1})(PC^{-1}(t)P^{-1})$$
$$= PC^{\Delta}(t)C^{-1}(t)P^{-1} = P \log_{\mathbb{T}} C(t)P^{-1}.$$

Birkaç örneğe bakmadan önce önemli diğer bir sonuca da değinmek gerekir. Direk matris logaritmasının tanımından sonra gelen diagonal matris logaritması, köşegende her bir fonksiyonun logaritmasının matrisi olarak tanımlanır. Bu gerçekten hareketle Teorem 2.3 ile birleşince hesaplanabilen faydalı bir araç oluşturur.

6.1. Örnek

B=$e_A(t,s)=\begin{bmatrix} \frac{3}{4}e_1(t,0)+\frac{1}{4}e_5(t,0) & -\frac{1}{4}e_1(t,0)+\frac{1}{4}e_5(t,0) \\ -\frac{3}{4}e_1(t,0)+\frac{3}{4}e_5(t,0) & \frac{1}{4}e_1(t,0)+\frac{3}{4}e_5(t,0) \end{bmatrix}$matrisini

düşünelim.

B'nin özdeğerleri $\lambda_1(t)=e_1(t,0)$ ve $\lambda_2(t)=e_5(t,0)$

özvektörleri $v_1=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ ve $v_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\1\end{bmatrix}$ dır.

Bu durumda,

A=$\log_{\mathbb{T}} B=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{3}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\log_{\mathbb{T}} e_1(t,0) & 0\\ 0 & \log_{\mathbb{T}} e_5(t,0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{3}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

olarak bulunur.

6.2. Örnek

B $= e_A(t,0)$

$$=\begin{bmatrix} e_{-3}(t,0)(cos_{\frac{2}{1-3\mu}}(t,0)+sin_{\frac{2}{1-3\mu}}(t,0)) & 2e_{-3}(t,0)sin_{\frac{2}{1-3\mu}}(t,0) \\ -e_{-3}(t,0)sin_{\frac{2}{1-3\mu}}(t,0) & e_{-3}(t,0)(cos_{\frac{2}{1-3\mu}}(t,0)-sin_{\frac{2}{1-3\mu}}(t,0)) \end{bmatrix}$$

B'nin özdeğerleri $\lambda_1(t)=e_{-3}(t,0)(cos_{\frac{2}{1-3\mu}}(t,0)+i\ sin_{\frac{2}{1-3\mu}}(t,0)$

$$\lambda_2(t)=e_{-3}(t,0)(cos_{\frac{2}{1-3\mu}}(t,0)-i\ sin_{\frac{2}{1-3\mu}}(t,0)$$

özvektörleri $v_1=\begin{bmatrix}-1-i\\1\end{bmatrix}$ ve $v_2=\begin{bmatrix}-1+i\\1\end{bmatrix}$ dır.

Bu durumda

$$A =$$

$$\log_{\mathbb{T}} B = \begin{bmatrix} \log_{\mathbb{T}}(e_{-3}(t,0)e_{\frac{2i}{1-3\mu}}(t,0)) & 0 \\ 0 & \log_{\mathbb{T}}(e_{-3}(t,0)e_{\frac{-2i}{1-3\mu}}(t,0)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-i & -1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \oplus \frac{2i}{1-3\mu} & 0 \\ 0 & -3 \oplus \frac{-2i}{1-3\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-i & -1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3+2i & 0 \\ 0 & -3-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

KAYNAKLAR

[1] Agarwal,R.P., Bohner,M., O'Regan,D., Peterson,A.,"Dynamic equations on time scales", ***A survey, J. Comput. Appl. Math***., 4:1-26(2002).

[2] Bohner, M. and Peterson, A., "Dynamic equations on time scales: An introduction with applications", ***Birkhäuse***r Boston, 1-78 (2001).

[3] Bohner, M. ve Peterson, A., "Advances in dynamic equations on time scales", ***Birkhäuse***r, Boston, 1-80 (2003).

[4] Hilger, S.,"Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten", ***Ph.D. Thesis***, Universitat Würzburg, 3-28 (1998)

[5] Jackson, B. "The Time Scale Logarithm" , ***Department of Mathematics,Baylor University,*** USA, 1-7 (2007)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BİÇİCİOĞLU, Hülya

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 02.04.1976 Daday

Medeni hali : Evli

Telefon : 0(366) 215 21 81

e-mail : hulyabicicioglu@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Balıkesir Ün./ Necatibey Eğitim Fak./ Matematik Öğretmenliği	1997
Lise	Göl Anadolu Öğretmen Lisesi/Kastamonu	1993

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Santranç, Bilgisayar teknolojileri