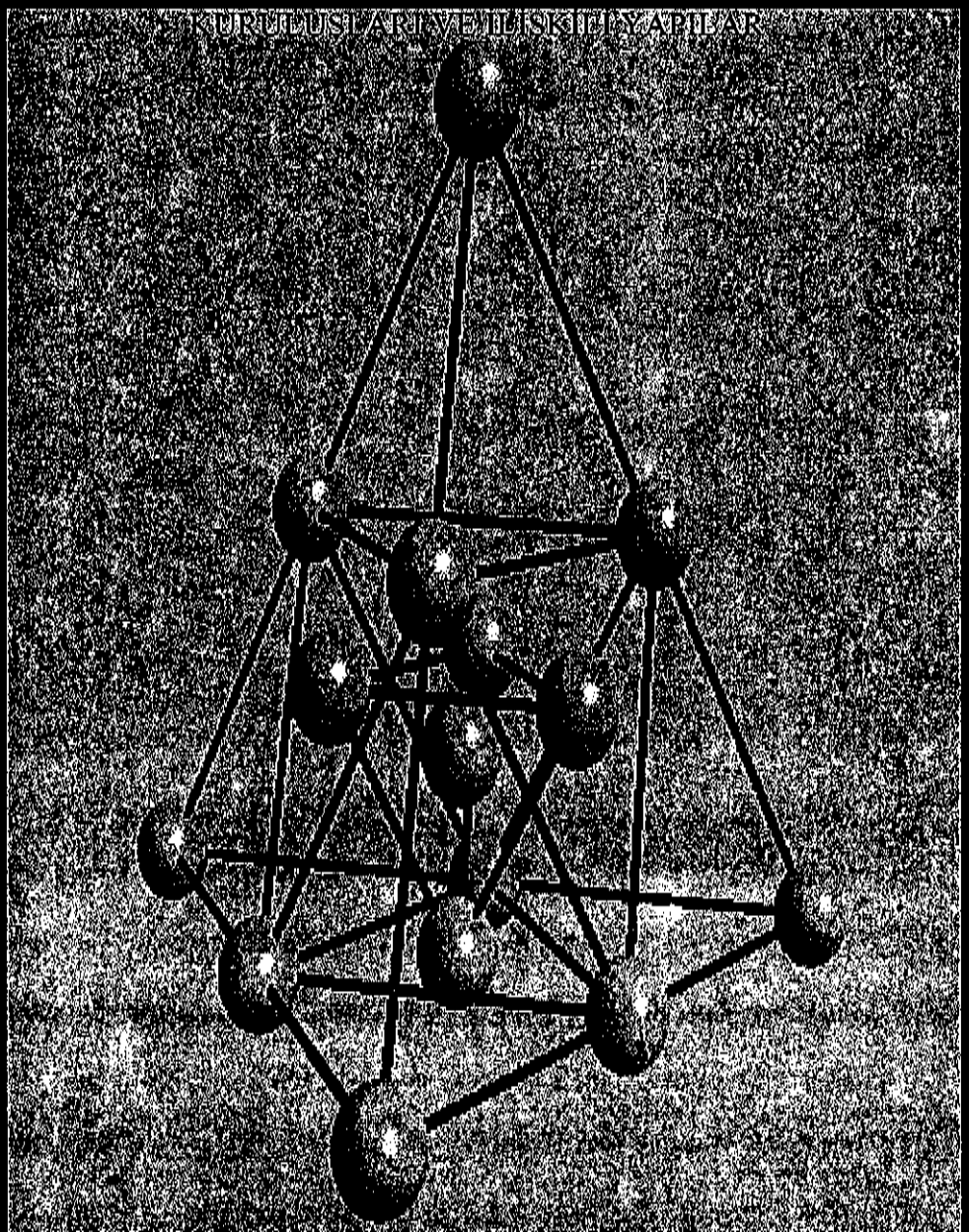
ÇELİK KUBBE SİSTEMLERİ VE UZAY ÇELİK YAPILAR



Prof.Dr. Hülya BAYRAK Yrd.Doç.Dr. Fikri Gökpınar

Sevgili Eşim Ali BAYRAK'a

H.BAYRAK

Sevgili Eşim Esra Yiğit GÖKPINAR'a

F.GÖKPINAR

ÖNSÖZ

Kombinatorik (combinatoric), matematiğin,belirlenmiş kesin kurallara göre nesnelerin ayrılması ve düzenlenmesi problemleriyle ilgili bir koludur. "kombinatöryel tasarım ", verilen sonlu bir kümeden belirli özellikleri olan alt kümeler topluluğunun seçilmesinin bir yoludur ve 1782' de Euler, 1847' de Kirkman ve 1853' de Steiner'ın problemlerine kadar uzanır. Bu problemlere ilişkin çok sayıda makale olmasına rağmen, 19-20. yüzyıllarda kombinatoriyel konfigürasyonların, deney tasarımlarının istatistiksel teoride yararlı olduğu fark edilene kadar, sistematik bir çalışma bulunamamıştır. Tasarımlar, zirai ve diğer deneyleri planlamada ve analiz etmede yararlıdır. Bu nedenle istatistikçiler bu konuya ilgi duymuşlar ve bu konuyla ilgili önemli makaleler yazmışlardır.

Tasarım teorisi lineer cebir, grup, halka, cebir,sayı teorisini araç olarak kullanır. Tasarım teorisinin temel içeriği basit olmasına rağmen, tasarımları kurmakta kullanılan matematik çeşitli ve zengindir.

Tasarım teorisinin temel sorusu verilen parametrelerle tasarsımın var olup olmadığıdır. Bununla ilgili var olma sonuçları kadar var olmama sonuçları da mevcuttur. Bugün çalışılan tasarımların birçok türü temel olarak 18 ve 19.ncu yüzyıldaki matematiksel bulmacalar ve zeka oyunlarına dayanmaktadır. Matematiksel bir disiplin olarak çalışılmaya başlanması 20.nci yüzyılın başlarına dayanır.

Sonlu projektif ve afin geometriler eğer boyut sayısı üç yada daha fazla ise özel tasarımlar gibi yorumlanabilir. O nedenle kombinatöryel yapıların analizi için olan metodlar bu geometrileri çalışmak için de kullanılabilir. Böyle bir metot, isabet matrislerinin kullanımıdır. İsabet matrisleri ve onların genelleştirmelerinin, tasarımlar ve daha genel yapılar üzerine olan çeşitli araştırmalarda zorunlu olduğu ispatlanmıştır. Sonlu geometriler, uygulamaların çeşitli alanlarında bulunabilirler. Ayrıca istatistikte de geniş bir uygulama alanı görülür.

Bu kitapta temel kombinatorik tasarımlara yer verilmeye çalışılmıştır. Burada incelenecek tasarımlar t-tasarımlar, tamamlanmamış blok tasarımlar, ikişerli dengeli tasarımlar, Latis Tasarımlar, Latin kareler ve türevleri, Ortogonal Dizimler ve bunlarla ilişkili olarak Sonlu Geometri türleri, Grafik teorisi ve kodlar şeklindedir. Kitabın daha iyi anlaşılabilmesi için temel geometri ve istatistik bilgisine sahip olmak gerekmektedir. Hazırlanan kitabın, kombinatorik tasarımlarda çalışacak araştırmacılara yol gösterici nitelikte olacağını umut ediyoruz.

Prof.Dr. Hülya BAYRAK Yrd.Doç.Dr. Fikri GÖKPINAR

01.08.2008

İÇİNDEKİLER

sayfa

TEŞEKKÜR i

ÖNSÖZ ii

İÇİNDEKİLER iv

1. *t*-TASARIMLARI 1

1.1. *t*-Tasarımının Özellikleri 9

1.2. t-Tasarımı ile İlgili Yapılar 16

1.2.1. Tümleyen t- Tasarımı 16

1.2.2. Dual t- Tasarımı 18

1.2.3. Keyfi t-Tasarımı 20

1.2.4. Simetrik t-Tasarımı 23

1.2.5. Dar t- Tasarımı 24

1.2.6. Türetilmiş t-Tasarımı 24

1.2.7. Artık t-Tasarımı 26

1.3. Paskal Üçgeni 29

1.4. Notlar 34

1.5. Alıştırmalar 35

1.6. Kaynaklar 37

2. DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARI 39

2.1. Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımlarının Tanım ve Özellikleri 39

2.1.1. Fisher eşitsizliğinin genelleştirmesi 46

2.1.2. Fark Kümeleri 50

2.2. Simetrik Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları 54

2.3. İzomorfizm ve Otomorfizm 60

sayfa

2.4. Bağlantılı Tasarımlar 67

2.5. Yeniden Çözülebilir Tasarımlar 69

2.6. Steiner Sistemler 81

2.6.1. Steiner üçlü sistemler 83
2.6.2 Steiner dörtlü sistemler 94

2.7. Hadamard Matrisleri ve Hadamard Tasarımları 95

2.7.1. Hadamard Matrislerinin Bazı Kuruluş Metotları 97
2.7.2. Bent Fonksiyonu Hadamard Matrisi ve Fark kümeleri 105
2.7.3. Hadamard Tasarımlar 109

2.8. Bazı t-Tasarımlarının Elde Edilişi 111

2.9. Notlar 117

2.10. Alıştırmalar 118

2.11. Kaynaklar 119

3. KISMİ DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARI 122

3.1. İkili Dengeli Tasarımlar 133

3.2. Transversal Tasarım 136

3.3. Notlar 152

3.4. Alıştırmalar 153

3.5. Kaynaklar 154

4. SONLU GEOMETRİLER 156

4.1. Afin Düzlemlerin Yeniden Çözülebilirliği 179

sayfa

4.2. Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımlarının Dualleri 181

4.3. PG(3,s) ve KDTBT 185

4.4. Kalıntı Tasarımlar, İkidüzlem ve Dual Tasarımları 187

4.5. KDTBT'de Geometrik Gösterimler 188

4.6. Kısmi Geometri 193

4.7. Notlar 199

4.8. Alıştırmalar 200

4.9. Kaynaklar 201

5. GRAFİK TEORİSİ 203

5.1. Genel Bilgi 203

5.2. İki-Kısımlı (Bipartite) Grafik 208

5.3. Doğru Grafiği (Line Graph) 210

5.4. İki-Grafik 213

5.5. Güçlü Düzenli Grafik (GDG) 213

5.5.1. Gewirtz Grafiği 220

5.5.2. Clebsch Grafik 221

5.5.3. Tam Grafik 222

5.5.4. Üçgensel(Triangular) Grafik 222

5.5.5. Devir Grafiği 223

5.5.6. Ladder Grafik 224

5.5.7. Kokteyl Parti Grafiği 225

5.5.8. Paley Grafik 226

5.6. Moore Grafiği 227

5.7. Net 228

sayfa

5.8. Grafik Ayrıştırmaları ve Tasarımları....228

5.9. Grafiksel Tasarımlar....229

5.9.1. ikişerli Dengeli Tasarımlar....230

5.10. Bigrafiksel Tasarımlar....232

5.11. Kısmi Geometri Grafiği....233

5.12. Shrikhande Grafiği....238

5.13. Chang Grafiği....239

5.14. Steiner üçlü sistemler ve Güçlü Düzenli Grafik....239

5.15. Notlar....241

5.16. Alıştırmalar....242

5.17. Kaynaklar....243

6. LATİN KARE, YOUDEN KARE, LATİS TASARIMI....246

6.1. Latin Kare....246

6.2. Ortogonal Latin Kare Tam Setleri (MOLS)....252

6.2.1. Ortogonal Latin Karelerin Kuruluşu....252

6.2.2. Ortogonal Latin Kare Tam Setleri ve Geometrik Yapıları....256

6.3. Latin Kareler Kullanılarak Afin Çözülebilir Tasarımların Oluşturulması....259

6.4. Yarı Latin Kare....261

6.5. Trojen Kare....263

6.6. Yarı Tamamlanmış Latin Kare....264

6.7. İzotopik Latin Kareler....265

Sayfa

6.8. İkişerli Yaklaşık Ortogonal Latin Kare Seti 266

6.9. Youden Kare 267

6.10. Latis Tasarımları 269

6.10.1. Dikdörtgensel Latisler 276

6.10.2. Latinleştirilmiş Dikdörtgensel Latis Tasarımları 276

6.11. Notlar 287

6.12.Alıştırmalar 288

6.13. Kaynaklar 289

7. ORTOGONAL DİZİMLER 293

7.1. Ortogonal Dizimlerde Kısıtların Maksimum Sayısı 295

7.2. Ortogonal Dizimlerin Kuruluşunda Projektif Geometrinin Kullanımı 296

7.3. Ortogonal Diizmlerin Kuruluşunda Hadamard Matrisleri 298

7.4. Ortogonal Latin Kare Setleri ve İki Kuvvetli, Birim İndeksli Birleşik Ortogonal Dizimler 301

7.5. Birim İndeksli Ortogonal Dizimin Kuruluşu ve Polinomlar 302

7.6. Latis Tasarımı ve Ortogonal Dizimler 303

7.7. Notlar 304

7.8. Alıştırmalar 305

7.9. Kaynaklar 306

8. KODLAMA TEORİSİ 308

sayfa

8.1. Temel Tanımlar ve Bazı özel kodlar 308

8.1.1. En Çok Olabilirlik Çözümlemesi 309

8.1.2. Eşit Uzaklıklı Kodlar 314

8.1.3. Lineer Kodlar 315

8.2. Kodlama Teorisi Ve Tasarım Teorisi 322

8.2.1. 2-tasarımlar ve maksimal kodlar 322

8.2.2. Eşit Uzaklıklı Kodlar, Çözülebilir Tasarımlar ve Afin Geometri 323

8.2.3. Tam Kodlar Ve Steiner Sistemler 325

8.2.4. Ortogonal Dizimler Ve Tam Kodlar 327

8.3. Notlar 328

8.4. Alıştırmalar 329

8.5. Kaynaklar 330

9. BAZI ÖZEL TASARIMLAR 332

9.1. Dairesel Blok Tasarımları 332

9.2. c-Bhaskar-Rao Tasarımları (c-BRT) 333

9.3. Mendelsohn Tasarımları 333

9.4. Tam Graeco-Latin Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları 335

9.5. Ortogonal Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımleri 338

9.5.1. ODTBT ler İçin Fark Kareler 339

9.5.2. ODTBT lerin Geometrik Yorumu 340

9.6. İç İçe Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları 341

sayfa

9.7. DTBT, ODTBT, NDTBT ve PMD'ler arasındaki ilişkiler 344

9.8. Quasi Simetric Tasarım 345

9.9. (r,λ) tasarımları 346

9.10. Transversal Tasarımlar 348

9.10.1. Transversal tasarımların ortogonal tasarımlar ile ilişkisi 349

9.10.2. Simetrik transversal tasarım 352

9.10.3. Transversal tasarımların geometrik yapıları 353

9.11. Bölünmüş Dengeli Tamalanmamış Blok Tasarımlar 354

9.12. İzomrfizm ve Otomorfizm 354

9.12.1. Simetrik DTBTlerin otomorfizmi 355

9.13. Ayrık Tasarımlar 355

9.14. Golf Tasarımları 355

9.15. Room Kareler 356

9.16. Howell Tasarımlar 356

9.17. GenişletilmişTasarımlar(Augmented Designs) 357

9.18. Turnuva Tasarımları (Tournament Designs) 358

9.19. Kaynaklar 359

1. *t*-TASARIMLARI

Kombinatoriyel tasarımlar sonlu bir kümedeki nesnelerin belirli denge koşulları altında düzenlenmesiyle ilgilenir. Bu tasarımların en temellerinden biri t-tasarımlarıdır.

$P=\{p_1,p_2,\ldots p_v\}$ sonlu noktalar kümesi $D=\{B_1, B_2,\ldots B_b\}$ p'in k-elemanlı altkümelerinin sonlu ailesi olan bloklar kümesi olsun. X'in t-boyutlu her altkümesi D'in tam olarak λ bloğunda varsa D'ye *t-(v,k,λ)* tasarımı ya da *t-tasarım* adı verilir. $t=k$ için tasarıma tam (yada trivial) denir. Burada v, P kümesindeki nokta sayısı, b D kümesindeki blok sayısı, k her bloktaki nokta sayısı, r noktaların bloklarda görünme sayısı ve λ ise her nokta çiftinin birlikte görünme sayısı şeklindedir.

t-tasarımları kombinatöryel yapılardır. *t*-tasarımlarında kullanılan terminoloji matematiğin ana görüşüne daha yakındır. Bundan dolayı iyi bir matematik bilgisini gerektirir.
t-tasarımları, tasarım teorisindeki en önemli yapılardır. Gelişmiş bilgisayarlar olmasına rağmen birçok *t*-tasarımını oluşturmak zordur. Çünkü bütün kabul edilebilir parametreler için hala genel bir formül yoktur.

t-tasarımları, aynı zamanda kombinatöryel optimizasyon problemleridir. Bu nedenle istatistiksel deneyler, network tasarımları gibi uygulamalı problemlerde yapı maliyetlerini minimum yapmada önemlidir. *t*-tasarımları, 1969' dan beri askeri taktiklerde, bilgisayar çiplerinin tasarımlarında ve özellikle istatistikte (tıp ve ziraat deneylerinde, nükleer araştırmalarda, demoskopide (demoscopy), kalite kontrolünde, ...vb.) sık kullanılmaktadır.

Önceleri *t*' nin küçük değerleri için *t*-tasarımları araştırılırken 1980' lerden sonra büyük *t* ve λ' ya sahip *t*-tasarımları araştırılmaya başlanmıştır. Son dönemlerde özellikle bu konu üzerinde yoğun olarak çalışılmaktadır.

Sonlu projektif ve afin geometriler eğer boyut en azından üç ise çeşitli yollardan özel tasarımlar gibi yorumlanabilir. O nedenle kombinatöryel yapıların analizi için olan metodlar bu geometrileri çalışmak için kullanılabilir. Bu metodlarda, isabet matrisleri dikkate alınır. Sonlu geometriler, uygulamaların çeşitli alanlarında bulunabilirler. Ayrıca istatistikte de geniş bir uygulama alanı görülür (Dembowiski,1997).

Tanım 1.1: " Noktalar " ve " Bloklar " olarak adlandırılan sonlu iki nesne kümesi, aralarındaki bir I isabet ilişkisi (incidence relation) ile birlikte bir yapıdır. Bu yapıda, genellikle noktaları göstermek için küçük latin harfleri ve blokları göstermek için de büyük latin harfleri kullanılır. Verilen herhangi bir blokla ilişkili bir noktalar kümesi vardır ve blok, bu noktalar kümesi ile tanımlanır. Böylece, bir p noktası bir B bloğu ile ilişkili ise bu, p I B ya da $p \in B$ şeklinde yazılabilir ve " p, B'nin üzerinde", " B, p'yi içerir ", ...vb. şeklinde ifade edilir. Eşdeğer bir yaklaşım ise, yapıyı sonlu nokta kümesi $\mathcal{P}$, sonlu blok kümesi $\mathcal{B}$ ve $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$ ile verilen isabet (incidence) gibi kabul etmektir. Buradaki I isabet ilişkisi noktanın doğru üzerinde bulunması şeklindedir. Yani $(p, B) \in I$ (p I B şeklinde gösterilir) ise p, B bloğu üzerinde bir noktadır. Bu takdirde yapı $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ile gösterilir ve " sonlu isabet yapısı " (finite incidence structure) olarak adlandırılır.

Bazı kaynaklarda " sonlu isabet yapısı " terimi " konfigürasyon " (configuration) ismiyle kullanılmaktadır.

D, bir yapı ise, D'nin nokta (işlem=deneme) sayısı " v " ve blok sayısı " b " ile gösterilir. Bir yapının noktalar kümesi ve bloklar kümesi (her ikisi de) boş olmamalıdır.

D yapısının bir noktası p ve bir bloğu B ise $< p >$, p üzerindeki blokların kümesini aynı şekilde $< B >$, B üzerindeki noktaların kümesini belirtmek için kullanılabilir.

İki farklı blok aynı noktalar kümesi ile tanımlanıyorsa bu durumda " yapı tekrarlanmış bloklara sahiptir " denir.

D tekrarlanmış bloklara sahip ise, aynı noktalar kümesi ile ilişkili blokların bir kümesi tamamen silinerek D' den yeni bir yapı oluşturulabilir. Yani blok kümeleri üzerinde bir **R**-denklik ilişkisi B **R** C , <B> = <C> ile tanımlanmış ise, B bloğunun çokluğu (multiplicity) B' nin **R**-denklik sınıfının büyüklüğüdür ve eğer B, birden büyük çokluğa sahip ise B'nin tekrarlanmış bir blok olduğu söylenir. Noktaları D' nin noktaları, blokları D'nin bloklarının **R**-denklik sınıfları ile tanımlanan bir yapı göz önüne alınsın. p, D'nin B bloğu üzerinde ise B'nin denklik sınıfı üzerindeki p ile, yeni bir indirgenmiş D yapısı tanımlanır ve D / **R** şeklinde ifade edilir.

D yapısının bir elemanı, D yapısının diğer elemanları olan 0 ya da 1 ile ilişkili ise bu eleman " izole edilmiş " (isolated) diye adlandırılır. Diğer taraftan " dolu " (full) bir eleman ise muhtemel diğer bütün elemanlarla ilişkili olan elemandır (yani nokta bloklarla ya da blok noktalarla). Tekrarlı olarak önce bütün dolu elemanları sonra bütün izole edilmiş elemanları çıkararak " standartlaştırılmış D " adı verilen yeni bir $\overline{D}$ yapısına ulaşılabilir. Sonunda dolu ya da izole edilmiş elemanlara ve tekrarlanmış bloklara sahip olmayan, hem standartlaştırılmış hem de indirgenmiş bir yapı " tamamen indirgenmiş " sayılır.

Tanım 1.2: D, noktaları p_1, p_2,...,p_v ve blokları B_1, B_2,...,B_b ($v > 0$, $b > 0$) olarak indekslenmiş bir yapı olsun. D için $v \times b$ boyutlu isabet matrisi (incidence matrix) $A=(a_{ij})$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$a_{ij} = 1$; $p_i \in B_j$ ise

$a_{ij} = 0$; diğer durumlarda

Böylece, D hakkındaki tüm bilgiler A matrisinde ifade edilmiş olur (A matrisi, eğer bütün elemanları 0 ya da 1 ise " (0,1) – matrisi " olarak isimlendirilir. Her isabet

matrisi bir (0,1) – matrisidir.). A matrisi, nokta ve blokların indekslenmesine bağlı olduğundan, farklı indekslemeler farklı isabet matrisleri oluşturur. Bununla beraber verilen bir D yapısı için isabet matrisleri arasında yakın bir ilişki vardır. A, $p_1,p_2,...,p_v$ ve $B_1, B_2,...,B_b$ indekslenmesi ile verilen D' nin isabet matrisi ve M, $q_1,q_2,...,q_v$ ve $B_1, B_2,...,B_b$ indekslenmesiyle verilen isabet matrisi olsun (yani noktalar farklı nitelendirilmiş fakat bloklar aynı). Bu durumda her q_i , p_j ' den biridir. Dolayısıyla, $q_i = p_j$ ise $i^0 = j$ olacak şekilde $\{1,...,v\}$ üzerinde θ'nın bir permütasyonu elde edilir. Bunun anlamı her bir i için M'nin i inci satırının A'nın i^0 yıncı satırı ile aynı olmasıdır. Diğer bir deyişle M, A'nın satırlarının sıraları değiştirilerek elde edilmiştir.

A, $p_1,...,p_v$; $B_1,...,B_b$ indekslenmesi ile verilen bir D yapısının isabet matrisi ise i satırındaki sıfır sayısı, p_i ile ilişkili olmayan blokları göstermektedir. Bu nedenle izole edilmiş bir eleman A'nın bir satırına (ya da sütununa) en fazla bir tane " sıfır olmayan " eleman (sayı) sağlar. Benzer şekilde dolu bir eleman tüm elemanları " 1 " olan bir satıra (ya da sütuna) denktir.

Eğer bir (0,1) matrisi olan A, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa tamamen indirgenmiş bir yapının isabet matrisidir.

(i) Her satır ve sütunun en az bir tane sıfır elemanı ve en az iki tane " 1 " elemanı olmalıdır.

(ii) A'da iki özdeş (aynı) sütun olmamalıdır.

Her pozitif m tamsayısı ve $r > 0$ sabiti için $AJ_{b,m} = rJ_{v,m}$ ise D yapısı " düzenli " dir (regular). Burada J, bütün elemanları "1" ler olan boyuta uygun matristir .

Örnek 1.1: $\mathscr{S}$ yapısının noktaları ; {1,2,3,4,5} ve blokları; B_1={1,2,3} , B_2={1,2,3} , B_3 = {2,3,4} , B_4 = {3,4,5} olsun. $\mathscr{S}$ için isabet matrisi şöyle olur.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathscr{D}$/R 3 bloğa sahiptir; $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_3 = \{2, 3, 4\}$, $A_4 = \{3, 4, 5\}$. Bu yüzden $\mathscr{D}$/R bir tasarım örneğidir. 5, $\mathscr{D}$/R' nin izole edilmiş bir noktası ve 3 de $\mathscr{D}$/R 'nin dolu bir noktası olduğundan $\mathscr{D}$/R standartlaşmamıştır. 3 ve 5 ortadan kaldırılırsa; 3 nokta , {1, 2, 4} ve 3 blok; $A_1=\{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 4\}$, $A_3 =\{4\}$ kalır. Böylelikle $\mathscr{D}$/R' nin boş olduğu kolaylıkla görülebilir.

Tanım 1.3: $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ ve $D'=(\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$ isabet yapıları ve $\pi : \mathcal{P} \cup \mathcal{B} \to \mathcal{P}' \cup \mathcal{B}'$ 1-1 ve örten bir fonksiyon olsun, π aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir izomorfizmdir:

(i) $\mathcal{P}^{\pi} = \mathcal{P}'$ ve $\mathcal{B}^{\pi} = \mathcal{B}'$;

(ii) $p\, I\, B \Leftrightarrow p^{\pi}\, I'\, B^{\pi}$ bütün $p \in \mathcal{P}$ ve bütün $B \in \mathcal{B}$ ler için

Bu durumda D ve D'nün izomorfik olduğu söylenir. D ve D' izomorfik ise $D \cong D'$ şeklinde gösterilir. Eğer $D = D'$ ise o zaman π, otomorfizm olarak adlandırılır.

Örnek 1.2: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} noktaları üzerinde ($D1$), ($D2$), ($D3$) tasarımları aşağıdaki şekilde verilsin:

($D1$) ; {124 , 156 , 130 , 253 , 260 , 450 , 463}

($D2$) ; {123 , 234 , 345 , 456 , 560 , 601 , 012}

($D3$) ; {123 , 145 , 160 , 246 , 250 , 340 , 356}

($D1$) ve ($D3$) tasarımları izomorfiktir. Çünkü ($D3$) tasarımındaki 3 noktası 4'e, 4 noktası 5'e, 5 noktası 6'ya, 6 noktası 3'e giderse ($D1$) tasarımı elde edilir. ($D2$) tasarımı ise ($D1$) ve ($D3$)'ya izomorfik değildir (Street and Street, 1987).

Örnek 1.3: $\mathcal{G}$ nin noktaları ; {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} ve blokları ;

f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 , f_6 , f_7 , G_1 = {1, 3, 7}, G_2 = {1, 2, 4}, G_3 = {3, 4, 5}, G_4 = {2, 3, 6}, G_5 = {2, 5, 7} , G_6 = {1, 5, 6} , G_7 = {4, 6, 7} olsun.

$\mathcal{H}$in noktaları ; {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} ve blokları ;

f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 , f_6 , f_7 , H_1 = {1, 3, 6}, H_2 = {1, 4, 5}, H_3 = {2, 3, 4}, H_4 = {3, 5, 7}, H_5 = {2, 5, 6} , H_6 = {1, 2, 7} , H_7 = {4, 6, 7} verilsin.

I'nin noktaları ; {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} ve blokları ;

f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5 , f_6 , f_7 , I_1 = {1, 2, 4} , I_2= {2, 3, 5} , I_3 = {3, 4, 6} , I_4 = {4, 5, 7} , I_5 = {1, 5, 6} , I_6 = {2, 6, 7} , I_7 = {1, 3, 7} alınsın.

$\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ve $\mathcal{I}$nın her biri bir 2-(7, 3, 2) yapısıdır. $\mathcal{I}$R, bir 2-(7, 3, 1) dir. $\mathcal{G}$ R, bir 2-tasarımı değildir. Böylece bu örneklerin hiçbir çifti izomorfik değildir. Bu örnekler önemli bir gerçeği gösterirler: Özdeş parametreli yapıların izomorfik olmaları gerekli değildir.

D, bir isabet yapısı olsun. *D*'nin bütün otomorfizmlerinin grubu " *D*'nin tam otomorfizm grubu " (full automorphism group) olarak adlandırılır ve Aut *D* şeklinde gösterilir. Aut *D*'nin herhangi bir alt grubu " *D*'nin otomorfizm grubu " olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem 1.1 (Colburn and Dinitz, 1996)**:** M ve A, (0,1)-matrisleri olsun. Bunların izomorfik olabilmeleri için gerek ve yeter koşul PMQ = A eşitliği sağlanacak şekilde P ve Q permütasyon matrislerinin mevcut olmasıdır.

Bir D yapısının blok kümeleri boş değil ve her bloğu $k > 0$ nokta içeriyorsa bu yapıya "düzgün" (uniform) denir. Bir yapının düzgünlüğü onun isabet matrisine bakılarak kolay bir yoldan bulunabilir. Düzgün bir yapının isabet matrisinde sütun toplamları eşittir. Yani her bloğunda eşit sayıda eleman vardır.

Örnek 1.1de verilen A dikkate alındığında, A düzgündür ve 1 iki blokta olduğundan ve 5 sadece bir blokta olduğundan düzenli değildir. Aynı zamanda A_1, iki çokluğa sahip olduğundan $\mathcal{A}$ bir tasarım değildir. Ayrıca 5, $\mathcal{A}$'nın sadece bir bloğu üzerinde olduğundan $\mathcal{A}$ standartlaşmamıştır.

D, $v > 0$ noktaları olan bir yapı olsun. D'nin t noktalı her alt kümesi, λ ortak blokları ile tam ilişkili olacak şekilde λ, t ($0 < \lambda$ ve $0 \leq t \leq v$) tam sayıları mevcutsa, D' ye, λ için bir t-yapısıdır ya da sadece t-yapısıdır denir. k blok genişliğine sahip düzgün bir t-yapısına, " (düzgün) t-(v , k , λ) yapısı " ya da " (v , k , λ) için bir t-yapısı " denir. Burada v, noktaların sayısı ve t noktaları üzerindeki ortak blokların sayısıdır. Yalnız dikkat edilmelidir ki, her düzgün yapı ya da t-yapısı boş olmamalıdır. Aynı zamanda (v , k , λ) için t-yapısından bahsederken " k " dan dolayı bu yapının düzgün olduğu belirtilmiş olur.

Örnek 1.4: $\mathcal{C}$'nin noktaları ; {1, 2, 3, 4, 5, 6} ve blokları; $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{4, 5, 6\}$, $C_3 = \{1, 4\}$, $C_4 = \{1, 5\}$, $C_5 = \{1, 6\}$, $C_6 = \{2, 4\}$, $C_7 = \{2, 5\}$, $C_8 = \{2, 6\}$, $C_9 = \{3, 4\}$, $C_{10} = \{3, 5\}$, $C_{11} = \{3, 6\}$ olsun.

C, $\lambda = 1$ olan bir 2-yapısı ve $r = 4$ olan bir 1-yapısıdır.

$\mathcal{C}$ düzgün değildir. Teorem 2.2 düzgün yapılar için olmasına rağmen düzgün olmayan bir 2-yapısı aynı zamanda bir 1-yapısı yani düzenli olabilir.

Bir D yapısı eşit sayıda nokta ve bloğa sahipse D için herhangi bir isabet matrisi karedir. Bu nedenle $b = v$ olan yapılara " kare yapı " (square structure) veya " simetrik yapı " (symmetric structure) denir.

A matrisine bakıldığında,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$r=k=3$ ve $b=v$ olduğundan yapı karedir.

"Tasarım" (design), indirgenmiş düzgün bir yapıdır, yani tekrarlanmış blokları olmayan düzgün bir yapıdır. Ancak bazı yazarlar, tekrarlı bloklu yapıları ve düzgün olmayan yapıları da tasarım olarak almaktadırlar.

Tasarımdaki bir blok, üzerindeki noktalar tarafından tek olarak belirlenir ve bloklar, noktaların ayrılmış alt kümeleri ile özdeşlenebilir.

Bir D yapısının tümleyeni(complement) $C(D)$ ile gösterilir. $C(D)$nin noktaları D'nin noktalarıdır. D'deki her B bloğu için $C(D)$de bir B^* bloğu dikkate alınır. Buradaki isabet kuralı, p noktasının B^* üzerinde olması için gerek ve yeter koşul p'nin B üzerinde olmamasıdır. D ve $C(D)$nin isabet matrisleri birbirleriyle ilişkilidir. Örneğin A matrisi D yapısının isabet matrisi olsun. Bu taktirde ($J_{v\times b}$-A), $C(D)$nin incidence matrisidir.

Örnek 1.5: Noktaları $P=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ blokları $B_1=\{1,2,4\}$, $B_2=\{1,3,7\}$, $B_3=\{2,3,5\}$, $B_4=\{1,5,6\}$, $B_5=\{3,4,6\}$, $B_6=\{4,5,7\}$, $B_7=\{2,6,7\}$ olan bir D yapısı düşünülsün.

P ve B_i(i=1,2,...,7)lere ilişkin D yapısının isabet matrisi ve tamamlanışı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$D=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&1\\0&1&1&0&1&0&0\\1&0&0&0&1&1&0\\0&0&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&1&0&1\\0&1&0&0&0&1&1\end{bmatrix} \Rightarrow \quad C(D)=\begin{bmatrix}0&0&1&0&1&1&1\\0&1&0&1&1&1&0\\1&0&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&0&1\\1&1&0&0&1&0&1\\1&1&1&0&0&1&0\\1&0&1&1&1&0&0\end{bmatrix}$$

D, 2-(7, 3,1) yapısı gösterirken C(D) 2-(7, 4,2) yapısıdır. Bunun sebebi 7 nokta yardımıyla elde edilen nokta kombinasyonlarından sadece 2'şerli nokta çiftlerinin 7 blokta 2'şer kez birlikte görülmesinden kaynaklanmaktadır.

1.1 *t*-Tasarımının Özellikleri

Tanım 1.4: $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ isabet yapısı, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa t-(v,k,λ) tasarımı (t-design) olarak adlandırılır.

(i) $|\mathcal{P}| = v$;

(ii) $B \in \mathcal{B}$ için her blok k nokta ile ilişkilidir.

(iii) Her farklı t nokta birlikte λ blok ile ilişkilidir.

(yani noktaların her t-alt kümesi λ blokta bulunur)

Negatif olmayan t, v, k, λ, b ve r tamsayıları " tasarımın parametreleri " olarak bilinir. r, " tekrar sayısı " dır (replication number) ve bir noktanın görüldüğü blok sayısını belirtir .

Bir t-(v,k,λ) tasarımı farklı kaynaklarda farklı şekillerde gösterilmiştir. Örneğin; Ho ve Mendelsohn(1974) , $S_\lambda(t, k, v)$ şeklinde göstermiştir. Ray-Chaudhuri ve Wilson(1975) ayrıca Beth ve diğerleri.(1999) , $S_\lambda(t, k; v)$ şeklinde göstermişlerdir. $S(\lambda; t, k, v)$ gösterimini ise Ajoodani-Namini(1996) kullanmıştır.

t-tasarımı, "Taktikal Konfigürasyon" (Tactical Configuration-TC(v,k,λ)) kelimesinin kısaltılmışıdır .

Taktikal konfigürasyon terimi Moore'a (1896) dayanmaktadır. Fakat Moore bu terimi " 2 ranklı taktikal konfigürasyon " olarak kullanmıştır.

Tanım 1.5: Tekrarlı blokları olmayan bir t-tasarımına " basit (simple) t-tasarımı " denir.

t-tasarımı için parametrelerin bulunması devam eden çözülmemiş bir problemdir. Fakat t, v, k, λ parametreleri gerekli şartları sağlıyorsa o zaman bir t-(v,k,λ) tasarımının varolduğu ispatlanmıştır.

Teorem 1.2(Stinson, 2004): $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$, bir t-(v,k,λ) tasarımı olsun. $0 \le s < t$ şartını sağlayan her s tamsayısı için, s farklı nokta ile ilişkili blok sayısı λ_s dir. λ_s , s noktadan bağımsızdır ve aşağıdaki eşitlik ile verilir :

$$\lambda_s = \lambda \frac{(v-s)(v-s-1)...(v-t+1)}{(k-s)(k-s-1)...(k-t+1)} \qquad [1.1]$$

bu eşitlik

$$\lambda_s = \lambda \binom{v-s}{t-s} \Big/ \binom{k-s}{t-s} \qquad [1.2]$$

şeklinde yazılabilir.

İspat :s, D'nin s noktalarının herhangi bir sabit alt kümesi ve m,s'yi içeren D'nin bloklarının sayısı olsun. Teorem; m'nin sadece s'ye bağlı olduğu, s'nin seçeneklerinden bağımsız olduğu gösterilerek ispatlanabilir. m'yi hesaplamak için s'yi içeren t noktalarının bir T kümesine ve T'yi içeren bir Y bloğuna sahip (T,Y) kabul edilebilir çifti tanımlansın. Bu kabul edilebilir çiftlerin sayısı iki farklı yoldan hesaplanabilir.

s'yi içeren m bloklarından her biri, s'yi içeren $\binom{k-s}{t-s}$ t-kümelerini içerir. Bundan dolayı kabul edilebilir çiftlerin sayısı $m\binom{k-s}{t-s}$ dir. Diğer taraftan s'yi içeren t noktalarının bir T kümesini seçmenin $\binom{v-s}{t-s}$ yolu vardır. Bu kümelerden her biri kesinlikle λ bloklar üzerindedir. Böylece kabul edilebilir çiftlerin sayısı $\binom{v-s}{t-s}$ olur. Kabul edilebilir çiftlerin sayısı için bu iki değer eşitlenirse;

$$m\binom{k-s}{t-s}=\lambda\binom{v-s}{t-s}$$

$$m=\lambda\binom{v-s}{t-s}\Big/\binom{k-s}{t-s}$$

$$m=\lambda\frac{(v-s)...(v-t+1)}{(k-s)...(k-t+1)}$$

olduğu görülür.

Sonuç 1.3: D, bir t-(v,k,λ) tasarımı ve $t > 0$ olmak üzere s, $0 < s < t$ koşulunu sağlayan herhangi bir tamsayı ise D, bir s-(v, k, λ_s) tasarımıdır.

Örnek 1.6: $\mathcal{H}$'nın noktaları ; {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} ve blokları; K_1 = {1, 3, 7, 8} , K_2 = {1, 2, 4, 8} , K_3 = {2, 3, 5, 8} , K_4 = {3, 4, 6, 8} , K_5 = {4, 5, 7, 8} , K_6={1,5, 6, 8} , K_7 = {2, 6, 7, 8} , K_8 = {1, 2, 3, 6} , K_9 = {1, 2, 5, 7} , K_{10} = {1, 3, 4, 5} , K_{11} = {1, 4, 6, 7} , K_{12} = {2, 3, 4, 7} , K_{13} = {2, 4, 5, 6} , K_{14} = {3, 5, 6, 7} olarak seçilsin.

$\mathcal{H}$ bir 3-(8, 4, 1) aynı zamanda 2-(8, 4, 3) ve 1-(8, 4, 7) tasarımıdır.

v, k, λ'nın birçok seçeneği için düzgün t-yapıları bulunamaz. Bunun nedeni $\lambda_t = \lambda$ olan λ_s $(0 \le s \le t)$ büyüklüklerinin tamsayı olması zorunluluğudur.

Sonuç 1.4: t-tasarımlarının parametreleri birbirlerinden bağımsız değildir. Aralarında bazı önemli ilişkiler vardır. D bir t-(v,k,λ) tasarımı ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\text{(i)} \quad b = \lambda_0 = \lambda \frac{v(v-1)\ldots(v-t+1)}{k(k-1)\ldots(k-t+1)} \qquad [1.3]$$

([1.1]deki λ_s formülünde s yerine 0 yazılarak bu eşitliğe ulaşılabilir.)

Bu eşitlik;

$$b = \lambda_0 = \lambda \binom{v}{t} \Big/ \binom{k}{t} \qquad [1.4]$$

şeklinde verilebilir.

(ii) $t > 0$ ise $bk = vr$ [1.5]

(iii) $t = 2$ ise $r(k\text{-}1) = \lambda_2(v\text{-}1)$ [1.6]

[1.2]de s = 1 yazılırsa tekrar sayısı r elde edilir.

$$r = \lambda_1 = \lambda \binom{v-1}{t-1} \Big/ \binom{k-1}{t-1} \qquad [1.7]$$

$\lambda_t = \lambda$ yazılırsa Teorem 1.2, λ_s tamsayılarının geri dönüşümden (recursion) aşağıdaki eşitlik ile kolaylıkla hesaplandığını gösterir :

$$\lambda_s = \frac{(v-s)}{(k-s)} \lambda_{s+1} \qquad [1.8]$$

$t \geq 1$ olan herhangi bir düzgün t-yapısı aynı zamanda düzgün 1-yapısıdır. Bunun anlamı yapının düzenli oluşudur.

Yardımcı Teorem 1.5(Stinson,2004):$t \geq s + 2 \quad (s \geq 0)$ ise $\lambda_s \geq v - s$ dir. Bu koşulların sağlandığı bir t-tasarımında,

$$bk(k\text{-}1)...(k\text{-}t+3) \geq v(v-1)...(v-t+2) \qquad [1.9]$$

dir. $t = 2$ ise bu eşitsizlik $b \geq v$ olur ve Fisher eşitsizliği olarak bilinir. Bu eşitsizlik ilk kez meşhur istatistikçi Ronald Fisher tararından 1940da gösterilmiştir.

Bu nedenle Örnek 1.1 ve Teorem 1.2'den, $\mathscr{H}$ herhangi bir $t > 1$ için bir t-yapısı değildir.

Örnek 1.7: $\mathscr{H}$'nin noktaları; {1, 2, 3, 4, 5} ve blokları; B_1={1, 2, 3} , B_2={1,4}, B_3={2, 4}, B_4={3, 4} olsun.

Burada 5 izole edilmiş bir noktadır. $\mathscr{H}$'nin noktaları {1, 2, 3, 4} ve $\mathscr{H}$'nin blokları aynıdır.

$\mathscr{H}$, düzgün değildir. Bununla beraber $\mathscr{H}$, $\lambda = 1$ olan bir 2-yapısıdır. Dikkat edilmelidir ki $\mathscr{H}$ 1-yapısı olmadığından Teorem 1.2, düzgün olmayan yapılar için doğru değildir.

Örnek 1.8: $\mathscr{D}$ ' nin noktaları ; {1, 2, 3, 4, 5, 6} ve blokları; $D_1 = \{1, 2, 3\}$, $D_2 = \{1, 4, 5\}$, $D_3 = \{1, 2, 6\}$, $D_4 = \{1, 3, 6\}$, $D_5 = \{2, 4, 5\}$, $D_6 = \{2, 4, 6\}$, $D_7 = \{3, 4, 5\}$, $D_8 = \{3, 5, 6\}$ olsun.

$\mathscr{D}$ parametreleri $v = 6$, $b = 8$, $r = 4$, $k = 3$ olan bir 1-tasarımıdır.

Örnek 1.9: $\mathscr{F}$ ' nin noktaları; {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} ve blokları; $F_1 = \{1, 2, 4\}$, $F_2 = \{1, 3, 7\}$, $F_3 = \{2, 3, 5\}$, $F_4 = \{1, 5, 6\}$, $F_5 = \{3, 4, 6\}$, $F_6 = \{4, 5, 7\}$, $F_7 = \{2, 6, 7\}$ olsun.

$\mathscr{F}$ bir 2-(7, 3, 1) tasarımı ve Teorem 2.2'den bir 1-(7, 3, 3) tasarımıdır. $\mathscr{F}$ için isabet matrisi simetriktir.

Örnek 1.10: $\mathcal{J}$'nin noktaları ; {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} ve blokları;
$J_1 = \{3, 5, 6, 7\}$, $J_2 = \{2, 4, 5, 6\}$, $J_3 = \{1, 4, 6, 7\}$, $J_4 = \{2, 3, 4, 7\}$, $J_5 = \{1, 2, 5, 7\}$, $J_6 = \{1, 2, 3, 6\}$, $J_7 = \{1, 3, 4, 5\}$ olsun.

$\mathcal{J}$, bir 2-(7, 4, 2) tasarımı ve bir 1-(7, 4, 4) tasarımıdır[Beth, ve diğerler, 1999].

Wilson (1973), yeterli derecede büyük lar olduğunda muhtemel sistemlerin varlığını öne süren aşağıdaki teoremi vermiştir:

Teorem 1.6(Wilson,1973): t, k, v ; $t \le k \le v$ olan pozitif tamsayılar olsunlar. Bu takdirde aşağıdaki şartlar sağlandığında bir t-(v,k,λ) tasarımı mevcut olacak şekilde bir $n \in N$ tamsayısı vardır

(i) $\lambda \binom{v-i}{t-i} \equiv 0 \mod \binom{k-i}{t-i}$, $i = 0,1,\ldots,t$

(ii) $\lambda \geq n$.

Sonuç 1.7:

$$v - 1 \equiv 0 \pmod{k\text{-}1}$$

$$v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k\text{-}1)}$$

olacak şekilde k, $v \in N$ tamsayıları verilsin. Eğer m yeterli derecede büyük ise $\lambda = mk(k-1) + 1$ olan bir 2-(v, k, λ) tasarımı vardır.

Tanım 1.6: Ortak olmayan (disjoint) t-(v,k,λ) tasarımlarının geniş bir kümesi (large set), bir v-kümesinin k-alt kümelerinin t-(v,k,λ) tasarımlarına bir parçalanımıdır. Bu geniş küme, LS(λ; t, k, v) veya $LS_\lambda(t, k; v)$ şekillerinde gösterilir.

t-tasarımlarının geniş kümeleri yaklaşık 1980'lerde ortaya çıkarılmıştır.

Parçalanımdaki tasarım sayısı $n=\binom{v-t}{k-t}\Big/\lambda$ dır. Bu takdirde geniş küme $LS(\binom{v-t}{k-t}\Big/n\ ;\ t,\ k,\ v)$ şeklinde ya da kısaca $LS(1/n\ ;\ t,\ k,\ v)$ olarak gösterilir.

Bir $LS(1/n\ ;\ t,\ k,\ v)$' nün varlığı için gerekli koşul; $i = 0,1,...,t$ için $n \mid \binom{v-i}{k-i}$ olmasıdır.

1.2. $t-$Tasarımı İle İlgili Yapılar

Verilen herhangi bir t-tasarımı D ile ilgili yeni tasarımlar oluşturulabilir. Bunlara ilişkin tanım ve teoremler aşağıda verilecektir.

1.2.1. Tümleyen $t-$Tasarımı

Tanım 1.7: Parametreleri $t,\ v,\ b,\ r,\ k$ ve λ olan bir D t-tasarımının blokları; $B_1, B_2,...,B_b$ ise D'nin "tümleyen tasarımı " (complementary design) D^*, $B_1^*, B_2^*,...,B_b^*$ ile verilir. Burada ;

$B_i^* = \{1, 2,...,v\} - B_i$

dir. D'nin tümleyen tasarımı kendisi ise o zaman D tasarımı, öz-tümleyici " (self-complementary) olarak adlandırılır .

Teorem 1.8(Stinson,2004): Bir t-(v,k,λ) tasarımının tümleyeni bir t-$(v,\ v-k,\ \lambda^*)$ tasarımıdır. Burada ;

$$\lambda^* = \lambda \binom{v-t}{k} \Big/ \binom{v-t}{k-t} \qquad [1.10]$$

dir.

Bu eşitlik

$$\lambda^* = \lambda \frac{C(v-k,t)}{C(k,t)} \qquad [1.11]$$

şeklinde veya

$$\lambda^* = \lambda \frac{(v-k)(v-k-1)...(v-k-t+1)}{k(k-1)...(k-t+1)} \qquad [1.12]$$

olarak tanımlanabilir.

Bazı kaynaklar ise bu eşitliği biraz daha farklı olarak aşağıdaki şekilde vermişlerdir:

$$\lambda^* = \lambda \frac{(v-k-1)(v-k-2)...(v-k-t+1)}{(k-1)(k-2)...(k-t+1)} \cdot \frac{(v-k)}{k} \qquad [1.13]$$

$t = 2$ ise $\lambda^* = b - 2r + 1$ olur. [1.14]

Örnek 1.11: 2-(7, 3, 1) tasarımı için bloklar aşağıdaki gibi olsun:

{1, 2, 3}, {3, 4, 5}, {1, 5, 6}, {1, 4, 7}, {3, 6, 7}, {2, 5, 7}, {2, 4, 6}.

Bu tasarımın tümleyeni, 2-(7, 4, 2) tasarımı olup, blokları ,

{4, 5, 6, 7}, {1, 2, 6, 7}, {2, 3, 4, 7}, {2, 3, 5, 6}, {1, 2, 4, 5}, {1, 3, 4, 6}, {1, 3, 5, 7} dir.

Tümleyen tasarımın λ parametresi [1.10]den kolaylıkla bulunabilir;

$$\lambda^* = \lambda\binom{v-t}{k}\Big/\binom{v-t}{k-t} = 1\binom{7-2}{3}\Big/\binom{7-2}{3-2} = \binom{5}{3}\Big/\binom{5}{1} = 2$$

ya da [1.14]den daha kısa olarak bulunabilir ;

$\lambda^* = b - 2r + 1 = 7\text{-}2.3\text{+}1 = 2$

Teorem 1.9(Stinson,2004): $v=2k$ olan t-(v,k,λ) tasarımının tümleyeni yine bir t-(v,k,λ) tasarımıdır.

Örnek 1.12: Örnek 1.8'da verilen 1-(6, 3, 4) tasarımı düşünülsün.

{1, 2, 3}, {1, 4, 5}, {1, 2, 6}, {1, 3, 6}, {2, 4, 5}, {2, 4, 6}, {3, 4, 5}, {3, 5, 6}

Verilen tasarımın tümleyeni alınırsa ;

{4, 5, 6}, {2, 3, 6}, {3, 4, 5}, {2, 4, 5}, {1, 3, 6}, {1, 3, 5}, {1, 2, 6}, {1, 2, 4}

blokları bulunur. Bu tasarım ise öz-tümleyici olan bir 1-(6, 3, 4) tasarımıdır.

1.2.2. Dual t - Tasarımı

Tanım 1.8: $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ isabet yapısı bir t-tasarımı ise bu takdirde, D^T tasarımı $D^T=(\mathcal{P}^T, \mathcal{B}^T, I^T)$ dır. Burada $\mathcal{P}^T = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^T = \mathcal{P}$ ve $(p, B) \in I$ olmak üzere, $(B,p) \in I^T$ dir. D^T tasarımına "D'nin duali" denir.

Yani bir tasarımın duali işlemleri ve blokları sırasıyla orijinal tasarımın bloklarına ve işlemlerine karşı gelen yeni bir tasarımdır.

t, v, b, r, k parametreli bir t-tasarım verilsin. Bu tasarım Tanım 1.2 gereğince, tasarımın " isabet matrisi " (incidence matrix) olarak adlandırılan $v \times b$ boyutlu bir matrisle gösterilebilir. Satırlar tasarımın işlemleriyle ve sütunlar bloklarla nitelendirilir. Eğer i işlemi j bloğunda gözüküyorsa matrisin (i , j). hücresine 1 yazılır, gözükmüyorsa 0 yazılır. İsabet matrisinin her satırı r tane 1'e, her sütunu k tane 1'e sahiptir ve her farklı t satır λ tane ortak 1' lere sahiptir.

A, parametreleri t, v, b, r, k olan bir t-tasarımı D' nin isabet matrisi ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır :

$$A\, J_b = r\, J_{v \times b}$$

$$J_v\, A = k\, J_{v \times b}$$

Burada J , tüm elemanları 1'ler olan matristir (J_n , n × n boyutlu matrisi , $J_{m \times n}$ ise m × n boyutlu matrisi gösterir). Bu durumda A^T matrisi $b \times v$ boyutludur ve her satırında k tane 1, her sütununda r tane 1 vardır. Dual tasarımlarda aşağıdaki eşitlikleri görmek mümkündür:

$$J_b A^T = r J_{b \times v}$$

$$A^T J_v = k J_{b \times v}$$

Parametreleri t, b, v, k, r olan bir t-tasarımının isabet matrisi A^T şu şekilde oluşturulur. Eğer orijinal tasarımın $a_1, a_2, \ldots, a_v$ işlemleri ve $B_1, B_2, \ldots, B_b$ blokları varsa, yeni tasarım $c_1, c_2, \ldots, c_b$ işlemlerine ve $C_1, C_2, \ldots, C_v$ bloklarına sahiptir. Burada a_j, B_i' ye ait ise c_i , C_j' ye aittir. Bu duruma " D' nin dual tasarımı D^T dir " denir.

Tanım 1.9: Bir t-tasarımı D , duali olan D^T' ye izomorfik ise yani eğerπ : $D \rightarrow D^T$ bir izomorfizm tanımlıyorsa, D tasarımı " self-dual " dir. Diğer bir ifadeyle, tasarımın duali, orijinal tasarım ise bu tasarım self-dual dir.

Örnek 1.13: $B_1 = \{1, 2, 3\}$, $B_2 = \{2, 3, 4\}$, $B_3 = \{3, 4, 1\}$, $B_4 = \{4, 1, 2\}$ blokları ile verilen 2-(4, 3, 2) tasarımı düşünülsün. Bu tasarımın birliktelik yapısı Çizelge 1.1'de verilmiştir.

BLOKLAR

İŞLEMLER	1	2	3	4
1	X		X	X
2	X	X		X
3	X	X	X	
4		X	X	X

Çizelge 1.1: 2-(4, 3, 2) tasarımı

Tasarımın isabet matrisi şu şekildedir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dual tasarımın isabet matrisi A^T ise şöyle olur :

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla dual tasarımın blokları; $B_1 = \{1, 3, 4\}$, $B_2 = \{1, 2, 4\}$, $B_3 = \{1, 2, 3\}$, $B_4 = \{2, 3, 4\}$şeklindedir. Bu bloklar orijinal tasarımın blokları ile aynı olduğundan verilen tasarım self-dualdir.

1.2.3. Keyfi t – Tasarımı

$0 \leq t \leq k \leq v$ tamsayıları verilsin. Eğer $\mathcal{P}$, v-elemanlı bir küme ve $\mathcal{B}$, $\mathcal{P}$' nin bütün k-elemanlı alt kümelerinin birleşimi ise $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ çifti bir t-(v,k,λ_{max}) tasarımıdır. Buradaki λ_{max} değeri maximumλ dır ve $C\binom{v-t}{k-t}$ binomial katsayısına eşittir. Böyle tasarımlar "keyfi(trivial)" olarak veya "tamamlanmış tasarım" (complete design) olarak ya da "tam tasarım" (full design) [veya "tam kombinatöryel tasarım" (full combinatorial design)] olarak isimlendirilir. Yani, k blok genişliğindeki bir tasarım eğer noktaların her k-kümesi en azından bir blok ile ilişkili ise keyfi olarak adlandırılır.

Keyfi tasarımlarda $b = \binom{v}{k}$ dır. Tekrarlı bloklar olduğunda k noktanın her kümesinin aynı sayıda blokla ilişkili olduğu keyfi tasarım tektir.

Teorem 1.10(Hughes ve Pipper,1985): $0 < t < k \leq v/2$ koşulunu sağlayan herhangi t, k, v tamsayıları için keyfi olmayan t-(v,k,λ) tasarımında $\lambda \leq \binom{v-t}{k-t}$ dir.

Teorem 1.11(Beth ve Diğerleri, 1999): $v \leq k + 1$ olan her t-(v,k,λ) tasarımı keyfidir

Teorem 1.12(Assmus and Key, 1993): Keyfi olmayan t-(v,k,λ) tasarımları aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$b \geq v\binom{v-1}{t-2}\Big/\binom{k}{t-2} \qquad [1.15]$$

Örnek 1.14: 5-(24, 8, 1) tasarımı [1.4]ü sağlar. Bu eşitlikten tasarımın blok sayısı ;

$$b = \lambda\binom{v}{t}\Big/\binom{k}{t} = 1.\binom{24}{5}\Big/\binom{8}{5} = 759$$

olur. Tasarımın [1.15] eşitsizliğini sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir,

$$b \geq v\binom{v-1}{t-2}\Big/\binom{k}{t-2}$$

$$759 \geq 24.\binom{23}{3}\Big/\binom{8}{3} = 759$$

5-(24, 8, 1) tasarımının [1.15] eşitsizliğini sağladığı görülür.

Teorem 1.13(Colbourn ve Dinitz, 1996): Bir t-(v, $t+1$, $\lambda_{max}/2$) tasarımı var ise, t-($t + m(v-t)$, $t+1$, $m\,\lambda_{max}/2$) tasarımı bütün $m \geq 0$ tamsayıları için vardır.

t-(v,k, $\lambda_{max}/2$) tasarımı tamamlanmış bir tasarımın yarıya bölünmesine eşittir.

Örnek 1.15: 5-(13, 6, 4) tasarımı,

$$\lambda_{max}/2 = \binom{v-t}{k-t}\Big/2 = \binom{13-5}{6-5}\Big/2 = 4$$

koşulunu sağlar. Dolayısıyla bir 5-(5 + m.8, 6, m.4) tasarımı mevcuttur. Örneğin; m=2 ise 5-(21, 6, 8) tasarımı bulunur.

Teorem 1.14(Colbourn ve Dinitz, 1996): Bir t-$(2k + 1, k, \lambda)$ tasarımı varsa bu takdirde bir t-$(2k+2, k+1, \lambda(2k+2-t)/(k+1-t))$ tasarımı vardır.

Örnek 1.16: 2-(7, 3, 1) tasarımı varolduğundan 2-(8, 4, 3) tasarımı vardır.

Teorem 1.15(Colbourn ve Dinitz, 1996): $|\mathcal{B}| = b < \lambda_{max} / \lambda_1$ olacak şekilde bir t-(v,k, λ_1) tasarımı $(\mathcal{P}, \mathcal{A})$ ve bir t-(v,k, λ_2) tasarımı $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ mevcutsa; $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$'dan ayrılarak (disjoint) seçilebilir ve böylece bir t-$(v,k, \lambda_1 + \lambda_2)$ tasarımı mevcut olur.

Örnek 1.17: 2-(16, 6, 2) ve 2-(16, 6, 3) tasarımları dikkate alındığında teorem 1.15ye göre 2-(16,6,5) tasarımı vardır.

1.2.4. Simetrik t – Tasarımı

Tanım 1.10: $b=v$ eşitliği olan bir t-tasarımına " simetrik t-tasarımı " (veya " kare t-tasarımı") denir.

$t > 2$ olan simetrik t-tasarımı, simetrik $(t-1)$-tasarımının genişlemesidir ve bu nedenle [1.9] eşitsizliği aşağıdaki gibi olur :

$$bk(k - 1)...(k - t + 3) = v(v - 1)...(v - t + 2)$$

Yardımcı Teorem 1.16(Mendhelson,1970): $b=v$ ve $t > 2$ ise $k \geq v - 1$dir ve t-tasarımı keyfidir.

Keyfi durumlar, $k = v$ ve $k = v - 1$, dışında $t > 2$ olan hiçbir simetrik yapıya sahip değildir.

1.2.5. Dar t – Tasarımı

Tanım 1.11: $t = 2s$ olan bir t-(v,k, λ) tasarımında $v \geq k+s$ ve $b = \binom{v}{s}$ şartları sağlanıyorsa tasarıma " dar t-tasarımı " (tight t-design) denir.

Dar 4-tasarımı örneği iyi bilinen 4-(23, 7, 1) Witt tasarımıdır. Bu tasarımda $b=\binom{23}{2} = 253$ dür. $t \geq 4$ olan dar t-tasarımları çok nadir görünür.

Dar 6-tasarımları yoktur. $t = 2s \geq 10$ ise ancak sonlu sayıda dar t-tasarımları vardır.

2-tasarımının dar olması için gerek ve yeter koşul tasarımın simetrik olmasıdır. Benzer şekilde 4-tasarımının dar olması için gerek ve yeter koşul tasarımın yarı-simetrik (quasi-symmetric) olmasıdır.

1.2.6 Türetilmiş t – Tasarımı

Türetilmiş (derived) yapılar iç (internal) veya daraltılma (contraction) yapılar olarak da bilinir. Bir noktada ya da bir blokta türetilmiş t-tasarımı bulunabilir.

Bir noktadaki türetilmiş tasarım tanımı aşağıdaki şekildedir.

Tanım 1.12: $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$; $p \in \mathcal{P}$, $B \in \mathcal{B}$ ve tanım kümeleri

$$\mathcal{P}_p = \mathcal{P} - \{p\} \quad , \quad \mathcal{B}_p = \{B \mid B \in \mathcal{B} , B \ni p\}$$

olmak üzere, D'nin p noktasında D_p' ye "daraltılması" (contraction) $D_p = (\mathcal{P}_p , \mathcal{B}_p)$ ile verilir.

p' deki daraltılma bazen kısıtlama (restriction) olarak adlandırılır fakat kısıtlama $\mathcal{P} - \{p\}$ içindir.

Yani bir noktadaki türetilmiş tasarım, bir nokta silinerek ve sadece bu nokta ile ilişkili blokları elde tutarak bulunan tasarımdır.

Teorem 1.17(Asmuss ve Key, 1993): $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$, $t \geq 2$ olan bir t-(v,k, λ) tasarımı ise bu takdirde herhangi bir $p \in \mathcal{P}$ için D_p, bir $(t-1)$-$(v-1, k-1, \lambda)$ tasarımıdır.

Örnek 1.18: Örnek 1.6'daki 3-(8, 4, 1) tasarımı göz önüne alınsın.

p = 1 noktası seçilerek verilen tasarımın türetilmiş tasarımı bulunursa, bloklar aşağıdaki gibi olur :

{3, 7, 8} , {2, 4, 8} , {5, 6, 8} , {2, 3, 6} , {2, 5, 7} , {3, 4, 5} , {4, 6, 7}

Bulunan türetilmiş tasarım bir 2-(7, 3, 1) tasarımıdır.

Eğer blok dikkate alınırsa tanım aşağıdaki gibi olacaktır.

Tanım 1.13: $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, $p \in \mathcal{P}$ ve $B \in \mathcal{B}$ olsun. $\mathcal{P}_B = \{p | p \in \mathcal{P},\ p \in B\}$, $\mathcal{B}_B = \mathcal{B} - \{B\}$ ise tanım kümeleri olsunlar. Bu durumda D'nin B noktasında D_B' ye daraltılması $D_B = (\mathcal{P}_B , \mathcal{B}_B)$ ile verilir.

D_B yapısı blok kesişimlerinin kesin bir düzgünlüğünü (uniformity) gerektirir. Bu düzgünlük ise tasarımların belirli sınıfları için özellikle de simetrik tasarımlar için meydana gelir.

Örneğin; simetrik bir 2-(v, k, λ) tasarımının türetilmiş tasarımı şöyle bulunur : Bir blok seçilir ve tasarımda göz ardı edilir. Daha sonra seçilen blokta bulunmayan bütün noktalar kalan diğer bloklardan silinir. Sonuçta elde edilen tasarım t-(v, b, r, k, λ) parametrelerine karşılık gelen bir 2-(k, λ, λ-1) tasarımını verecektir. Bu tasarımda b=v-1 ve r=k-1 olacaktır.

Örnek 1.19: Blokları aşağıdaki gibi olan simetrik bir 2-(11, 5, 2) tasarımı düşünülsün.

{1, 3, 4, 5, 9} , {2, 4, 5, 6, 10} , {0, 3, 5, 6, 7} , {1, 4, 6, 7, 8} , {2, 5, 7, 8, 9} , {3, 6, 8, 9, 10} , {0, 4, 7, 9, 10} , {0, 1, 5, 8, 10} , {0, 1, 2, 6, 9} , {1, 2, 3, 7, 10 } , {0, 2, 3, 4, 8}

İlk blok seçilerek örnekte anlatılan yöntem uygulanırsa türetilmiş tasarımın blokları şu şekilde bulunmuş olur :

{4, 5} , {3, 5} , {1, 4} , {5, 9} , {3, 9} , {4, 9} , {1, 5} , {1, 9} , {1, 3} , {3, 4}

Bulunan türetilmiş tasarım t =2, v =5, b =10, r =4, k =2, λ =1 parametreli bir 2-(5, 2, 1) tasarımıdır.

1.2.7 Artık t – Tasarımı

Artık (residual) yapılar dış (external) yapılar olarak bilinir. Türetilmiş tasarımda olduğu gibi bir noktada ya da bir blokta artık t-tasarımı bulunabilir.

Bir nokta dikkate alındığında tanım şöyle olur.

Tanım 1.14: $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, $p \in \mathcal{P}$ ve $B \in \mathcal{B}$ olsun. $\mathcal{P}_p = \mathcal{P} - \{p\}$ ve $\mathcal{B}^p = \mathcal{B} - \{B \mid p \in B\}$, $\mathcal{B}^p = \mathcal{B} - \mathcal{B}_p$ ile verilen $D^p = (\mathcal{P}_p, \mathcal{B}^p)$, D' nin p noktasındaki artığıdır (residualidir).

Teorem 1.18(Colbourn ve Dinitz, 1996): $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$, $t \geq 2$ olan bir t-(v,k,λ) tasarımı ise bu takdirde herhangi bir $p \in \mathcal{P}$ için D^p, bir $(t\text{-}1)$-$(v\text{-}1, k, \lambda\frac{(v-k)}{k-t+1})$ tasarımıdır.

Yani, D^p tasarımı D' nin p dışındaki bütün noktalarından ve p' yi içermeyen bloklarından oluşur.

Örnek 1.20: Örnek 1.6'daki 3-(8, 4, 1) tasarımı tekrar göz önüne alınsın.

p = 1 noktası seçilirse verilen tasarımın artık tasarımı aşağıdaki gibi olur :

{2, 3, 5, 8}, {3, 4, 6, 8}, {4, 5, 7, 8}, {2, 6, 7, 8}, {2, 3, 4, 7}, {2, 4, 5, 6}, {3, 5, 6, 7}

Bulunan artık tasarım bir 2-(7, 4, 2) tasarımıdır.

Eğer blok dikkate alınırsa tanım aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Tanım 1.15: $D = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, $p \in \mathcal{P}$ ve $B \in \mathcal{B}$ olsun. $\mathcal{P}^B = \mathcal{P} - \{p \mid p \in \mathcal{P}, p \in B\}$ ve $\mathcal{B}_B = \mathcal{B} - \{B\}$ ile verilen $D^B = (\mathcal{P}^B, \mathcal{B}_B)$, D' nin B bloğundaki artığıdır.

D^B yapısı D_B yapısında olduğu gibi blok kesişimlerinin kesin bir düzgünlüğünü (uniformity) gerektirir. Bu düzgünlük özellikle simetrik tasarımlar için meydana gelir.

Örneğin ; simetrik bir 2-(v, k, λ) tasarımının artık tasarımı söyle bulunur : Orijinal tasarımdan bir blok seçilip gözardı edilir ve kalan bloklardan bu bloğun noktalarının hepsi silinir. Sonuç artık tasarımdır. Orijinal tasarımın her bloğu seçilen bloklarla ortak λ noktaya sahiptir. Bu nedenle yeni blokların hepsi $k - \lambda$ genişliğindedir. Kalan her nokta $r = k$ blokta gözükür. Aynı zamanda kalan noktaların herhangi bir çiftiλ blokta yine birlikte gözükür. O zaman yeni tasarım $v - k$ noktaya ve sadece birkaç bloğa sahip olacaktır. Bulunan tasarım ise t-(v, b, r, k, λ) parametrelerine kaşılık gelen bir 2-(v-k, v-1, k, k-λ, λ) tasarımını verecektir. Bu tasarımda b=v-1 ve r= k olur.

Örnek 1.21: Örnek 1.19'deki 2-(11, 5, 2) simetrik tasarımı tekrar ele alınsın.

İlk blok seçildiğinde artık tasarımın blokları şöyle olur:

{2, 6, 10} , {0, 6, 7} , {6, 7, 8} , {2, 7, 8} , {6, 8, 10} , {0, 7, 10} , {0, 8, 10} , {0, 2, 6} , {2, 7, 10} , {0, 2, 8}

Bulunan artık tasarım $t = 2$, $v = 6$, $b = 10$, $r = 5$, $k = 3$, $\lambda = 2$ parametreli bir 2-(6, 3, 2) tasarımıdır.

Tanım 1.16: Bir ikidüzlem (λ=2 olan simetrik tasarımlara ikidüzlem denir(biplane)) v=b=(q^2+3q+4) / 2, r=k=q+2, λ=2 parametrelerine sahip 2-(v, k, λ) tasarımı ise artık tasarım ;

$$v = q(q+1) / 2 \,,\; b = (q+1)(q+2) / 2 \,,\; r = q+2 \,,\; k = q \,,\; \lambda = 2$$

parametrelerine sahiptir.

Örnek 1.21 bu bilgiyi sağlar.

Büyük t' ye sahip t-tasarımlarını oluşturmak için Anton Betten, Evi Haberberger, Reinhard Laue ve Alfred Wassermann tarafından DISCRETA paket programı hazırlanmıştır. Bu program C++ dilinde yazılmıştır ve t-tasarımlarının çeşitli parametreleri için çözüm veren algoritmalar içermektedir.

DISCRETA paket programı, isabet matrisi yerine Kramer-Mesner matrisini hesaplar, Kramer-Mesner metodu büyük t' ye sahip t-tasarımlarını oluşturmak için kullanılır; ayrıca otomorfizm gruplarından yararlanır. Bu programı çalıştırmak için DISCRETA ana penceresinde sırasıyla şu işlemler gerçekleştirilir :

(i) Bir otomorfizm grubu seçilir.

(ii) t-tasarımının parametreleri belirlenir.

(iii) Kramer-Mesner matrisinin hesaplanması için gerekli bilgiler yazılır.

(iv) Çözüm butonuna basılarak uygun bir çözüm bulunur.

Daha önceki çalışmalarda, $0 < t < 6$ şartını sağlayan her t için keyfi olmayan t-tasarımlarının olduğu bilinirdi. Bununla beraber son zamanlarda, $t \geq 6$ için t-tasarımlarının mevcut olduğu gösterilmiştir.

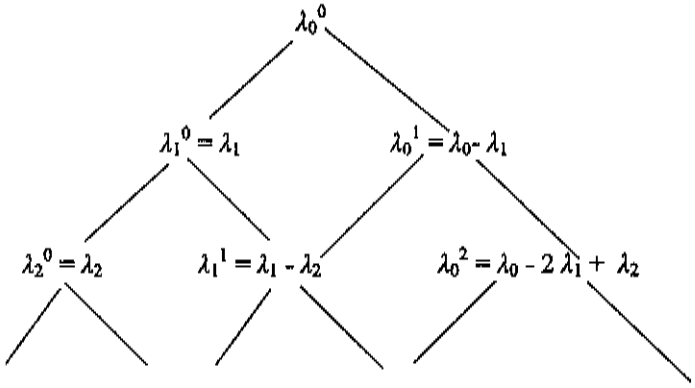
Alltop (1972), sonsuz bir sınıfı üretene kadar sadece sonlu sayıda 5-tasarımı biliniyordu ve keyfi olmayan hiçbir 6-tasarımı bilinmiyordu. İlk olarak Magliveras ve Leavitt (1984) ve daha sonra diğerleri belirli bazı 6-tasarımları bulmuşlar, ayrıca Teirlinck (1987,1989), bütün t değerleri için keyfi olmayan t-tasarımlarının mevcut olduğunu göstermiştir(Cameron ve Lint, 1991).

1.3 Paskal Üçgeni

"Pascal Üçgeni" (Pascal Triangle) ya da diğer adıyla " Kesişme Üçgeni " (Intersection Triangle), büyük' lar hesaplamak için kullanılır. Pascal üçgeni, t-tasarımlarını özellikle de Steiner sistemleri ($t \geq 2$, t-(v,k, 1)) incelemek için yararlıdır. Bu çeşit bir üçgen ilk olarak R.M.Wilson tarafından tanıtılmıştır (Assmus ve Key, 1993).

D, t-(v,k, λ) parametreli bir tasarım olsun v e i , j' nin negatif olmayan tamsayılar olduğu farzedilsin. Bu durumda $|I| = i$ ve $|J| = j$ olan ortak olmayan (disjoint) I ve J nokta kümeleri için I' yı içeren ve J ile ortak olmayan blok sayısı λ_i^j, $i + j \leq t$ şartını sağlayan nokta kümelerinden bağımsızdır. Bağımsızlık, basit bir geri dönüşümden ve $\lambda_i^0 = \lambda_i$ oluşundan anlaşılır.

Gerçekten büyük λ' lar Şekil 1.1' de gösterilen " Pascal üçgeni " ne uygundur.



$\lambda_3{}^0 = \lambda_3 \qquad \lambda_2{}^1 = \lambda_2 - \lambda_3 \qquad \lambda_1{}^2 = \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 \qquad \lambda_0{}^3 = \lambda_0 - 3\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3$

Şekil 1.1: Tasarımlar için Pascal üçgeni

(i, j). pozisyonda λ_i^j ve $0 \leq i \leq t$ için $\lambda_i{}^0 = \lambda_i$ ile birlikte

$$\lambda_i^j = \lambda_{i+j}^j + \lambda_i^{i+j} \qquad [1.16]$$

şeklindeki Pascal özelliği, binomial katsayılar için olan benzer geri dönüşümdeki yolla λ_i^j ' lerin tanımından doğrudan doğruya anlaşılır: $I \cup J$ ' de olmayan ilave bir nokta alınır. Böylece [1.16], $i + j \leq t$ için λ_i^j 'nin bağımsızlığını ortaya çıkarır.

Ayrıca eğer D, bir Steiner sistem ise o zaman bu tamsayılar, bazı B blokları için $I \cup J \subseteq B$' yi sağlayan, $i + j \leq k$ olan nokta kümelerinden bağımsız kalır ve $t \leq i$ için $\lambda_i{}^0 = 1$ yazılır. Tabi ki $\lambda_t = \lambda = 1$ olur. Bu ifade, tümevarımla kolaylıkla kurulabilir. O zaman üçgen, i' nin k^3 ' e karşı geldiği $(i = k^3)$ $(k+1)^{st}$ satıra genişletilebilir.

Ray-Chaudhuri ve Wilson (1975), içerme-dışarma prensibiyle (inclusion-exclusion principle) daha kısa bir formül vermişlerdir. Bu formül aşağıdaki gibidir.

Önerme 1.19(Stinson, 2004): $i + j \leq t$ koşulunu sağlayan i ve j negatif olmayan tamsayıları için, bir i-kümesini içeren ve bir j-kümesiyle ortak olmayan (disjoint) t-(v,k,λ) tasarımının blok sayısı;

$$\lambda_i{}^j = \lambda \binom{v-i-j}{k-i} \Big/ \binom{v-t}{k-t} \qquad [1.17]$$

dir.

Özel tasarımlar için basit bir husus, üçgenin en alt sol köşesinden başlayıp

$$\lambda_s = \lambda_{s+1}\,(v-s)\,/\,(k-s)$$

geri dönüşümü yoluyla en üst köşesini bulmak ve

$$\lambda_i^{\,j} = \lambda_{i+j}^{\,j} + \lambda_i^{\,j+i}$$

geri dönüşümü yoluyla üçgeni doldurmaktır. Örneğin; 2-(7,4,2) için Pascal üçgeni, [1.17] den bulunursa Şekil 1.2' deki gibi olur.

7

3 4

1 2 2

1 0 2 0

Şekil 1.2 2-(7,4,2) tasarımı için Pascal üçgeni

Tanım 1.17: D, $t \geq 2$ olan bir t-tasarımı ise D' nin " mertebesi ", $n = \lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_1^{\,1}$ dir. $t = 2$ ise mertebe $r - \lambda$ olur.

Fano düzlemi 2 mertebelidir. İkidüzlem'ler ise 4 mertebelidir. Bir 2-(v, k, λ) tasarımı için Pascal üçgeni ve merkezi olarak yerleştirilen n mertebesi Şekil 1.3' de gösterilmiştir Özellikle simetrik tasarımlar için n, en önemli parametredir.

b

r $b-r$

λ n $b-r-n$

Şekil 1.3:. 2-(v,k,λ) -tasarımı için Pascal üçgeni

Steiner sistemler için $t = 2$ iken k' nın n(n+1)' i bölmesini gerektiren bölünebilme kısıtlarının gözlemlenmesi ile mertebe, göze çarpan bir özelliğe sahiptir. Bu takdirde Fisher eşitsizliği $k \leq n+1$ ile ifade edilir ve bir 2-(k+n(k-1), k, 1) ile verilir. Herhangi belirli n için bir Steiner sistem gibi kabul edilen sonlu birçok uygun parametre kümesi vardır. Daha genel yaklaşım, k' yı sabitlemek ve n' yi sonsuz bir sınıf elde edecek şekilde değiştirmektir. Başlama noktası $k = 3$ ise bu tasarımlar Steiner Üçlü Sistemler (Steiner Triple Systems) olarak bilinir. Buradaki bölünebilme kısıtı mertebenin modül 3' e göre 0 veya 2' ye uygun olmasıdır ve parametreler 2-(3 +2n, 3, 1) dir ; ilk mümkün mertebe 2' dir ve bu mertebe bilinen bir tasarım olup, karşılık gelen geometrik yapı Fano düzlemidir. 3 mertebesi için 3 mertebeli afin düzleme ve 3 mertebeli projektif düzlemin artığına sahip olunur. Bütün kabul edilebilir mertebeler için Steiner üçlü sistemlerin mevcut olduğu gösterilmiştir. 5 mertebesi için iki farklı sistem vardır.

Örnek 1.22: 5-(24, 8, 1) Steiner sistemi (bu tasarıma Witt tasarımı denir) için Pascal üçgeni şekil 1.4'deki gibidir.

759

253 506

77 176 330

21 56 120 210

5 16 40 80 130

1 4 12 28 52 78

1 0 4 8 20 32 46

1 0 0 4 4 16 16 30

1 0 0 0 4 0 16 0 30

Şekil 1.4: 5-(24, 8, 1) tasarımı için Pascal üçgeni

Verilen üçgen, 5-(24, 8, 1) parametrelerine sahip herhangi bir tasarımda herhangi iki bloğun kesişiminin çift eleman sayısına sahip olduğunu gösterir

Teorem 1.20(Cameron ve Lint, 1991): D, bir t-(v,k,λ) tasarımı olsun. $0 \leq s < t$ olan bazı s' ler için s noktada kesişen hiçbir iki blok olmadığı farz edilsin. Bu takdirde aşağıdakiler vardır:

(i) $s = t-2$, D, bir projektif düzlem ya da onun bir genişlemesidir

(ii) $s = 0$, $k = t+1$, $v = 2t+3$

(iii) $s = 1$, $k = t+1$, $v = 2t+2$

(iv) $s = 0$, $t = 4$, $k = 7$, $v = 23$

(v) $s = 1$, $t = 5$, $k = 8$, $v = 24$

(ii) ve (iii) durumlarının bilinen örnekleri; 2-(7, 3, 1), 3-(8, 4, 1), 4-(11, 5, 1) ve 5-(12, 6, 1) tasarımlarıdır.

1.4 Notlar

Birçok küçük ve önemli t-tasarımları Schmalz(1993)de üretilmiştir. Ancak, tüm sonuçları ağır hesaplamalar dayalıydı ve bunun için paket program Kreher(1990)de geliştirilmiştir. Ayrıca daha güçlü bir algoritma Schmalz(1992,1993)de geliştirilmiştir. Betten ve ark. (1997) birçok 7-tasarım oluşturmuştur. Ayrıca bilinen 6-tasarım ve 7-tasarımları da küçük parametre kümeleri ile vermişlerdir. Daha sonra Betten ve ark.(1998) bazı 8-tasarımları da vermişlerdir. $t>2$ ve $v<31$ için genişletilmiş tablo Colbourn ve Dinitz(1996)ya bakılabilir.

1.5 Alıştırmalar

1) 5-(12,6,1) tasarımının var olduğu düşünülsün. Paskal teoremini kullanarak tüm i ve j (i+j<6) değerleri için λ_i^j değerlerini bulunuz.

2) 1-(14,6,3) tasarımını oluşturunuz.

3) Aşağıda verilen şıkları isabet yapısını dikkate alarak cevaplayınız

	Bloklar											
İşlemler	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
1	X			X			X				X	
2	X					X			X			X
3	X				X			X		X		
4		X		X					X	X		
5		X				X		X			X	
6		X			X		X					X
7			X	X				X				X
8			X			X	X			X		
9			X		X				X		X	

a) Bu yapıyı isabet yapısı olarak kabul eden tasarımın parametrelerini belirleyiniz.

b) Bu yapının Tümleyen tasarımını ve parametrelerini bulumuz.

c) Bu yapının Artık tasarımını ve parametrelerini bulumuz.

d) Bu yapının Dual tasarımını ve parametrelerini bulumuz.

4) A bir ilişki yapısı olsun. Her nokta r blokta ve herhangi iki nokta çifti tam olarak λ blokta görünüyor olsun. D'in tümleyeninde herhangi iki nokta çifti tam olarak b-2r+λ blokta göründüğünü gösteriniz.

5) Bir keyfi tasarımın herhangi bir genişlemesinin de keyfi tasarım olacağını gösteriniz.

1.6 Kaynaklar

1. Alltop W. O., 1972, An Infinite Class of 5-Designs. J. Comb. Theory, Ser. A 12(3): 390-395.

2. Assmus, E. F. Jr. and Key J. D., 1993, Designs and their Codes, Cambridge Tracts in Mathematics No. 103, Cambridge University Press.
3. Ajoodani-Namini A., 1996, Extending large sets of t-designs, J. Combin. Theory Ser. A 76, 139-144.
4. Beth, T. , Jungnickel, D. and Lenz, H.,1999, "Design Theory", Encyclopedia of Mathematics, Vol. 1, Second Edition, *Cambridge Univ. Press*, 1-29, 50-64, 77-78, 82-96, 101-129, 136-144, 234, 584-598.
5. Betten A., Kerber A. , Laue R. ve Wassermann A., 1998, Simple 8-designs with small parameters. Designs, Codes and Cryptography, 15,5-27.
6. Betten A., Laue R. ve Wassermann A.,1997, Some Simple 7-designs. In: Geometry, Combinatorial designs and related strutures(eds. J.W.P. Hirschfeld, S.S. Magliveras and M.J de Resmini), Cambridge University Pres, Cambridge, s 15-25.
7. Cameron, P. J. and Van Lint, J. H., 1991, Designs, Graphs, Codes and Their Links. Cambridge University Press.
8. Colbourn, C. J. and Dinitz, J. H., 1996, "The CRC Handbook of Combinatorial Designs", *CRC Press*, Boca Raton, New York, London, Tokyo.
9. Dembowski, P., 1997, "Finite Geometries", Springer-Verlag, Reprint of The 1968 Edition, V-VII, 4-5.
10. Ho, Y.S. and Mendelsohn, N.S., 1974, "Inequalities for t-Designs with Repeated Blocks", *Aequationes Mathematicae*, 10 : 212-222.
11. Hughes, D.R. and Pipper, F.C., Design Theory, 1985, Cambridge University Press, Cambridge.
12. Kreher D.L., 1990, Design theory toolchest-user manual and report. In: Coding Theory and Design Theory, part II(ed. D.K. Ray Chaudhuri), Springer, New York, s. 227-235.
13. Magliveras, S.S, Leavitt, D. W., 1984, Simple 6-(33, 8, 36) Designs from PΓL(2,32). Computational Group Theory M. D. Atkinson ed., Academic Press 337–352
14. Ray-Chaudhuri D. K. and Wilson R. M., 1975, On t-Designs, Osaka _T. Math. 12:737-744.

15. Schmalz, B., 1993, The t-designs with prescibed automorphism group, new simple t-designs. J. Comb.Des. 1, 125-170.
16. Stinson D.R.,2004, Combinatorial Designs:Construction and analysis, Springer, New York
17. Street, A.P. and Street, D.J., 1987, "Combinatorics of Experimental Design" Clarendon Press, Oxford, UK.
18. Teirlinck, L., 1987, Non-trivial t-designs without repeated blocks exist for all t." Discrete Math. 65, 301-311.
19. Teirlinck, L., 1989, Locally trivial t-designs and t-designs without repeated blocks." Discrete Math. 77 , 345-356.
20. Wilson R.M., 1973, The necessary conditions for t-designs are sufficient for something. Utilitas Mathematica, 4, 207-215.

2. DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARI

t-tasarımlarında t değeri değiştikçe özel isimlerle anılan ve kendilerine has özellikleri olan birtakım tasarımlara ulaşılır. Bu tasarımlar geniş bir çeşitlilik gösterir. O nedenle kitapta bunların hepsi verilmeyecek, sadece en önemlileri incelenecektir. Ayrıca bu tasarımların özelliklerini belirtmek açısından bunlarla ilgili diğer birkaç tasarıma da değinilecektir. İncelenecek tasarımlar şunlardır: dengeli tamamlanmamış blok tasarımları (DTBT), simetrik dengeli tamamlanmamış blok tasarımları (SDTBT), bağlantılı tasarımlar, yeniden çözülebilir tasarımlar, Steiner sistemler, Hadamard tasarımlar, yarı-simetrik tasarımlar.

2.1 Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımların Tanım ve Özellikleri

Tanım 2.1: Bütün blokları aynı sayıda noktaya (işleme) sahip olan ve bütün noktaları aynı sayıda blokta gözüken v, b, r, k, λ parametreli 2-tasarıma " blok tasarımı " veya kısaca " tasarım " denir.

Tanım 2.2: Bir blok tasarımında $1< k < v$ koşulu sağlanıyorsa bu tasarım "dengeli tamamlanmamış blok tasarımı " (balanced incomplete block design) olarak adlandırılır.

Burdaki " dengeli " sözcüğü 2-tasarım koşullarına ve " tamamlanmamış " sözcüğü ise $k< v$ koşuluna işaret eder.

DTBT aslında bir 2-tasarımı olduğundan λ, $p \neq q$ olmak üzere $(p, q) \in \binom{v}{2}$ çiftinin birlikte göründüğü ortak blok sayısını belirtir.

Bir DTBT farklı şekillerde gösterilebilir: $B[v, k, \lambda]$, $B[k, \lambda; v]$, $S_\lambda(2, k; v)$, $S_{\lambda 2}(2, k, v)$, $S(\lambda; 2, k, v)$. Ama bunlardan en genel olarak kullanılanı $B[v, k, \lambda]$ dır.

Bir DTBT aşağıdaki özellikleri sağlayan bir tasarımdır;

(i) $k \geq 2$ dir.

(ii) Her işlem bir blokta bir kere gözükür.

(iii) Her işlem eşit sayıda gözükür (yani r ' ler aynıdır)

(iv) Her işlem çifti aynı sayıda blokta gözükür (yani λ ' lar aynıdır)

DTBT' ler Yates (1935) tarafından önerilmiştir. Ayrıca Yates (1936), bazı küçük DTBT' lerin oluşturulmasını tartışmıştır.

Yates' in (1936) çalışmaları daha sonraki araştırmacılar için genel bir zemin sağlamıştır. Bose' un (1939) oluşumları (constructions) ve onu takip eden çalışmalar DTBT kavramının zenginliğini göstermişlerdir.

DTBT oluşturmanın çeşitli metotları vardır. Bu metotlar Ragvaharao (1971) ve Street ve Street' de (1987) bulunabilir.

Teorem 2.1(Street ve Street, 1987): A, bir DTBT' nin isabet matrisi ise ;

$$AA^T = \begin{bmatrix} r & \lambda & \lambda & . & . & . & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & & & & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & & & & \lambda \\ . & & & . & & & . \\ . & & & & . & & . \\ . & & & & & . & . \\ \lambda & \lambda & \lambda & . & . & . & r \end{bmatrix} = (r-\lambda)I + \lambda J$$

dir. Burada I, v x v birim matris ve J de 1' lerden oluşan v x v matristir.

Bu sonuç, DTBT parametreleri üzerinde bir kısıt olan Fisher eşitsizliğini ispatlamada kullanılabilir.

Teorem 2.2(Stinson, 2004): $(v,b,r,k,\lambda)-$DTBT $b \geq v$ olmalıdır (Fisher Eşitsizliği).

Not: $b \geq v$ nün sonucu, $r \geq k$ ve $\lambda(v-1) \geq k^2 - k$ gibi diğer eşdeğer yollarla da ifade edilebilir.

İspat: $b < v$ olmak üzere A, tasarımın isabet matrisi olsun. 0'dan oluşan $v-b$ bloklarını, $v \times v$ matris B 'yi elde etmek için A 'ya eklensin. 0'dan oluşan bu ekstra bloklar iç çarpımı değiştirmediği için $AA^T = BB^T$ olmalıdır. Determinantı alarak $\det(AA^T) = \det(BB^T) = (\det B)(\det B^T) = 0$ olduğunu görülür, çünkü 0'dan oluşan bloklardan dolayı $\det B = 0$ dır. Teorem 2.1'ten

$$\det(AA^T) = \det\begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & r \end{vmatrix}$$

elde edilir. Bu determinant yapısında ilk sütunu diğer her bir sütundan çıkararak ve ardından ilk satırı her satıra ekleyerek aşağıdaki determinant elde edilir.

$$\det(AA^T) = \det\begin{vmatrix} r+(v-1)\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & r+(v-1)\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & r+(v-1)\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & r+(v-1)\lambda \end{vmatrix}$$

Böylece

$$\det(AA^T) = \left[r+(v-1)\lambda\right](r-\lambda)^{v-1} \qquad [2.1]$$

bulunur. Fakat r, v ve λ hepsi pozitif olduğu için $r+(v-1)\lambda > 0$ dır ve $k < v$ olduğu için Teorem 1.1 ve Teorem 1.2 $r > \lambda$ olduğunu ifade eder. Böylece [2.1]'in sağındaki çarpım 0'a eşit olamaz.

Eğer DTBT da $v = b$ ve $k = r$ elde edilirse DTBT nın simetrik ya da kare olduğu söylenir. Simetrik DTBT lar her zaman $(v,k,\lambda)-$tasarımları gibi tanımlanır. DTBT nın simetriği için parametreler üzerinde toplanabilme özelliği vardır.

Örnek olarak parametre seti (16,6,1) alınsın. (16,6,1)-DTBT $r = 3$ dür, fakat $r < k$ sonucu ortaya çıkar, o halde (16,6,1)-DTBT mevcut değildir.

Örnek 2.1: $v = b = 7$, $r = k = 3$ parametreli tamamlanmamış bir blok tasarımı aşağıdaki bloklarla verilsin :

{1, 2, 3} , {2, 3, 4} , {3, 4, 5} , {4, 5, 6} , {5, 6, 0} , {6, 0, 1} , {0, 1, 2}

$k = 3 < v = 7$ olduğundan tasarım tamamlanmamıştır. Fakat $v = 7 \leq b = 7$ olmasına rağmen dengeli değildir. Çünkü işlem çiftleri aynı sayıda blokta meydana gelmez. Yani; 01, 12, ...vd. işlem çiftleri iki blokta ; 02, 13, ...vd. işlem çiftleri bir blokta gözükür. 03, 14, ...vd. işlem çiftleri ise hiçbir blokta gözükmez.

Örnek 2.2: {1, 2, 3}, {2, 3, 4}, {3, 4, 1}, {4, 1, 2} blokları ile verilen tasarım $v = 4$, $b = 4, r = 3, \ k = 3, \lambda = 2$ parametreli bir DTBTdir. Ayrıca ikidüzlem oluşturur.

Teorem 2.3 (Tonchev,1988): (v, b, r, k, λ) parametreli bir DTBT' nin parametreleri arasında aşağıdaki eşitlikler vardır;

(i) $b\,k = v\,r$ [2.2]

(ii) $r\,(k\text{-}1) = \lambda\,(v\text{-}1)$ [2.3].

İspat: (i) (p, B) çiftlerinin kümesi düşünülsün. Burada p, bir işlem ve B de p' yi içeren bir bloktur. Bu küme iki yoldan hesaplanarak eşitliğe ulaşılabilir. p için v mümkün değer vardır. Bunlardan her biri r blokta gözüktüğünden $v.r$, bu çiftlerin sayısını verecektir. Diğer taraftan her biri k işlem içeren b blok vardır. Dolayısıyla $b.k$ aynı zamanda bu çiftlerin sayısını verir.

(ii) Bu eşitlik yine hesaplamayla bulunabilir. p denilen belirli bir işlem alınsın ve {p, y} işlem çiftlerinin sayısı hesaplansın. p ve y bazı bloklarda birlikte gözükür, eğer çift birden fazla gözükürse çarpılarak hesaplanır. y' nin $v - 1$ mümkün seçeneği vardır ve bu şekildeki her bir çift λ blokta birlikte gözükecektir. Bu nedenle $\lambda\,(v\text{-}1)$ tane böyle çift vardır. Diğer taraftan p, r blokta gözükür ve böyle bir blokta k-1 tane diğer elemanlarla birlikte çiftleştirilmiş olabilir. Böylece $r\,(k\text{-}1) = \lambda\,(v\text{-}1)$ olur.

Parametreler üzerindeki bu koşullar, eğer v, k ve λ biliniyorsa r ve b nin hesaplanabileceğini ifade eder.

[2.3]den r çekilirse;

$$r = \lambda(v\text{-}1) / (k\text{-}1)$$

olur. Bu ifade [2.3]de yerine yazılırsa da ;

$$b = \lambda v(v\text{-}1) / k(k\text{-}1)$$

bulunur.

Sonuç 2.4: Bir DTBT' nin varlığı için aşağıdaki koşullar gereklidir:

(i) $\lambda(v\text{-}1) \equiv 0 \pmod{k\text{-}1}$

(ii) $\lambda v(v\text{-}1) \equiv 0 \pmod{k(k\text{-}1)}$

Teorem 2.5 (Beth ve Diğerleri, 1999)**:** Bir B[v, k, λ] tasarımının dualinin yine bir B[v, k, λ] tasarımı olması için, gerek ve yeter koşul $v = b$ (yani simetrik) olmasıdır.

Herhangi bir DTBT için, [2.1] de verilen $b \geq v$ (Fisher Eşitsizliği) sağlanır ve [2.2] den $b \geq v$ ise $r \geq k$ dır.

Örnek 2.3: 2-(16, 6, 1) , 2-(21, 6, 1) ve 2-(25, 10, 3) tasarımları, [2.2] ve [2.3]de verilen koşulları yerine getirmesine rağmen mevcut değildir. Çünkü bu tasarımlarda Fisher eşitsizliği sağlanmamaktadır. O nedenle bu tasarımlar DTBT olamazlar.

Bir DTBT' de $b \geq v$ Fisher eşitsizliği sağlanır. Ancak dual tasarımlarda, blokların ve işlemlerin karşılıklı değişme rolleri olduğundan genelde bir DTBT ve onun dualinin

her ikisi için Fisher eşitsizliği sağlanmayabilir. Netice olarak dual tasarım dengeli olmayabilir, yani birden fazla λ değeri bulunabilir. Yalnız $v = b$ durumu bir istisnadır, bu durumda bir DTBT ve onun dualinin her ikisi için Fisher eşitsizliği sağlanır.

Fisher eşitsizliği, $v \geq k+1$ varsayımı altında bir B[v, k, λ]' nın b tane bloğunun en azından v tane olduğunu öne sürer. Petrenjuk (1968), $v \geq k+2$ olan herhangi bir 4-(v, k, λ) için $b \geq \binom{v}{2}$ olduğunu ispatlamış ve $v \geq k+s$ olan herhangi bir 2s-(v, k, λ) için de $b \geq \binom{v}{s}$ olduğunu varsaymıştır. Bu durum belirli t-tasarımlarının varolmadığını gösterir. Örneğin Petrenjuk eşitsizliği, λ_i' lerin $(0 \leq i \leq 4)$ kesirli olmamasına rağmen 4-(79, 22, 5)' in varolmadığını gösterir. Kuramsal bir 4-[(k-1)(k-2) / 2, k, 2]' nin $b = \binom{v}{2}$' yi sağladığına dikkat edilebilir, ($k \equiv 1 \pmod 4$ olduğunda λ_i' ler kesirli değildir) ama sonuç 2.4'e göre böyle tasarımlar yoktur. $b \geq \binom{v}{3}$ eşitsizliği;

$v = 120m$

$k = 60m$

$\lambda = (20m-1)(15m-1)(12m-1)$

olan 6-tasarımlarının bütün ailesinin olasılı olmadığına işaret eder(kesirli olmayan λ_i' ler için).

Büyük t değerine sahip t-tasarımları için Fisher eşitsizliğinin bir genelleştirmesi verilebilir.

2.1.1. Fisher eşitsizliğinin genelleştirmesi

Teorem 2.6(Beth ve Diğerleri, 1999): t çift (t=2s) tamsayısına ve $v \geq k+s$ eşitsizliğine sahip bir t-(v, k, λ) tasarımının varlığı ,

$$b \geq \binom{v}{s}$$

olduğunu belirtir.

Sonuç 2.7: t'nin tek sayı (t = 2s+1) olduğu bir t-(v, k, λ) tasarımının varlığı ve (v-1)$\geq k$+s aşağıdaki eşitsizliği belirtir:

$$b \geq \lambda \frac{\binom{v}{2s+1}}{\binom{k}{2s+1}} \geq \lambda \frac{\binom{v-1}{2s}}{\binom{k-1}{2s}} + \binom{v-1}{s} \geq 2\binom{v-1}{s}$$

Teorem 2.8(Stinson, 2004): D = (P, B, I), t=2s ve $v \geq k$+s olan bir t-(v, k, λ) olsun. Bazı pozitif λ_i tamsayıları için her (P, B_i , I $\cap$(P x B_i)) alt yapısı bir s-(v, k, λ_i) olacak şekilde bir $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_r$ parçalanımı mevcutsa bu takdirde ;

$$b = |B| \geq \binom{v}{s} + r - 1$$

dir.

Örnek 2.4: 2-(8, 4, 3) (b=14) tasarımında s=1 dir. Dolayısıyla $v \geq k+s$ $b \geq \binom{v}{s} + r - 1$ eşitsizlikleri sağlanır.

Örnek 2.5: 3-(8, 4, 1) (b = 14) tasarımında s=1 dir ve (v-1) $\geq k+s$ eşitsizliği sağlanır. Bu da $b \geq 2\binom{v-1}{s}$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterir.

Teorem 2.9(Stinson, 2004): $(v,k,\lambda_1)-\text{DTBT}$ ve $(v,k,\lambda_2)-\text{DTBT}$ olsun. Bu takdirde $(v,k,\lambda_1+\lambda_2)-\text{DTBT}$ da mevcuttur.

Özel durum olarak eğer bir $(v,k,\lambda)-\text{DTBT}$ 'ında her bloğun iki kopyasını alınırsa, bir $(v,k,2\lambda)-\text{DTBT}$ elde edilir.

"Toplam Yapı" nın uygulamasını tanımlamak için $(16,6,\lambda)-\text{DTBT}$ göz önüne alınır. $(16,6,1)-\text{DTBT}$ mevcut değildir. Bununla beraber, $(16,6,2)-\text{DTBT}$ ve $(16,6,3)-\text{DTBT}$ ikisinin de mevcut olduğu bilinir. Toplam yapının uygulaması ile $\lambda > 1$ için $(16,6,\lambda)-\text{DTBT}$ 'nın mevcut olduğu görülür.

Örnek 2.6 (9,3,1)-DTBT 'ı kullanılarak, (9,3,2)-DTBT 'nın elde edilişi verilebilir.

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1} \Rightarrow \quad 1 = \frac{r(2)}{8} \quad r = 4$$

$$b = \frac{rv}{k} = \frac{4 \times 9}{3} = 12$$

(9,3,1)-DTBT 'nın diğer iki parametresi $r = 4$ ve $b = 12$ olarak hesaplanmıştır.

	Bloklar											
işlemler	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
1	X			X			X				X	
2	X					X			X			X
3	X				X			X		X		
4		X		X					X	X		
5		X				X		X			X	
6		X			X		X					X
7			X	X				X				X
8			X			X	X			X		
9			X		X				X		X	

Çizelge 2.1 (9,3,1)-DTBT

Aynı şekilde yeni oluşturulan (9,3,2)-DTBT 'nın diğer iki parametresi,

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1} \Rightarrow \quad 2 = \frac{r(2)}{8} \quad r = 8$$

$$b = \frac{rv}{k} = \frac{8 \times 9}{3} = 24$$

$r = 8$ ve $b = 24$ olarak hesaplanmıştır.

	A_i (i=1,2,3,4)																							
İşlemler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	X			X			X			X			X			X					X		X	
2	X				X			X				X	X				X			X				X
3	X					X			X		X		X					X	X			X		
4		X		X					X			X		X		X				X		X		
5		X			X		X				X			X			X		X				X	
6		X				X		X		X				X				X			X			X
7			X	X				X			X				X	X			X					X
8			X		X				X	X					X		X				X	X		
9			X			X	X					X			X			X		X			X	

Çizelge 2.2 (9,3,2)-DTBT

(1,7) çifti, A_4 bloğu ve A_{16} bloğunda görülmektedir, (5,6) çifti ise A_2 ve A_{14} bloklarında görülmektedir. Diğer tüm çiftler dikkate alındığında $\lambda = 2$ elde edilir.

İkinci yapı "tamamlanış (complementation)" olarak adlandırılır. (X, A) bir DTBT olsun ve $X \setminus A$ ile $A \in A$ her blok tekrar yerine koyulsun. Sonuç yine aşağıdaki Teoremde olduğu gibi bir DTBT dır.

Teorem 2.10(Stinson, 2004) : Bir $(v,b,r,k,\lambda)-$DTBT mevcut ise,
$(v, b, b-r, v-k, b-2r+\lambda)-$DTBT da mevcuttur.

İspat: (X, A) bir $(v,b,r,k,\lambda)-$DTBT olsun.

$$(X, \{X / A : A \in A\})$$

yapısının bir DTBT olduğu gösterilebilir. Açıkça, bu isabet yapısı v noktaya ve b bloğa sahiptir. Her blok, $v-k$ nokta içerir ve her nokta $b-r$ blokta ortaya çıkar. Noktaların her çiftinin $b-2r+\lambda$ blokta olduğunu göstermek gereklidir.

$x, y \in X$, $x \neq y$ olmak üzere,

$$a_1 = |\{A \in A : x, y \in A\}|,$$
$$a_2 = |\{A \in A : x \in A, y \notin A\}|,$$
$$a_3 = |\{A \in A : x \notin A, y \in A\}|, ve$$
$$a_4 = |\{A \in A : x, y \notin A\}|.$$

Ayrıca,

$$a_1 = \lambda,$$
$$a_1 + a_2 = r,$$
$$a_1 + a_3 = r \text{ ve}$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b$$

olduğu kolayca görülür. Bu dört eşitlik çözülerek, $a_4 = b - 2r + \lambda$ elde edilir.

Örneğin, (7,3,1)-DTBT 'nın tümleyeni (7,4,2)-DTBT 'dır ve (9,3,1)-DTBT 'nın tümleyeni (9,6,5)-DTBT 'dır. Teorem 2.10'ya göre DTBT 'larının $k \leq v/2$ ile çalışılması yeterlidir.

(7,3,1)-DTBT için

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1} \Rightarrow 1 = \frac{r(2)}{6} \quad r = 3 \quad , \quad b = \frac{rv}{k} = \frac{3 \times 7}{3} = 7$$
$$\lambda = b - 2r + 1 = 7 - 6 + 1 = 2$$

(7,4,2)-DTBT bulunur.

(9,3,1)-DTBT için

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1} \Rightarrow 1 = \frac{r(2)}{8} \quad r = 4 \quad , \quad b = \frac{rv}{k} = \frac{4 \times 9}{3} = 12$$
$$\lambda = b - 2r + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$$

(9,6,5)-DTBT elde edilir.

2.1.2. Fark Kümeleri

Dengeli Tamamlanmamış blok tasarımlarını kurmanın en önemli yollarından biri fark kümelerini meydana getirmektir.

Tanım 2.3: G etkisiz elemanı 0 ile gösterilen v merteben sonlu grup alınsın. $2 \leq v \leq k$ olacak şekilde k ve λ pozitif tamsayı olsun. (G,+)daki bir (v,k,λ) fark kümesi aşağıdaki koşulları sağlayan $H \subseteq G$ alt kümesidir.

1) $|H| = k$

2) $\{x\text{-}y{:}x,y \in H, x \neq y\}$ çoklu kümesi G'nin 0dan farklı her elemanı tam olarak içerir.

Bu durumda(v,k, λ) fark kümesi var ise λ (v-1)=k(k-1) koşulu sağlanır.

Fark kümelerini meydana getirirken kullanılan birçok yöntem vardır Burada en önemli 2 tanesinden bahsedilecektir.

Kuadratik Artık Fark Kümeleri

q tek ve asal sayı kuvveti olmak üzere F_q sonlu cismi üzerindeki kuadratik artıklar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$QR(q) = \{z^2 : z \in F_q, z \neq 0\}$$

F_q'nun kuadratik olmayan elemanı;

$$QNR(q) = F_q / \{QR(q) \cup 0\}$$

şeklinde verilir. Kuadratik artıklar şu özellikleri sağlar;

$xy \in QR(q)$ eğer x,y $\in QR(q)$
$xy \in QR(q)$ eğer x,y $\in QNR(q)$
$xy \in QNR(q)$ eğer x $\in QR(q), y \in QNR(q)$

Örnek 2.7: q=11 olmak üzere elde edilen fark kümesinin elemanları aşağıdaki gibi olacaktır.

$1^2 = 1$ $2^2 = 4$
$3^2 = 9$ $4^2 = 5$
$5^2 = 3$ $6^2 = 3$
$7^2 = 5$ $8^2 = 9$
$9^2 = 4$ $10^2 = 1$

Bu durumda fark kümesinin elemanları H: (1,4,9,5,3)dan meydana gelmektedir.
Kuadratik artık fark kümelerinden elde edilen tasarımlar aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

Teorem 2.11(Stinson,2004): $q \equiv 3 \bmod 4$ olan bir asal sayı olsun QR(q) bir (q,(q-1)/2,(q-3)/4) fark kümesidir.

Örnek 2.8: *H*: (1,4,9,5,3) bir fark kümesi olmak üzere bu fark kümesi yardımıyla meydana gelen blokları bulmak için fark kümesine mod11'e göre 1 eklenir. Örneğin buradaki ilk blok B_1=(1,4,9,3,5), ikinci blok ise noktalara 1 ekleyerek bulunur.

B_2={2,5,10,4,6} B_6={3,6,8,9,10}

B_3={3,6,0,5,7} B_7= {0,4,7,9,10}

B_4= {1,4,6,7,8} B_8= {0,1,5,8,10}

B_5= {2,5,7,8,9} B_9= {0,1,2,6,9}

B_{10}= {1,2,3,7,10} B_{11}= {0,2,3,4,8}

Tasarıma ilişkin isabet matrisi ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elde edilen tasarım 2-(11,5,2) tasarımıdır.

Singer Fark Kümeleri

Fark kümelerin elde etmenin diğer yolu Singer fark kümeleri yöntemidir.Bu fark kümeleri asal mertebedeki projektif düzlemin kurulmasında kullanılır.

Teorem 2.12(Stinson,2004): q asal kuvvet olmak üzere $(Z_{q^2+q+1},+)$'da $(q^2+q+1,q+1,1)$ olan bir fark kümesi vardır.

Bulunan H kümesinin fark kümesi olması için gerekli koşul çarpan teoremi verir ve aşağıda ifade edildiği gibidir.

Teorem 2.13(Stinson,2004: H, v.üncü merteben Değişmeli (Abelian) grup (G,+)'da bulunan (v,k,λ)fark kümei olsun. m bir tam sayı iken aşağıdaki tanım yapılabilir.

$$m\mathrm{H} = \{mx : x \in \mathrm{H}\}$$

Burada mx, m tane x'in toplamıdır. Eğer bazı $g \in G$ için;

$$mH = H + g$$

sağlanıyorsa m'ye H'nin çarpanı denir. Ayrıca $mH=H$ ise H'ye m çarpanı tarafından sabitlenmiştir denir)(Çarpan Teoremi).

Örnek 2.9: q=13 olmak üzere D: (0,1,5,11) ise $3H=(0,2,3,7)=H+2$ burada H'nin çarpanı 3'tür. Ayrıca q=7 olmak üzere H:(1,2,4) m=2 için yine bir (1,2,4) olduğu için m=2 H için sabitlenmiştir denir. Fark kümeleri üzerine daha fazla bilgi için Lander(1983)e bakılabilir.

Burada dikkat edilmesi gereken en önemli nokta sadece bir m sayısı için eşitlik sağlanır. Bir başka değişle herhangi bir m için teoremin sağlamamış olması bulunan fark kümesinin uygun olmadığı anlamına gelmez.

2.2. Simetrik Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları

Tanım 2.4: Bir DTBT' de $v = b$ eşitliği varsa tasarıma simetrik dengeli tamamlanmamış blok tasarımı (SDTBT) denir.

Bazı kaynaklarda SDTBT terimi yerine kare dengeli tamamlanmamış blok tasarımı terimi de kullanılabilir. Ama en yaygın kullanımı SDTBT şeklindedir.

SDTBT' ler SB[v, k, λ] veya SB[k, λ; v] şeklinde gösterilir, ya da DTBT gösterim şekillerinin başına simetrik ifadesi yazılarak kullanılır.

SDTBT' lerin varlığı Sproott (1962) ve Raghavarao(1971)da bulunabilir. Ayrıca SDTBT'lerin varolmayışı Chowla ve Ryser (1950) ve Shrikhande (1950) tarafından iki farklı metotla gösterilmiştir. SDTBT üzerine bilinen sonuçların bir listesi Dembowiski(1997)de verilmiştir. Simetrik tasarımların bir sonsuz ailesine ilişkin çalışma Mitehell(1979)a aittir. Çalışmasında q>2 bir asal kuvvet olduğunda q-1 mertebeli bir afin düzlemin varlığını göstermiştir. Böylece $2\text{-}((q\text{-}1)(q^h\text{-}1), q^{h\text{-}1}(q\text{-}1), q^{h\text{-}1})$ güçlü bölünebilir (strongly divisible) tasarımı mevcuttur. Burada k>1 herhangi bir tamsayıdır. Ayrıca bu yarı-artık simetrik tasarımların gömülebilir(emmbeddable) olduğunu ve böylece $2\text{-}(q^{h+1}\text{-}q+1, q^h, q^{h\text{-}1})$ simetrik tasarımlarının bir sonsuz ailesinin varlığını vurgulamıştır.

Teorem 2.14(Street ve Street,1987): Bir SDTBT' nin duali de yine bir SDTBT' dir.

Örnek 2.10: {1, 2, 3, 4}, {1, 3, 4, 5}, {1, 4, 5, 2}, {1, 5, 2, 3}, {2, 3, 4, 5} blokları ile verilen SB[5, 4, 3] tasarımının duali alındığında ;

{1, 2, 3, 4}, {1, 3, 4, 5}, {1, 2, 4, 5}, {1, 2, 3, 5}, {2, 3, 4, 5}

blokları bulunur. Bu bloklar yine bir SB[5, 4, 3] oluşturur. Ayrıca dual tasarımın blokları orijinal tasarımın blokları ile aynı olduğundan verilen tasarım self-dual dir.

Teorem 2.15(Beth ve diğerleri, 1999): Bir SDTBT' de $(k-\lambda)^{v-1}$, kare bir sayıdır.

Örnek 2.11: SB[7, 4, 2] tasarımında, $(k-\lambda)^{v-1} = (4-2)^{7-1} = 2^6 = 64$ dür. 64 ise 8' in karesidir.

Yardımcı Teorem 2.16(Beth ve Diğerleri, 1999): 2-(v, k, λ) tasarımı $1 < k < v-1$ olan bir SDTBT ise $n = k - \lambda$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$4n - 1 \leq v \leq n^2 + n + 1 \qquad [2.4]$$

Örnek 2.12: SB[11, 5, 2] tasarımında $1< k=5 \leq v-1=10$ ve $n = k-\lambda=5-2=3$ dür. Dolayısıyla [2.4] eşitsizliği sağlanır : $4n-1=11 \leq v = 11 \leq n^2 + n + 1 = 13$

Yardımcı Teorem 2.17(Beth ve Diğerleri, 1999): Bir SB[4n, n+ λ, λ] tasarımı mevcutsa bu takdirde $n = u^2$, kare bir sayıdır ve $\lambda = u^2 \pm u$ dur. Eğer $v \geq 2k$ ise bu tasarım şu şekilde ifade edilebilir:

$$2\text{-}(v, k, \lambda) = 2\text{-}(4u^2, 2u^2\text{-}u, u^2\text{-}u) \qquad [2.5]$$

Örnek 2.13: Bir SB[16, 6, 2] tasarımı mevcuttur. Bu tasarımda $n = 4 = 2^2$ ve $\lambda = 2^2 - 2$ dir. Aynı zamanda $v = 16 \geq 2k = 12$ olduğundan tasarım [2.5]' de verilen şekilde ifade edilebilir.

Teorem 2.18 (BRC Teoremi, Blake ve Mullin, 1976): Bir SDTBT' nin varlığı için aşağıdaki koşullar gereklidir :

(i) v çift ise $k - \lambda$ bir tamsayının karesidir $(k > \lambda)$

(ii) v tek ise $x^2 = (k-\lambda)y^2 + (-1)^{(v-1)/2}\lambda z^2$ eşitliği x, y, z tamsayılarının hepsinin birden sıfır olmadığı bir çözüme sahiptir(Bruck-Ryser-Chowla Teoremi).

Bu teorem λ=1 özel durumu için Bruck ve Ryser (1949) tarafından ispatlanmıştır. Genel durum ispatı ise Chowla ve Ryser'a (1950) aittir.

Calderbank(1994), Bruck-Ryser-Chowla teoreminin simetrik olmayan tasarımlara bir genelleştirmesini vermiştir.

Bruck-Ryser-Chowla teoremi 50 yıl önce ispatlandı. Bu ispattan sonra simetrik DTBT'in varlığı için hiç gerekli koşul ispatlanmamıştır.

Örnek 2.14: SB[6, 5, 4] tasarımında $v = 6$ çift bir sayıdır. $k - \lambda$ hesaplanırsa; 5-4 = 1 olur ve bu bilindiği gibi kendisinin karesine eşittir.

Örnek 2.15: SB[22, 7, 2] tasarımı, $k - \lambda = 7-2 = 5$ bir tamsayının karesi olmadığından dolayı mevcut değildir.

Yine aynı nedenden dolayı SB[43, 7, 1], SB[93, 24, 6], SB[103, 18, 3] tasarımları mevcut değildir.

Teorem 2.19(Beth ve Diğerleri, 1999): $n = k - \lambda \equiv 2 \pmod 4$ olan bir SDTBT sadece $v \equiv \pm 1 \pmod 8$ için mevcuttur.

BRC teoremi bir tasarımın varlığı için yeterli değildir. BRC teoremini sağlamakla birlikte tasarım oluşturmayan parameter setleri mevcuttur.

Hall(1986), sabitlenmiş her $\lambda > 1$ değeri için sadece sonlu sayıda simetrik 2-(v, k, λ) tasarımı olduğunu varsaymıştır. Örneğin; $k = 3, 4, 5, 6, 9, 11$ ve 13 değerleri için ikidüzlemler(biplane); benzer şekilde, $\lambda = 3$ olan bilinen simetrik tasarımlar $k = 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15$' e sahiptir.

SDTBT' lerden DTBT' lerin oluşturulması için genel bir metot vardır. Bu metot, aşağıdaki teoremin ispatında anlatılmıştır.

Teorem 2.20(Srivastav, 1988): v, r ve λ parametreli SDTBT' nin varlığı; v , $v(v\text{-}1) / 2$, $k(k\text{-}1) / 2$, λ ve $\lambda(\lambda\text{-}1) / 2$ parametreli DTBT $\overline{D}$ ' nin varlığını yani B[v, λ, $\lambda(\lambda\text{-}1) / 2$]' yi belirtir.

İspat: SDTBT'ye ait D içindeki b bloğu ; 1, 2,...,v (herhangi bir sırada) tamsayıları ile gösterilsin. Bu tamsayılar $\overline{D}$ tasarımı için v işlemlerinin sayılarını ifade eder. D tasarımının λ bloğunda bulunan (i , j) çifti ($i \neq j \in \{1, 2,...,v\}$) için gösterilen bütün işlemler kurularak bir B_{ij} bloğu oluşturulur. $v(v\text{ -}1)/2$ tane sıralanmış çift olduğundan ve her sıralanmış (i , j) ($i \neq j$) çifti için D tasarımında λ kadar blok olduğundan B_{ij}' lerin sayı ve büyüklükleri sırasıyla $v(v\text{ -}1)/2$ ve λ dır. Her seçilen tamsayı $\overline{D}$ tasarımında $k(k\text{-}1)$ /2 kere meydana gelir. Yardımcı Teorem 2.17 kullanılarak gösterilen işlemlerin her bir çiftinin $\overline{D}$ tasarımında $\lambda(\lambda\text{-}1)/2$ defa meydana geldiği kolaylıkla görülebilir. Bundan dolayı türetilen tasarım verilen parametrelere sahip bir DTBTdir.

Örnek 2.16: D, Blokları aşağıda verilen SB[5, 4, 3] tasarımı olsun..

1	1	1	1	2
2	3	4	5	3
3	4	5	2	4
4	5	2	3	5

D tasarımına Teorem 2.20'nin ispatında verilen metot uygulanırsa aşağıdaki B[5, 3, 3] tasarımı elde edilir.

1	1	1	1	1	1	2	2	2	3
3	2	2	4	3	2	3	4	3	4
4	4	3	5	5	5	4	5	5	5

Örnek 2.17: Aşağıdaki SB[6, 5, 4] tasarımı göz önüne alınsın.

1	1	1	1	1	2
2	3	2	2	2	3
3	4	4	3	3	4
4	5	5	5	4	5
5	6	6	6	6	6

Teorem 2.20'in ispatındaki yöntem uygulanırsa aşağıdaki B[6, 4, 6] tasarımı bulunur.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3
2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	3	3	3	4	4
3	3	3	4	4	5	4	4	5	5	4	4	5	5	5
4	5	6	5	6	6	5	6	6	6	5	6	6	6	6

SDTBT'lerin birçok serisinin varoluşu üzerine bu tekniğe başvurularak DTBT' lerin bilinen çeşitli sonsuz serileri elde edilir.

Sonuç 2.21: 4q+3 bir asal ya da asalın üssü olsun. Bu takdirde parametreleri 4q+3, 2q+1 ve q olan SDTBT' nin varlığı B[4q+3, q, q(q-1) / 2]' nin varlığını ifade eder.

Örnek 2.18: q = 2 olduğunda aşağıdaki gibi bir SB[11, 5, 2] tasarımı vardır.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1
3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2
5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4
8	9	10	11	1	2	3	4	5	6	7

Bu tasarıma teorem 2.20'nin ispatındaki yöntem uygulanarak Sonuç 2.21 gereğince aşağıdaki B[11, 2, 1] ($b = 55, r = 10$) tasarımı elde edilir.

1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
2	3	4	5	8	3	4	5	6	8	9	4	5	6	7	8	9	10

4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
5	6	7	8	9	10	11	6	7	8	9	10	11	1	7	8	9	10	11
7	7	7	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	10	11	11	11	
1	2	8	9	10	11	9	10	11	1	10	11	1	2	11	1	2	3	

Böylece bir SB[11, 5, 2] tasarımının varlığı bir B[11, 2, 1] tasarımının varlığını ifade etmiş olur.

2.3 Izomorfizm ve Otomorfizm

(X, A) ve (Y, B), iki $(v, k, \lambda)-$DTBT olduğu düşünülsün. $\{\{\alpha(x) : x \in \Lambda\} : \Lambda \in A\} = B$ olacak şekilde $\alpha : X \to Y$ $1-1$ dönüşümse (X, A) ve (Y, B) 'nin izomorfik olduğu söylenir,

Böylece $x \in X$ olmak üzere, her nokta $\alpha(x)$ ile yeniden isimlendirilirse, A bloklarının koleksiyonu B 'ye dönüştürülür. $1-1\ \alpha$ (*bijection* α), bir "izomorfizm" olarak adlandırılır.

Örnek 2.19 Burada (X, A) ve (Y, B), iki (7,3,1)-DTBT 'dır.

$X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ ve

$A = \{123,145,167,246,257,347,356\}$

$Y = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ve

$B = \{abd, bce, cdf, \deg, aef, bfg, acg\}$.

$\alpha(1) = a$, $\alpha(2) = b$, $\alpha(3) = d$, $\alpha(4) = c$, $\alpha(5) = g$, $\alpha(6) = e$ ve $\alpha(7) = f$ olacak şekilde $1-1\ \alpha$ tanımlansın. Ardından X ' deki noktalar α kullanılarak tekrar sınıflandırıldığında A 'nın blokları aşağıdaki gibi olur :

$123 \to abd$

$145 \to acg$

$167 \to aef$

$246 \to bce$

$257 \to bfg$

$347 \to cdf$

$356 \to \deg$

Böylece α, iki DTBT 'nın bir izomorfizm' dir.

Teorem 2.22(Stinson, 1996): $M=(m_{i,j})$ ve $N=(n_{i,j})$ iki $(v,b,r,k,\lambda)-$DTBT 'nın isabet matrisleri olsun. İki DTBT izomorfik olması için gerek ve yeter koşul $\{1.....v\}$'nin permütasyonu γ ve $\{1.....b\}$'nin permütasyonu β olmak üzere, her $1\le i\le v$, $1\le j\le b$ için

$$m_{i,j}=n_{\gamma(i),\beta(j)}$$

mevcut olmasıdır.

İspat (X,A) ve (Y,B), ayrı ayrı M ve N isabet matrislerine sahip DTBT 'ları olsun. $X=\{x_1,...,x_v\}$ ve $Y=\{y_1,...,y_v\}$, $A=\{\mathrm{A}_1,...,\mathrm{A}_b\}$ ve $B=\{\mathrm{B}_1,...,\mathrm{B}_b\}$ alınsın.

İlk olarak, (X,A) ve (Y,B), izomorfik olduğu farz edilsin. Burada, $\{\{\alpha(x):x\in \mathrm{A}\}:\mathrm{A}\in A\}=B$ gibi bir $1-1\,\alpha:X\to Y$ mevcuttur. $1\le i\le v$ için ,

$$\gamma(i)=j \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(x_i)=y_j$$

dir. Çünkü α, X ve Y'nin bir bijeksiyon'u olduğu için $\{1.....v\}$'nin permütasyonu γ olduğu görülür. $1\le i\le b$ için ,

$$\beta(i)=j \quad \Leftrightarrow \quad \{\alpha(x):x\in \mathrm{A}_i\}=\mathrm{B}_j$$

Böylece; β, $\{1.....b\}$'nin permütasyonudur.

Bu tanımlamalarla

$$\begin{aligned} m_{i,j}=1 &\Leftrightarrow x_i\in \mathrm{A}_j \\ &\Leftrightarrow y_{\gamma(i)}\in \mathrm{B}_{\beta(j)} \\ &\Leftrightarrow n_{\gamma(i),\beta(j)}=1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine, her i, j için $m_{i,j} = n_{\gamma(i),\beta(j)}$ gibi γ ve β permütasyonlarının varlığı farz edilsin,

$$\alpha(x_i) = y_j \text{ ancak ve ancak } \gamma(i) = j$$

kuralı ile $\alpha : X \to Y$ tanımlanır. Ardından, α; (X, A) ve (Y, B) 'nin bir izomorfizm tanımladığı kolayca görülür.

Genel olarak, iki DTBT 'nın izomorfik olup olmadığını belirlemek zor bir hesaplama problemidir.

(X, A) bir (v, k, λ) – DTBT olsun. (X, A) 'nın bir otomorfizm 'i DTBT 'nın kendi içinde bir izomorfizm 'idir. Bu durumda $1-1\,\alpha$, X 'in

$$\{\{\alpha(x) : x \in \mathrm{A}\} : \mathrm{A} \in A\} = A$$

gibi permütasyonudur. X 'in üzerinde birim dönüşün daima bir otomorfizm 'dir.

Örnek 2.20 (X, A) aşağıdaki (7,3,1)-DTBT olsun

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7\} \text{ ve}$$
$$A = \{123,145,167,246,257,347,356\}$$

$1-1\,\alpha$; $\alpha(1) = 1$, $\alpha(2) = 2$, $\alpha(3) = 3$, $\alpha(4) = 5$, $\alpha(5) = 4$, $\alpha(6) = 7$ ve $\alpha(7) = 6$ gibi tanımlansın. Ayrıca, X 'deki noktalar α kullanılarak tekrar sınıflandırıldığında A 'nın blokları aşağıdaki gibi olur :

$$123 \to 123$$
$$145 \to 145$$
$$167 \to 167$$
$$246 \to 257$$

$$257 \rightarrow 246$$
$$347 \rightarrow 356$$
$$356 \rightarrow 347$$

Böylece α, DTBT 'nın bir otomorfizm 'dir.

(X, A) DTBT 'nın bütün otomorfizmlerinin setleri, bir grup oluşturularak gösterilebilirler. Bu grup, DTBT 'nın otomorfizm grubu olarak adlandırılır ve $\mathrm{Aut}(X, A)$ ile gösterilir.

Örnek 2.21 Önceki örnekteki (X, A), (7,3,1)-DTBT, $\beta(1) = 2$, $\beta(2) = 4$, $\beta(3) = 6$, $\beta(4) = 3$, $\beta(5) = 1$, $\beta(6) = 7$ ve $\beta(7) = 5$ gibi tanımlanan β otomorfizmine sahiptir.
$\gamma = \alpha \circ \beta$ $\gamma(x) = \beta(\alpha(x))$ gibi tanımlanan γ aşağıdaki gibi olur:

$\gamma(1) = 2$, $\gamma(2) = 4$, $\gamma(3) = 6$, $\gamma(4) = 1$, $\gamma(5) = 3$, $\gamma(6) = 5$ ve $\gamma(7) = 7$. Böylece γ 'da DTBT 'nın bir otomorfizmidir.

Teorem 2.23(Kramer ve Mesner,1976): otomorfizm grubu olan altgrub G'ye sahip (v,k,λ)-DTBT'ının var olması için gerek v e yeter koşul aşağıdaki matris eşitliğini sağlayan bir $z \in Z^n$ olmasıdır.

$zA_{k,2}=\lambda u_m$.
Burada z negatif olmayan tamsayıdır.

Kramer-Mesner Teoremi 1975 yılında ispat edilmiştir. Bu teorem daha önce bilinmeyen tasarımların bulunmasunda faydalıdır.

Simetrik DTBT nın her bir iki bloğu λ ortak nokta içerir. Bu sonuç eskisinden yeni DTBT elde etmeyi sağlar.

Tanım 2.5 (X,A) simetrik $(v,k,\lambda)-$DTBT ve $A_0 \in A$ olsun.

$\text{Tür}(X,A,A_0)=(A_0,\ \{A\cap A_0 : A\in A\ ,\ A\neq A_0\})$ ve

$\text{Ar}(X,A,A_0)=(X\setminus A_0,\ A\setminus A_0 : A\in A\ ,\ A\neq A_0\})$ dır. $\text{Tür}(X,A,A_0)$ türetilmiş DTBT olarak adlandırılır ve Ar (X,A,A_0) artık DTBT olarak adlandırılır.

Teorem 2.24(Stinson,2004) (X,A) simetrik $(v,k,\lambda)-$DTBT ve $A_0 \in A$ olsun. O zaman $\text{Tür}(X,A,A_0)$ $\lambda \geq 2$ ile $(k,v-1,k-1,\lambda,\lambda-1)-$DTBT dır. Ayrıca Ar (X,A,A_0) $k \geq \lambda+2$ ile $(v-k,v-1,k,k-\lambda,\lambda)-$DTBT dır.

İspat $\text{Tür}(X,A,A_0)$ $k>\lambda\geq 2$ parametreleri ile DTBT dır (k türetilmiş tasarımda noktaların sayısıdır ve bloklar λ genişliğine sahiptir). Bununla beraber her bir simetrik DTBT da $k>\lambda$ dır çünkü $\lambda(v-1)=k(k-1)$ ve $v>k$ dır. Böylece bu koşul gereksizdir.

Ar (X,A,A_0) $v-k>k-\lambda\geq 2$ parametreleri ile DTBT dır ($v-k$ artık tasarımda noktaların sayısıdır ve bloklar $k-\lambda$ genişliğine sahiptir). Simetrik DTBT da $v-k>k-\lambda$ olduğu gösterilebilir. $v\leq 2k-\lambda$ olsun. O zaman , $k(k-1)=\lambda(v-1)\leq\lambda(2k-\lambda-1)$ dir. Bu $(k-\lambda)(k-\lambda-1)\leq 0$ a eşdeğerdir. Fakat k ve λ tamsayılardır, böylece bu son eşitsizlik ancak ve ancak $k=\lambda$ yada $k=\lambda+1$ ise gerçekleşir. $k\geq\lambda+2$ olduğu kabul edildiğinde, çelişki olur. Bundan dolayı, $v-k>k-\lambda$ koşulu sağlanmaz.

A_0 da olmayan bütün noktaları silerek türetilmiş tasarım kurulabilir. Bu $(k,v-1,k-1,\lambda,\lambda-1)-$Tasarımını verecektir. Orijinal tasarımın bloklarının her biri seçilmiş blok ile ortak λ noktaya sahiptir. Bu durumda yeni blokların hepsi $k-\lambda$ genişliğine sahiptir. Geriye kalan noktaların her bir çifti yine birlikte λ blokta gözükecektir. Yeni tasarım yalnızca 1 eksik bloğa ve $v-k$ noktalara sahip olacaktır, bu durumda $(v-k,v-1,k,k-\lambda,\lambda)-$Tasarımı elde edilir. Her iki kuruluş içinde,

farklı blokları seçerek izomorfik olmayan artık ve türetilmiş tasarımları bulmak mümkündür.

Türetilmiş ve artık tasarımların DTBT ları oldukları açıktır

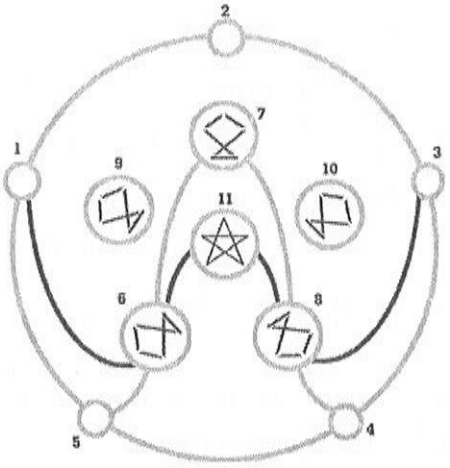
Tanım 2.6 Bir Biplane $v = b = \frac{(n^2+3n+4)}{2}$, $r = k = n+2$, $\lambda = 2$

parametreleri ile simetrik DTBT dır, ve Onun artık tasarımı,

$v = \frac{n(n+1)}{2}$, $b = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $r = n+2$, $k = n$, $\lambda = 2$

parametrelerine sahiptir.

Örnek 2.22 (11,5,2)-DTBT simetriktir çünkü 2(11-1)=5(5-1) dir. Artık DTBT (6,3,2)-DTBT dır ve türetilmiş DTBT (5,2,1)-DTBT dır. Figür 3.1 de (11,5,2)-DTBT da 11 bloğu gözükmektedir. Blok A_0={1,3,4,5,9} dır. Kalan 10 blok her biri iki kısım içinde parçalanmıştır. {1,3,4,5,9} nokta seti üzerinde (5,2,1)-DTBT ve {0,2,6,7,8,10} nokta seti üzerinde (6,3,2)-DTBT elde edilir.



Şekil 2.1 (11,5,2) nin bir gösterimi (biplane)

1 3 4 5 9	
4 5	2 6 10
3 5	6 7 0
1 4	6 7 8
5 9	2 7 8
3 9	6 8 10
4 9	0 7 10
1 5	0 8 10
1 9	2 6 0
1 3	2 7 10
3 4	0 2 8

Çizelge 2.3: SB[11,5,2]nın Türetilmiş ve Artık Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları

(v',k',λ') ile artık DTBT nın $(v-k,k-\lambda,\lambda)$ nın parametreleri tanımlansın. Bu parametreler $r'=k'+\lambda'$ koşulunu sağlar. $r=k+\lambda$ ile (v,k,λ) DTBT yarı artık DTBT olarak adlandırılır. Yarı artık (v,k,λ) DTBT simetrik $(v+r,r,\lambda)-$DTBT nın artık DTBT gibi yapılandırılabilir ve bu simetrik DTBT nın mevcut olduğu ispatlanır.

Benzer olarak, (v',k',λ') türetilmiş DTBT nın $(k,v-1,k-1,\lambda,\lambda-1)-$parametreleri yazılabilir. Bu parametreler $k'=\lambda'+1$ koşulunu sağlar. $k=\lambda+1$ ile her bir (v,k,λ) DTBT yarı türetilmiş DTBT olarak adlandırılır. Yarı türetilmiş (v,k,λ) DTBT simetrik $(b+1,r+1,\lambda+1)-$DTBT nın türetilmiş DTBT gibi düşünülür ve bu simetrik DTBT nın mevcut olduğu ispatlanır.

(10,4,2) parametre seti yarı artıktır çünkü 6=4+2 dir. Eğer simetrik (16,6,2)-DTBT mevcut ise (10,4,2)-DTBT mevcuttur.

2.4. Bağlantılı Tasarımlar

Tanım 2.7: Bazı μ sabitleri için, blokların her bir çifti μ noktada kesişiyorsa tasarıma " *bağlantılı tasarım* " (linked design) denir.

Bu tasarımlar ilk olarak Youden tarafından tanıtılmıştır. Youden, bu tasarımları DTBT' lerin dualleri olarak ortaya çıkarmıştır. Bağlantılı tasarımlar, Roy ve Laha (1956, 1957) tarafından sınıflandırılmıştır.

Teorem 2.5(Hazevinkel, 1995) D, b doğrular ve v noktalar ile indirgenmiş tasarım olsun.

a) Her bir farklı iki nokta $\lambda > 0$ doğruda bulunur.

b) Her bir iki farklı doğru $\mu > 0$ noktalarda kesişir.

Eğer $\lambda = \mu = 1$ ise, bu takdirde 3'ü aynı doğru üzerinde bulunmayan 4 nokta vardır. O zaman $b = v$, $\lambda = \mu$ ve bütün doğruların r noktalara sahip olduğu r sayıları vardır ve her bir noktadan geçen r tane doğru vardır. r sayısı $r(r-1) = (v-1)\lambda$ ile verilir. Tasarım teorisinde, (a) koşulu sağlandığında bu durum dengeli (balance) olarak tanımlanır. Bunlara bazen 'ikili dengeli' (pairwise balance) yada '2-dengeli'(2-balance) denir. Böyle tasarımlar 2-tasarım olarak adlandırılır. Eğer tasarım (b) koşulunu sağlarsa 'bağlı'(linked) olarak adlandırılır.

Örnek 2.23: Çizelge 2.5'deki ($D2$) ve ($D3$) tasarımları her durumda μ=1 ile bağlantılıdır. 4 sınıfa ayrılan ($D1$) tasarımı ise aynı sınıftaki herhangi iki blok ortak elemana sahip olmadığından bağlantılı değildir, ancak farklı sınıflardaki herhangi iki blok ortak bir elemana sahiptir.

$(D1) \rightarrow$ Bağlantılı değil

00 , 01 , 02	00 , 10 , 20	00 , 11 , 22	00 , 12 , 21
10 , 11 , 12	01 , 11 , 21	02 , 10 , 21	01 , 10 , 22
20 , 21 , 22	02 , 12 , 22	01 , 12 , 20	02 , 11 , 20

Çizelge 2.4 Bağlantılı ve bağlantılı olmayan tasarım örnekleri

$(D2) \rightarrow$ Bağlantılı

00 , 01 , 02 , ∞	00 , 10 , 20 , 0	00 , 11 , 22 , 1	00 , 12 , 21 , 2
10 , 11 , 12 , ∞	01 , 11 , 21 , 0	02 , 10 , 21 , 1	01 , 10 , 22 , 2
20 , 21 , 22 , ∞	02 , 12 , 22 , 0	01 , 12 , 20 , 1	02 , 11 , 20 , 2

Çizelge 2.5 (Devam) Bağlantılı ve bağlantılı olmayan tasarım örnekleri

$(D3) \rightarrow$ Bağlantılı

B = {124, 235, 346, 450, 561, 602, 013}

DTBT' nin bağlantılı olabilmesi için gerek ve yeter koşul tasarımın simetrik olmasıdır.

SDTBT $\mu=\lambda$ ile bağlantılıdır. $\lambda=\mu=1$ durumu sonlu projektif geometrinin bir sonucu olarak gözükür.

DTBT içinde sadece bir bağlantılı bloğun olması tüm tasarımın dengeli ve simetrik olduğunu garanti eder. Çizelge 2.5'de verilen ($D3$) tasarımında bu özellik kolaylıkla görülebilir. Örneğin; tasarımın birinci bloğu olan 124 göz önüne alınsın. Bu blok; 2. blokla 2 noktasında, 3. blokla 4 noktasında, 4. blokla 4 noktasında, 5. blokla 1 noktasında, 6.blokla 2 noktasında ve 7.blokla da 1 noktasında kesişir. Dolayısıyla sadece bu bloğun olması bile tasarımın simetrik ve dengeli olduğunu garanti eder.

2.5. Yeniden Çözülebilir Tasarımlar

Tanım 2.8: Bir D tasarımının " *paralelliği* " (parallelism) [aynı zamanda yeniden çözülebilirlik (resolution) veya 1-faktörleştirme (1-factorization) olarak da adlandırılır]; her nokta her bir sınıfın tek bir bloğunda gözükecek şekilde D' nin blok kümelerinin $C_1, C_2,...,C_c$ sınıflarına bir parçalanımıdır. Bir tasarımda paralellik varsa bu tasarım " *yeniden çözülebilir* " (resolvable) olarak adlandırılır. $C_1, C_2,...,C_c$ sınıflarına tasarımın " *çözüm sınıfları* " (resolution classes) denir.

Yeniden çözülebilir t-tasarımları, $YÇ_\lambda(t, k; v)$ veya Yt-(v, k, λ) şeklinde gösterilebilir.

Burada, yeniden çözülebilirlik kavramı sadece DTBT' ler için düşünülecektir.

Bir Yt-(v, k, λ) tasarımında c sınıf ve her sınıfta da β blok vardır. Dolayısıyla $b = c\,\beta$ ve $v = k\,\beta$ dır.

t-tasarımının $v = 2k$ koşulunu sağlaması için gerekli ve yeterli koşul Yt-(v, k, λ) tasarımının türetilmiş olmasıdır.

Teorem 2.26(Srivastav, 1988): $v = 2\,k$ koşulını sağlayan t-tasarımının Yt-(v, k, λ) olması için gerekli ve yeterli koşul tasarımın öz-tamamlayıcı olmasıdır.

Teorem 2.27(Cameron ve Lint, 1991): Yt-(v, k, λ) tasarımının mevcut olması için k' nın v' yü bölmesi koşulu gereklidir.

Teorem 2.28(Tonchev, 1988)**:** Eğer yeniden çözülebilir $(v,b,r,k,\lambda)-$ DTBT mevcutsa, o zaman $b \geq v+r-1$ dir.

İspat(Teorem 2.2'nin kanıtlanmasında) Her bir temel vektör e_i, $S=\{s_1.....s_b\}$'de vektörlerin doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilir.
(X, A) yeniden çözülebilir bir DTBT verilsin. $1 \leq i \leq r$ için tanım,

$$m_i = \frac{(i-1)v}{k}+1 \quad \text{ve} \quad n_i = \frac{iv}{k}.$$

Farz edelim ki bloklar r paralel sınıflar $1 \leq i \leq r$

$$\Pi_i = \{A_j : m_i \leq j \leq n_i\}$$

olarak sınıflandırılmış olsun. Çünkü her Π_i paralel bir sınıftır, bu yüzden $1 \leq i \leq r$ için,

$$\sum_{j=m_i}^{n_i} s_j = (1,...,1)$$

sonucu elde edilir. Böylece, $2 \leq i \leq r$ için

$$s_{m_i} = \sum_{j=m_1}^{n_1} s_j - \sum_{j=m_i+1}^{n_i} s_j$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$S' = \{s_{m_2} \ldots s_{m_r}\}$$

setindeki $r-1$ vektörler, $S \setminus S'$'de $b-r+1$ vektörlerin doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

S'de b vektörleri R^v'yi gerdiği için $S \setminus S'$'de $b-r+1$ vektörleri R^v'yi gerer. R^v, v boyuta sahip olduğu ve $b-r+1$ vektörlerinin seti ile gerildiği için $b \geq v+r-1$ durumu olmalıdır.

Fisher eşitsizliği(Teorem 2.2) her DTBT'da $b \geq v$ olduğunu söyler. Bose eşitsizliği her ne zaman DTBT yeniden çözülebilir olduğunda Fisher 'in eşitsizliğini sağlar.

Tanım 2.9: Farklı çözüm sınıflarından herhangi iki blok q_2 ($q_2 > 0$) işlemde kesişiyorsa yeniden çözülebilir bir tasarım " *afin yeniden çözülebilir* " dir (affine resolvable).

Afin yeniden çözülebilir tasarımlar bazı kaynaklarda " afin tasarımlar " olarak da adlandırılmaktadır.

Afin tasarıma örnek olarak afin uzay alınabilir. Burada V, F_q üzerinde n boyutlu vektör uzayı olsun. n boyutlu Afin uzayının elemanları V'nin kosetleridir. İ-boyutlu alt uzayın bir koseti i-flat olarak adlandırılır.

Shrikhande ve Raghavarao 1963), Bose(1942) yeniden çözülebilirlik ve afin yeniden çözülebilirlik kavramlarını α-yeniden çözülebilirlik ve afin α-yeniden çözülebilirlik kavramlarına genelleştirmişlerdir.

Teorem 2.29(Stinson, 1996): Afin yeniden çözülebilir $(v,k,\lambda)-$DTBT nın farklı paralel sınıflardan her bir iki blok kesinlikle k^2/v noktada kesişir.

$r=n+1=k+\lambda$ olduğundan dolayı afin düzlemler afin yeniden çözülebilirdir. Afin yeniden çözülebilir DTBTler yarı artıktır. q asal ve m≥2 olsun. bu taktirde $\lambda=\frac{q^m-1}{q-1}$ olan Afin yeniden çözülebilir (q^m,q^m-1,λ)-DTBT'i vardır.

Tanım 2.10: Her işlem her sınıfta α defa görünecek şekilde blok kümeleri sınıflar içine bölünmüşse tasarım " *α-yeniden çözülebilir* " dir (α-resolvable).

α-yeniden çözülebilir bir DTBT' de ;

$$v\,\alpha=\beta\,k \quad , \quad \beta\,c=b \quad \text{ve} \quad r=c\,\alpha$$

dır.

Tanım 2.11: Herhangi iki blok aynı sınıfta q_1 işlemde kesişiyorsa ve herhangi iki blok farklı sınıflarda q_2 ($q_2 > 0$) işlemde kesişiyorsa, α-yeniden çözülebilir bir tasarım " *afin α-yeniden çözülebilir* " dir (affine α-resolvable).

Aşağıdaki örneklerde dikey çizgiler sınıfları birbirinden ayırır. Her sınıf içindeki bir satır bir bloğu tanımlar.

Örnek 2.24: Çizelge 2.6'deki B[9, 3, 1] tasarımı $q_2 = 1$ ile afin yeniden çözülebilirdir.

1	2	3	1	4	7	1	5	9	1	6	8
4	5	6	2	5	8	2	6	7	2	4	9
7	8	9	3	6	9	3	4	8	3	5	7

Çizelge 2.6. B[9, 3, 1] tasarımı

Örnek 2.25: Çizelge 2.7'deki B[15, 3, 1] tasarımı yeniden çözülebilirdir ama afin yeniden çözülebilir değildir.

1	2	3	1	4	5	1	6	7	1	8	9	1	10	11	1	12	13	1	14	15
4	8	12	2	8	10	2	9	11	2	12	15	2	13	14	2	4	6	2	5	7
4	10	14	3	13	15	3	12	14	3	5	6	3	4	7	3	9	10	3	8	11
6	11	13	6	9	14	4	10	15	4	11	14	5	9	12	5	11	15	4	9	13
7	9	15	7	11	12	5	8	13	7	10	13	6	8	15	7	8	14	6	10	12

Çizelge 2.7. B[15, 3, 1] tasarımı

Örnek 2.26: Çizelge 2.8'deki B[9, 3, 2] tasarımı 2-yeniden çözülebilirdir ama yeniden çözülebilir değildir.

1	2	9	1	2	9	1	3	8	1	4	7	1	5	7	1	6	8	1	4	5	1	3	6
4	5	8	4	6	8	2	4	7	2	3	8	2	5	8	2	6	7	2	4	6	2	3	5
3	6	7	3	5	7	5	6	9	5	6	9	3	4	9	3	4	9	7	8	9	7	8	9

Çizelge 2.8. B[9, 3, 2] tasarımı

Yeniden çözülebilir ve α-yeniden çözülebilir tasarımların kullanımı Fisher ve Yates tarafından tartışılmıştır. Yeniden çözülebilirlik varsayımları geçerli ise o zaman yeniden çözülebilir bir tasarımın analizinin, rastgele tam blok tasarımı gibi işlem karşılaştırmaları için hatanın yansız tahminini verdiği Yates tarafından gösterilmiştir.

Yeniden çözülebilir olmayan tamamlanmamış blok tasarımı rastgele tamamlanmış bloklardan daha az etkili olmasına rağmen, yeniden çözülebilir bir tasarım her zaman rastgele tamamlanmış bloklar kadar etkindir.

Teorem 2.30(Raghavarao,1971): Yeniden çözülebilir bir DTBT' de aşağıdaki eşitlikler sağlanır :

$$c \geq k + \lambda \quad \text{veya eşit olarak} \quad b \geq v + c - 1 \qquad [2.6]$$

Bu eşitsizlikler Bose (1942) tarafından bulunmuştur.

Teorem 2.31(Street and Street, 1987): Afin yeniden çözülebilir bir DTBT' de [2.6] eşitsizlikleri eşitlik olarak sağlanır ve parametreler şu şekilde olur :

$$k = \beta q_2, \quad v = \beta^2 q_2 \quad , \quad \lambda = (\beta q_2 - 1) / (\beta\text{-}1) \quad , \quad r = (\beta^2 q_2 - 1) / (\beta\text{-}1) \quad , \quad b = \beta c$$

Bu teorem Bose (1942) tarafından verilmiştir.

Teorem 2.32(Raghavaro,1971): Afin yeniden çözülebilir bir DTBT' de bazı γ tamsayıları için ;

$$v = \beta^2 (\gamma (\beta - 1) + 1) = \beta k \quad , \quad b = \beta (\gamma \beta^2 + \beta + 1) = \beta r \quad , \quad \lambda = \beta \gamma + 1 \quad ,$$

$$r = \beta^2 \gamma + \beta + 1 \quad , \quad k = \beta[(\beta - 1) \gamma + 1]$$

dir .

Örnek 2.27: Örnek 2.24'deki $q_2 = 1$ ile afin yeniden çözülebilir olan B[9, 3, 1] tasarımı düşünülsün. Bu tasarımda $v = 9$, $k = 3$, $\lambda = 1$, $r = 4$, $\beta = 3$, $b = 12$, $c = 4$ idi. $\gamma = 0$ alınırsa Teorem 3.22' deki eşitlikler bu tasarım için sağlanır.

$v = \beta^2(\gamma(\beta - 1) + 1) = \beta k \rightarrow 9 = 3^2[0(3\text{-}1) + 1] = 3.3$

$b = \beta(\gamma\beta^2 + \beta + 1) = \beta r \rightarrow 12 = 3(0.3^2 + 3 + 1) = 3.4$

$\lambda = \beta\gamma + 1 \rightarrow 1 = 3.0 + 1$

$r = \beta^2\gamma + \beta + 1 \rightarrow 4 = 3^2.0 + 3 + 1$

$k = \beta[(\beta - 1)\gamma + 1] \rightarrow 3 = 3[(3\text{-}1).0 + 1]$

Teorem 2.33(Street ve Street, 1987): α-yeniden çözülebilir bir DTBT' de $b \geq v+c-1$ dir.

Yardımcı Teorem 2.34(Street ve Street, 1987): Afin α-yeniden çözülebilir bir DTBT'de;

$$q_1 = k(\alpha - 1)/(\beta - 1) \quad \text{ve} \quad q_2 = k\alpha/\beta = k^2/v$$

dür.

Teorem 2.35(Street ve Street, 1987):: α-yeniden çözülebilir bir DTBT' nin, afin α-yeniden çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $b = v + c - 1$ olmasıdır.

Sonuç 2.36: Afin α-yeniden çözülebilir bir DTBT' de $q_1 = k + \lambda - r$ dir.

Afin α-yeniden çözülebilir tasarımlarda $x = k$, $y = q_1$, $z = q_2$ olarak alınan bir

$$M = I_c \otimes \{(x\text{-}y) I_\beta + (y\text{-}z) J_\beta\} + z J_c \otimes J_\beta \qquad [2.7]$$

matrisi A^TA matrisinin bulunmasında kullanılabilir. Buradaki $\otimes$, Kronecker çarpımıdır ve boyutları farklı olan herhangi iki matrisi çarpmaya olanak sağlar. I_i, $i \times i$ boyutlu birim matris ve J_i de $i \times i$ boyutlu 1'lerden oluşan matristir. [2.7]de verilen M formunun herhangi bir matrisi, her biri $\beta \times \beta$ boyutlu olan alt matrislerin bir $c \times c$ dikey dizimine (array) bölünebilir. Bu takdirde köşegen dışı alt matrislerin bütün elemanları z' ye eşit olur. Her bir köşegen alt matrisi de Teorem 2.1'deki AA^T matrisiyle aynı formdandır, yani köşegeninde x' lerin, köşegen dışında da y' lerin olduğu bir formdur.

Örnek 2.28:Örnek 2.24'eki afin 1-yeniden çözülebilir B[9, 3, 1] tasarımı için M matrisi şöyle olur :

$$x = k = 3\,,\ y = q_1 = 0\,,\ z = q_2 = 1\,,\ c = 4\,,\ \beta = 3$$

$$M = I_4 \otimes \{(3\text{-}0)\, I_3 + (0\text{-}1)\, J_3\} + 1.J_4 \otimes J_3$$

$$= I_4 \otimes \{3\, I_3 - J_3\} + J_{12}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & . & & & & 1 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} & \phi & \phi & & \phi \\ & \phi & & . & \phi & & \phi \\ & \phi & & \phi & . & & \phi \\ & \phi & & \phi & \phi & \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & . & & & & 1 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}_{12x12}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A^T A$$

B[9, 3, 1] tasarımının isabet matrisi A aşağıdaki şekilde verilir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorem 2.37(Street ve Street, 1987): Her pozitif n tamsayısı için v=2n, b=n(2n-1), r=2n-1, k=2, λ=1 parametreli DTBT yeniden çözülebilirdir.

Örnek 2.29: 12, 34, 13, 24, 14, 23 bloklarına sahip B[4, 2, 1] tasarımı düşünülsün. n=2 alınırsa bu tasarım, Teorem 2.37'deki parametrelere uyduğu için yeniden çözülebilirdir.

$$v = 4 = 2.2\ ,\ b = 6 = 2(2.2\text{-}1)\ ,\ r = 2.2\text{-}1\ ,\ k = 2\ ,\ \lambda = 1$$

Ayrıca bu tasarım, $q_2 = 1$ ile afin yeniden çözülebilirdir.

Teorem 2.38 (Wallis, 1988): Bir afin yeniden çözülebilir 2-(v, k, λ) tasarımının varolduğu düşünülsün. Bu takdirde simetrik bir 2-(v', k', λ') tasarımı mevcuttur. Burada,

$$v' = (r+1)v\ ,\quad k' = kr \quad \text{ve} \quad \lambda' = k\lambda$$

dır . Wallis (1988), bu teoremi ispatlamak için Güçlü Düzgün Grafik-GDG(Strongly Regular Graph, SRG)'leri kullanmıştır.

B[9, 3, 1] (b = 12, r = 4, c = 4) afin yeniden çözülebilir tasarımının varlığı SB[45, 12, 3] tasarımının varlığını belirtir.

Mikhail (1960), k' nın v' yü bölmesi zayıf varsayımı altında Teorem 2.31'i vermiştir. Mikhail' in verdiği teoremin geliştirilmiş şeklini Kageyama (1971) aşağıdaki teorem ile vermiştir.

Teorem 2.39(Beth ve Diğerleri, 1999): D, yeniden çözülebilir ama afin olmayan bir 2-(v, k, λ) tasarımı olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır :

$b \geq 2v + r - 2$ veya eşdeğer olarak $r \geq 2k + \lambda$.

Teorem 2.40 (Street ve Street, 1987) Herhangi bir B[n^2, n, 1] tasarımı afin yeniden çözülebilirdir ve bir SB[n^2+n+1, n+1, 1] tasarımına genişletilebilir.

Teorem 2.41(Srivastav, 1988): B[4s+1, 2s, 2s-1]' in her bloğuna yeni bir θ işlemi eklensin. Böylece bu bloklar ve B[4s+1, 2s, 2s-1]' in tümleyen tasarımının blokları bir R3-(4s+2, 2s+1, 2s-1) tasarımı meydana getirirler.

Örnek 2.30: B[5, 2, 1] tasarımı göz önüne alınsın. Tasarımın her bloğu üzerine yeni bir işlem eklensin ve yeni oluşan tasarımın tümleyeni alınsın. O zaman üzerine işlem eklenen bloklarla birlikte tümleyen tasarımın blokları aşağıdaki gibi olur :

1	1	1	1	2	2	2	3	3	4
2	3	4	5	3	4	5	4	5	5

Çizelge 2.9: B[5, 2, 1] tasarımı

Üzerine işlem eklenen bloklarla birlikte tümleyen tasarımın blokları şöyledir :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	4	4	5	4	4	3	3	3
3	4	5	6	4	5	6	5	6	6	6	6	6	5	6	6	5	6	5	4

Teorem 2.41'den bu bir R3-(6, 3, 1) tasarımıdır.

Teorem 2.42(Srivastav, 1988): SB[4s-1, 2s-1, s-1]' in her bloğuna yeni bir θ işlemi eklensin. O zaman bu bloklar ve SB[4s–1, 2s–1, s–1]' in tümleyen tasarımının blokları bir R3-(4s, 2s, s –1) tasarımı meydana getirirler.

Örnek 2.31: Bir SB[7, 3, 1] tasarımı düşünülsün. Teorem 2.42'deki yöntem uygulanırsa aşağıda blokları verilen YÇ3-(8, 4, 1) tasarımı elde edilir.

1	1	2	1	2	3	4
5	2	3	3	4	5	6
7	6	7	4	5	6	7

Çizelge 2.10: SB[7, 3, 1] tasarımı

1	1	1	1	1	1	1	4	3	3	2	2	2	2
2	2	2	3	3	4	5	6	5	4	5	4	3	3
3	4	6	4	6	5	7	7	6	5	6	5	7	4
5	7	8	8	7	6	8	8	8	7	7	8	8	6

Çizelge 2.11: R3-(8, 4, 1) tasarımı

2.6 Steiner Sistemler

Tanım 2.12: $\lambda = 1$ ve $t \geq 2$ olan t-(v, k, λ) tasarımlarına " *Steiner sistemler* " (ya da Steiner t-tasarımları) denir.

Steiner sistemler t-$(v, k, 1)$ olarak gösterildiği gibi $S(t, k, v)$ olarak da gösterilebilir. Steiner t-tasarımları özellikle istatistiksel deneyler ve network tasarımları gibi uygulamalı problemlerde yapı maliyetlerini minimum yapmada önemlidir.

Steiner sistemlerin varlığı sorusunu Jacob Steiner ortaya çıkarmıştır. Thomas P. Kirkman' ın (1847) daha önce yaptığı çalışmaların farkında olmayan Steiner (1853) ilk olarak S(2, 3, v) hakkında çalışmalar yapmış ve daha sonra S(t, t+1, v) sistemleri hakkında çalışmalara devam etmiştir.

t=2 ve 3 için Steiner sistemlerin birçok sınıfı vardır ama t=4 ve 5 için sadece sonlu sayıda bilinir. $t \geq 6$ için ise S(t, k, v)' lerin hiçbiri oluşturulmamıştır. Böyle tasarımların bulunması kolay değildir.

t>3 için bilinen az sayıda Steiner sistem vardır. Bunların çok fazla çalışılmış olanları S(4, 5, 11), S(4, 7, 23), S(5, 6, 12) ve S(5, 8, 24) parametreli *Witt tasarımlarıdır* (ya da *Mathieu tasarımları*). Bu 5-tasarımları, 4-tasarımlarının genişlemeleridir. Alışılmış bölünebilme kısıtı, verilen 5-tasarımların genişlemediğini gösterir.

Key and Wagner (1986), GF(4) (4. mertebeden sonlu cisim Galois Cismi) üzerinde d-boyutlu bir projektif uzaydan 3-($(4^{d+1}+2)$ / 4, 6, 1) parametreli Steiner sistemlerin bir sınıfını oluşturmuşlardır.

Teorem 2.43(Colbourn ve Dinitz,1996): (Bölünebilme Koşulları) Her i = 0, 1,...,t-1 için $\binom{v-i}{t-i} \Big/ \binom{k-i}{t-i}$ ifadesi tamsayı ise bir S(t, k, v) vardır.

Teorem 2.44(Colbourn ve Dinitz, 1996):

$$\binom{v}{t} \geq \binom{v}{t/2}\binom{k}{t} \qquad [2.8]$$

Eşitliği varsa, bir S(t, k, v) vardır.

Örnek 2.32: S(4, 5, 9) Steiner sistemi yoktur. Çünkü [2.8]' deki eşitsizlik sağlanmaz ;

$$\binom{9}{4} \geq \binom{9}{2}\binom{5}{4} \Rightarrow 126 \not\geq 180$$

Teorem 2.45(Beth ve Ark.): D, $k < v$ olan bir S(t, k, v) olsun. Bu takdirde;

$$(k-t+1)(t+1) \leq v \qquad [2.9]$$

dür.

Örnek 2.33: S(10, 16, 72) Steiner sistemi mevcut olamaz. Çünkü [2.9] eşitsizliği sağlanmaz

Teorem 2.46(Mendelhson,1970): S(t-1, t, 2t +1) sisteminin boş olmaması için gerek ve yeter koşul, S(t, t +1, 2t +2) sisteminin boş olmamasıdır. Eğer bir Q = S(t-1, t, 2t +1) sistemi varsa, Q'nun içine yerleştirildiği (embedded) bir R sistemi mevcuttur. Burada R = S(t, t +1, 2t +2) dir.

v' nün her uygun değeri için Steiner dörtlü sisteme [S(3, 4, v)] genişletilebilen bir Steiner üçlü sistem [S(2, 3, v)] vardır. Fakat Steiner' ın orijinal sorularından biri olan, bütün Steiner sistemlerin genişletilip genişletilemeyeceği sorusu hala devam etmektedir.

Örnek 2.34: S(2, 3, 7)' nin içine yerleştirildiği bir S(3, 4, 8) vardır. Yine aynı şekilde S(4, 5, 11)' in içine yerleştirildiği bir S(5, 6, 12) vardır. Muhtemel diğer bir durum da S(9, 10, 20)' nin içine S(8, 9, 19)' un yerleştirilmesidir.

Teorem 2.47(Beth ve Ark, 1999): Her $m \geq 3$ için bir $S(3, 6, (4^m+2)/3)$ Steiner sistemi vardır.

Teorem 2.48(Beth ve Ark, 1999): Yeniden çözülebilir bir $S(2, k, v)$ Steiner sisteminin mevcut olması için gerekli koşul,

$$v \equiv k \pmod{k(k-1)}$$

olmasıdır.

2.6.1. Steiner üçlü sistemler

Tanım 2.13: Bir $S(2, 3, v)$ Steiner sistemine " *Steiner üçlü sistem* " (Steiner triple system) denir ve $STS(v)$ olarak gösterilir.

Teorem 2.49(Colburn ve Dinitz, 1996): Bir $STS(v)$' nün (yani $B[v, 3, 1]$) mevcut olması için gerek ve yeter koşul $v \geq 3$ ve $v \equiv 1$ veya 3 (mod 6) olmasıdır.

J. Steiner (1853), bu teoremin yeterliliğini bir problem olarak ortaya attı ve bu problem M. Reiss (1859) tarafından ispatlandı. Yalnız hiçbir matematikçi bir gerçeğin farkına varmamıştı: Bu problem 1847' de Cambridge and Dublin Mathematical Journal dergisinde çıkan bir makalede T.P. Kirkman tarafından ortaya atılıp çözülmüştü(Bose, 1939). Gerçekten, Kirkman (1850) daha zor ama ilgili bir

problemi ortaya koydu. 1850de aşağıdaki şekilde sunulan bu problem Kirkman' ın " *Schoolgirl Problem* " i olarak bilinir :

Bir öğretmen 15 kız öğrenciyi 3' erli 5 sırada düzenlenmiş olarak yürüyüşe götürmek ve herhangi iki kız arasındaki arkadaşlığa da eşit şans tanımak istiyor. Bu sebeple herhangi bir kız çifti, haftanın bir gününde kesinlikle aynı sırada yürüyecek şekilde haftanın 7 günü için farklı satır düzenlemeleri bulunması arzu ediliyor.

Genelde $6t+3$ işlem üzerine olan ve herhangi bir işlem bir kümede sadece bir kere gözükecek şekilde blokları $3t+1$ kümeye parçalanmış olabilen bir Steiner üçlü sistemi arayan bu problem 1971'e kadar çözülememiştir.

Kirkman'ın (1847) çözümü geri dönüşlüydü. Doğrudan oluşturmayla ilgili diğer ispat, Skolem serilerinden bilinir. Geri dönüşlü başlangıç ispatı birer STS(3), STS(9), STS(13)' ün yanı sıra bir $v \rightarrow 2v + 1$ ve bir $v \rightarrow 2v - 7$ oluşturmasını kullanır.

Bir STS(v)' de tekrar sayısı r ve blok sayısı b şöyledir:

$$r = (v\text{-}1) / 2 \qquad [2.10]$$

$$b = v(v\text{-}1) / 6 \qquad [2.11]$$

[2.10] ve [2.11]'in sağlandığı [2.7] ve [2.3]den kolaylıkla görülebilir.

Teorem 2.50(Lindner ve Rodger, 1998): Yeniden çözülebilir bir STS(v), "v *mertebeli Kirkman üçlü sistemi*" olarak bilinir ve KTS(v) olarak gösterilir.

Örneğin; Örnek 2.24'de verilen B[9, 3, 1] tasarımı bir KTS(9) dur. Benzer şekilde Örnek 2.25' de verilen B[15, 3, 1] tasarımı ise bir KTS(15) dir. KTS(15) aynı zamanda " Schoolgirl Problem " i için bir çözüm verir.

Teorem 2.51(Linder ve Rodger, 1998): Bütün pozitif $v \equiv 3 \pmod 6$ tamsayıları için bir KTS(v) vardır.

$v = 3$ olan sadece bir tane STS vardır. $v = 7, 9, 13, 15, 19,...$(yani $6m+1$, $3 \; m \geq 1$) mertebeli izomorfik olmayan STS' lerin sayısı sırasıyla $1, 1, 2, 80, > 1.1 \times 10^9$,... dur.

e işlem üzerinde bir STS ve f işlem üzerinde bir STS varsa e.f işlem üzerinde de bir STS vardır.

Tanım 2.14: Eğer (P, B) bir STS , $W \subseteq P$, $C = \{B \in B : B \subseteq W\}$ ve (W, C) bir STS ise o zaman (W, C) , (P, B)' nin bir *alt sistemidir* (subsystem).

Teorem 2.52(Colbourn ve Dinitz, 1996): v , $w \equiv 1$ veya 3 (mod 6) ve $v \geq w \geq 1$ ise w mertebeli alt sistem içeren bir STS olması için gerek ve yeter koşul $v = w$ olması ya da $v \geq 2w + 1$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Steiner üçlü sistemlerin kuruluşları için yaygın olarak kullanılan iki yöntem Bose ve Skolem kuruluşlarıdır.

Bose Kuruluşu

Bose yöntemi ile Steiner üçlü sistem kurulurken simetrik, idempotent, yarı-grup(Latin kare) sistemlerinden yararlanılır.
Simetrik, idempotent, yarı-grup(Latin kare) sistem elde etmek için x;y için uygulanan işlem aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$xoy = \frac{n+1}{2}((x+y) \bmod n)$$

Bu durumda Bose kuruluşu yardımıyla bir Steiner sistem kurarken kullanılan notasyonları şöyle ifade edilir.

X; simetrik , idempotent, *yarı*grubun satır ve sütün sayısı,

Z_3;mod 3 e göre tamsayılar kümesi(0,1,2)

Y=X x Z_3; Steiner 3'lü sistemdeki nokta sayısıdır.

Bu durumda $x \in X$ olmak üzere tasarıma ait blokların ilk kısmı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A_x = \{(x,0),(x,1),(x,2)\}\ (x \in X)$$

İkinci kısmı ise x,y∈ X ve x<y ve her i∈ Z_3 olmak üzere;

$$\mathrm{B}_{x,y,i} = \{(x,i),(y,i),(xoy,(i+1) \bmod 3\}$$

şeklinde ifade edilir.

Bu durumda bloklara ait küme son olarak yukarıda ifade edilen iki kümenin birleşimi olarak B^* ile gösterilir ve aşağıdaki gibi verilir.

$$B^* = \{A_x : x \in X\} \bigcup \{\mathrm{B}_{x,y,i} : \mathrm{x,y} \in \mathrm{X\ ve\ x<y}\ \textit{ve her}\ i \in Z_3\}$$

Örnek 2.35: Bose kuruluşu yardımıyla STS(21) elde edilmesi için aşağıdaki yol izlenir.

İlk olarak n=7 iken simetrik idempotent yarıgrup elde etmek gerekir. Simetrik, idempotent, yarıgrup(Latin kare) sistem elde etmek için x ve y için uygulanan işlem aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$xoy = (\frac{n+1}{2}(x+y)) \bmod n$$

Buradan n=7 iken simetrik idempotent yarıgrup aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$0o0 = (\frac{7+1}{2}(0+0)) \bmod 7 = 0$$

$$0o1 = (\frac{7+1}{2}(0+1)) \bmod 7 = 4$$

$$0o2 = (\frac{7+1}{2}(0+2)) \bmod 7 = 1$$

$$\vdots$$

$$2o0 = (\frac{7+1}{2}(2+0)) \bmod 7 = 1$$

$$2o1 = (\frac{7+1}{2}(2+1)) \bmod 7 = 5$$

$$\vdots$$

$$6o6 = (\frac{7+1}{2}(6+6)) \bmod 7 = 6$$

Bu şekilde 7x7 boyutlu simetrik, yarıgrubun 49 tane elamanı elde edilir.

0	4	1	5	2	6	3
4	1	5	2	6	3	0
1	5	2	6	3	0	4
5	2	6	3	0	4	1
2	6	3	0	4	1	5
6	3	0	4	1	5	2
3	0	4	1	5	2	6

Bu simetrik yarıgrup yardımıyla elde edilen bloklar aşağıdaki gibidir.

$x \in X$ olmak üzere yani x<7 iken;

$$A_x = \{(x,0),(x,1),(x,2)\}\ (x \in X)$$

A_x yardımıyla tasarıma ilişkin blokların ilk kısmı bulunur. Buradan tasarıma ilişkin ilk 7 blok oluşturulur.

Bu bloklar;

$B_1=A_{x=0}=\{(0,0),(0,1),(0,2)\}$

$B_2=A_{x=1}=\{(1,0),(1,1),(1,2)\}$

.

.

.

$B_7=A_{x=6}=\{(6,0),(6,1),(6,2)\}$

} Bu şekilde 7 tane blok oluşturulur.

İkinci kısmı ise $x,y\in X$ ve $x<y$ ve her $i\in Z_3$ olmak üzere yani i=0,1,2 ve x=(0,1,2,3,4,5) ve y=(1,2,3,4,5,6) olmak üzere

$$B_{x,y,i}=\{(x,i),(y,i),(xoy,(i+1)\bmod 3\}$$

yardımıyla tasarıma ilişkin blokların ikinci kısmı meydana getirilir. Böylece 63 blok bulunur.

$B_7=B_{0,1,0}=\{(0,0),(1,0),(\underbrace{4}_{0ot},\underbrace{1}_{(0+1)\bmod 3=1})\}$

$B_8=B_{1,1,0}=\{(1,0),(1,0),(1,1)\}$

.

.

.

$B_{70}=B_{5,6,2}=\{(5,2),(6,2),(2,0)\}$

} 63 tane blok

Sonuçta elde edilen tasarımının 70 bloğu vardır ve parametreleri v=21, k=3 , λ=1 b=70 r=10 olarak elde edilen STS(21) tasarımıdır.

Skolem Kuruluşu

Skolem kuruluşu Bose kuruluşunun modifiye edilmesiyle meydana gelir. n=çift olan simetrik, idempotent, *yarı*grup mevcut değilken Bose kuruluşu Skolem kuruluşu olarak tekrar adlandırılır.Skolem kuruluşunda simetrik, idempotent, *yarı*grup yerine yarı idempotent , simetrik, *yarı*grup kullanılır.

Simetrik yarı idempotent *yarı* grup elde etmek için x,y yardımıyla *yarı*gruba ilişkin işlem aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$xoy = \pi((x+y) \bmod n)$$

Burada $\pi(x)$ ise aşağıdaki gibi verilir..

$$\pi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & x \text{ tek ise} \\ \dfrac{x+n-1}{2} & x \text{ çift ise} \end{cases}$$

Örnek 2.36:n=6 iken $\pi(0)=0, \pi(1)=3, \pi(2)=1, \pi(3)=4, \pi(4)=2,\ \pi(5)=5$ elde edilir.

Skolem yöntemi ile STS(v) kurarkan kullanılan notasyonlar ise v=6m+1 ve $m \geq 1$ olmak üzere ;

$$X = \{0,1,...2m+1\}$$
$$Z_3 = \{0,1,2\} \rightarrow \text{mod}3\text{'}e \text{ göre elemanlar}$$
$$Y = X \times Z_3$$
$$= \{(0,1,...2m+1) \times (0,1,2)\} \rightarrow \text{nokta sayısı}$$

şeklinde tanımlanır. Burada tasarıma ait blokların oluşumu 3 kısımdan meydana gelir. Birinci kısımdaki bloklar için

$0 \leq x \leq m-1$ olmak üzere;

$$A_x = \{(x,0),(x,1),(x,2)\}$$

yararlanılır. İkinci kısımdaki bloklar için her x,y $\in \{0,1,...2m+1\}$ olmak üzere

x<y,i$\in Z_3$ olmak üzere;

$$B_{x,y,i} = \{(x,i),(y,i),(xoy,(i+1) \bmod 3\}$$

yararlanılır ve son kısım blokları için ise $0 \le x \le m-1$ ve her $i \in Z_3$ olmak üzere;

$$C_{x,i} = \{\infty,(x+t,i),(x,(i+1) \bmod 3\}$$

kullanılır. Bu durumda tasarıma ait blokların kümesini aşağıda ifade edildiği gibidir.

$$B^* = \{A_x : 0 \le x \le m-1\} \bigcup \{B_x : x,y \in Z_2, x<y,i \in Z_3\} \bigcup \{C_{x,i} : 0 \le x \le m-1 \text{ ve her } i \in Z_3\}$$

olur.

Örnek 2.37: STS(19) tasarımı Skolem metodu yardımıyla kuruluşu

n=6 alındığında yarı idempotent yarıgrup bulunur

Bu durumda

$$\pi(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & x \text{ tek ise} \\ \dfrac{x+n-1}{2} & x \text{ çift ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\pi(x)'ler$ $\pi(0)=0, \pi(1)=3, \pi(2)=1, \pi(3)=4, \pi(4)=2, \pi(5)=5$ elde edilir.

$xoy = \pi((x+y) \bmod n)$ yardımıyla yarı idempotent, yarıgrubu oluşturulsun.

Örneğin, 1o3 'e karşı gelen elemanı

$1o3=\pi((1+3)\bmod 6)$

$=\pi(4)=2$

dir. Bu şekilde aşağıda ifade edilen 7x7 boyutlu yarı idempotent, yarıgrup elde edilir.

0	3	1	4	2	5	$\rightarrow\rightarrow \quad 0o5=\pi((0+5)\bmod 6)=\pi(5)=5$
3	1	4	2	5	0	
1	4	2	5	0	3	
4	2	5	0	3	1	
2	5	0	3	1	4	
5	0	3	1	4	2	

Bu yarı idempotent, yarıgrup yardımıyla elde edilen bloklar aşağıdaki gibidir.

1)

$0 \le x \le m-1$ olmak üzere $0 \le x \le 2$

$$A_x = \{(x,0),(x,1),(x,2)\}$$

kullanılarak tasarıma ilişkin blokların birinci kısmı, tasarıma ilişkin ilk 3 blok bulunur.

Bu bloklar;

$B_1=A_{x=0}=\{(0,0),(0,1),(0,2)\}$

$B_2=A_{x=1}=\{(0,0),(0,1),(0,2)\}$

$B_3=A_{x=2}=\{(0,0),(0,1),(0,2)\}$

2)

Her x,y $\in \{0,1,...2m+1\}$ olmak üzere x<y,i$\in Z_3$ olmak üzere; yani i=0,1,2 ve

x=(0,1,2,3,4) ve y = (1,2,3,4,5) olmak üzere;

$$B_{x,y,i} = \{(x,i),(y,i),(xoy,(i+1)\bmod 3\}$$

yardımıyla tasarıma ilişkin blokların ikinci kısmı bulunur. Burada tasarıma ilişkin 45 blok bulunur.

$$B_4 = \mathrm{B}_{0,1,0} = \left\{(0,0),(1,0),(\underset{0\le i\le 3}{3}\ ,\ \underset{(0+1)\bmod 3}{1})\right\}$$

$$B_5 = \mathrm{B}_{0,2,0} = \{(0,0),(2,0),(1,1)\}$$

$$B_6 = \mathrm{B}_{0,3,0} = \{(0,0),(3,0),(4,1)\}\ B_7 = \mathrm{B}_{0,4,0} = \{(0,0),(4,0),(2,1)\}$$

$$B_8 = \mathrm{B}_{0,5,0} = \{(0,0),(5,0),(5,1)\}\ B_9 = \mathrm{B}_{0,1,1} = \{(0,1),(1,1),(3,2)\}$$

$$B_{10} = \mathrm{B}_{0,2,1} = \{(0,1),(2,1),(1,2)\}\ B_{11} = \mathrm{B}_{0,3,1} = \{(0,1),(3,1),(4,2)\}$$

$$B_{12} = \mathrm{B}_{0,4,1} = \{(0,1),(4,1),(2,2)\}\ B_{13} = \mathrm{B}_{0,5,1} = \{(0,1),(5,1),(5,2)\}$$

$$B_{14} = \mathrm{B}_{0,1,2} = \{(0,2),(1,2),(3,0)\}\ B_{14} = \mathrm{B}_{0,2,2} = \{(0,2),(2,2),(1,0)\}$$

$$B_{15} = \mathrm{B}_{0,3,2} = \{(0,2),(3,2),(4,0)\}\ B_{16} = \mathrm{B}_{0,4,2} = \{(0,2),(4,2),(2,0)\}$$

$$B_{17} = \mathrm{B}_{0,5,2} = \{(0,2),(5,2),(5,0)\}\ B_{18} = \mathrm{B}_{1,2,0} = \{(1,0),(2,0),(4,1)\}$$

$$B_{19} = \mathrm{B}_{1,3,0} = \{(1,0),(3,0),(2,1)\}\ B_{21} = \mathrm{B}_{1,0,4} = \{(1,0),(4,0),(5,1)\}$$

$$B_{22} = \mathrm{B}_{1,5,0} = \{(1,0),(5,0),(0,1)\}\ B_{23} = \mathrm{B}_{1,2,1} = \{(1,1),(2,1),(4,2)\}$$

$$B_{24} = \mathrm{B}_{1,3,1} = \{(1,1),(3,1),(2,2)\}\ B_{25} = \mathrm{B}_{1,5,1} = \{(1,1),(5,1),(0,2)\}$$

$$B_{26} = \mathrm{B}_{1,2,2} = \{(1,2),(2,2),(4,0)\}\ B_{27} = \mathrm{B}_{1,3,2} = \{(1,2),(3,2),(2,0)\}$$

$$B_{28} = \mathrm{B}_{1,4,2} = \{(1,2),(4,2),(5,0)\}\ B_{29} = \mathrm{B}_{1,5,2} = \{(1,2),(5,2),(0,0)\}$$

$$B_{30} = \mathrm{B}_{2,3,0} = \{(2,0),(3,0),(5,1)\}\ B_{31} = \mathrm{B}_{2,4,0} = \{(2,0),(4,0),(0,1)\}$$

$$B_{32} = \mathrm{B}_{2,5,0} = \{(2,0),(5,0),(3,1)\}\ B_{33} = \mathrm{B}_{2,3,1} = \{(2,1),(3,1),(5,2)\}$$

$$B_{34} = \mathrm{B}_{2,4,1} = \{(2,1),(4,1),(0,2)\}\ B_{35} = \mathrm{B}_{2,5,1} = \{(2,1),(5,1),(3,2)\}$$

$$B_{36} = \mathrm{B}_{2,3,2} = \{(2,2),(3,2),(5,0)\}\ B_{37} = \mathrm{B}_{2,4,2} = \{(2,2),(4,2),(0,0)\}$$

$$B_{38} = \mathrm{B}_{2,5,2} = \{(2,2),(5,2),(3,0)\}\ B_{39} = \mathrm{B}_{2,3,4} = \{(3,0),(4,0),(3,1)\}$$

$$B_{40} = \mathrm{B}_{3,5,0} = \{(0,0),(5,0),(1,1)\}\ B_{41} = \mathrm{B}_{3,4,1} = \{(3,1),(4,1),(3,2)\}$$

$$B_{42} = \mathrm{B}_{3,4,2} = \{(3,2),(4,2),(3,0)\}\ B_{44} = \mathrm{B}_{3,5,1} = \{(3,1),(5,1),(1,2)\}$$

$$B_{45} = \mathrm{B}_{3,5,2} = \{(3,2),(5,2),(1,0)\}\ B_{46} = \mathrm{B}_{4,5,0} = \{(4,0),(5,0),(4,1)\}$$

$$B_{47} = \mathrm{B}_{4,5,1} = \{(4,1),(5,1),(4,2)\}\ B_{48} = \mathrm{B}_{4,5,2} = \{(4,2),(5,2),(4,0)\}$$

3)

$0 \le x \le m-1$ ve her $i \in Z_3$ ise yani x=0,1,2 ve i=0,1,2 olmak üzere tasarıma ilişkin son blok bulunur.

$$C_{x,i} = \{\infty, (x+t,i), (x,(i+1) \bmod 3\}$$

$$B_{49} = C_{0,0} = \left\{\infty, (\underbrace{3}_{x+t=3}, \underbrace{0}_{i=0}), (\underbrace{0}_{x=0}, \underbrace{1}_{(i+1) \bmod 3=1})\right\}$$

$$B_{50} = C_{0,1} = \{\infty,(3,1),(0,2)\} \; B_{51} = C_{0,2} = \{\infty,(3,2),(0,0)\}$$

$$B_{52} = C_{1,0} = \{\infty,(4,0),(1,1)\} \; B_{53} = C_{1,1} = \{\infty,(4,1),(1,2)\}$$

$$B_{54} = C_{1,2} = \{\infty,(4,2),(1,0)\} \; B_{55} = C_{2,0} = \{\infty,(5,0),(2,1)\}$$

$$B_{56} = C_{2,1} = \{\infty,(5,1),(2,2)\} \; B_{57} = C_{0,0} = \{\infty,(5,2),(2,0)\}$$

Buradan elde edilen 57 bloğun yerine yazılması ile bulunan tasarım parametreleri v=19 b=57 r=9 k=3 λ=1 ile 2-(19,3,1) tasarımıdır.Bir başka değişle STS(19) tasarımıdır.

2.6.2. Steiner dörtlü sistemler

Tanım 2.15: Bir S(3, 4, v) Steiner sistemine " *Steiner dörtlü sistem* " (Steiner quadruple system) denir ve SQS(v) olarak gösterilir.

Hanani (1960) aşağıdaki teoremi vermiş ve ispatlamıştır.

Teorem 2.53(Colbourn ve Dinitz, 1996): Bir SQS(v)' nün (yani 3-(v, 4, 1)) mevcut olması için gerek ve yeter koşul $v \ge 3$ ve $v \equiv 2$ veya 4 (mod 6) olmasıdır.

İzomorfik olmayan SQS(8), SQS(10), SQS(14) ve SQS(16)' lerin sayısı sırasıyla 1, 1, 4 ve en azından 31 021 dir. Barrau (1908), tek olan SQS(8) ve SQS(10) sistemlerini aşağıdaki şekilde oluşturmuştur.

1 2 4 8	3 5 6 7
2 3 5 8	1 4 6 7
3 4 6 8	1 2 5 7
4 5 7 8	1 2 3 6
1 5 6 8	2 3 4 7
2 6 7 8	1 3 4 5
1 3 7 8	2 4 5 6

Çizelge 2.12. SQS(8) sistemi

1 2 4 5	1 2 3 7	1 3 5 8
2 3 5 6	2 3 4 8	2 4 6 9
3 4 6 7	3 4 5 9	3 5 7 0
4 5 7 8	4 5 6 0	1 4 6 8
5 6 8 9	1 5 6 7	2 5 7 9
6 7 9 0	2 6 7 8	3 6 8 0
1 7 8 0	3 7 8 9	1 4 7 9
1 2 8 9	4 8 9 0	2 5 8 0
2 3 9 0	1 5 9 0	1 3 6 9
1 3 4 0	1 2 6 0	2 4 7 0

Çizelge 2.13. SQS(10) sistemi

Daha sonra Fitting (1915), SQS(26) ve SQS(34) döngülü (cyclic) sistemlerini oluşturmuştur. Bays ve Weck (1935), en azından bir tane SQS(14) sisteminin varlığını göstermişlerdir.

Teorem 2.54(Colbourn ve Dinitz, 1996): $v \leq 100$ için $v \in \{8, 14, 16\}$ ve $\{46, 56, 62, 70, 86, 94\}$ olmasının dışında $v \equiv 2$ veya 4 (mod 6) olduğunda otomorfizm grubu, v mertebeli bir otomorfizm (döngülü) içeren bir SQS(v) vardır.

Teorem 2.55(Colbourn ve Dinitz, 1996): $v \leq 15$ mertebeli her STS(v), bazı SQS(v + 1)' lerin türetilmiş sistemidir.

2.7 Hadamard Matrisleri ve Hadamard Tasarımları

Bu bölümde birçok alanda uygulaması bulunan Hadamard matrisleri ve kombinatoriyel tasarımlara uygulanışı incelenecektir.

n×n boyutlu ve elemanları +1 ve -1'den oluşan bir H matrisi $HH^T=nI$ koşulunu sağlıyorsa, H matrisine *Hadamard matrisi* denir.

Örnek 2.38: Aşağıdaki matrisler 2 ve 4 mertebeli hadamard matrislerine birer örnek olarak verilebilir.

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hadamard matrisinin tanımından HH^T matrisinin köşegen elemanları n köşegen dışı elemanları ise 0 olduğu düşünülürse Hadamard matrisinin satırlarının ortogonal olduğu söylenebilir. Ayrıca Hadamard matrisinin ilk satır ve sütun elemanları 1 ise böyle bir Hadamard matrisine *Standard biçimde* denir.

Teorem 2.56(Hall, 1986): n>2 mertebeli bir Hadamard matrisi var ise bu durumda n, 4 ile tam olarak bölünür.

İspat $H=(h_{ij})\ n>2$ mertebeden normalleştirilmiş HM olsun. $1\le i\le n$ için r_i H'ın i.satırını göstersin. $i\ge 2$ ise $r_1 \bullet r_i = 0$ olduğu ve r_1 n tane "1" içerdiği için her r_i satırı n/2 tane "1" ve n/2 tane "-1" içerir $2\le i\le n$. Burada n çifttir. Ayrıca,

$$a=\left|\{j: h_{2,j}=h_{3,j}=1\}\right|,$$
$$b=\left|\{j: h_{2,j}=1 \quad , \quad h_{3,j}=-1\}\right|,$$
$$c=\left|\{j: h_{2,j}=-1 \quad , \quad h_{3,j}=1\}\right|,$$
$$d=\left|\{j: h_{2,j}=h_{3,j}=-1\}\right|$$

olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$a+b+c+d=n$$
$$r_1 \bullet r_2 = 0 \text{ olduğundan } a+b-c-d=0$$
$$r_1 \bullet r_3 = 0 \text{ olduğundan } a-b+c-d=0$$
$$r_2 \bullet r_3 = 0 \text{ olduğundan } a-b-c+d=0$$

Bu sistem, $a=b=c=d=\frac{n}{4}$ olan tek çözüme sahiptir. a, b, c ve tamsayı olduğundan $n\equiv 0 \bmod 4$ durumunda olmalıdır.

2.7.1 hadamard matrislerinin bazı kuruluş metotları

Sylvester kuruluşu

Teorem 2.57(Tressler, 2004): A ve B hadamard matrisleri ise A⊗B matrisi de hadamard matrisidir. Dolayısıyla m ve n mertebeli hadamard matrisi var ise mn mertebeli Hadamard matrisi de vardır.

Örnek 2.39: örnek 2.38deki H_2 ve H_4 matrislerini tekrar ele alınsın. Hadamard Matrislerinin kronoker çarpımı aşağıda görüldü gibi yeni bir Hadamard matrisidir.

$$H_2 \otimes H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki kuruluş Sylvester kuruluşu yada Kronoker kuruluşu olarak bilinir. Ayrıca Sylverter matrisi H_2 üzerinde Sylvester kuruluşunu kullanarak kurulur.

Tanım 2.16 : S_0, [1] matrisi ve

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olsun. Sylvester matrisi S_n, $S_n=H_2\otimes S_{n-1}$ şeklinde tanımlanan $2^n\times 2^n$ boyutlu matristir.

Paley kuruluşu

F_q q üzerinde cisim ve q tek ve asal olsun. F_q üzerinde tanımlı *kuadratik karakter* fonksiyonu;

$$\chi_q(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x\in QR(q)\\ -1 & x\in QNR(q)\end{cases}$$

şeklinde verilir.

Yardımcı Teorem 2.58 (Tressler,2004): q≡3(mod 4) olacak şekilde q asal sayı olsun, bu durumda q+1 mertebeli Hadamard matrisi vardır.

Ayrıca Bu matris,

$$h_{i,j}=\begin{cases}1 & i=\infty \text{ yada } j=\infty\\ \chi_q(j-i) & i,j\in F_q, i\neq j\\ -1 & i=j, i\neq\infty\end{cases}$$

biçimindedir. Burada ∞ ilk satır ve sütün indisleridir.

Yardımcı Teorem 2.59 (Tressler, 2004):q≡1(mod 4) olacak şekilde q asal sayı olsun, bu durumda 2(q+1) mertebeli Hadamard matrisi vardır.

B matrisi;

$$b_{i,j}=\begin{cases}1 & i=\infty \text{ yada } j=\infty, i\neq j\\ \chi_q(j-i) & i,j\in F_q, i\neq j\\ 0 & i=j\end{cases}$$

olsun. C matrisi, B matrisinin elemanlarından +1,-1,0'ın yerine sırasıyla

$$\begin{pmatrix}+ & +\\ + & -\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}- & -\\ - & +\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

elemanlarının konmasıyla elde edilir. D matrisi ise B matrisinin elemanlarından +1, -1, 0'ın yerine sırasıyla

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}+ & -\\ - & -\end{pmatrix}$$

elemanlarının konmasıyla elde edilir. A=C+D olarak elde edilen matris (2q+2) mertebeli Hadamard matrisidir.

Örnek 2.40: F_5 cismindeki kuadratik artıklar QR(q)={1,4}dir. Dolayısıyla B matrisi;

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan C matrisi

$$C=\begin{bmatrix}
\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}
\end{bmatrix}$$

dir. Benzer şekilde;

$$D=\begin{bmatrix}
\begin{pmatrix}+&-\\-&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&-\\-&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&-\\-&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&-\\-&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&-\\-&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&-\\-&-\end{pmatrix}
\end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece A matrisi;

$$A=\begin{bmatrix}
\begin{pmatrix}+&-\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&-\\-&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&-\\-&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&-\\-&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&-\\-&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-&-\\-&+\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&+\\+&-\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}+&-\\-&-\end{pmatrix}
\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Williamson Kuruluşu

Williamson kuruluşun temeli a,*b*,c,d tamsayı olmak üzere aşağıdaki matris yapısına dayanır. H matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$H:\begin{bmatrix} -a & b & c & d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

ve

$$HH^T=(a^2+b^2+c^2+d^2)I_4$$

şeklinde elde edilir. Burada a,*b*,c,d yerine belirli koşulları sağlayan matrisler konulur.

Teorem 2.60(Stinson, 2004): A,B,C,D aşağıdaki özellikleri sağlayan n x n boyutlu matrisler olsun

1) A,B,C,D elemanları ± 1 olan simetrik matris.

2) A,B,C,D matrisleri değişmeli olsun.

Bu durumda H matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$H:\begin{bmatrix} -A & B & C & D \\ B & A & D & -C \\ C & -D & A & B \\ D & C & -B & A \end{bmatrix}$$

Burada $A^2+B^2+C^2+D^2=M$ şeklinde ifade edilir ve HH^T ise;

$$HH^T=\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix}$$

olur.

Yardımcı Teorem 2.61(Stinson, 2004): A,B,C,D aşağıdaki özellikleri sağlayan n x n boyutlu matrisler olsun

1) A,B,C,D elemanları ± 1 olan simetrik matris.

2) A,B,C,Dmatrisleri geçişli olsun(A.B=B.A)

3) $A^2+B^2+C^2+D^2=4nI_n$

Bu taktirde 4n mertebeli Hadamard matrisi elde edilir.

Örnek 2.41:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \qquad B=C=D=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Burada $A^2+B^2+C^2+D^2=12I_3$ olduğundan 12 mertebeli aşağıdaki Hadamard matrisi elde edilir.

$$H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Düzenli hadamard matris (DHM), her satır ve her sütununda aynı sayıda "1"leri içeren bir matristir. DHM ler birkaç nedenle ilgi çeker. İlk olarak; onlar kesin simetrik DTBT na eşdeğerdir. Ek olarak; onlar, verilen mertebeden bütün olası HM arasında "1" hücrelerinin maksimum sayısına sahiptir.

Örnek 2.42 Aşağıdaki matris 4.mertebeden Düzenli Hadamard Matristir.

$$H=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Her satırı aynı sayıda "1" lere sahip olan HM satır-düzenli (row-regular) HM olarak adlandırılır. her sütunu aynı sayıda "1" lere sahip olan HM sütun-düzenli (column-

regular) HM olarak adlandırılır. satır düzenli HM mevcut olabilmesi için gerekli koşulları şöyledir. Farz edelim ki $H=(h_{i,j})$ her satırı "1"e eşit l hücre içeren $n>1$ mertebeden HM olsun. $1\le i\le n$ için r_i, H'ın i.satırını göstersin.

$$a=\left|\{j: h_{1,j}=h_{2,j}=1\}\right|,$$
$$b=\left|\{j: h_{1,j}=1 \quad , \quad h_{2,j}=-1\}\right|,$$
$$c=\left|\{j: h_{1,j}=-1 \quad , \quad h_{2,j}=1\}\right|,$$
$$d=\left|\{j: h_{1,j}=h_{2,j}=-1\}\right|$$

olmak üzore, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$a+b+c+d=n$$

r_1 l tane "1" içerdiğinden $a+b=l$

r_2 l tane "1" içerdiğinden $a+c=l$

$r_1 \bullet r_2=0$ olduğundan $a-b-c+d=0$

Bu sistem $a=l-\frac{n}{4}$, $b=\frac{n}{4}$, $c=\frac{n}{4}$, $d=\frac{3n}{4}-l$ şeklinde tek çözüme sahiptir.

2.7.2 Bent fonksiyonu Hadamard matrisi ve fark kümeleri

n≥1 bir tam sayı olmak üzere $f:(Z_2)^n \to Z_2$ fonksiyonuna n değişkenli Boolean fonksiyonu adı verilir. B_n n değişkenli tüm Boolean fonksiyonlarının kümesidir.

$x \in (Z_2)^n$ olmak üzere f(x) fonksiyonunun aldığı tüm değerler $\phi(f)$ fonksiyonu ile gösterilir ve ayrıca $x,y \in (Z_2)^n$ olmak üzere 2 vektörün iç çarpımı;

$$x.y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i (\mathrm{mod}\, 2)$$

şeklinde yazılır. Burada $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dir. F, $(Z_2)^n$ üzerinde gerçel bir fonksiyon olsun. $\hat{F} : (Z_2)^n \to R$ şöyle tanımlanabilir.

$$\hat{F} : \sum_{y \in (Z_2)^N} (-1)^{xy} F(y)$$

Herhangi $(x,y) \in (Z_2)^n$ için

$$\delta_{xy} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

yazılabilir. $S_n = [s_{x,y}]$ 2^n x 2^n boyutlu bir matristir ve $s_{x,y}=(-1)^{xy}$'dir.S_n'e n boyutlu Sylvester matrisi denir.n boyutlu Silvester matrisi 2^n mertebeli Hadamard matrisine denktir. $\phi(f)$'e benzer şekilde $\phi(F)$'de F(x) fonksiyonunun değerler vektörüdür.

Yardımcı Teorem 2.62(Stinson, 2004): $F : (0,1)^n \to R$ ve $\phi(\hat{F}) = \phi(F) S_n$ dir.

Örnek 2.43: n=2 $f(x_1,x_2)= x_1x_2$ ve $F=(-1)^f$ olsun.Burada $x_1,x_2 \in Z$ olmak üzere

$\phi(f)$=(f(0,0),f(0,1),f(1,0),f(1,1))=(0,0,01)

ve $\phi(F) = (1,1,1,-1)$ olmak üzere 2.inci mertebeden Sylvester matrisi S_2 $s_{x,y}=(-1)^{xy}$ yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dolayısıyla $\hat{F}$ 'nın değerleri olan $\phi(\hat{F}) = (1,1,1,-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (2,2,2,-2)$

olarak elde edilir

F=$(-1)^f$ ve x, $\in (Z_2)^n$ ise $\left|\hat{F}(x)\right| = 2^{n/2}$ ise $f \in B_n$'e bir Bent Fonksiyonu denir.

Teorem 2.63(Stinson, 2004): $f \in B_n$ ve F=$(-1)^f$ olsun. H_f=$(h_{x,y})$ ve $h_{x,y}$=F(x+y) şeklinde tanımlanır.Burada f'nin bir Bent fonksiyonu olabilmesi için gerekli ve yeter koşul H_f'in bir hadamard matrisi olmasıdır.

Teorem 2.64 (Stinson, 2004): $f : (Z_2)^n \to Z_2$ şeklinde Bent fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşul $(2^n, 2^{n-1} \pm 2^{(n-2)/2}, 2^{n-2} \pm 2^{(n-2)/2})$ şeklinde bir fark kümesinin olmasıdır.

İspat: $f \in B_n$ bent fonksiyon olsun. O zaman, Teorem 2.62de yapılandırılan matris $H_f = (h_{x,y})$ HM tir. H_f'in düzenli olduğunu görmek de kolaydır çünkü, H_f'in her satır ve sütunu F(x) değerlerinin permütasyon listesidir, $x \in (Z_2)^n$.

Her bir $u \in (Z_2)^n$ için *tanım* : $t_u : (Z_2)^n \to (Z_2)^n$ aşağıdaki gibidir. Her $x \in (Z_2)^n$

$$t_u(x) = x + u$$

t_u 'nun $(Z_2)^n$ permütasyonu (örneğin bijeksiyon) olduğu açıktır ve $\{t_u : u \in (Z_2)^n\}$ permütasyonların geçişli setidir. Ayrıca, her t_u, H_f'in otomorfizmidir çünkü, her $x, y \in (Z_2)^n$ için

$$h_{t_u(x),t_u(y)} = h_{u+x,u+y} = F(u+x+u+y) = F(x+y) = h_{x,y}$$

dir.

Bu simetrik (2^n, $2^{n-1} \mp 2^{(n-2)/2}$, $2^{n-2} \mp 2^{(n-2)/2}$) geçişli otomorfizm grupları gibi $(Z_2)^n$ 'e sahiptir, DTBT nın isabet matrisi her "-1" hücresi "0" ile yer değiştirilerek H_f 'ten yapılandırılır.

Tersine; farz edelim ki, fark seti mevcuttur. Bu fark setinden, geçişli otomorfizm grupları gibi $(Z_2)^n$ 'e sahip olan simetrik
(2^n, $2^{n-1} \mp 2^{(n-2)/2}$, $2^{n-2} \mp 2^{(n-2)/2}$) – DTBT elde edilir. O zaman, bu DTBT nın isabet matrisinde her "0" hücresini "-1" ile yer değiştirerek geçişli otomorfizm grubu gibi $(Z_2)^n$ 'e sahip olan 2^n.mertebeden düzenli HM i buluruz. Gerçekte, HM in bu otomorfizm gruplarına sahip olması, her $u, x, y \in (Z_2)^n$ için $h_{u+x,u+y} = h_{x,y}$ anlamındadır.

Fonksiyon $f \in B_n$ 'i aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & h_{x,(0,\cdots,0)} = 1 \\ 1 & h_{x,(0,\cdots,0)} = -1 \end{cases}$$

O zaman, her $x, y \in (Z_2)^n$ için

$$h_{x,y} = h_{x+y,(0,\cdots,0)} = (-1)^{f(x+y)}$$

elde ederiz. Bu yüzden Teorem 2.62 , f 'in bent fonksiyon olduğunu tespit eder.

Örnek 2.44: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ şeklinde verilsin. F=$(-1)^f$ olmak üzere;

$x_1 = (0,0,0,0) = 0$ $\quad x_9 = (1,0,0,0) = 0$

$x_2 = (0,0,0,1) = 0$ $\quad x_{10} = (1,0,0,1) = 0$

$x_3 = (0,0,1,0) = 0$ $x_{11} = (1,0,1,0) = 0$

$x_4 = (0,0,1,1) = 1$ $x_{12} = (1,0,1,1) = 1$

$x_5 = (0,1,0,0) = 0$ $x_{13} = (1,1,0,1) = 1$

$x_6 = (0,1,0,1) = 0$ $x_{14} = (1,1,0,0) = 1$

$x_7 = (0,1,1,0) = 0$ $x_{15} = (1,1,1,0) = 1$

$x_8 = (0,1,1,1) = 1$ $x_{16} = (1,1,1,1) = 0$

Bu durumda;

$\phi(f)$=(0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,1,1,1,0) ve

$\phi(F) = (1,1,1,-1,1,1,1,-1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1)$ şeklinde elde edilir. Fark kümeleri ise aşağıdaki gibi ifade edilir.

Bu fonksiyonlar yardımıyla elde edilen Hadamard matrisinin ilk elemanı

$H_{1,1}=F(x_{1+}x_{1)=1}$ $H_{4,3}=F(x_{1+}x_4)=1$ $H_{5,3}=F(x_{5+}x_3)=-1$

olacak şekilde 16.ıncı mertebeden Hadamard matrisi elde edilir.

D_0=(1,2,3,5,6,7,9,10,11,16) dır bu fark kümesi yardımıyla elde edilen 2-(16,10,6) tasarımı, D_1= (4,8,12,13,14,15) fark kümesi yardımıyla elde edilen ise 2-(16,6,2) tasarımıdır.

2.7.3 Hadamard tasarımlar

Hadamard matrislerinden dengeli tamamlanmamış blok tasarımları elde edilebilir. Bunlara hadamard tasarımlar adı verilir.

Teorem 2.65(Hall,1986): m>1 olacak şekilde simetrik 2-(4m-1,2m-1,m-1)-tasarımının var olması için gerek ve yeter koşul 4m mertebeli hadamard matrisinin var olmasıdır.

Örnek 2.45: m=8 mertebeli bir hadamard matrisi aşağıdaki gibi olsun.

$$H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Buradan ilk satır ve sütunu atıp geri kalan matristeki -1 yerine 0 koyarak elde edilen matris;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matris, simetrik (7,3,1)-tasarımının isabet matrisidir.

Artık ve türetilmiş tasarımdan faydalanarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.66: 4m mertebeli bir Hadamard matrisi mevcut ise aşağıdaki tasarımlar vardır.

1. (4m-1,2m-1,m-1) DTBT $m>1$
2. (4m-1,2m,m) DTBT $m \geq 1$
3. (2m-1, m-1,m-2) DTBT $m>2$
4. (2m,m,m-1) DTBT $m>1$

Örnek 2.46: A isabet matrisine sahip tasarım ele alınsın. Bu tasarımdan, sonuç 2.66'daki 2.nci sonucu elde etmek için 1 ile 0ların yerleri değiştirildiğinde elde edilen tasarım simetrik B[7,4,2]'dir. 3 ve 4. durumlar için tasarımının artık ve türetilmiş tasarımını bulmak yeterlidir.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8 Bazı t-Tasarımlarının Elde Edilişi

$t>2$ olmak üzere t tasarımının kuruluşunda kullanılan tekniklerden 3 tanesi aşağıda verilmiştir.

Teknik 1: Bir çözülebilir BIBD tasarımında $v=2k$ iken bir 3 dizayn elde edilebilir. Bir 2-$(2k,k,\lambda)$ tasarımı bulunsun bu tasarımda i $1 \leq i \leq r$ olmak üzere $\prod_i$ paralel sınıf olarak ifade edilir. $\prod_i$'nin eleman sayısı $v/k = 2k/k = 2$ olarak elde edilir. Bir başka değişle $v=2k$ iken paralel sınıfların her birinde 2 blok bulunmaktadır.

Örnek:

Bir 2-(16,8,7) tasarımına ait isabet matrisi Tablo 2.1'deki gibi ifade edilsin. Sırasıyla her ikili blok bir paralel sınıf oluşturmaktadır.

(4,5,8) noktaları seçilsin.

$a_1 = \left|\{i : \{x,y,z\} \subseteq A_i^j \quad j = 1 yada 2\}\right| = |3| = 3$ burada a_1 (4,5,8) noktalarının birlikte gözükme sayısıdır.

$a_2 = \left|\{i : \{x,y\} \subseteq A_i^j \text{ ve } z \notin A_i^j \quad j = 1 yada 2\}\right| = |4| = 4$ (4,5) noktalarının birlikte gözükme sayısıdır.(4,5 görülürken 8 aynı blokta yer almayacak).

$a_3 = \left|\{i : \{x,z\} \subseteq A_i^j \text{ ve } y \notin A_i^j \quad j = 1 yada 2\}\right| = |4| = 4$ (4,8) noktalarının birlikte gözükme sayısıdır.(4,8 görülürken 5 aynı blokta yer almayacak).

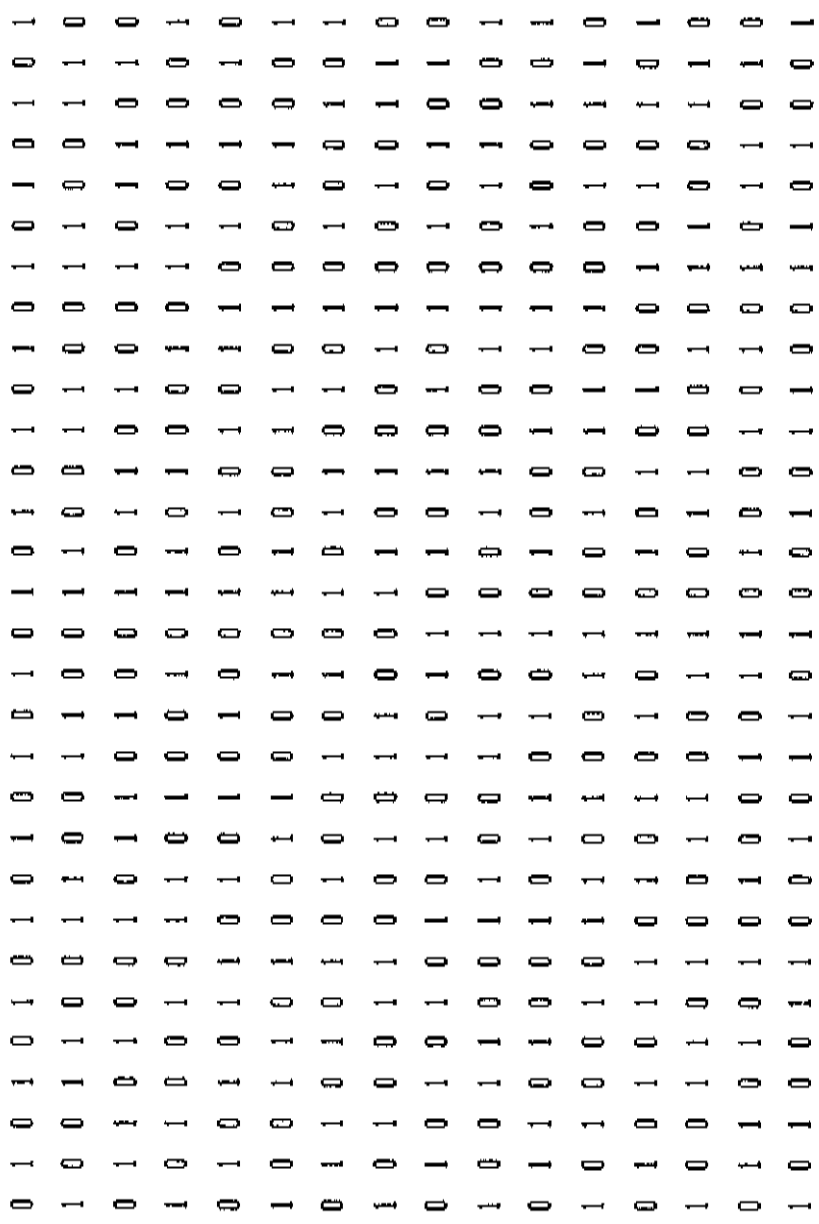
$a_4 = \left|\{i : \{y,z\} \subseteq A_i^j \text{ ve } x \notin A_i^j \quad j = 1 yada 2\}\right| = |4| = 4$ (5,8) noktalarının birlikte gözükme sayısıdır.(5,8 görülürken 4 aynı blokta yer almayacak).

$r = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15$ noktaların tekrar sayısıdır.

$a_1 + a_2 = a_1 + a_3 = a_1 + a_4 = \lambda = 7$

Bu iki eşitlik kullanılarak a_1 yalnız bırakılırsa

$a_1 = \dfrac{3\lambda - r}{2}$ olarak elde edilir.Bu durumda elde edilen 3-tasarımının parametreleri aşağıdaki gibi olur. $3-(v,k,\dfrac{3\lambda - r}{2})$ yani $3-(16,8,7)$ olarak elde edilir.



Çizelge 2.14: 2-(16,8,7) ve 3-(16,8,3) tasarımı

Teknik 2: Eğer 4n boyutlu bir Hadamard matrisi varsa 3-(4n,2n,2n-1) tasarımı vardır.

Örnek :

Hadamard(8) matrisi aşağıdaki gibi olsun. (8=4n ise n=2'dir.)

1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

3 tasarımı elde etmek için ilk önce hadamart matrisinin ilk satırı silinir. Geriye kalan matriste -1'ler yerine 0 yazılır. Meydana gelen yeni matrisin complementi son elde edilen yani ilk satırı çıkmış matrise eklenir.

1.inci adım: İlk satır atıldı ve -1 yerine 0 yazıldı.

1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0

2.inci adım: Yukarıdaki isabet matrisinin complementi alınır.

0 1 0 1 0 1 0 1

0 0 1 1 0 0 1 1

0 1 1 0 0 1 1 0

0 0 0 0 1 1 1 1

0 1 0 1 1 0 1 0

0 0 1 1 1 1 0 0

0 1 1 0 1 0 0 1

3.üncü adım: 1.ini ve 2.inci adımda elde edilen matrisler birleştirilir.

1 0 1 0 1 0 1 0

1 1 0 0 1 1 0 0

1 0 0 1 1 0 0 1

1 1 1 1 0 0 0 0

1 0 1 0 0 1 0 1

1 1 0 0 0 0 1 1

1 0 0 1 0 1 1 0

0 1 0 1 0 1 0 1

0 0 1 1 0 0 1 1

0 1 1 0 0 1 1 0

0 0 0 0 1 1 1 1

0 1 0 1 1 0 1 0

0 0 1 1 1 1 0 0

0 1 1 0 1 0 0 1

Elde edilen tasarım 3-(4n,2n,2n-1) tasarımı olan 3-(8,4,3) tasarımıdır.

Teknik 3: $v \geq 6$ olan her çift tamsayı için bir 3-(v,4,3) tasarımı vardır.

Örnek: 2-(6,2,1)tasarımının isabet matrisi aşağıdaki gibi olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bu tasarımın paralel sınıfı içindeki bloklar 2'şerli olarak birleştirilerek teni tasarımın blokları elde edilir. Yeni tasarımın isabet matrisi aşağıdaki gibidir. Örneğin,1.inci paralel sınıfta B1,B2,B3 blokları vardır.Bunlar B1-B2, B1-B3, B2-B3 olarak birleştirilerek, birleşen her blok çifti yeni tasarımın bloklarını oluşturur.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elde edilen yeni tasarım, 3-(6,4,3) tasarımıdır.

2.9. Notlar

Lander, 1983 yılındaki incelemesinde simetrik tasarımları üzerinde durmuştur. simetrik tasarımlar konusunda daha yeni bir çalışma ise Colbourn ve Dinitz(1996)da bulunmaktadır.

Bruck-Ryser-Chowla teoreminin tek sayılar için olan ispatı Bruck ve Ryser(1949) ve Chowla ve Ryser(1950) tarafından ispatlanmıştır. Bu teoremin çift sayılar için olan kısmı Schützenberger(1949) tarafından ispatlanmıştır.

Fark kümeleri üzerine birçok yayın vardır. Fark kümeleri üzerindeki ilk detaylı çalışma Baumert(1971) tarafından yapılmıştır. Konu hakkında daha yeni sonuçları Jungnickel(1992) ve Beth ve ark.(1999) da bulunabilir. Kuadratik artık fark kümeleri Palry fark kümeleri olarak ta adlandırılır ve ilk olarak Paley(1933)da verilmişitir. Singer fark kümeleri Singer(1938)de verilmiştir. Çarpan teoremi ilk olarak Hall(1947) tarafından verilmiştir.

Seberry ve Yamada(1992) Hadamard matrisleri ve ilişkin yapılarla ilgili bir çalışma yayınlamıştır. Hadamard matrislerinin asimptotik varlığı Craigen(1995) tarafından verlimiştir. Williamson metodu Williamson(1944)de verilmiştir.bu sayede 92.nci mertebeden Hadamard matrisi bulunmuştur(baumert ve ark, 1962). Bent fonksiyonları Rothaus(1976) tarafından verilmiştir. Bu fonksiyonların codlama teorisiyle yakın ilişkisi vardır. Ayrıca hadamard tasarımlarının İstatatistikle(Raghvarao,1971), Kodlama teorisiyle(MacWiliiams ve Sloane,1978), iletişim(Posner,1969) ve optikle(Harwit ve Sloane,1979) çok yakın ilişkisi vardır.

2.10 Alıştırmalar

1) Aşağıdaki şıkları kısa cevaplayınız.
   a) (46,6,1) tasarımının blok sayısını ve her noktanın kaç blokta bulunduğu bulunuz.
   b) (65,5,1) tasarımının blok sayısını ve her noktanın kaç blokta bulunduğu bulunuz.
   c) (12,5,λ) tasarımı dikkate alındığında b ve r'nin tamsayı olma koşulu sağlanması için en küçük λ ne olmalıdır.

2) Bruck-Ryser-Chowla teoremini kullanarak;
   a) (29,8,2) tasarımının;
   b) (67,12,2) tasarımının;
   varolup olmadığını gösteriniz.

3) (31,10,3) fark kümesinin var olmadığını gösteriniz.

4) H_4 ve H_8'den faydalanarak Sylvester yöntemine göre yeni hadamard matrisini bulunuz.

5) q=15 için QR(q)yi kullanarak dengeli tamamlanmamış blok tasarımını ve parametrelerini bulunuz.

6) Bose yöntemini kullanarak STS(25)i bulunuz.

2.11 Kaynaklar

1. Bays, S. and de Weck, E. "Sur les systèmes de quadruples." *Comment. Math. Helv.* 7, 222-241, 1935.
2. Beth, B. And Jungnickel, D. And Lenz, H., 1999 "Design Theory, Second Edition" Vol-1, Cambridge University, UK.
3. Blake, I.F. and Mullin R.C. 1976, An Introduction to Algebraic and Combinatorical Coding Theory. Academic Press Inc. New York..
4. Bruck R.H. and Ryser H.J.,1949, The nonexistence of certain finite projective planes. Canadian J. Math., 1, 88-93.
5. Bose R.C., 1939, On the Construction of balanced incomplete block designs. Ann, Eugenics ,9, 353-399
6. Bose R.C., 1942, A note onthe resolvabilityof Balanced Incomplete Block Designs, Sankhaya, Ser. A,6:105-110.
7. Calderbank, A.R., 1994, Algebric Invariant for Codes and Designs. Bolyai Soc. Math Studies, 3, 157-185
8. Cameron, P. J. and Van Lint, J. H., Designs, Graphs, Codes and Their Links. Cambridge University Press 1991.
9. Chowla S. Ryser H.J., 1950, Combinatorial Problems. Canadian J. Math., 2, 93-99.
10. Colbourn, C.J. And Dinitz, J.H. (Eds.), " The CRC Handbook of Combinatorial Designs", CRC Press, Boca Raton, FL, New York, (1996).
11. Dembowski, P., 1997, "Finite Geometries", Springer-Verlag, Reprint of The 1968 Edition, V-VII, 4-5.
12. Fitting, F. "Zyklische Lösungen des Steiner'schen Problems." *Nieuw. Arch. Wisk.* **11**, 140-148, 1915.
13. Hall, M. Jr., Combinatorial Theory, 2nd Ed. Wiley 1986.
14. Hazewinkel, M. A., "Linked Balanced Designs are Symmetric BIBD's", *CWI Report*, AM-R9509, (1995).
15. Hughes and Pipper, Design Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

16. Kageyama, S., 1971, An improved inequality for balanced incomplete block designs. Ann. Math. Stat., 42 ,1448-1449.
17. Key J.D. and Wagner A., 1986, On an infinite class of Steiner Systems constructed from affine spaces. Arch. Math., 47, 376-378
18. Kramer, E.S. and Mesner D.M., 1976, t-designs on hypergraphs. Discrete Mathematics, 15, 263-296
19. Lander, E. S., 1983, Symetric Designs: An Algebraic Approach. Cambridge University Press, Cambridge.
20. Lindner C.C., Rodger C.A.,1998,Design Theory (Discrete Mathematics & Its Applications), CRC Press Inc, New York
21. Mikhail W.F., 1960, An Inequality for Balanced incomplete block designs. Ann. Math. Stat, 31.520-522.
22. Mitehell J.C.,1979, An Infinity Family of Symetric Designs,Discrete Mathematics, 26, 247-250.
23. Petrenjuk, J.A..,1968, On Fisher's inequality for tactical configurations. Math. Zametki 4., 417-424
24. Raghavarao, D. (1971) Construction and Cambinatorial problems in Design of Experiments, John Wiley and Sons, New York..
25. Shrikhande S.S., 1950, The Imposibility of certain symmetrical balanced incomplete block designs. Ann. Math. Stat., 21, 106-111.
26. Shrikhande S.S. and Raghavarao, D., 1963, A Method Of Construction Of Incomplete Block Designs, , Vol. 25, Series A, Pt. 4, pp. 399-402.
27. Sproott D.A., 1962, Listing of BIB designs from r=16 to 20. Shankya, A24, 203-204
28. Srivastav, S.K., 1988, On The Class of t-designs, Statistics and Probability Letters, 39, 167-172.
29. Stinson D.R., 1996, Combinatorial Designs with selected Applications, Lecture notes.
30. Stinson D.R.,2004, Combinatorial Designs:Construction and analysis, Springer, New York.
31. Street, A.P. and Street, D.J., "Combinatorics of Experimental Design" Clarendon Press, Oxford, UK(1987).

$$bk = r.v, \qquad v = n_1 + n_2 + 1$$

$$\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = r(k-1), \qquad n_1 P_{11}^1 = n_2 P_{11}^2$$

$$n_1 P_{22}^1 = n_2 P_{12}^2$$

Burada v,b,r,k,λ_i, n_j (i,j=0,...,m) birinci çeşit parametre P_{jk}^i (i,j,k=0,1,...,m) ikinci çeşit parametrelerdir. ($2m$+4) tane birinci çeşit, $m^2(m+1)/2$ tane ikinci çeşit parametre vardır.

KDTBT için birliktelik yapılarına ilişkin cebirsel özellikler geniş bir şekilde Bose ve Mesner(1959)da verilmiştir.

Tanım 3.2: m-sınıflı KDTBT'da parametreler arasında aşağıdaki ilişkiler vardır:

$$\sum_{i=0}^{m} n_i = v, \qquad \sum_{i=0}^{m} P_{jk}^i = n_k, \qquad P_{jk}^i = P_{kj}^i, \qquad n_i P_{jk}^i = n_j P_{ik}^j = n_k P_{ij}^k, \quad n_0 = 1,$$

$$P_{ik}^j = \begin{cases} n_i & i = j \text{ ise} \\ 0 & \text{d.d.} \end{cases}, \quad \lambda_0 = r, \quad \sum_{i=0}^{m} n_i \lambda_i = rk, \quad n_j n_k = \sum_{i=0}^{m} P_{jk}^i n_i$$

m=2 için 8 tane birinci çeşit, 6 tane ikinci çeşit parametre vardır.

$$P_{jk}^1 = \begin{bmatrix} P_{11}^1 & P_{12}^1 \\ P_{21}^1 & P_{22}^1 \end{bmatrix}, \qquad P_{jk}^2 = \begin{bmatrix} P_{11}^2 & P_{12}^2 \\ P_{21}^2 & P_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Teorem 3.1 (Vartak,1955)*:* $N_{1(DTBT)}$ ve $N_{2(DTBT)}$ iki DTBT'nın isabet matrisleri olmak üzere

$$N = N_{1(DTBT)} \otimes N_{2(DTBT)}$$

Kroneker çarpımı bir KDTBT tanımlar. Bu çarpımın iki birliktelik sınıfına sahip KDTBT olması için gerek ve yeter koşul $v_1=v_2=v$, $k_1=k_2=k$ olmasıdır(indisler, parametrelerin ait olduğu DTBT'yi gösterir).

Bu koşullar sağlandığında;

$b_2/b_1= r_2/r_1= \lambda_2/\lambda_1=f$

elde edilir. Tanım 3.1'in 2'nci maddesindeki özellikleri sağlayan yapı bir ortaklık şeması (association schme) oluşturur. Böyle elde edilen KDTBT'nin parametreleri aşağıda verilmiştir:

Yardımcı Teorem 3.2(Street ve Street, 1987): B_0, B_1,..., B_m bir m-ortak sınıflı ortaklık şeması için isabet matrisi olsun. O halde;

(1) $\sum_{i=1}^{m} B_i = J_v$

(2) $B_i J_v = n_i J_v$

(3) $B_i B_j = \sum_{h=0}^{m} P_{ij}^h B_h$

(4) $\sum_{u}\sum_{t} P_{jh}^u P_{iu}^t B_t = B_i(B_j B_h) = (B_i B_j)B_h = \sum_{u}\sum_{t} P_{ij}^u P_{uh}^t B_t$

olur.

Yardımcı Teorem 3.3(Street ve Street, 1987): A, bir KD[k,λ_1, λ_2,... ,λ_m;v] tasarımının ilişki matrisi ve B_0, B_1,...,B_m bir m-ortak sınıflı ortaklık şeması için isabet matrisi olsun. O halde;

$AA^T = rI + \sum_{u=}^{m} \lambda_u B_u$

$J_v A = kJ_{v\times b}$

olur. m=2 için KDTBT'ler aşağıdaki şekilde gruplanmıştır.

1) Gruplara bölünebilen(GB)(Group divisible)
2) Basit (Trivial)
3) Üçgensel
4) Latin Kare Tipi(L_i)
5) Döngüsel

Grup bölünebilir ortaklık şeması (GD association scheme): v tane elemanın n birimlik m gruba parçalanmasıdır. $\lambda_1 = 0$ ile grup bölünebilir tasarımlar, DTBT' lerinin çeşitli sınıflarının varlığını ispatlamada kullanılır. Üçgensel tasarımlar, $\lambda = 2$ ile simetrik DTBT larının artık tasarımlarının dualleri gibi gözükür. Sonuç olarak, üçgensel tasarımlar, λ=2 için SDTBT'lerin dualleri gibi düşünülür.

$1 \le i \le m$ için $X = \bigcup_{i=1}^{m} G_i$, $|G_i| = n$; $i \neq j$ için $G_i \cap G_j = \varnothing$ gibi X v

noktalarının bir seti olsun. G_i 'ler grup olarak adlandırılır ve X üzerinde tanımlanan bir ortaklık şeması 'grup bölünebilir' olarak söylenir. Aynı gruptaki noktalar birinci ortaklıktadırlar ve farklı gruplarda olanlar ikinci ortaklıktadırlar. Bir GD ortaklık şemasının parametreleri ortaklık şemasını belirtir.

Bir GD tasarımında $r>\lambda_1$ ve $rk=\lambda_2 v$ ise böyle bir tasarım yarı düzenli GB tasarımı olarak adlandırılır.

Bu tasarımın parameterleri aşağıda verildiği gibidir.

$v=q(q^2+1)$, $b=q^4$, $r=q^3$, $k=q^2+1$, $m=q^2+1$, $n=q$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=q^2$, $\mu_1=1$, $\mu_2=q+1$

Burada i≠j olmak üzere $|B_i \cap B_j| \in \{\mu_1, \mu_2\}$ dır. $r-\lambda_1=0$ ise GD tekil olarak adlandırılır..

KDTBT'yi elde etmenin bir yolu Kronoker çarpımı kullanmaktır.

$$N_1 = [1\ 1\ 1 \ldots 1]_{1\times n},\quad N_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad [3.1]$$

olmak üzere KDTBT'in isabet matrisi $N_{PBIBD}^{(m)}$ olsun. Bu takdirde,

$$N = N_2 \otimes N_{PBIBD}^{(m)} \qquad [3.2]$$

de bir KDTBT'nin isabet matrisidir.

DTBT'nin isabet matrisi N_{BIBD} olmak üzere,

$$N = N_{(BIBD)1} \otimes N_{(BIBD)2} \qquad [3.3]$$

bir KDTBT'nin isabet matrisini gösterir. $N = N_{PBIBD}^{(m)} \otimes N_{PBIBD}^{(t)}$ yine bir KDTBT olur.

[3.2]'de verilen kroneker çarpımı ile en fazla 3 sınıfa sahip bir KDTBT elde edilebilir. Bu çarpımın iki ortak sınıflı olması için gerek ve yeter koşul $i=1,2$ için $v_1 = v_2, k_1 = k_2$ olmasıdır. KDTBT'lerin bir alt sınıfı gruplara ayrılabilen (Group Divisible, GD) tasarımlardır. Tekil GD'ler [3.2]'de verilen kronecker çarpımı ile elde edilir.

[3.3]'de kroneker çarpımından parametreleri aşağıda verilen tasarım elde edilir.

$$v' = \alpha v,\ b' = b,\ k' = \gamma k,\ r' = r,\ m' = v,\ n' = \gamma,\ \lambda_1' = r,\ \lambda_2' = \lambda$$

$$P_{jl}^{1'} = \begin{bmatrix} n'-2 & 0 \\ 0 & n'(m'-1) \end{bmatrix},\quad P_{jl}^{2'} = \begin{bmatrix} 0 & n'-1 \\ n'-1 & n'(m'-2) \end{bmatrix}$$

Sonuç 3.4: Bir tekil KD(kn, r, λ; mn) tasarımının varlığı, bir B [k, λ;m] tasarımının varlığı demektir.

Örnek 3.1: Çizelge 3.1'de bir B[3,1;7] tasarımı ve bu tasarımdan elde edilen bir tekil KD[6, 3, 1; 14] tasarımı verilmiştir.

1	2	4		1	8	2	9	4	11
2	3	5		2	9	3	10	5	12
3	4	6		3	10	4	11	6	13
4	5	7	⇒	4	11	5	12	7	14
5	6	1		5	12	6	13	8	1
6	7	2		6	13	7	14	9	2
7	1	3		7	14	8	1	10	3

Çizelge 3.1 B[3,1:7] ve tekil KB[6,3,1; 14] tasarımı

X, $v=n(n-1)/2$ işlemlerin bir kümesi olsun, $n\geq 5$. işlemler köşegen elemanları boş olan simetrik $n\times n$ düzende yer alsın. O halde, eğer herhangi bir işlemin ilk ortakları tasarımın aynı satır yada sütunu ise ve diğer tüm işlemler ikinci ortaklıklar ise, ortaklık şemasına üçgensel denir. Ortaklık şemasının parametreleri;

$n_1 = 2(n-2),\ n_2 = (n-2)(n-3)/2$ ve

$$P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & n-3 \\ n-3 & (n-3)(n-4)/2 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2n-8 \\ 2n-8 & (n-4)(n-5)/2 \end{bmatrix}$$

dir.

Bir üçgensel ortaklık şemasının parametrelerine sahip bir ortaklık şeması için ilk ortaklık matrisi olsun.

$$B_1 B_1^T = B_1^2 = 2(n-2)I + (n-2)B_1 + 4(J - I - B_1)$$

ve özdeğerleri *2n-4, n-4* ve -2, çarpanları 1, *n-1, v-n* dir.

Bir başka ikili ortaklık şeması ise L_i tipindeki ortaklık şemasıdır.

$n \times n$ düzeninde $v=n^2$ işlemin bir kümesi düşünülsün. Bir işlemin birinci ortakları, düzenin aynı satır veya sütünundaki işlemlerdir. Veya Latin karelerin birinde aynı sembollerle ortaktır. Buna L_i tipi ortaklık şeması denir ve parametreleri;

$$n_1 = i(n-1),\ n_2 = (n-1)(n-i+1)$$

ve

$$P_1 = \begin{bmatrix} i^2 - 3i + n & (i-1)(n-i+1) \\ (i-1)(n-i+1) & (n-i)(n-i+1) \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} i(i-1) & i(n-i) \\ i(n-i) & (n-i)^2 + i - 2 \end{bmatrix}$$

$i \leq n-1$. Eğer $i=n$ ise o halde şema GD'dir. Eğer $i=n+1$ ise tüm türler diğerinin ilk ortaklarıdır.

$n_1=(n\text{-}1)$, $n_2=(m\text{-}1)$, λ_1, λ_2, v, b, r, k ve $P_{jk}^1=\begin{bmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & n(m-1) \end{bmatrix}$,

$P_{jk}^2=\begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & n(m-2) \end{bmatrix}$

Ayrıca

$(n\text{-}1)\lambda_1+n(m\text{-}1)\lambda_2=r(k\text{-}1)$'dir.

Her GD tasarım için;

$r\geq\lambda_1$, $rk\text{-}v\lambda_2\geq 0$

eşitsizlikleri vardır. GD tasarımları kendi içinde şöyle sınıflandırılır:

1- Singuler ($r\text{-}\lambda_1=0$)

2- Semiregüler($r\text{-}\lambda_1>0$ ve $rk\text{-}v\lambda_2=0$)

3- reguler($r\text{-}\lambda_1>0$ ve $rk\text{-}v\lambda_2>0$)

Teorem 3.5 Street ve Street, 1987): Bir yarı-düzenli GD tasarımında m\k'dır. Her blok her gruptan k/m işleme sahiptir.

Teorem 3.6(Street ve Street, 1987): Bir afin çözülebilir B[$\beta(\gamma(\beta\text{-}1)+1)$, $\beta\gamma+1$; βk] tasarımının duali, bir yarı düzenli GD tasarımdır ve parametreleri;

$v = \beta(\gamma\beta^2 + \beta + 1)$

$b = \beta^2(\gamma(\beta - 1) + 1)$

$r = \beta(\gamma(\beta - 1) + 1)$

$k = \gamma\beta^2 + \beta + 1$

$m = \gamma\beta^2 + \beta + 1$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_1 = \gamma(\beta - 1) + 1$

şeklindedir.

Teorem 3.7(Street ve Street, 1987): q bir asal ya da asal kuvveti ise, bir yarı-düzenli GD tasarımı vardır ve;

$v = mq,\ b = q^3,\ r = q^2,\ k = m,\ m,\ n = q,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = q\ \ (m \leq q^2 + q + 1)$

tekil GD tasarımlarını kurmanın birçok yolu vardır. Verilen DTBT'den ve fark kümeleri metodundan faydalanıldığı gibi sonlu geometrilerde kullanılabilir.

Teorem 3.8(Vartak, 1955): $N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ve DTBT'nin isabet matrisi N_{DTBT} olmak üzere

$N = N_2 \otimes N_{DTBT}$

Kroneker çarpımı bir KDTBT tanımlar. Elde edilen tasarım GD, KDTBT'dir.

Örnek 3.2: Örnek 2.13'de verilen 2-(4,3,2) tasarımı göz önüne alınsın.

		Bloklar			
		1	2	3	4
İşlemler	1	X	X		X
	2	X		X	X
	3	X	X	X	
	4		X	X	X

Çizelge 3.2: 2-(4,3,2) tasarımı

$N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alınsın. $N_2 \otimes N_{\text{DTBT}}$ kronoker çarpımı düşünüldüğünde v=8, b=4, r=3, k=6, m=4, n=2, λ_1=3, λ_2=2 ve ikinci çeşit parametreleri

$$P_{jk}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} P_{jk}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

olan tekil GD tasarımı Teorem 3.8'e göre elde edilir(Bayrak,1996).

Teorem 3.9(Jian & Wen,1988): 4t mertebeli Hadamard matrisinin mevcut oluşu parametreleri aşağıda verilen düzenli GD tasarımını verir.

v=8t, b=8(2t-1), r=3(2t-1), k=3t, λ_1=3(t-1), λ_2=2t-1, m=k, n=2t

4t mertebeli Hadamard matrisinin varlığı v=2t, b=4t-2, r=2t-1, k=t, λ=t-1 parametreli DTBT'nin varlığı vurgulamaktadır. N, bu parametrelere sahip DTBT isabet matrisi olsun. Bu taktirde,

$$K = \begin{pmatrix} 0 & N & N & N \\ N & 0 & N & J-N \\ N & J-N & 0 & N \\ N & N & J-N & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere, K matrisinin parametreleri Teorem 3.9'da verilen GD tasarımın isabet matrisidir(Bayrak,1996).

Tanım 3.3: B_i(i=0,1,...,m) elemanları $b_{\alpha\beta}^{k}(\alpha,\beta=1,2,...,v;k=0,1,...,m)$ olan ilişki matrisleri aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$b_{\alpha\beta}^{i} = \begin{cases} 1 & \alpha,\beta \text{ i.nci birliktelik sınıfında ise} \\ 0 & \text{d.d.} \end{cases}$$

$$B_i = \left(b_{\alpha\beta}^{i}\right)_{u\times u} \quad (i=0,1,2,...,m)$$

matrisleri simetriktir. Bu matrislerin her bir satır ve sütun toplamı n_i sayısını verir. Her bir işlem kendisinin sıfırıncı ilişki sınıfında bulunur.

$B_0=I_v$

alınır.

$B_0+ B_1+... B_m=J_v$

dir.

B_i'lerin yapısı göz önüne alındığında

$c_0B_0+ c_1B_1+... c_mB_m=\varnothing_v$

dir. $\mathcal{O}$, $v \times v$ boyutlu sıfır matrisidir. Bu eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $\sum_{i=1}^{m} c_i = 0$ olmasıdır. O halde B_i 'ler lineer bağımsızdır.

3.1 İkili Dengeli Tasarımlar

Wilson(1972), tasarımların farklı çeşitlerinin varolması için gerekli koşulların asimptotik olarak yeterli olduğunu gösterdi. Örneğin, $k > 1$ pozitif tamsayı verilsin, $2-(v,k,1)$ tasarımının var olması için gerekli koşullar (k–1)'in (v–1)'i bölmesi ve $k(k\text{-}1)$'in $v(v\text{-}1)$'i bölmesidir. Wilson'un Teoreminden; tasarım, verilen k'lar için mevcuttur fakat bu koşulları sağlayan v'lerin çoğu için sonlu olarak mevcuttur.

Wilson'un Varlık Teorisini betimlemek amacıyla, her bir iki noktanın tek blokta olduğu, alt kümelerin (bloklar olarak adlandırılır) B koleksiyonu ile noktaların P kümesi olarak ' ikili dengeli tasarım(İDT) (Pairwise Balanced Design)' tanımlanır. Eğer K, blokların elemanlarının kümesi ise tasarımı İDT(K) ile ifade edilir. K=$\{k\}$ ise v noktaları ile İDT(K), $S(2,k,v)$ Steiner Sistem olacaktır.

$0,1 \in K$ kabul edilsin. Gerçekten, en fazla bir elemana sahip olan bloklar İDT için tanımlanan özellikleri bozmayacaktır. Bir İDT bir doğrusal uzay gibi düşünülebilir.

K, negatif olmayan sayıların bir kümesi olsun. B(K), v noktaya sahip İDT(K) için v'lerin bir kümesini tanımlasın. Örneğin, B({3}), Steiner üçlü Sistemlerin bir sıralı kümesini gösterecektir.
$0,1 \in B(K)$ olduğu görülebilir. Ayrıca aşağıdaki özellikler vardır.

i) $K \subseteq B(K)$,

ii) $K_1 \subseteq K_2$ oluşu $B(K_1) \subseteq B(K_2)$ yi ifade eder.

iii) $B(B(K))=B(K)$ dır.

Yardımcı Teorem 3.10(Hughes ve Pipper, 1985): $v > 0$ olmak üzere $v \in B(K)$ ise, $\alpha(K)$ (v-1)'i ve $\beta(K)$ v(v-1)'i böler.

Burada

$$\alpha(K) = ebob\{k-1 : k \in K$$

$$\beta(K) = ebob\{k(k-1) : k \in K$$

dir.

Steiner üçlü Sistemin mertebesinin 1 yada 3 (mod6)'a denk olması iyi bilinen genel sonuçlardır.

Teorem 3.11(Hughes ve Pipper, 1985): K negatif olmayan tamsayıların kümesi olsun. O zaman B(K)'ya ait olan $\beta(K)$, v(v-1)'i böler ve $\alpha(K)$ (v-1)'i böler koşullarını sağlayan v tam sayılarının sayısı sonludur.

Bu teorem pek çok sonuca sahiptir. (k-1)'in (v-1)'i bölmesi ve k(k-1)'in v(v-1)'i bölmesi; bu koşullar, iddia edildiği gibi v'nin sonlu olarak çoğu değerleri için $S(2,k,v)$ – Steiner Sistemin varolması için yeterlidir. Bu koşulların gerekli olduğunu gösterir.

Yardımcı Teorem 3.12(Hughes ve Pipper, 1985): Aşağıdaki kümelerin her biri İDT-kapalıdır.

a) $2-(v,k,\lambda)$ tasarımı için v kümesi, verilen her bir k ve λ için mevcuttur. (burada tekrarlı bloklara izin verilir.)

b) Ortak Transversal 'a sahip s tane n.mertebeden ikişerli ortogonal latin kareler için n kümesi, verilen her bir s için mevcuttur.

c) r paralel sınıfları ile yeniden çözülebilir $2-(v,k,1)$ tasarımı için r kümesi, verilen k için mevcuttur.

$v \in B(K)$ ve her bir $l \in K$ için $2-(l,k,\lambda)$ tasarımı mevcut olsun. v noktaların kümesi üzerinde İDT(K) alınsın. Bu İDT'nin her bir bloğu k blok genişliği ile 2-Tasarımı verir. Bu tasarımlarda bloklar olarak k-kümelerinin tamamı gözükür.

Örneğin Teorem 3.62'ye göre B({4,7}) mod3 'e göre "1"e denk olan tamsayıların tümünü ihtiva eder. Ayrıca, analiz yalnızca istisnaların 10 ve 19 olduğunu gösterir. 2-(4,4,2) ve 2-(7,4,2) tasarımları mevcut olduğu için v=19 ve v=10 mümkün değildir. 1mod3'e uygun her v için $2-(v,4,2)$ tasarımlarının mevcut olduğu sonucu çıkarılır.

b)'de, İDT-kapalı K kümesi $n > s+1$ bütün asal kuvvetleri içerir ve bunun için $\alpha(K) = \beta(K) = 1$ dir.

$x \in B(K \setminus \{x\})$, $x \in$K bütün elemanların kümesi verilsin. Bu kümenin sonlu olduğu ve B(X)=K sağlayan kümenin tek olduğu gösterilebilir. Örneğin, Steiner üçlü Sistemlerin mertebelerinin kümesi için temel(taban) {3} 'tür.

Çalışmalar, İDT'lerin bölünebilirlik koşullarını sağlayan yeteri kadar büyük bütün q asal kuvvetleri için mevcut olduğunu gösterir.

Bu yapılarda GF(q)'nun her bir sıfır olmayan elemanı aynı kümeden iki elemanın farkı gibi tek olarak ifade edilebilir.

Bir İDT'den yeni İDT'lerin elde edildiği geri dönüşlü yapılar, gerekli koşulları sağlayan yeteri kadar büyük her bir genişlikte İDT 'nin mevcut olacağını gösterir. Geri dönüşlü yapıların çoğu 'grup bölünebilir tasarımların terimlerinde uygun olarak ifade edilebilir.

Örnek 3.3:7.mertebeden bir İDT'na mod 7'ye göre tamsayılardan oluşan küme $X = Z_7$ iken

$$B = \{123456, 01, 02, 03, 04, 05, 06\}$$

dir. $\lambda = 1$ durumunda ve blok genişliklerinin kümesi $\{2,6\}$ dır.

Aynı küme üzerine diğer İDT'ina, $\lambda = 1$ olmak üzere

$$B = \{124, 235, 346, 450, 561, 602, 013\}$$

ile verilir, bütün blok genişlikleri $\{3\}$ tür.

Aynı küme üzerindeki bu iki İDT'nın isabet matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$A_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A_{**} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Transversal Tasarım

Tanım 3.4: $k \geq 2$ ve $n \geq 1$ olmak üzere bir transversal tasarım $TD_\lambda(k,n)$ ile ifade edilir ve aşağıdaki özellikleri sağlayan $(\mathcal{X}, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ sıralı üçlüsünden oluşur.

1. $\mathcal{X}$, kn elemanlı bir kümedir. Bu elemanlar noktalar olarak adlandırılır.

2. $\mathcal{G}$, $\mathcal{X}$ 'in bir parçasıdır. Genişliği n olan k tane alt kümeden oluşur. Bu kümeler gruplar olarak adlandırılır.

3. $\mathcal{B}$ ise $\mathcal{X}$ 'deki k alt kümenin bir kümesidir ve bloklar olarak adlandırılır.

4.Herhangi bir grup ve bloğun sadece bir tek ortak noktası vardır.

5.Farklı gruplardan gelen tüm nokta çiftleri sadece bir blokta yer alır.

Bir transversal tasarımda gruplar noktaların alt kümesidir. Ayrıca $n \geq 1$ olan tamsayılar için bir $TD_\lambda(2,n)$ tasarımı mevcuttur. (Stinson, 1996)

$TD_\lambda(k,n)$ n hacimli, k grup ve λ indeksli bir transversal tasarımı ifade eder. $\lambda = 1$ durumunda tasarıma birim indeksli transversal tasarım denir.

Tanım 3.5: Eğer bir isabet yapısı $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa simetrik transversal tasarım $STD_\lambda(k,n)$ adını alır. Burada $k \geq 2$, $n \geq 2$ ve $\lambda \geq 1$ dir.

(i) $\mathcal{S}$ bir $TD_\lambda(k,n)$ tasarımıdır.

(ii) $\mathcal{S}$ 'nin dual yapısı da yine bir $TD_\lambda(k,n)$ tasarımıdır. $\mathcal{S}$ 'nin dualinin nokta grupları, $\mathcal{S}$ 'nin blok gruplarıdır.

Eğer $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$, bir simetrik transversal tasarım $STD_\lambda(k,n)$ ise $k = \lambda n$ olur.

Örnek 3.4:

$$0 = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix} \text{ ise}$$

$STD_1(3,3)$ tasarımının isabet matrisi,

$$\begin{pmatrix} I & I & I \\ I & S & T \\ I & T & S \end{pmatrix}$$

olarak verilir.

Örnek 3.5: $STD_2(6,3)$ tasarımının isabet matrisi,

$$\begin{pmatrix} I & I & I & I & I & I \\ I & I & S & S & T & T \\ I & S & T & I & T & S \\ I & S & I & T & S & T \\ I & T & T & S & S & I \\ I & T & S & T & I & S \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

Teorem 3.13(Chihiro ,2005): $k \geq 6$ ve $k \equiv 0 \bmod(2)$ olsun. $STD_{\frac{k}{2}}[k;2]$ ve de $k \equiv 0 \bmod(4)$ mevcut ise parametreleri $\left(k-1, \frac{1}{2}k-1, \frac{1}{4}k-1\right)$ olan bir Hadamard tasarım mevcuttur. Bu teoremin tersi de doğrudur.

Teorem 3.14(Chihiro ,2005): $k \geq 8$ ve $k \equiv 0 \bmod(4)$ olsun. Parametreleri $\left(k-1, \frac{1}{2}k-1, \frac{1}{4}k-1\right)$ olan Hadamard tasarım mevcut ise $STD_{\frac{k}{2}}[k;2]$ olan bir simetrik transversal tasarım mevcuttur.

Örnek 3.6: Parametreleri (7,3,1) olan Hadamard tasarımın isabet matrisi, ayrıca $STD_4(8,2)$ tasarımının isabet matrisine kaşılık gelen matris aşağıda gösterilmiştir.

1 0 0 0 1 0 1
1 1 0 0 0 1 0
0 1 1 0 0 0 1
1 0 1 1 0 0 0
0 1 0 1 1 0 0
0 0 1 0 1 1 0
0 0 0 1 0 1 1

1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1

Teorem 3.15(Chihiro ,2005): $STD_m[k;n]$ ve $STD_h[t;r]$ mevcutsa $STD_{kh}(kt,r)$ mevcuttur.

Teorem 3.16 (Chihiro ,2005): p asal sayı ise $0 \le n \le m$ koşuluyla tüm m ve n ler için bir $STD_{p^{m-n}}(p^m, p^n)$ mevcuttur.

Wilson Yapısı

Wilson yapısı transversal tasarımların en kolay elde edilenlerinden biridir. Bunun için önce transversal tasarımların aşağıda verilen yapıları üzerinde durulacaktır.

$(\mathcal{X},\mathcal{G},\mathcal{A})$, grupları $G_1,.....,G_k$ olan bir $TD_\lambda(k,t)$ tasarımı olsun.

$\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ x {1,.....,m},

$1 \le i \le k$ olmak üzere,

$H_i = G_i \times \{1,....,m\}$ şeklinde tanımlansın.

$\mathcal{H} = \{H_i : 1 \le i \le k\}$ alınsın. $\mathcal{Y}$, oluşturulacak $TD(k,mt)$ tasarımının noktaları, $\mathcal{H}$ ise grupları olacaktır.

Yeni oluşacak bu transversal tasarımın blokları şöyledir. Her bir blok $A \in \mathcal{A}$ olmak üzere m^2 blok oluşturulur.

$1 \le i \le k$ için, $\{a_i\} = A \cap G_i$ olsun. Burada $\mathcal{B}_A$, $TD_\lambda(k,m)$ tasarımının m^2 bloğundan oluşan bir kümedir ve grupları;

$$\{a_i\} \times \{1,....,m\}, \qquad 1 \le i \le k$$

$$\mathcal{B} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_A$$

biçimindedir.

$(\mathcal{Y}, \mathcal{H}, \mathcal{B})$'nin bir transversal tasarım oluşturması istensin. Burada amaç, farklı gruplardan gelen herhangi iki nokta olan x ve y'nin tek bir blokta yer aldığını göstermektir.

$x = (g,a)$ ve $y = (h,b)$ farz edilsin. Ayrıca $g \in G_i$, $h \in G_j$, $i \neq j$ ve $a,b \in \{1,....,m\}$ olsun.

$g,h \in A$ olacak şekilde $A \in \mathcal{A}$ olan tek bir blok vardır, çünkü g ve h, $\mathcal{G}$'deki farklı gruplarda görünür. Buradan x ve y'nin $\mathcal{B}_A$'da tek bir blokta yer aldığı daha kolay görülebilir, noktalar birlikte $\mathcal{B}$'deki diğer bloklarda yer almaz.

Wilson yapısı kesik(truncated) transversal tasarımında da kullanılır. Bu tasarım transversal tasarımdaki, gruplardan birindeki bazı noktaların silinmesiyle oluşturulur.

$(\mathcal{X},\mathcal{G},\mathcal{B})$, $k \geq 2$ olan bir $TD_\lambda(k+1,t)$ tasarımı olmak üzere, $G \in \mathcal{G}$ grubu çıkarılsın ve $1 \leq u \leq t$ olsun.

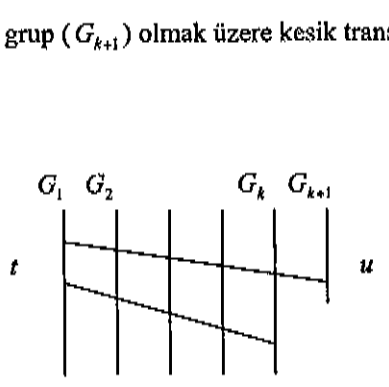
$G' \subseteq G$, $|G'| = u$ alınsın.

$$\mathcal{Y} = (\mathcal{X} \setminus G) \cup G'$$
$$\mathcal{H} = (\mathcal{G} \setminus \{G\}) \cup \{G'\}$$
$$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B} : B \cap G' \neq \varnothing\} \cup \{B \setminus \{x\} : B \in \mathcal{B}, B \cap G = \{x\}, x \in G \setminus G'\}$$

$(\mathcal{Y},\mathcal{H},\mathcal{C})$ üçlüsü bir kesik transversal tasarımı oluşturur. Eğer $u < t$ ise o zaman bu tasarım $kt+u$ tane noktası, genişliği t olan k grubu, genişliği u olan bir grubu, genişliği k olan $t(t-u)$ bloğu ve genişliği $k+1$ olan tu bloğu olur. $t = u$ durumunda ise tasarım $TD_\lambda(k+1,t)$ haline gelir, çünkü hiçbir nokta silinmemiş olur.

Teorem 3.17(Stinson,2004): $k \geq 2$ olmak üzere aşağıdaki transversal tasarımlar mevcut olsun. $TD(k,m)$, $TD(k,m+1)$, $TD(k+1,t)$, $TD(k,u)$ ve $TD(k,mt+u)$ burada $1 \leq u \leq t$ dir.

Öncelikle $TD(k+1,t)$ tasarımından $t-u$ noktanın silinmesiyle bir kesik transversal tasarım oluşturulsun. $(\mathcal{X},\mathcal{G},\mathcal{A})$, genişliği t olan k grup $(G_1,.....,G_k)$, ve genişliği u olan grup (G_{k+1}) olmak üzere kesik transversal tasarımı ifade eder.



Yukarıdaki şekil bir kesik transversal tasarımı göstermektedir. Dikey çubuklar grupları, diğer ikisi ise blokları göstermektedir.

$\mathcal{Y} = ((\mathcal{X} \setminus G_{k+1}) \times \{1,.....,m\}) \cup (\{1,....,k\} \times G_{k+1})$

$1 \le i \le k$ için,

$H_i = (G_i \times \{1,...,m\}) \cup (\{i\} \times G_{k+1})$

$\mathcal{H} = \{H_i : 1 \le i \le k\}$ $\mathcal{Y}$ ve $\mathcal{H}$ sırasıyla $TD(k, mt+u)$tasarımının noktaları ve grupları olacaktır.

$(\mathcal{X} / G_{k+1}) \times \{1,...,m\}$ noktaları "1 nci tip" nokta, $\{1,...,k\} \times G_{k+1}$ noktaları "2 nci tip" nokta olarak tanımlansın. Her bir grup H_i, mt tane, 1 nci tip ($G_i$deki her bir noktanın m tane kopyasından oluşan) nokta, u tane 2 nci tip (G_{k+1} deki her bir noktanın bir kopyasından oluşan) nokta içerir.

Her blok için $A \in \mathcal{A}$ olmak üzere $\mathcal{B}_A$ blok kümesi aşağıdaki sıraya uygun olarak elde edilir.

1. $|A| = k$, $1 \le i \le k$ için $\{a_i\} = A \cap G_i$ olsun. Bu durumda $\mathcal{B}_A$, m^2 sayıda bloktan oluşan,
$1 \le i \le k$ için,
grupları; $(\{a_i\} \times \{1,....,m\})$ olan bir $TD(k,m)$ tasarımı olacaktır.
$\mathcal{B}_A$ bloklarına dikkat edildiğinde sadece 1'nci tip noktaları içerdiği görülebilir.

2. $|A| = k+1$, $1 \le i \le k+1$ için $\{a_i\} = A \cap G_i$ olsun. Böylece grupları, $1 \le i \le k$ için,

$(\{a_i\} \times \{1,....,m\}) \cup \{(i, a_{k+1}),....,(k, a_{k+1}\}$, bloğu ise $\{(1, a_{k+1}),....,(k, a_{k+1})\}$ olan

$TD(k, m+1)$ tasarımı oluşacaktır.

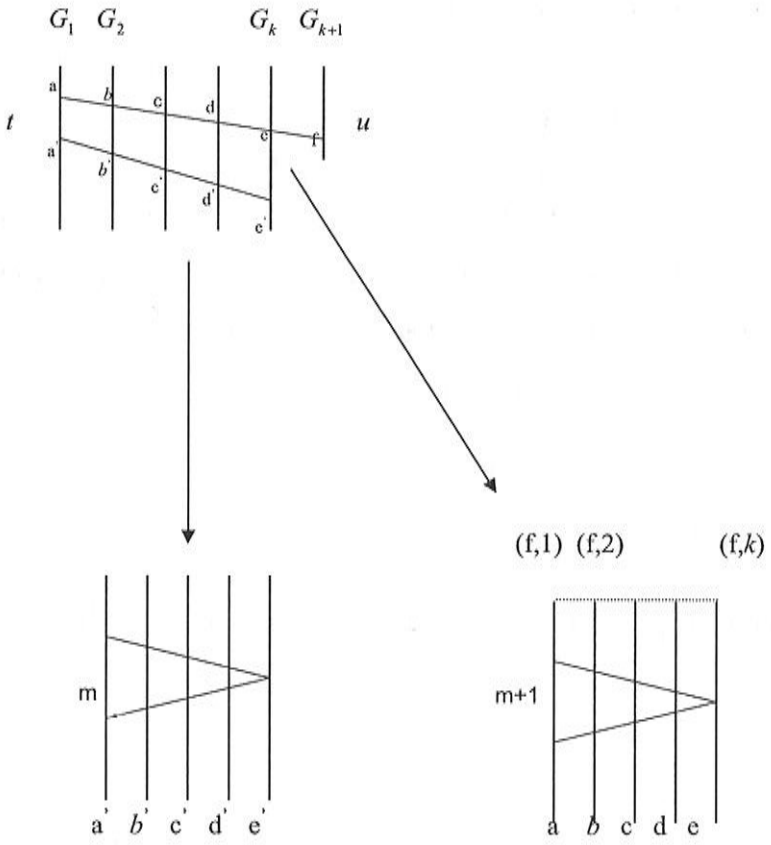
Bu blok silinirse $\mathcal{B}_\Delta$'deki blok sayısı $(m+1)^2 - 1$ olacaktır. $TD_1(k, m+1)$ tasarımının her bir grubu incelendiğinde m tane 1'nci tip nokta ve bir tane 2'nci tip noktanın var olduğu görülür. Bununla birlikte, $\mathcal{B}_\Delta$'deki blokların hiç biri 1'den fazla 2'nci tip nokta içermez. Bu sebepten dolayı $\{(1, a_{k+1}), \ldots, (k, a_{k+1})\}$ bloğu silindiğinde, sadece transversal tasarımdaki blokta 1'den fazla 2'nci tip nokta bulunur.

$1 \le i \le k$ için, grupları $\{i\} \times G_{k+1}$ olan; $TD(k, u)$ tasarımına ulaşılır.

$\mathcal{B}^*$ bu transversal tasarımın bloklarını göstersin. ($\mathcal{B}^*$'daki bloklarda sadece 2'nci tip noktaların olduğu görülebilir)
$TD(k, mt+u)$ tasarımının blokları şu şekilde tanımlanabilir:

$$\mathcal{B} = \left(\bigcup_{\Delta \in \Lambda} \mathcal{B}_\Delta \right) \cup \mathcal{B}^*$$

Kesik transversal tasarımın transversal tasarıma dönüştürülmüş hali aşağıda verildiği gibidir.



$(\mathcal{Y},\mathcal{H},\mathcal{B})$'nin bir transversal tasarım olduğu, x ve y gibi $\mathcal{H}$'deki farklı gruplardan gelmiş iki noktanın da tek bir blokta görülebildiği gösterilsin.

Dikkat edilmesi gereken 3 nokta aşağıda verilmiştir.

1. x ve y 'nin her ikisi de 1'nci tipten iki nokta olduğu varsayılsın. Bu taktirde $x=(g,a)$ ve $y=(h,b)$, $g\in G_i$, $h\in G_j$, $i\neq j$ ve $a,b\in\{1,....,m\}$ olur. Burada $g,h\in A$ olan $A\in\mathcal{A}$ bir tek blok vardır. Bu yüzden, x ve y, $\mathcal{B}_A$' de tek blokta yer alırlar ve $\mathcal{B}$'deki diğer blokların hiç birinde aynı anda görünmezler.

2. x 1'nci tip, y ise 2'nci tip nokta olduğu varsayılsın. $x=(g,a)$ ve $y=(j,h), g\in G_i$, $h\in G_{k+1}$, $a\in\{1,....,m\}$ ve $j\in\{1,....,k\}\setminus\{i\}$. Burada $g,h\in A$ gibi $A\in\mathcal{A}$ olan bir tek blok vardır. Ayrıca $|A|=k+1$ olmalıdır. x ve y, $\mathcal{B}_A$'deki tek blokta yer alırlar ve $\mathcal{B}$'deki diğer blokların hiçbirinde aynı anda görünmezler.

3. x ve y, $x=(i,g)$ ve $y=(j,h)$ $g,h\in G_{k+1}$, $i,j\in\{1,....,k\}$ ve $i\neq j$ olan 2'nci tip noktalar olsun. x ve y, $\mathcal{B}^*$'daki tek blokta yer alırlar ve $\mathcal{B}$'deki diğer blokların hiçbirinde aynı anda görünmezler.

Örnek 3.7: $k=3, m=2, t=3$ ve $u=2$ olan $TD(3,2), TD(3,3), TD(4,3)$ ve $TD(3,8)$ tasarımları mevcuttur.

$TD(4,3)$ tasarımı ele alınırsa, bu tasarımdan nokta sayısı iki olan bir grup çıkarıldığında bir kesik transversal tasarım elde edilir.

$$(\mathcal{X},\mathcal{G}=\{G_1,G_2,G_3,G_4\},\mathcal{A}=\{A_i:1\le i\le 9\})$$

$$\mathcal{X}=\{a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,d_1,d_2\},$$
$$G_1=\{a_1,a_2,a_3\},G_2=\{b_1,b_2,b_3\},G_3=\{c_1,c_2,c_3\},G_4=\{d_1,d_2\}$$
$$A_1=\{a_1,b_1,c_1,d_1\},\ A_2=\{a_2,b_2,c_2,d_1\},\ A_3=\{a_3,b_3,c_3,d_1\},$$
$$A_4=\{a_1,b_2,c_3,d_2\},\ A_5=\{a_2,b_3,c_1,d_2\},\ A_6=\{a_3,b_1,c_2,d_2\},$$
$$A_7=\{a_1,b_3,c_2\},A_8=\{a_2,b_1,c_3\},A_9=\{a_3,b_2,c_1\}.$$

$TD(3,8)$ tasarımının grupları:

$$H_1=\{(a_1,1),(a_1,2),(a_2,1),(a_2,2),(a_3,1),(a_3,2),(1,d_1),(1,d_2)\}$$
$$H_2=\{(b_1,1),(b_1,2),(b_2,1),(b_2,2),(b_3,1),(b_3,2),(2,d_1),(2,d_2)\}$$
$$H_3=\{(c_1,1),(c_1,2),(c_2,1),(c_2,2),(c_3,1),(c_3,2),(3,d_1),(3,d_2)\}$$

$\mathcal{A}$'daki her blok, $TD(3,8)$ tasarımındaki blokların tam kümesini gösterir. Örneğin, $A_1 = \{a_1, b_1, c_1, d_1\}$'i ele alınsın. $|A_1| = 4 = k+1$ olduğundan, $\mathcal{B}_{A_1}$ blokları, grupları $\{(a_1,1),(a_1,2),(1,d_1)\},\{(b_1,1),(b_1,2),(2,d_1)\}$ ve $\{(c_1,1),(c_1,2),(3,d_1)\}$ olan $TD(3,3)$ tasarımından oluşur.

Bir transversal tasarım oluşturmak istenirse bloklardan birinin,

$$\{(1,d_1),(2,d_1),(3,d_1)\}$$

olup olmadığından emin olmak gerekir. Bu blok silindikten sonra geriye kalan sekiz blok $\mathcal{B}_{A_1}$ ile karşılaştırılır.

$\{(a_1,1),(b_1,1),(c_1,1)\}$ $\{(a_1,2),(b_1,2),(c_1,2)\}$
$\{(a_1,1),(b_1,2),(3,d_1)\}$ $\{(a_1,2),(2,d_1),(c_1,1)\}$ $\{(1,d_1),(b_1,1),(c_1,2)\}$
$\{(a_1,1),(2,d_1),(c_1,2)\}$ $\{(a_1,2),(b_1,1),(3,d_1)\}$ $\{(1,d_1),(b_1,2),(c_1,1)\}$

$\mathcal{A}$'daki diğer blok $A_7 = \{a_1, b_3, c_2\}$ ele alınırsa, $|A_7| = 3 = k$ olduğundan, $\mathcal{B}_{A_7}$'nin blokları, grupları $\{(a_1,1),(a_1,2)\},\{(b_3,1),(b_3,2)\}$ ve $\{(c_2,1),(c_2,2)\}$ olan $TD(3,2)$ tasarımıdır.

Aşağıdaki dört blok ele alınırsa,

$\{(a_1,1),(b_3,1),(c_2,1)\}$ $\{(a_1,2),(b_3,2),(c_2,1)\}$
$\{(a_1,2),(b_3,1),(c_2,2)\}$ $\{(a_1,1),(b_3,2),(c_2,2)\}$.

Bu işlem, $A_1,....A_9$ olan dokuz bloğun her biri için uygulanır.

Sonuç olarak ;

$\{(1,d_1),(1,d_2)\}$, $\{(2,d_1),(2,d_2)\}$ ve $\{(3,d_1),(3,d_2)\}$ grupları ile birlikte, $TD(3,2)$ tasarımındaki dört blok yan yana getirilmiş olur.

Aşağıdaki dört blok ele alınırsa,

$\{(1,d_1),(2,d_1),(3,d_1)\}$, $\{(1,d_1),(2,d_2),(3,d_2)\}$

$\{(1,d_2),(2,d_1),(3,d_2)\}$, $\{(1,d_2),(2,d_2),(3,d_1)\}$.

$TD(3,8)$ tasarımından 64 bloklu bir küme elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.18(Colbourn ve Dinitz,2001): Bir $TD_\lambda(k,n)$ tasarımında λn^2 sayıda blok vardır.

Tasarımın herhangi bir bloğunda ortak bir grupta bulunan $\binom{n}{2}$ kadar sıralanmamış ikili yer almamalıdır. Böylece $\binom{kn}{2}$ kadar olası çiftten $k\binom{n}{2}$ tanesi hariç tutulur. Tasarım λ indeksli ise,

$\lambda\left(\binom{kn}{2}-k\binom{n}{2}\right)=\lambda n^2\binom{k}{2}$ kadar $\mathcal{A}$ da ikililer bulunmalıdır($\mathcal{A}$ bloklar kümesi).

Her blok $\binom{k}{2}$ tane sıralanmamış ikililerle doldurulduktan sonra, λn^2 kadar blok olmalıdır.

Yardımcı Teorem 3.19(Colbourn ve Dinitz,2001):Eğer $k \le n$ ve $2 \le n$ ise $TD_1(k,n)$ tasarımındaki herhangi bir blok diğer en küçük bloktan ayrıktır. Yardımcı teorem 3.18a göre, genişliği k olan n^2 blok vardır. kn elemandan her biri diğer $(k-1)n$ elemanın her biri ile bir kere görülmelidir ve her eleman n blokta görülür.

Bu yüzden k elemanın her biri A blokta bulunur ve diğer $n-1$ bloğa aittir denir, A'dan, $k(n-1)$ tane blokla kesişir. Bunun anlamı A, $n^2-k(n-1)-1$ tane bloğa ayrılır ve

$k \le n$ olmak üzere,

$n-k(n-1)-1 \ge n^2-n(n-1)-1 = n-1$

$n \ge 2$, bu yüzden $n-1 \ge 1$ olup yardımcı teorem sağlanır.

Örnek 3.8: $TD_1(3,4)$ tasarımına ait grup ve bloklar aşağıda gösterilmiştir. Burada $n^2-k(n-1)-1 = 16-9-1 = 6$ olur ve görüldüğü gibi B_1; $B_6, B_7, B_{10}, B_{12}, B_{15}, B_{16}$ bloklarının her birinden ayrıktır, yani B_1'in bu bloklarla ortak elemanı yoktur. Ya da B_8; $B_2, B_3, B_9, B_{10}, B_{13}, B_{15}$ ile ayrıktır. Herhangi bir blok $n^2-k(n-1)-1$ adet blokla ayrıktır.

$B_1 : x_{11}\ x_{21}\ x_{31}$

$B_2 : x_{11}\ x_{22}\ x_{32}$

$B_3 : x_{11}\ x_{23}\ x_{33}$

$B_4 : x_{12}\ x_{21}\ x_{32}$

$B_5 : x_{12}\ x_{22}\ x_{33}$

$B_6 : x_{12}\ x_{23}\ x_{31}$

$B_7 : x_{13}\ x_{21}\ x_{33}$

$B_8 : x_{13}\ x_{22}\ x_{31}$

$B_9 : x_{13}\ x_{21}\ x_{33}$

$B_{10} : x_{13}\ x_{22}\ x_{34}$

$B_{11} : x_{13}\ x_{23}\ x_{31}$

$B_{12} : x_{13}\ x_{24}\ x_{32}$

$B_{13} : x_{14}\ x_{21}\ x_{34}$

$G_1 : x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ x_{14}$

$G_2 : x_{21}\ x_{22}\ x_{23}\ x_{24}$

$G_3 : x_{31}\ x_{32}\ x_{33}\ x_{34}$

$B_{14} : x_{14} \quad x_{23} \quad x_{32}$

$B_{15} : x_{14} \quad x_{23} \quad x_{32}$

$B_{16} : x_{14} \quad x_{24} \quad x_{33}$

Bir grup bölünebilir GB$[K,M;V]$, grup genişliği M, blok genişliği K ve nokta sayısı V olan grup bölünebilir tasarım demektir. Alternatif notasyon olarak s tipli K-GB ifadesi yazılabilir. Burada s , n_i'nin r_i kopyasından oluşan kümeleri ifade eder. r_i ise grup bölünebilir tasarımdaki genişliği n_i olan grupların başlangıç sayısıdır. $(n_i \in M)$. Son notasyon, $n_1^{r_1} n_2^{r_2} \ldots n_s^{r_s}$ şeklinde üssel ifadeye dönüştürülebilir(Rees, 1999).

$GD[K,M;V]$ tasarımında her bir blok her bir grupla kesişir. İki gruptan daha fazlasında $K=\{k\}$, $M=\{n\}$ ve $V=kn$ olmalıdır, tipi n^k olan K-GB grup bölünebilir tasarım, $TD(k,n)$ ile ifade edilen transversal tasarım olarak adlandırılabilir.

$n^k m^l$ tipindeki kesik (truncated) transversal tasarım, $n^k m^l$ tipindeki $\{k,k+1\}$ GB tasarımdır. Burada genişliği m olan gruplar üzerindeki herbir nokta, sadece genişliği $k+1$ olan bloklar üzerinde yer alır.

1960'da Bose, Shirikhande ve Parker(1960), $n \neq 2,6$ olan tüm n değerleri için $TD(4,n)$ tasarımından 2 *MOLS* 'un oluşturulabileceğini ispatlamışlardır.

$\lambda > 1$ için bir $TD_\lambda(4,n)$ tasarımını elde etmek kolaydır. $TD(4,n)$ tasarımından λ adet alınıp, birleştirildiğinde $TD_\lambda(4,n)$ tasarımını elde etmiş oluruz. Hanani, $n=2,6$ durumlarının hariç olduğunu göstermiştir ((λ,n) ikilisinin $(1,2)$ ve $(1,6)$ haricindekiler).

Transversal tasarımlar tekrarlayan bloklar yöntemiyle kolaylıkla oluşturulabilir. Burada çok fazla blok olmadan büyük indeksli transversal tasarımların oluşturulup oluşturulamayacağı sorusu akla gelir. r pozitif tamsayı olmak üzere herhangi iki farklı blokta ortak eleman sayısı r'den daha az ise bu tasarım $TD_\lambda(k,n)$ $r-simple$ olarak ifade edilir. Kısaca $k-simple$ tasarımlara simple, $3-simple$ tasarımlara supersimple adı verilir.

Supersimple transversal tasarımlar ilk olarak Gronau ve Mullin tarafından çalışılmış ve tanıtılmıştır. $\lambda \le n$ ve (λ,n) ikilisinin $(1,2)$ ve $(1,6)$ durumlarından farklı olması kısıtlarıyla birlikte supersimple $TD_\lambda(4,n)$ tasarımının varlığını tahmin etmişlerdir.

Tanım 3.6: n nci mertebeden, blok genişliği k, indeksi λ ve hücre genişliği $b_1,...,b_s$ olan bir tamamlanmamış (incomplete) transversal tasarım $ITD_\lambda(k.n;b_1,...,b_s)$ ile ifade edilir ve $(\mathcal{V},\mathcal{G},\mathcal{N},\mathcal{B})$ dörtlüsünden meydana gelir.

1. $\mathcal{V}$, kn elemandan oluşan küme,

2. $\mathcal{G}$, her birinin genişliği n olan k gruptan oluşan, $\mathcal{V}$'nin bir parçası,

3. H, $\mathcal{V}$'deki hücreler (holes) diye adlandırılan $(H_1,....H_s)$ ayrık altkümeler, $1 \le i \le s$ ve $G \in \mathcal{G}$, $|G \cap H_i = b_i|$,

4. $\mathcal{B}$, k alt kümeden oluşan bir küme, bloklar olarak da adlandırılır,

5. $\mathcal{V}$'deki her bir sıralandırılmamış eleman çifti;

-bir hücrede bulunur ve hiçbir blokta yer almaz, ya da,

-bir grupta bulunur ve hiçbir blokta yer almaz, ya da,

-herhangi bir hücre ya da grupta bulunmaz ve λ blokta görünür.

$\sum_{i=1}^{s} b_i = n$ olduğunda bir $ITD(k.n;b_1,....,b_s)$ tasarımı bölünmüş (partitioned) ITD ya da $PITD(k.n;b_1,....,b_s)$ ifadesi ile gösterilir. $b_1,....,b_s$ genelde üssel notasyonla gösterilir. Yani $x_1^{y_1}.....x_s^{y_s}$. Bu gösterimde x_i sırasındaki y_i hücresi kastedilmiş olur. $(1 \le i \le s)$

Ve burada da $\lambda = 1$ olduğunda notasyondan çıkarılır.

$TD_\lambda(k,n) - \sum_{i=1}^{s} TD_\lambda(k,b_i)$ başka bir gösterim şeklidir.

(Coulbourn ve Dinitz, 2001)

Yardımcı Teorem 3.20(Colbourn ve Dinitz,2001):Bir negatif olmayan herhangi $b_1,....,b_s$ tamsayıları ile $\sum_{i=1}^{s} b_i \leq 1$ kısıtı altında, $TD(k,n)$ tasarımı, $ITD(k.n;b_1,....,b_s)$ tasarımına denktir.

k negatif olmayan tüm tamsayıları göstermek üzere bir $TD(k,0)$ ve $TD(k,1)$ mevcuttur.

Yardımcı Teorem 3.21(Brouwer ve Rees, 1982): Bir tamamlanmamış transversal tasarım $ITD(k,n;h)$, $(k-1)h < n$ olduğunda tamamlanmamış transversal tasarım $ITD(k,n;h,1,1)$'a denktir. Ayrıca bir transversal tasarım $TD(k,n)$, $k \leq n$ olduğunda bir $TD(k,n) - 3TD(k.1)$ tasarımına denktir.

Yardımcı Teorem 3.22(Stevens, 1998): Bir tamamlanmamış transversal tasarım $ITD(k,n;h)$ sadece $h = n$ ya da $(k-1)h \leq n$ durumunda mevcuttur. $(k-1)h = n$ olduğunda tüm blokların hücrelerinde (hole) bir eleman vardır. $h = n$ olduğunda büyük bir hücre dışında hiçbirinde blok olmayan tamamlanmamış transversal tasarım halini alırlar.

n bir pozitif bir tamsayı ve k negatif olmayan bir tamsayı olduğunda bir $TD(k,n) - TD(k,n)$ transversal tasarımı mevcuttur.

Yardımcı Teorem 3.23(Stevens, 1998): Bir tamamlanmamış transversal tasarım $ITD(k,(k-1)h+1;h)$, bir bölünmüş tamamlanmamış transversal tasarıma $PITD(k,(k-1)h+1;h^1 1^{(k-2)h+1})$ denktir.

3.3. Notlar

Kısmi dengeli tamamlanmamış blok tasarımları ilk olarak Bose ve Nair(1939) tarafından verilmiştir. Raghavarao(1971) geniş bir özetini vermiş ve geniş bir kaynak taraması yapmıştır. Bu tasarımlar dengeli tamamlanmamış blok tasarımların genelleştirilmiş halidir.dengeli tamamlanmamış blok tasarımları optimal tasarımlardır. Bazı KDTBT(2) için optimallik Chang ve Bailey(1991) tarafından verilmiştir. İki tane önemli ortaklık şeması Clathworthy(1973) tarafından verilmiştir. KDTBT(m) bir ortaklık şeması belirtirken bunun tersi her zaman doğru değildir. Kageyama(1974), $\lambda_i=\lambda_j$ iken KDTBT(m)nin, KDTBT(m-1)'ına dönüştüğünü göstermiştir.

3.4. Alıştırmalar

1) Kısmi dengeli KD(6,0,1:30) tasarımını oluşturunuz.

2) Kısmi dengeli KD(4,1,2:6) tasarımını oluşturunuz.

3) (15,7,3) tasarımını kullanarak elde edilen simetrik transversal tasarımı ve parametrelerini elde ediniz.

4) Aşağıdaki kısmi dengeli tasarımın parametrelerini bulunuz.

	Bloklar								
Noktalar		1	2	3	4	5	6	7	8
	1	X	X	X					
	2	X			X			X	
	3			X		X		X	
	4	X					X		X
	5			X	X				X
	6		X				X	X	
	7		X			X			X
	8				X	X	X		

5) Grup bölünebilir blok genişliği 2, blok sayısı 9 ve işlem sayısı 6 olan bir Grup bölünebilir- Kısmi dengeli tamamlanmamış blok tasarımı aşağıdaki gibidir. Buradan birliktelik yapısını kurunuz ve parametrelerini belirleyiniz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 6 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 2 & 4 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

3.5. Kaynaklar

1. Bayrak, H., 1996, Hadamard matrisleri ve Deney Düzeninde Bazı Uygulamaları, Gazi Üniversitesi , Fen Bilimleri Enstitüsü dergisi,cilt 9, No 3, 355-366
2. Bose R.C., Shrikhande S.S. and Parker E.T., 1960, Further Results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and falsity of Euler's conjecture. Canadian Journal of Mathematics, 12:189-203.
3. Bose R.C., and Mesner D.M., 1959, On Linear Associative Algebras Corresponding to Association Scheme of Partial blanced designs.Ann Math. Statist., 30, 21-38.
4. Bose R. C. and Nair K. R., 1939, Partially balanced incomplete block designs, Sankhya 4:337-372.
5. Brouwer, A.E. and Rees V., 1982, More Mutually Orthogonal Latin Squares, Discrete Math., 39, 263-281.
6. Bruck R.H. and Ryser H.J.,1949, The nonexistence of certain finite projective planes. Canadian J. Math., 1, 88-93.
7. Chang C.S. and Bailey R.A., 1991, Optimality of some two-associate-class partially balanced incomplete designs, Ann. Statist., 19:1667-1671.
8. Chihiro S., 2005, Symmetric Transversal Designs With Group Size 3, Fukushima National College of Technology, Japan.
9. Clatworty W.H., 1973, Tables of Two –Associate-Class Partially balanced Designd. NBS, Apply.Math Series, 63.
10. Colbourn, C.J., Dinitz, J.H., Mutually Orthogonal Latin Squares:A Brief Survey Of Constructions, Journal of Statistical Planning and Inference 95 9-48, 2001
11. Jian X.H. and Wen L.Z., 1988,Construction of group divisible Designs by using Hadamard matrices. Statistical Theory and Data analysis II, 475-478.
12. Hughes, D.R., and Pipper, F.C., Design Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
13. Kageyama S., 1974, Reduction of associate classes for block designs and related combinatorial arrangement, Hiroshima Math. J., 527-618.

14. Raghavarao, D. (1971) Construction and Cambinatorial problems in Design of Experiments, John Wiley and Sons, New York..
15. Rees, D.H., "Some new generalised Kirkman systems", *Utilitas Mathematica* 56:177-199 (1999).
16. Stevens B., 1998, Transvertal Covers and Packings,Yüksek Lisans Tezi, Department of Mathematics, University of Toronto. Toronto, 4-30
17. Stinson D.R., 1996, Combinatorial Designs with selected Applications, Lecture notes.
18. Stinson D.R.,2004, Combinatorial Designs:Construction and analysis, Springer, New York.
19. Street, A.P. and Street, D.J., "Combinatorics of Experimental Design" Clarendon Press, Oxford, UK(1987).
20. Vartak, M.N., "On an Apiplication of Kronecker product of Matrices to Statistical Design", *Ann. Math. Statist., 26,* 420-438 (1955).

4. SONLU GEOMETRİLER

19ncu yüzyıl matematikçileri matematiğin birçok disiplini ile ilgilenmişlerdir. Bunlardan en önemlilerinden biri geometridir. Geometri yüzyılın başlarında doruğa ulaşmış ve daima aksiyomatik temelli konuların prototipi olarak düşünülmüştür.

G.Fano bir doğru üzerinde noktaların sonsuz sayısının varlığını kapsayan aksiyomlara karar verme problemiyle ilgilenmiştir. Tüm aksiyomları sağlayan fakat doğru üzerinde sonsuz sayıda olmayan noktalar sistemleri bulmuştur. Böylece sonlu geometri doğmuştur.

Bütün geometriler projektif geometriden elde edilen alt geometriler gibi düşünülebilirler.

Tanım 4.1: P noktaların bir kümesi, B doğruların bir kümesi olsun. n, P kümesine ait bir nokta, b, B kümesine ait bir doğru olmak Üzere (n,b) sıralı ikilisi göz önüne alınsın. $*\subset PxB$ alt kümesine üzerinde bulundurma bağıntısı denir. $(n,b)\in *$ ise bu $n*b$ ile gösterilir. $n*b$ ifadesi, "n noktası b doğrusu üzerindedir" anlamındadır.

Tanım 4.2: $n_i\in P$, i=1,2,3,... için $n_i \times b$ olacak şekilde bir $b\in B$ doğrusu varsa, bunlara doğrudaş noktalar denir.

Tanım 4.3: $n_i\in P$, i=1,2,3,... için $b\times n_i$ olacak şekilde bir $n\in P$ doğrusu varsa, bunlara noktadaş doğrular denir.

Bu kısımda hesaplamalar mod p ye göre yapılacaktır. p bir asal sayıdır. Bu durumda mod p kalanları bir sonlu cisim oluştururlar. Her p asal sayısı ve her n pozitif tam sayısı için $GF(p^n)$ in mevcut olduğu bilinmektedir. Projektif geometri kavramında noktalar ve doğrular $GF(p^n)$ kullanılarak tanımlanacaktır.

GF(p^n) in hepsi birden sıfır olmayan (m+1) elemanlı sıralı kümesi m-boyutlu sonlu projektif geometride bir noktadır.

$(a_1, a_2, ..., a_{m+1})$, $(a'_1, a'_2, ..., a'_{m+1})$ iki küme olsun.

$$a_i = \tau a'_i \text{ , i=1,2,...,}m\text{+1, } \tau \neq 0, \tau \subset GF(p^n) \qquad [4.1]$$

yani

$$(a_1, a_2, ..., a_{m+1}) = \tau (a'_1, a'_2, ..., a'_{m+1})$$

ise $(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1})$ noktası ve bununla orantılı tüm noktalar aynı noktayı gösterir.

$P_1 = (a_1, a_2, ..., a_{m+1})$, $P_2 = (a'_1, a'_2, ..., a'_{m+1})$ farklı iki nokta olsun.

$$\tau_1 P_1 + \tau_2 P_2 = \tau_1 a_1 + \tau_2 a'_1, \tau_1 a_2 + \tau_2 a'_2, ..., \tau_1 a_{m+1} + \tau_2 a'_{m+1} \quad \tau_1, \tau_2 \subset GF(p^n) \qquad [4.2]$$

En az bir τ sıfırdan farklı olmak üzere [4.2] ile verilen ifade doğru tanımı olarak alınır.

Bu tarzda elde edilen noktalar ve doğrular sistemine GF(p^n)'nin m-boyutlu projektif geometrisi denir ve PG(m,p^n) ile gösterilir.

GF(p^n)nin (m+1) elemanlı sıralı kümelerinin sayısı $p^{n(m+1)}$dir. (0,0,...,0) kümesi çıkarıldığında ($p^{n(m+1)}$-1) sıralı kümenin elemanlarından en az biri sıfırdan farklıdır. GF(p^n)in eleman sayısı sonlu ve bu sayı p^n olduğundan [4.1] nedeniyle (p^n-1) tane (m+1) elemanlı sıralı kümenin aynı bir noktayı göstereceği açıktır. O halde PG(m,p^n) deki farklı noktaların sayısı,

$$\frac{p^{n(m+1)}-1}{p^n-1}=1+p^n+p^{2n}+\ldots+p^{mn} \qquad [4.3]$$

olarak bulunur.

PG(m,p^n)nin k-boyutlu alt vektör uzayı PG(k,p^n) olsun. Bu alt uzay P_1, P_2, …,P_{k+1} lineer bağımsız nokta ile tanımlıdır.

PG(k,p^n)'deki noktaların sayısı ise,

$$1+p^n+p^{2n}+\ldots+p^{kn} \qquad [4.4]$$

ile verilir.

PG(k,p^n) alt uzaylarının herbiri (k+1) bağımsız nokta ile tanımlanır.

Ilk nokta P_1 ise P_1 noktası $(1+p^n+p^{2n}+\ldots+p^{mn})$

P_2 noktası $(p^n+p^{2n}+\quad+p^{mn})$

P_3 noktası $(p^{2n}+p^{2n}+\ldots.+p^{mn})$

.....

P_i noktası $(p^{in}+\ldots+p^{mn})$

.....

P_{k+1} noktası $(p^{kn}+\ldots+p^{mn})$ yolla seçilir. O halde PG(m,p^n)deki (k+1) bağımsız noktanın farklı sıralı kümelerinin sayısı,

$$(1+p^n+p^{2n}+\ldots+p^{mn})(p^n+\ldots+p^{mn})\ldots.(p^{kn}+\ldots+p^{mn}) \qquad [4.5]$$

ile verilir.

$PG(k,p^n)$ deki $(k+1)$ bağımsız noktanın sıralı kümelerinin sayısı ise

$$(1+p^n+\ldots+p^{kn})(p^n+\ldots+p^{kn})\ldots(p^{(k-1)n}+p^{kn})p^{kn} \qquad [4.6]$$

ile verilir.

[4.5] ve (4.6)kullanılarak $PG(m,p^n)$'deki $PG(k,p^n)$ alt uzaylarının sayısı bulunur. Bunun değeri aşağıdaki biçimde olacaktır.

$$\frac{\left(1+p^n+\cdots+p^{nm}\right)\cdots\left(p^{kn}+\cdots+p^{nm}\right)}{\left(1+p^n+\cdots+p^{km}\right)\cdots\left(p^{(k-1)n}+p^{kn}\right)p^{kn}} \qquad [4.7]$$

Aynı düşünce tarzıyla $PG(k,p^n)$ alt uzayını içine alan $PG(s,p^n)$ alt uzaylarından söz edilir. $PG(s,p^n)$ alt uzayınında (s+l) bağımsız nokta ile tanımlanacağı açıktır.

$PG(s,p^n)$'nin oluşturulmasında $PG(k,p^n)$'de bulunmayan bir nokta seçilerek işlemlere başlanır. Bu nokta P_{k+2} olsun. P_{k+2} noktası

$(p^{(k+1)n}+ \ldots\ldots +p^{mn})$ noktanın dışında seçilir. Yani $P_{k+3}\notin PG(k+1,p^n)$'dir. Bu şekilde nokta seçimine devam edildiğinde $PG(s,p^n)$'ye ulaşılır. Böylece $s>k$ olmak üzere, $PG(k,p^n)$'yi bulunduran $PG(s,p^n)$ alt uzaylarının $PG(m,p^n)$'deki sayısı aşağıdaki biçimde bulunur.

$$\frac{\left(p^{(k+1)n}+\cdots+p^{nm}\right)\cdots\left(p^{sn}+\cdots+p^{mn}\right)}{\left(p^{(k+1)n}+\cdots+p^{sm}\right)\cdots\left(p^{(s-1)n}+p^{sn}\right)p^{sn}} \qquad [4.8]$$

[4.8] ifadesi k=0,1 için irdelenebilir.

1) k=0 için [4.8]den

$$\frac{\left(p^{n}+\cdots+p^{mn}\right)\cdots\left(p^{sn}+\cdots+p^{mn}\right)}{\left(p^{n}+\cdots+p^{sn}\right)\cdots\left(p^{(s-1)n}+p^{sn}\right)p^{sn}} \quad m \geq s > 0 \qquad [4.9]$$

bulunur. k=0 için PG(0,p^n) göz önüne alınır. Bu 0 boyutlu analitik geometridir ve burada noktalar söz konusudur. Herbir a_i noktası GF(p^n)nin elemanıdır. [4.9] ifadesi r ile tanımlanıp noktaların PG(s,p^n) de görünme sayısı olarak alınır.

2) k=1 için [4.8]'den

$$\frac{\left(p^{2n}+\cdots+p^{mn}\right)\cdots\left(p^{sn}+\cdots+p^{mn}\right)}{\left(p^{2n}+\cdots+p^{sn}\right)\cdots\left(p^{(s-1)n}+p^{sn}\right)p^{sn}} \quad m \geq s > 1 \qquad [4.10]$$

bulunur. k=1 için PG(1,p^n) gözönüne alınır. 1 boyutlu analitik geometri bir doğrudur. PG(1,p^n)nin herbir noktası ikililerden oluşur. [4.10] ifadesi λ farklı PG(s,p^n)de bulunur.

Verilen bu tanımlamalardan sonra, bloklar ile PG(s,p^n) ve işlemler ile noktalar eşdeğer Kabul edilecektir.

Teorem 4.1(Mann, 1950): m boyutlu projektif geometri PG(m,p^n)'de bulunan s boyutlu PG(s,p^n), (m≥s) alt uzayı parametreleri aşağıdaki gibi olan bir DTBT'dir.

$$
\left.
\begin{aligned}
b &= \frac{\left(1+p^n+\cdots+p^{mn}\right)\left(p^n+\cdots+p^{mn}\right)\cdots\left(p^{sn}+\cdots+p^{mn}\right)}{\left(1+p^n+\cdots+p^{sn}\right)\left(p^n+\cdots+p^{sn}\right)\cdots\left(p^{(s-1)n}+\cdots+p^{sn}\right)p^{sn}} = b(s,m,p^n) \\
v &= \left(1+p^n+\cdots p^{mn}\right) = v(m,p^n) \\
k &= \left(1+p^n+\cdots+p^{sn}\right) = k(s,p^n) \\
r &= \frac{\left(p^n+\cdots+p^{mn}\right)\cdots\left(p^{sn}+\cdots+p^{mn}\right)}{\left(p^n+\cdots+p^{sn}\right)\cdots\left(p^{(s-1)n}+\cdots+p^{sn}\right)p^{sn}} = r(s,m,p^n) \\
\lambda &= \begin{cases} 1 & s=1 \\ \dfrac{\left(p^{2n}+\cdots+p^{mn}\right)\cdots\left(p^{sn}+\cdots+p^{mn}\right)}{\left(p^{2n}+\cdots+p^{sn}\right)\cdots\left(p^{(s-1)n}+\cdots+p^{sn}\right)p^{sn}} & s>1 \end{cases}
\end{aligned}
\right\} \quad [4.11]
$$

PG(m,2) tasarımı hadamard 2-tasarımıdır. Projektif uzaylar Sylvester tipi Hadamard matrislerin ele edilebilir.

[4.11] ile verilen b,v,k,r,λ parametreleri Tanım 4.1 oldugu gibidir ve sırasıyla, blok sayısı, işlem sayısı, blok genişliği, tekrar sayısı ve her bir değişken çiftinin birlikte görünme sayısı olarak alınır.

DTBT'i tanımlamada sonlu öklit geometriler'de kullanılır. Bu geometri PG(m,p^n)'den elde edilir ve EG(m,p^n) ile gösterilir. EG(m,p^n), (a_1, a_2,...,a_m) noktalarını bulundurur. a_i'lerin herbiri GF(p^n) Galois cisminin bir elemanıdır. Bu geometri işlem kombinasyonlarının bir ifadesi biçimindedir.

PG(m-$1,p^n$)'deki noktalar PG(m,p^n)'den çıkarılırsa geriye noktaların ve doğruların diger bir sistemi kalır. Bu sistemin noktaları ve doğruları analitik m-boyutlu öklit geometri EG(m,p^n)'nin elemanlarıdır. EG(m,p^n)'nin noktalarının sayısı

$$v(m,p^n) - v(m-1,p^n) = p^{mn} \qquad [4.12]$$

dir.

PG(m,p^n)'de olduğu gibi aynı yolla EG(m,p^n)'nin s ve k ($s>k$) boyutlu alt uzayları düşünülür. EG(s,p^n) alt uzayında bulunan EG(k,p^n) alt uzaylarının sayısının hesabı, PG(s,p^n)'de bulunan PG(k,p^n) alt uzaylarının sayısının hesaplanmasındaki düşünce tarzıyla aynıdır. EG(s,p^n) bloklar olarak göz önüne alınır. Bunların EG(m,p^n)'deki sayısı

$$b(s,m,p^n) - b(s,m-1,p^n) \qquad [4.13]$$

ifadesi ile tanımlanır.

Aşağıdaki teorem EG(m,p^n) yardımıyla DTBT'nin parametrelerinin nasıl tanımlandığını verir.

Teorem 4.2(Mann, 1950): EG(m,p^n) de bulunan EG(s,p^n) parametreleri aşağıdaki gibi olan bir DTBT formundadır.

$$\left.\begin{array}{l} b=b(s,m,p^n)-(b(s,m\text{-}1,p^n) \\ v=p^{mn} \\ k=p^n \\ r=r(s,m,p^n) \\ \lambda=\lambda\ (s,m,p^n) \end{array}\right\} \qquad [4.14]$$

Yukarıda verilen tanımlar ve teoremler m'nin alacağı degerlere gore irdelenecektir.

İlk önce m==2 durumu göz önüne alınsın. Bu durumda $a_1,a_2,a_3 \in GF(p^n)$ ve a_1,a_2,a_3 hepsi aynı anda sıfır olmamak koşuluyla (a_1,a_2,a_3) sıralı üçlüsü bir noktayı gösterir.
Noktaların kümesi,

$$P=\{(a_1,a_2,a_3):\quad a_1,a_2,a_3 \in GF(p^n),\quad (a_1,a_2,a_3)\neq(0,0,0),\quad (a_1,a_2,a_3)\equiv\lambda(a_1,a_2,a_3),$$
$$\lambda \in GF(p^n),\lambda\neq 0\} \qquad [4.15]$$

biçimindedir.

m=2 durumu için bir projektif düzlem söz konusudur. Dolayısıyla tanımlamalar düzlem için yapılır.

Tanım 4.4: S bir projektif düzleme ilişkin herhangi bir ifade olsun. S de "nokta" sözcüğü yerine "doğru" ve "doğru" sözcüğü yerine "nokta" koyarak bulunan yeni ifadeye S nin dual ifadesi denir.

P'ye dual olarak doğrular kümesi,

$$B=\{[b_1,b_2,b_3]:\ b_1,b_2,b_3 \in GF(p^n),\ [b_1,b_2,b_3]\neq[0,0,0],\ (b_1,b_2,b_3)=\lambda(b_1,b_2,b_3),\ \lambda\neq 0,$$

$\lambda \in GF(p^n)\}$ [4.16]

şeklinde tanımlanır.

Burada "[ ]" köşeli parantez doğru tanımlar. [4.16] ifadesinden $[b_1,b_2,b_3]$ üçlüsü ve bu üçlüye orantılı olan bütün üçlülerin aynı bir doğru olarak tanımlanacagı açıktır.

Tanım 4.5: Doğru ve noktalara karşılık tutulan böyle üçlülere, ilgili doğru ya da noktanın homogen koordinatları denir.

Bir noktanın bir doğru üzerinde bulunması,

$(a_1,a_2,a_3) * [b_1,b_2,b_3] \leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$ [4.17]

biçiminde verilir.

Tanım 4.6: *P* ve B sırasıyla noktalar ve doğrulardan meydana gelen ayrık iki küme ve "*" PxB kümesinde üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan (*P*,B,*) sistemine projektif düzlem denir.

1) a, a'$\in P$, a$\neq$a' için a* *b* ve a'* *b* olacak şekilde bir tek *b*$\in$B doğrusu vardır.
2) Her *b*, *b*'$\in$B için a* *b* ve a* *b*' olacak şekilde en az bir a$\in P$ noktası vardır.
3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta vardır.

Teorem 4.3(Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998): Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir projektif düzlem vardır.

F cismi yardımıyla tanımlanan projektif düzlemlere cisim düzlemleri denir.

Burada F cismi olarak GF(p^n) Galois cismi alınacaktır. GF(p^n)'nin elemanlarıyla belirtilen düzlemde,

$$1)\ \frac{\left(\left(p^n\right)^{2+1}-1\right)}{p^n-1}=1+p^n+p^{2n} \qquad [4.18]$$

nokta vardır.

2) Her doğru üzerinde,

$$k=1+p^n \qquad [4.19]$$

nokta vardır.

3) Bütün doğruların sayısı,

$$b=1+p^n+p^{2n} \qquad [4.20]$$

dır.

4) Her noktasından $1+p^n$ doğru geçer yani

$$r=1+p^n \qquad [4.21]$$

dir.

Tanım 4.7: Yukarıda verilen [4.18]-[4.21] özelliklerinin hepsini birden sağlayan p^n sayısına projektif düzlemin mertebesi denir.

Tanım 4.8: (P,B,*) sisteminin bir projektif düzlem olması için P ve B ayrık kümelerinin eleman sayısının aynı bir Ω sayısı olması ve

$$\Omega=1+p^n+p^{2n} \qquad [4.22]$$

şeklinde yazılabilmesi gerekir.

Tanım 4.8 den dolayı projektif düzlemlerin daima simetrik DTBT'lerını

tanımladığını söylemek mümkündür.

Her n pozitif tamsayısı ve her p asal sayısı için mertebesi p^n olan sonlu bir projektif düzlem var olmakla birlikte cisimler yardımıyla elde edilemeyen bir çok projektif düzlem vardır. Aşağıdaki teorem sonlu mertebeden bazı projektif düzlemin mevcut olmadığını gösterir.

Teorem 4.4(Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998): (Bruck - Ryser Teoremi) Eğer $p^n \equiv 1 \pmod 4$ yada $p^n \equiv 2 \pmod 4$ ise ve p^n negatif olmayan iki tam sayının kareleri toplamı olarak yazılamıyorsa mertebesi p^n olan bir projektif düzlem yoktur.

Ω=7,13,21, ... noktalı yani mertebeleri 2,3,4,5 .... olan projektif düzlemler vardır. Fakat mertebesi 6 olan (43 noktalı) bir projektif düzlem yoktur.

Örnek 4.1: PG(2,3) göz önüne alındığında m=2 oldığından GF(3) cismi ile noktaları ve doğruları tanımlanabilen projektif düzlemden bahsedilir. Bu düzlemde,

$v=1+3+3^2=13$ nokta,

ve

$b=1+3+3^2=13$ doğru,

herbir doğru üzerinde,

$k=1+3=4$ nokta

bulunur.

Herbir noktanın görünme sayısı;

$$r = \frac{\left(3+3^2\right)}{3} = 4$$

ile verilir.

Bu değerler DTBT olarak yorumlanırsa, blok sayısı ve işlem sayısı 13, blok genişliği ve her bir işlemin tekrar sayısı 4, her bir nokta çiftinin birlikte görünme sayısı $\lambda=1$ olan simetrik DTBT'nin mevcut olduğu söylenir. mod 3 kalan sınıfı olarak {0,1,2} göz önüne alınsın ve bu küme üzerinde toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cisimdir.

0+0=0	0+1=1+0=1	0+2=2+0=2
1+1=2	1+2=2+1=0	2+2=1
0.0=0	0.1=1.0=0	0.2=2.0=0
1.1=1	1.2=2.1=2	2.2=1

$2\equiv -1 \pmod 3$ alınarak PG(2,3) deki noktalar aşağıdaki gibi ortaya konur.

P_1=1,0,0	P_5=1,0,1	P_9=1,0,-1	P_{13}=0,-1,1
P_2=0,1,0	P_6=0,1,1	P_{10}= -1,1,1	
P_3=0,0,1	P_7=1,1,1	P_{11}= 1,-1,1	
P_4=1,1,0	P_8=1,-1,0	P_{12}= 1,1,-1	

noktanın doğru üzerinde bulunma bağıntısına göre doğrular ve üzerinde taşıdıkları noktalar şöyledir:

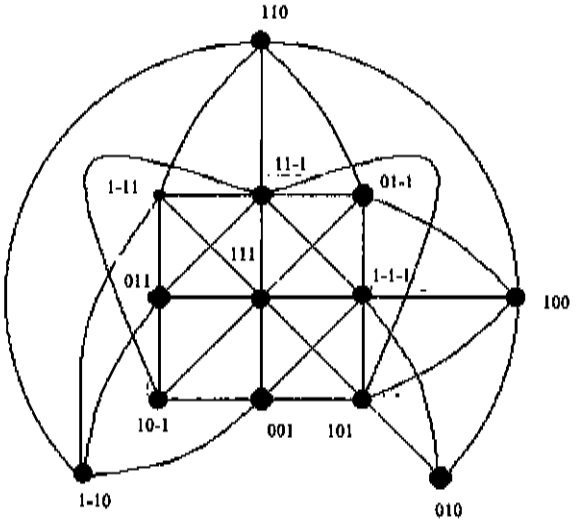
Doğrular

Noktalar	[0,0,1]	[0,1,0]	[0,-1,1]	[0,1,1]	[1,0,0]	[1,0,-1]	[1,0,1]	[1,-1,0]	[-1,1,1]	[1,-1,1]	[1,1,0]	[1,1,-1]	[1,1,1]
100	X	X	X	X									
010	X				X	X	X						
110	X							X	X	X			
1-10	X										X	X	X
001		X			X			X			X		
101		X				X			X			X	
10-1		X					X			X			X
011			X		X					X		X	
01-1				X	X				X				X
111						X		X					X
11-1			X	X			X	X				X	
1-11				X		X				X	X		
1-1-1			X				X		X		X		

Çizelge 4.1: (13,4,1) tasarımının PG(2,3)deki blokları ve noktaları

$m \geq s > k$ olmak üzere s=1 alındığında blok birer doğru biçimindedir. s=1 olduğundan Teorem 4.1'den λ=1dir.

Noktaları ve doğruları yukarıda tanımlanan PG(2,3) ile ilgili şekil aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.1: (13,4,1) tasarımının PG(2,3)de bir gösterimi

Tanım 4.9: P ve B elemanları sırasıyla noktalar ve doğrular olan ayrık iki küme * ise PxB kümesinde tanımlanan bir üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan (P,B,*) sistemine afin düzlemi denir.

1) Her a,a'$\in P$, a $\neq$ a' noktaları için a*d ve a'*d olacak şekilde bir tek d$\in$B doğrusu vardır.

2) (a,d)$\in$* olmak üzere her a$\in P$ ve d$\in$B için (a,c)$\in$* ve d$\|$ c olacak şekilde bir tek c$\in$B doğrusu vardır. Burada "$\|$" işareti paralellik anlamında kullanıldı. (Burada paralellik $d_1,d_2\in B$ ve $d_1\neq d_2$ olmak üzere $a*d_1$ ve $a*d_2$ olacak şekilde hiçbir a$\in P$ noktası bulunmaz seklinde ifade edilir)

3) Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Teorem 4.5(Beutelspacher ve Rosenbaum, 1998): Verilen her F cismi için nokta ve doğruları bu cismin elemanlarıyla cebirsel olarak belirtilebilen bir afin düzlem vardır.

Sonuç 4.6: Öklit düzlemi bir afin düzlemidir.

Sonuç 4.7: GF(p^n) sonlu cisimler yardımıyla tanımlanan çok sayıda sonlu afin düzlemi vardır.
GF(p^n) cismi ile tanımlanan afin düzlemde,

1) Her doğrusu üzerinde p^n tane nokta bulunur.
2) Her noktası tam olarak p^{n+1} tane doğru üzerindedir.
3) Noktaların toplam sayısı p^{2n} *dir.*
4) Doğruların toplam sayısı $p^{2n}+p^n$ dir.

Yukarıdaki dört durumu sağlayan p^n sayısına afin düzlemin mertebesi denir. En küçük afin düzlemin mertebesi 2'dir.
Verilen tanımlar ve teorilerden afin düzlemi ile projektif düzlemin ilişkili olduğu görülür. Gerçekten de her birini diğerinden elde etmek mümkündür. Bir afin düzleme bir takım yeni noktalar ve bu yeni noktaları üzerinde bulunduran bir tek doğru katılarak bir projektif düzlem elde edilir. Noktaların her birine ideal nokta, afin düzleme katılacak doğruya ise ideal doğru denir. Afin düzlemdeki paralel doğruların kümesine paralel doğru demeti denir. Her bir demet için doğruların üzerinde bulunan ancak afin düzlemin P noktalar kümesinde bulunmayan bir nokta alındığında, düzleme her doğrultuda bir ideal nokta katılmış olur. Bu durumda noktalar kümesi, P'=PU{ideal noktalar} olur. Aynı şekilde noktalar afin düzleme katılırken her doğru bir nokta ile genişletildiğinden doğrular kümesi artık B' olacaktır. Böylece (P', B' ,*) sistemi elde edilir. Bu (P,B,*) ile verilen afin düzlemin tamamlanışıdır.

Her afin düzlemin tamamlanışı bir projektif düzlem olmakla birlikte bir projektif düzlemden birçok afin düzlem elde edilir. Bu durumda bir izomorfizm tanımına ihtiyaç duyulur. İki projektif (afin) düzlem göz önüne alındığında izomorfizm, doğruları doğrulara, noktaları noktalara dönüştüren ve üzerinde bulunma bağıntısını koruyan birebir ve örten bir fonksiyondan söz ediliyor demektir.

Teorem 4.8(Stevensen, 1972): F cismi ile tanımlanan afin düzlemin tamamlanmışı F cismi ile tanımlanan projektif düzleme izomorftur.

Teorem 4.9 Stevensen, 1972): Bir projektif düzlemden herhangi bir doğru ve bu doğru üzerinde bulunan tüm noktalar çıkarılırsa geriye kalan geometrik yapı bir afin düzlemdir.

Örnek 4.2: Daha önce örnek 4.1 ile verilen PG(2,3)den bir doğru ve üzerindeki noktaların çıkarıldığı durumu göz önüne alınsın. Çıkarılan doğru [0,0,1] olsun. Bu halde elde edilen noktaların ve doğruların sistemi EG(2,3)dür. EG(2,3) için Teorem 4.2den dolayı parametreler b=12, v=9, k=3, r=4, λ=1 bulunur. Ancak EG(2,3)de DTBT'nin simetrikliğinin bozulduğu görülür.

EG(2,3)'deki doğrular ve üzerindeki noktalar şöyledir.

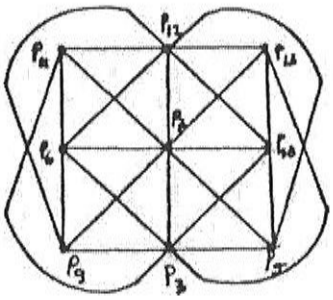
[0,1,0] : (0,0,1), (1,0,1), (1,0,-1)
[0,-1,1] : (0,1,1), (1,1,1), (-1,1,1)
[0,1,1] : (1,-1,1), (1,1,-1), (0,-1,1)
[1,0,0] : (0,0,1), (0,1,1), (0,1,-1)
[1,0,-1] : (1,0,1), (1,1,1), (1,-1,1)
[1,0,1] : (1,0,-1), (-1,1,1), (1,1,-1)
[1,-1,0] : (0,0,1), (1,1,1), (1,1,-1)
[1,1,0] : (0,0,1), (-1,1,1), (1,-1,1)
[-1,1,1] : (1,0,1), (-1,1,1), (0,-1,1)
[1,-1,1] : (0,1,1), (1,0,-1), (1,-1,1)
[1,1,-1] : (1,0,1), (0,1,1), (1,1,-1)
[1,1,1] : (1,1,1), (1,0,-1), (0,-1,1)

Örnek 4.2'ye ait DTBT Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Noktalar	Bloklar												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	3	X			X			X	X				
	5	X				X				X		X	
	6		X		X						X	X	
	7		X			X		X					X
	9	X					X				X		X
	10		X				X		X	X			
	11			X		X	X		X	X	X		
	12			X	X			X				X	
	13			X									X

Çizelge 4.2: Örnek 4.2'ye ilişkin DTBT

EG(2,3)'ün Tanım 4.9 ve Sonuç 4.6'dan bir afin düzlem olduğunu söylemek mümkündür. 9 noktalı bir afin düzlem şekil 4.2'de gösterildiği biçimde temsil edilebilir.



Şekil 4.2: Çizelge 4.2'de verilen tasarımın EG(2,3)de bir gösterimi

Tanım 4.10: Bir isabet yapısının normal olması için her noktanın en az bir blokta olması ayrıca tüm bloklarda olmaması gerekir.

Teorem. 4.10(Beth, vd., 1999): D=(V,B,I) ilişki yapısı aşağıdaki iki koşulu sağlayan normal isabet yapısı olsun:

a) herhangi t blok tam olarak λ blokta vardır, $t \geq 2$ ve $\lambda \neq 0$.

b) Herhangi s blok tam olarak μ noktada ortaktır, $s \geq 2$ ve $\mu \neq 0$.

Bu durumda D dejenere projektif düzlem yada simetrik tasarım denir. Hatta, eğer $s+2>2$ ise D'nin ilişki matrisi J-I olur.

Yardımcı teorem 4.11(Beth, vd., 1999): $t=2$, $\lambda=1$ ve $s=2$, $\mu=1$ durumunda D (muhtemelen dejenere) projektif düzlemdir.

Yardımcı teorem 4.12(Beth, vd., 1999): herhangi t-1 nokta λ bloktan fazla blok üzerindedir.

Türetilmiş yapı D_p p noktasında (a) ile (b) yi t, λ, s, μ yerine t-1, λ, s, μ-1 koyarak sağlanan yapıdır. $\mu>1$ ise D_p dejenere projektif düzlem yada simetrik tasarımdır.

Eğer D_p dejenere projektif düzlem ise

$t-1=s=2$, $\lambda=\mu-1=1$ olur.

D_p'nin bloklarını kısıtlayan D'nin ilişki matrisi aşağıda verilen son sütun hariç M matrisi şeklinde yazılabilir.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Burada ilk satır p'ye karşılık gelmektedir.

D normal olduğundan, p ile ilişkili olmayan en az bir blok vardır. B böyle bir blok olsun. B, p'yi içeren her blokla tam olarak iki noktada kesişir. Bu sadece B'nin p haricinde tüm noktaları içermesi ile mümkündür. Bu durumda v=4 için;

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Şeklinde olacaktır. Dikkat edilecek olursa satırların yerlerini değiştirerek isabet matrisini

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J - I$$

şeklinde yazılabilir. Bu da D_p'nin dejenere düzlem olduğunu gösterir.

Örnek 4.3: a) S(3,q+1,q^n+1) AG(n,q)'nun genişlemesidir. Bu ifade tüm asal kuvveti p ve tamsayı olan n≥2 için geçerlidir.

b) D, 3.ncü mertebeden afin düzlem olsun, D üç tane genişleme kabul eder, S(5,6;12) PG(2,4) ve S(5,8,;24)

Bir simetrik tasarımda λ=1 olarak alınırsa, $v-1=k(k-1)$ olacaktır. Dolayısıyla,

$v=k^2-k+1$

$= (k-1)^2-(k-1)+1$

olur.

$n=k-1$ alınırsa bu $(n^2+n+1, n+1, 1)$ parametreli bir tasarım oluşturur. λ=1 olan bir tasarım dikkate alındığında, tasarımın blokları geometrinin doğruları olarak alınır.

Bunun sebebi geometrik olarak herhangi iki farklı noktanın sadece bir doğru tanımlaması, ve iki farklı doğrunun en fazla bir noktada kesişmesidir.

Önemli bir soru da n'in hangi değerleri için sonlu projektif düzlem var olduğudur. 1850de, Kirkman n asal iken n mertebeden projektif düzlem olduğunu göstermiştir. Veblen ve Bussey 1906'da bunu bir asal kuvvetine genişletmiştir.

Teorem 4.13(Stinson,2004): Her asal q için q. mertebeden Afin Düzlem vardır (Örneğin $(q^2,q,1)-\text{DTBT}$).

$P=F_q\times F_q$ alınsın. Her $a,b\in F_q$ için blok tanımı; $L_{a,b}=\{(x,y)\in P: y=ax+b\}$ şeklindedir.

Her $c\in F_q$ için blok tanımı; $L_{\infty,c}=\{(c,y): y\in F_q\}$ dir. Ayrıca; her $a,b\in F_q$ için blok tanımı; $\partial=\{L_{a,b}: a,b\in F_q\}\cup\{L_{\infty,c}: c\in F_q\}$ olarak verilir. (P,∂) 'nin $(q^2,q,1)-\text{DTBT}$ olduğu gösterilecektir. Açıkça P'de q^2 noktaları vardır ve her blok kesinlikle q nokta içerir. Burada noktaların her çiftinin tek blokta içerildiğini göstermek gerekir.

(x_1,y_1) $(x_2,y_2)\in P$ olsun. İki durum düşünülsün.

1) $x_1=x_2$ ise $\{(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)\}$ çiftini içeren tek blok L_{∞,x_1} dir.

2) $x_1\neq x_2$ ise F_q'da eşitlik sistemi düşünülsün.

$$y_1=ax_1+b$$
$$y_2=ax_2+b$$

Bu eşitlik sisteminin a ve b için tek çözüme sahip olduğunu göstermek gerekir. İlkinden, ikinci eşitlik çıkarılarak

$$y_1-y_2=a(x_1-x_2)$$

elde edilir. $x_1 \neq x_2$ olduğu için tek çarpımsal invers $(x_1 - x_2)^{-1} \in F_q$ vardır. Bir önceki eşitliğin her iki tarafını $(x_1 - x_2)^{-1}$ ile çarparak

$$a = (x_1 - x_2)^{-1}.(y_1 - y_2)$$

elde edilir. a belirlendiği için b belirlemek basittir.

$$b = y_1 - ax_1 = y_1 - (x_1 - x_2)^{-1}.(y_1 - y_2)x_1$$

Bu yüzden $\{(x_1, y_1)\ ,\ (x_2, y_2)\}$ çiftini içeren tek blok $L_{a,b}$ dir. a ve b yukarıdaki formüllerden hesaplanmıştır. Böylece (P, ∂) 'nin $(q^2, q, 1) - \text{DTBT}$ olduğu gösterilmiş oldu.

Örnek 4.4: Teorem 4.13yi kullanarak 3.mertebeden Afin Düzlem oluşturmak mümkündür.. Noktaların seti $Z_3 \times Z_3$ olmak üzere bloklar aşağıdaki gibidir.

$$L_{0,0} = \{(0,0),(1,0),(2,0)\}$$
$$L_{0,1} = \{(0,1),(1,1),(2,1)\}$$
$$L_{0,2} = \{(0,2),(1,2),(2,2)\}$$
$$L_{1,0} = \{(0,0),(1,1),(2,2)\}$$
$$L_{1,1} = \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$$
$$L_{1,2} = \{(0,2),(1,0),(2,1)\}$$
$$L_{2,0} = \{(0,0),(1,2),(2,1)\}$$
$$L_{2,1} = \{(0,1),(1,0),(2,2)\}$$
$$L_{2,2} = \{(0,2),(1,1),(2,0)\}$$
$$L_{\infty,0} = \{(0,0),(0,1),(0,2)\}$$
$$L_{\infty,1} = \{(1,0),(1,1),(1,2)\}$$

$$L_{\infty,2} = \{(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

Bu noktada asalın kuvveti mertebeden Afin Düzlemler için iki kuruluş elde edilir. Teorem 4.13de verilen direkt kuruluş ve Teorem 4.1'de verilen PG(2,q) projektif düzlemin artık DTBT dikkate alınabilir. q.mertebeden afin düzlemlerin bu iki yapının izomorfik DTBT'lerini ortaya çıkardığı gösterilebilir.

İlk olarak, PG(2,q) projektif düzlemin artık tasarımı gibi yapılandırılan bütün afin düzlemlerin izomorfik olduğunu göstermek zor değildir. Diğer taraftan, PG(2,q)da bloklar, artık tasarımlar kullanarak oluşturulabilir. Genelliği bozmaksızın 2-boyutlu alt uzaya uygun olan A_{B_0} bloğu seçilir.

$$B_0 = \{(x_1,x_2,x_3) \in (F_q)^3 : (0,0,1).(x_1,x_2,x_3) = 0 \quad \}$$

A_{B_0} bloğundaki noktalar $(F_q)^3$'ün aşağıdaki 1-boyutlu alt uzaylarıdır.

$span((1,i,0)), i \in F_q$ ve $span((0,1,0))$

A_{B_0}'da noktalar q^2 noktalar span $((x,y,1)), x,y \in F_q$ dur.

$(P,\partial) = (F_q \times F_q, \{L_{a,b} : a,b \in F_q\} \cup \{L_{\infty,c} : c \in F_q\})$ Teorem 4.2'de verilen q.mertebeden afin düzlem olsun. her $(x,y) \in P$ için $(x,y) \to span((x,y,1))$ ile tanımlanan bijeksiyon α (P,∂) afin düzlemin izomorfizmini ve A_{B_0} bloğundan PG(2,q)'nun artık DTBT'ni ortaya çıkarır.

Blokların bijeksiyon α altında bloklara ayrıntılarıyla planlandığını ispat etmeliyiz. PG(2,q)'da q^2+q bloklar (A_0 dan başka) aşağıdaki 2-boyutlu alt uzaylardan elde edilir.

$B_{a,b} = \{(x_1, x_2, x_3) \in (F_q)^3 : (a,-1,b).(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$, $a,b \in F_q$ ve

$B_c = \{(x_1, x_2, x_3) \in (F_q)^3 : (1,0,-c).(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$, $c \in F_q$

(Bu $q^2 + q$ alt uzaylar ayrıdır ve B_0 dan farklıdır.)

$a,b \in F_q$ olsun. PG(2,q)'nun $A_{B_{a,b}}$ bloğundaki $q+1$ noktalar $span((x, ax+b,1)), x \in F_q$ ve $span((1,a,0))$ dır. Artık tasarım yapılandırılırken, $span((1,a,0))$ noktası $A_{B_{a,b}}$'dan çıkarılır. Her $x \in F_q$ için $\alpha(x, ax+b) = span((x, ax+b,1))$'dir. Böylece $L_{a,b}$ bloğu $A_{B_{a,b}} \setminus \{span((1,a,0))\}$ bloğa α ile planlanır.

Son olarak, $c \in F_q$ iken A_{B_c} bloğu dikkate alınmış olsun. bu blokta $q+1$ nokta $span((c, y,1)), y \in F_q$ ve $span((0,1,0))$ dır. Artık tasarım yapılandırılırken, $span((0,1,0))$ noktası A_{B_c}'den çıkarılır. . Her $y \in F_q$ için $\alpha(c, y) = span((c, y,1))$ dir.

Böylece $L_{\infty,c}$ bloğu $A_{B_c} \setminus \{span((0,1,0))\}$ bloğa α ile planlanır. İki tasarımın izomorfik olduğu gösterilmiş olur.

4.1 Afin Düzlemlerin Yeniden Çözülebilirliği

Afin Düzlemler, yeniden çözülebilir DTBT 'lerinin ilginç örnekleridir.Her bir Afin Düzlemin yeniden çözülebilir olduğu gösterilebilir. Bunu kanıtlamanın temel adımları aşağıdaki yardımcı teoremler ile verilir.

Yardımcı Teorem 4.14(Stinson,2004): EG(m,p^n) m. mertebeden Afin Düzlem, $L\in$ EG(m,p^n), $x\in P$ ve $x\notin L$ olsun. bu takdirde $x\in M$ ve $L\cap M=\varnothing$ gibi $M\in$ EG(m,p^n) olan bir blok kesinlikle vardır.

Yardımcı Teorem 4.15(Stinson,2004): EG(m,p^n) n. mertebeden Afin Düzlem olsun. O zaman $\approx$ ilişkisi yukarıdaki gibi tanımlanan bir denklik ilişkisidir.

Yardımcı Teorem 4.16(Stinson,2004): EG(m,p^n) m. mertebeden Afin Düzlem olsun. Bu takdirde $\approx$'nın her bir denklik sınıfı EG(m,p^n) 'da paralel sınıftır.

Teorem 4.17(Stinson,2004): Her Afin Düzlem yeniden çözülebilirdir.

Yardımcı Teorem 4.16'den $\approx$'nın her bir denklik sınıfı DTBT'nin paralel sınıfıdır sonucunu çıkarılır. Aynı zamanda DTBT'nin her bloğu $\approx$ 'nın kesinlikle bir denklik sınıfındadır. Bu yüzden, $\approx$'nın denklik sınıfları Afin düzlemin yeniden çözümlenmesini biçimlendirir.

Asal mertebeden Afin Düzlemler dikkate alındığında, paralel sınıfları belirlemek kolaydır. Her $a\in F_q$ için

$$\{L_{a,b} : b\in F_q\}$$

bir paralel sınıftır. Ayrıca

$$\{L_{\infty,c} : c\in F_q\}$$

da paralel sınıftır. Bu $q+1$ paralel sınıflar DTBT'nin yeniden çözümlenmesini biçimlendirir.

λ=2 olan tasarıma ikidüzlem adı verildiği daha önce söylenmişti. İkidüzlem için bazı örnekler şu şekilde verilebilir. a) k=3 iken 2-(4,3,2) tasarımı bir ikidüzlemdir. b) 2 boyutlu izdüşüm düzleminin tamamlayıcısı bir 2-(7,4,2) tasarımıdır, yani k=4 olan bir ikidüzlemdir. (c) λ=2 iken, bir Hadamard 2-tasarım 2-(11,5,2) tasarımıdır, yani k=5 olan bir ikidüzlemdir. (d) 4 boyutlu yarım-ağ tasarımı ve tabaka sayısı 2, bir 2-(16,6,2) tasarımıdır, yani, k=6 olan bir ikidüzlemdir.

BRC teoremi k=7, 8 ya da 10 olan ikidüzlemlerin mevcut olmadığını ifade ettiğinden dolayı, k=10 değerinden büyük tüm değerler için, tekdüzlemler mevcuttur.

Örnek 4.5: k=7, 8 yada 10 için herhangi bir ikidüzlem olmadığını gösteriniz.

Herhangi bir simetrik 2-tasarımda $v=\left(k\left(k-1\right)+\lambda\right)/\lambda$ olur. Dolayısıyla İkidüzlemlerde, $v=1+k\left(k-1\right)/2$ olacaktır. Bu nedenle k≡2 ya da 3(mod4) ise v bir çift sayıdır ve, k-2 tamkare olmalıdır. Eğer y, B'nin v noktalarına sahip ikidüzlemin bir bloğu ise, y üzerinde olmayan, $v-k=\left[\left(k-1\right)\left(k-2\right)\right]/2$ noktaları vardır. Her z blok (z≠y), y bloğu ile iki noktada kesişir ve tersi olarak, y üzerindeki her nokta çifti, y bloğundan farklı bir tek blok üzerindedir. Böylece şunlar vardır.

Bir ikidüzlem B'nin y bloğu üzerindeki düzensiz nokta çiftleri ile B'nin y'den farklı blokları arasında birebir uyumluluk vardır.

y bloğuna sahip bir ikidüzlem olsun ve p, y üzerinde olmayan bir nokta olsun. y bloğunun noktalarının kümesi üzerinde bir <p> grafiğini şu şekilde tanımlanır. <p> grafiğinin köşeleri y bloğunun noktalarıdır ve X ve Y noktaları; y bloğundan farklı ve X,Y noktalarını kapsar. Ayrıca p noktasını da kapsayan bir tek z bloğunun mevcut olması şartıyla, komşu noktalardır.

Yardımcı teorem 4.18(Hughes ve Pipper, 1985): : <p> grafiği iki değerlidir(yani her köşe iki kenar sahiptir) ve bu nedenle, <p> grafiği en az üç kenarlı çokgenlerin birleşmesidir.

Yardımcı teorem: 4.19(Hughes ve Pipper, 1985): P ve Q noktaları farklı noktalar ve her ikisi de y üzerinde değilse, <P> ve <Q> grafikleri iki ortak kenara sahiptir.

Bu önermelere dikkate alarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.20(Hughes ve Pipper, 1985): : Blok genişliği k olan bir iki düzlem ise, ve y B iki düzleminin bir bloğu ise, y üzerinde olmayan bir P noktası için *(k-1)(k-2)*/2 tane <P> grafiği şu özelliğe sahiptir:

(1) Her <P> grafiği iki değerlidir
(2) iki farklı <P> ve <Q> grafiği ortak iki kenara sahiptir.

Teorem 4.20 çok ilginç bir zıtlığa sahiptir.

Teorem 4.21(Hughes ve Pipper, 1985): Y, k köşelerin bir kümesi olsun ve $G_1,G_2,\ldots,G_{(k-1)(k-2)/2}$, köşe kümesi Y'ye sahip iki değerli grafikler olsun. Örneğin $i\neq j$ için, G_i ve G_j ortak iki kenara sahiptir.

4.2 Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımların Dualleri

Bir tasarımın dual tasarımı işlemleri ve blokları sırasıyla, orijinal tasarımın blokları ve işlemlerine karşılık gelen yeni bir tasarımdır. DTBT'da $v \leq b$ Fisher eşitsizliği sağlanır. Ancak dual tasarımlarda bloklar ve işlemlerin rolleri değiştiğinden Fisher eşitsizliği sağlanmayabilir. Netice olarak, dual tasarım dengeli olmayabilir.

TC(v, k, k, λ) konfigurasyonunun duali k-sınıflı birliktelik yapısını tanımlar. Bu birliktelik yapıları geometrik özelliklerin terimleriyle karakterize edilebilir.

Bir DTBT, sonlu projektif geometri PG(m, p^n) ve sonlu öklid geometri EG(m, p^n) de uygun doğruların seçimi ile bir geometrik konfigurasyonla tanımlanabilir.

PG(m, p^n)'nin doğruları ile tasarımın blokları, PG(m, p^n)'nin noktaları ile tasarımın işlem ve/veya işlem kombinasyonları eşleştirilmiştir.

PG(m,p^n)'nin doğruları bir uzay oluşturur. Her doğru bir bloğa karşılık geldiğinden, uzaya "bloklar uzayı" denebilir. Doğrular üzerindeki noktaların oluşturduğu uzay ile bloklar uzayı birbirinin dual uzayları olur.

Teorem 4.22(Street and Street ,1987): Bir DTBT'nin dualinin yine DTBT olabilmesi için gerek ve yeter koşul $v = b$ olmasıdır.

Shrikhande(1952), $\lambda = 1$ veya $\lambda = 2$ durumu için asimetrik DTBT'nin duallerinin kısmi dengeli tamamlanmamış blok tasarımı olduğunu göstermiştir.

Aynı sonuçlar, Shrikhande ve Bahagwandas(1965) tarafından çizge teorisi ile ilişkilendirilerek yeniden ele alınmıştır.

Teorem 4.23(Raghavarao,1971): v, b, r, k, λ parametreli asimetrik DTBT'nin dual tasarımı, aşağıdaki parametrelere sahip iki birliktelik sınıflı KDTBT'dir.

$$v^* = b \;,\; b^* = v \;,\; r^* = k \;,\; n_1^* = k(r-1) \;,\; n_2^* = b-1-n_1$$

$$\lambda_1^* = 1 \;,\; \lambda_2^* = 0 \;,\; p_{11}^{1*} = r-2+(k-1)^2 \;,\; p_{11}^{2*} = k^2 \;.$$

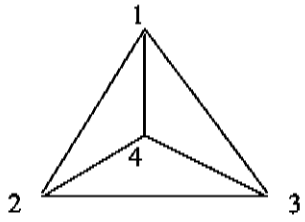
Örnek 4.6: $v = 4$, $b = 6$, $k = 2$, $r = 3$, $\lambda = 1$ parametreli bir DTBT'nin birliktelik yapısı aşağıdaki gibidir :

BLOKLAR

İŞLEMLER	1	2	3	4	5	6
1	x		x		x	
2	x			x		x
3		x	x			x
4		x		x	x	

Çizelge 4.3. v=4, b=6, k=2, r=3, λ=1 parametreli DTBT

Bu tasarımın geometrik yapısı GF(2) üzerine kurulan sonlu öklid geometrisi EG(2, 2)'dir. Buna ilişkin bir gösterim aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.3. Çizelge 4.3'deki tasarımın EG(2,2)'de bir gösterimi

Çizelge 4.3'de verilen tasarımın dual tasarımına ait birliktelik yapısı aşağıdaki gibidir.

BLOKLAR

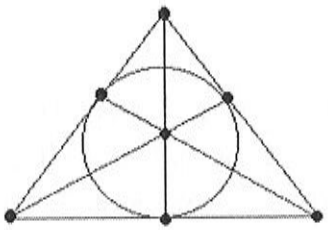
İŞLEMLER	1	2	3	4
1	x	x		
2			x	x
3	x		x	
4		x		x
5	x			x
6		x	x	

Çizelge 4.4. Dual tasarımin ortaklık yapısı

$\lambda_1^* = 1$	$\lambda_2^* = 0$
(1 , 3)(1 , 4)(1 , 5)(1 , 6)	(1 , 2)
(2 , 3)(2 , 4)(2 , 5)(2 , 6)	(2 , 1)
(3 , 1)(3 , 2)(3 , 5)(3 , 6)	(3 , 4)
(4 , 1)(4 , 2)(4 , 5)(4 , 6)	(4 , 3)
(5 , 1)(5 , 2)(5 , 3)(5 , 4)	(5 , 6)
(6 , 1)(6 , 2)(6 , 3)(6 , 4)	(6 , 5)

Çizelge 4.4 de verilen tasarım $v^* = 6$, $b^* = 4$, $r^* = 2$, $k^* = 3$, $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = 0$, $n_1^*=4$, $n_2^*=1$, $p_{ij}^{1*}= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $p_{ij}^{2*} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ parametrelerine sahip KDTBT 'dir.

b=v=7, r=k=3, λ=1 parametreli Simetrik DTBT'i, TC(7,3,2,1) Konfigurasyonudur. Bu konfigurasyon, geometrik olarak GF(2) üzerine kurulan PG(2, 2) ile tanımlanır. Bir Fano düzlemidir.Aynı zamanda Hadamard 2-(7, 3, 1) tasarımını tanımlar.



Şekil 4.4. TC(7,3,2,1) konfigurasyonunun PG (2,2) de bir gösterimi

TC(7,3,2,1) konfigurasyonunun tanımladığı Simetrik DTBT'nin, duali parametreleri aynı olan Simetrik DTBT dır. Dual tasarımların izomorf olması gerekmez.

TC(7,3,2,1) konfigurasyonunun tamamlanışı olan TC(7,3,2,2) konfigurasyonu İkidüzlemdir(Biplane) (Bayrak ve Gönen, 2002). Bir ikidüzlem, parametreleri $v = b = \frac{n^2+3n+4}{2}, r = k = n+2, \lambda = 2$ olan bir simetrik DTBT tasarımıdır. Bunun

artık (residual) tasarımının parametreleri $v=\frac{n(n+1)}{2}$, $b=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $k=n$, $\lambda=2$'dir.

4.3 PG(3,s) ve KDTBT

PG(3,s) sonlu projektif geometrinin uygun doğrularının seçimi ile buna uygun bir geometrik konfigürasyon aşağıdaki parametrelere sahip KDTBT gibi yorumlanabilir.

$v=b=(s^4-1)/(s-1)$, $\lambda_1=1, n_1=s(s+1)$, $r=k(s+1)$, $\lambda_2=0$, $n_2=s^2$

$$P_1=P_{jk}^1=\begin{pmatrix} s-1 & s^2 \\ s^2 & s^2(s-1) \end{pmatrix} \quad P_2=P_{jk}^2=\begin{pmatrix} s+1 & s^2-1 \\ s^2-1 & s^2(s-1) \end{pmatrix}$$

Burada $s=p^n>1$, p asal ve pozitif tamsayıdır. s=2 durumunda karşılık gelen tasarım Bose ve Shimamoto(1952) tarafından başka bir metotla kurulmuştur. Bose(1939), Bose ve Nair(1939), DTBT kuruluşunda Galois cisim ve Sonlu geometri kullanmıştır.

PG(3,s) sonlu projektif geometrisinde, $(s^4-1)/(s-1)$ nokta, $(s^2+1)(s^2s+1)$ doğru ve $(s^4-1)/(s-1)$ düzlem vardır. Bu geometride, bir doğruda bulunan noktaların sayısı (s+1), bir düzlemdeki noktaların sayısı (s^2+s+1)dır. Herhangi bir noktadan (s^2+s+1) doğru geçer ve düzlemlerin sayısı aynıdır. PG(3,s)de noktaların her çiftinden bir doğru ve (s+1) düzlem geçer. DTBT'lerde olduğu gibi PG(3,s'in noktaları ile KDTBT tasarımı birebir ilişkilidir.

ϕ noktası, θ noktasının 1. birlikteliğinde bir nokta olsun. Yani θ'ya karşılık gelen Π_0 düzlemi ϕ noktasından geçer. ϕ, θ'nın 1. birlikteliğinde olsun. Böylece Π_0 düzlemi θ noktasından geçer. θ'nın 1. birlikteliğinde olmayan α noktası, θ'nın 2. birlikteliğindedir. Π_0 üzerinde (s^2+s) nokta vardır(θ'nın kendisinden başka). Böylece θ'nın 1. birlikteliğindeki elemanların sayısı $n_1=s^2$'dir.

PG(3,s)deki toplam nokta sayısı s^3+s^2+s+1 olup, θ'nın 2. birlikteliğindeki elemanların sayısı $n_2=s^3$dür.

θ ve ϕ noktaları 1. birliktelikteki noktalar olsun. θ ve ϕ'den geçen Π_θ ve Π_ϕ düzlemlerinin kesiştiği doğru üzerinde olmalıdır. θ ve ϕ'nin 1. birlikteliğindeki ortak elemanların sayısı $P_{11}^2 = s+1$'dir. Ayrıca aşağıdaki eşitlikler mevcuttur.

$$P_{12}^1 = P_{21}^1 = n_1 - P_{11}^1 - 1 = s^2$$
$$P_{22}^1 = n_2 - P_{11}^1 + 1 = s^2(s-1)$$
$$P_{12}^2 = P_{21}^2 = n_1 - P_{11}^2 = s^2 - 1$$
$$P_{22}^2 = n_2 - n_1 + P_{11}^1 - 1 = s^2(s-1)$$

l_θ, Π_θ düzleminde bulunan θ noktasından geçen herhangi bir doğru olsun. l_θ doğrusu üzerinde bulunan tüm noktaların kümesi tasarımın bir bloğu gibi düşünülebilir. Π_θ düzleminde bulunan, θdan geçen (s+1) doğru olduğundan, θ işlemini bulunduran (s+1) blok mevcuttur. Böylece $r=k$=s+1'dir.

PG(3,s)deki noktaların toplam sayısı $(s^4-1)/(s-1)$'dir. l_θ gibi doğruların toplam sayısı $(s^4-1)/(s-1)$'dir. Böylece blokların sayısı $b=(s^4-1)/(s-1)$'dir. Eğer θ ve ϕ 1. birliktelikte iseler θ ve ϕ'yi birleştiren doğru bir bloktur. Böylece herhangi iki birliktelik tam olarak bir blokta gözükür, yani $\lambda_1=1$'dir.

Eğer ϕ ve θ 2. birliktelik sınıfında ise, ne Π_θ ne de Π_ϕ, θ ve ϕ'nin ikisini birliktelikte bulundurmaz. Böylece θ noktasından geçen l_θ doğrusu ϕ'den geçmez. θ'yı ihtiva eden bloklar, ϕ'yi ihtiva etmez, $\lambda_2=0$'dır.

Shrikande $\lambda = 1$ veya $\lambda = 2$ durumu için asimetrik DTBT'lerin duallerinin KDTBT'ler olduğunu göstermiştir. v, b, r, k, λ parametreli asimetrik DTBT'lerin dualleri aşağıdaki parametrelere sahip iki birliktelik sınıflı KDTBT'dir.

$$v' = b,\ b' = v,\ k' = r,\ r' = k,\ n_1' = k(r-1),\ n_2' = b-1-n_1,\ \lambda_1' = 1,\ \lambda_2' = 0$$

$$P_{11}^{1'} = r-2+(k-1)^2,\ P_{11}^{2'} = k^2$$

$v = \frac{n(n+1)}{2}, k = n, \lambda = 2$ olan bir DTBT göz önüne alınsın. Bunun dualinin parametreleri,

$$v' = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, b' = \frac{n(n+1)}{2}, k' = n+2, \lambda_1' = 1, \lambda_2' = 2, n_1' = 2n, n_2' = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$P_{11}^{1'} = n,\ P_{11}^{2'} = 4$$

olan bir KDTBT'dir.

4.5 KDTBT'de Geometrik Gösterimler

Burada KDTBT ele alınan örneklerin geometrik gösterimleri EG (m, p^n) yardımıyla verilecektir.

EG (m,p^n)'nin s boyutlu alt uzayı EG (s, p^n)'dir. EG(s,p^n)'ler, KDTBT'nin blokları gibi düşünülür. Genel olarak EG (m, p^n) ile, m=2, s=1 durumu için parametreleri aşağıdaki gibi olan bir KDTBT tanımlamak mümkündür (Bayrak, 1995):

$v = b = p^{2n}-1,\ r = k = p^n,\ \lambda_1 = 1,\ n_1 = p^{2n}-p^n,\ \lambda_2 = 0,\ n_2 = p^n-2$

$$P_{jl}^{1}=\begin{pmatrix}\left(p^{2}-1\right)^{2} & \left(p^{n}-2\right)\\ \left(p^{n}-2\right) & 0\end{pmatrix}$$

$$P_{jl}^{2}=\begin{pmatrix}p^{2n}-p^{n} & 0\\ 0 & p^{n}-3\end{pmatrix}$$

Örnek 4.7

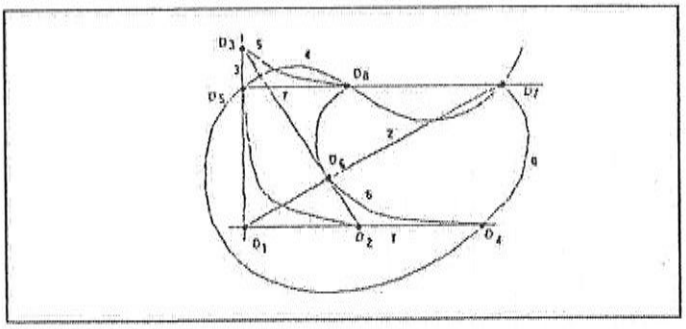
Noktalar	Bloklar							
	1	2	3	4	5	6	7	8
D_1	X	X	X					
D_2	X			X	X		X	
D_3			X				X	
D_4	X					X		X
D_5			X	X				X
D_6		X				X	X	
D_7		X			X			X
D_8				X	X	X		

Çizelge 4.5:KDTBT tasarımı

Çizelge 4.5'de verilen tasarım için 1. çeşit parametreler $r=k=3$, $b=v=8$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, $n_1=6$, $n_2=1$dir. 2. çeşit parametreler ise;

$$P_{jl}^{1}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad P_{jl}^{1}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ile verilir. Çizelge 4.5'de verilen KDTBT'i EG (2, 3) ile tanımlamak mümkündür. Şekil 4.5'de bu tasarımın EG (2, 3)'de bir gösterimi verilmiştir.



Şekil 4.5: Örnek 4.3' de verilen tasarımın EG(2,3)de bir gösterimi

EG (2, 3) için noktalar ve doğruların elde edilişinde Galois cismi GF(3) kullanılır, noktalar ve üzerlerinde bulundukları doğrular aşağıdaki gibidir.

D, : (1,-1, 1) D_2: (0, 0, 1) D_3: (0,1,1)
D_4: (-1, 1, 1) D_5: (1,0,-1) D_6: (0,-1,1)
D_7: (1, 1,-1) D_8: (1,0,1)

[1, 1, 0]:	(1 -1 1)	(0 0 1)	(-1 1 1)
[0, 1, 1] :	(1 -1 1)	(1 1 -1)	(0 -1 1)
[1, -1, 1]:	(1 -1 1)	(0 1 1)	(1 0 -1)
[0, 1, 0] :	(1 0 -1)	(0 0 1)	(1 0 1)
[1, 1, -1]:	(0 1 1)	(1 1 -1)	(1 0 1)
[-1, 1, 1]:	(-1 1 1)	(0 -1 1)	(1 0 1)
[1, 0, 0] :	(0 1 1)	(0 0 1)	(0 -1 1)
[1,0, 1] :	(-1 1 1)	(1 1 -1)	(1 0 -1

Örnek 4.8:

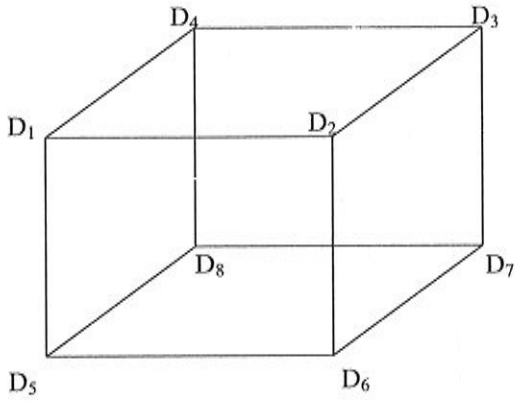
noktalar	Bloklar					
	1	2	3	4	5	6
D_1	X	X	X			
D_2	X	X		X		
D_3	X			X	X	
D_4	X		X		X	
D_5		X	X			X
D_6		X		X		X
D_7				X	X	X
D_8			X		X	X

Çizelge 4.6: Bir KDTBT tasarımı

Çizelge 4.6 de 1. çeşit parametreleri, $v = 8$, $b = 6$, $k = 4$, $r = 3$, $\lambda_1 = 2$, $n_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $n_2 = 3$, $\lambda_3 = 0$, $n_3 = 1$ ve 2. çeşit parametreleri ise aşağıdaki gibi olan bir KDTBT verilmiştir.

$$P_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Çizelge 4.6'deki tasarım için bir küp düşünmek mümkündür. Küpün yüzleri bloklar, noktaları, işlemler olarak kabul edilir.



Şekil 4.6: Çizelge 4.6'daki tasarıma ilişkin bir gösterim

Örnek 4.9: Çizelge 3de $v=b=10$, $r=k=3$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, $n_1=6$, $n_2=3$

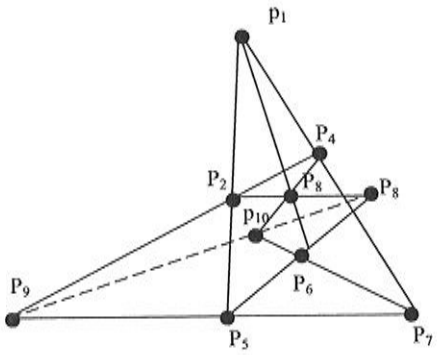
$$P_{jl}^{1}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad P_{jl}^{2}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

parametreli KDTBT örneği verilmiştir.

İşlemler	Bloklar									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	X	X	X							
2	X			X		X				
3		X		X				X		
4			X			X		X		
5	X				X		X			
6		X			X				X	
7			X							
8				X	X					X
9						X	X			X
10								X	X	X

Çizelge 4.7: Bir KDTBT

Çizelge 4.7'de verilen KDTBT'nin Şekil 4.7'de verilen dezarg konfigurasyonu ile temsil etmek mümkündür (Bayrak, 1995).



Şekil 4.7: Desarg Konfigürasyonu

4.6 Kısmi Geometri

(r,k,s) karakteristikli kısmi geometri noktalar ve doğruların bir sistemidir ve şu koşullar sağlanır.

1. Herhangi iki nokta en fazla bir doğru üzerindedir.
2. Her nokta r doğru üzerindedir.
3. Her doğru üzerinde k nokta vardır.
4. p noktası l doğrusu üzerinde olmayan bir nokta olsun. Bu durumda p 'den geçen l ile kesişen m tane doğru vardır ($m \geq 1$). Kısmi geometride nokta ve doğru sayısı şöyledir.

$$v = \frac{k\left[(r-1)(k-1)+s\right]}{s}, \quad b = \frac{r\left[(r-1)(k-1)+s\right]}{s}$$

(r,k,s) kısmi geometrisine ilişkin çizgiye aşağıdaki parametrelere sahip SRG'dir.

$$v = b = P^{2n} - 1, \; r = k = P^n, \; \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 0, \; n_1 = P^{2n} - P^n, \; n_2 = P^n - 2$$

$$P_{jl}^{1}=\begin{bmatrix}(P^n-1)^2 & P^n-2\\ P^n-2 & 0\end{bmatrix},\quad P_{jl}^{2}=\begin{bmatrix}P^{2n}-P^n & 0\\ 0 & P^n-3\end{bmatrix}$$

Afin çözülebilir bir tasarımın duali Yarı-Düzenli GB'dir.

Örnek 4.10: Aşağıdaki tasarımın parametrelerini bulunuz ve geometrik yapısını belirleyiniz.

	Bloklar							
İşlemler	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8
1	×	×						
2			×	×				
3					×	×		
4							×	×
5					×			×
6						×	×	
7	×			×				
8		×	×					
9				×			×	
10		×			×			
11			×					×
12	×					×		
13			×			×		
14	×							×
15		×					×	
16				×	×			

Çizelge 4.8: KDTBT örneği

$v=16, b=8, r=2, k=4, \lambda_1=1, \lambda_2=0, n_1=6, n_2=9$

$P_{ij}^1=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 6\end{bmatrix}$, $P_{ij}^2=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 4\end{bmatrix}$ olan bir KDTBTdir.

Parametrelerin bulunuşu aşağıdaki gibidir.

$\lambda_1=1$ (Birinci birliktelik sınıfı)	$\lambda_2=0$ (İkinci birliktelik sınıfı)
(1,7), (1,8), (1,10), (1,12), (1,14), (1,15)	(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,9), (1,11), (1,13), (1,16)
(2,7), (2,8), (2,9), (2,11), (2,13), (2,16)	(2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,10), (2,12), (2,14), (2,15)
(3,5), (3,6), (3,10), (3,12), (3,13), (3,16)	(3,1), (3,2), (3,4), (3,7), (3,8), (3,9), (3,11), (3,14), (3,15)
(4,5), (4,6), (4,9), (4,11), (4,14), (4,15)	(4,1), (4,2), (4,3), (4,7), (4,8), (4,10), (4,12), (4,13), (4,16)
.	.
.	.
.	.
(7,1), (7,2), (7,9), (7,12), (7,14), (7,16)	(7,3), (7,4), (7,5), (7,6), (7,8), (7,10), (7,11), (7,13), (7,15)
(8,1), (8,2), (8,10), (8,11), (8,13), (8,15)	(8,3), (8,4), (8,5), (8,6), (8,7), (8,9), (8,12), (8,14), (8,16)
.	.
.	.

Çizelge 4.9: KDTBT parametrelerinin bulunuşu

Çizelgeden görüldüğü gibi, birinci birliktelik sınıfındaki eleman sayısı $n_1=6$ ve ikinci birliktelik sınıfındaki eleman sayısı $n_2=9$ ' dur.

P_{ij}^{1} ' in hesaplamaları için, birinci birliktelik sınıfından (1,8) seçilmiş olsun.

P_{11}^{1} için 1'in ve 3'ün 1. birliktelik sınıfındaki elemanlar şöyledir.

(1,7), (1,8), (1,**10**), (1,12), (1,14), (1,**15**)
(8,1), (8,2), (8,**10**), (8,11), (8,13), (8,**15**)

Buradan $P_{11}^{1} = 2$ ' dir.

$P_{12}^{1} = P_{21}^{1}$ için 1'in 1. birliktelik sınıfındaki ve 3'ün 2.birliktelik sınıfındaki elmanlar seçilsin. Böylece ortak elemanlar;

(1,7), (1,8), (1,10), (1,**12**), (1,**14**), (1,15)
(8,3), (8,4), (8,5), (8,6), (8,7), (8,9), (8,**12**), (8,**14**), (8,16)

Buradan $P_{12}^{1} = P_{21}^{1} = 3$ elde edilir.

P_{22}^{1} için 1'in 2. birliktelik sınıfındaki ve 3'in 2. birliktelik sınıfındaki ortak elemanlar;

(1,2), (1,**3**), (1,**4**), (1,**5**), (1,**6**), (1,**9**), (1,11), (1,13), (1,**16**)
(8,**3**), (8,**4**), (8,**5**), (8,**6**), (8,7), (8,**9**), (8,12), (8,14), (8,**16**)

Böylece $P_{22}^{1} = 6$ bulunur.

$P_{ij}^{1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ olarak elde edilir.

P_{ij}^{2} ' in hesaplamaları için, birinci birliktelik sınıfından (1,2) seçilmiş olsun.

P_{11}^{2} için;

(1,7), (1,**8**), (1,10), (1,12), (1,14), (1,15)
(2,7), (2,**8**), (2,9), (2,11), (2,13), (2,16)

Buradan $P_{11}^2 = 2$ ' dir.

$P_{12}^2 = P_{21}^2$ için;

(1,7), (1,8), (1,**10**), (1,**12**), (1,**14**), (1,**15**)
(2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,**10**), (2,**12**), (2,**14**), (2,**15**)

Buradan $P_{12}^2 = P_{21}^2 = 4$ ' tür.

P_{22}^2 için;

(1,2), (1,**3**), (1,**4**), (1,**5**), (1,**6**), (1,9), (1,11), (1,13), (1,16)
(2,1), (2,**3**), (2,**4**), (2,**5**), (2,**6**), (2,10), (2,12), (2,14), (2,15)

$P_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ olarak elde edilir.

Örnek 4.11: 2-(7,4,2) DTBT tasarımında
a) Geometrik yapıyı belirleyiniz..
b)Kalıntı tasarımı bulunuz ve parametrelerini belirleyiniz.
a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu yapı simetrik DTBT tasarımıdır. $\lambda=2$ olduğundan bu ikidüzlemdir.

Bir ikidüzlem parametreleri

$$v = b = (n^2+3n+4)/2,\ r = k = n+2,\ \lambda = 2$$

olan simetrik tasarımdır.

c) Kalıntı tasarım oluşturmak için ilk blok ve ilk blok üzerindeki bütün noktalar tasarımdan atılır. Elde edilen tasarım aşağıda ifade edildiği gibidir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $n = 2$'dir. Bunun kalıntı tasarımının parametreleri

$v=n(n+1)/2,\ b=(n+1)(n+2)/2\ ,\ r=n+2,\ k=2,\ \lambda=2$

$v=3,\ b=6,\ r=4,\ k=2,\ \lambda=2$

Tekrarlı bloklar atılarak 2-(3,3,1) simetrik tasarımı elde edilir. Bu tasarım trivialdir.

Örnek 4.12: Bir 2-(9, 3, 1) tasarımına ait bloklar aşağıda verildiği gibidir.

$B_1=\{1, 2, 3\}$	$B_4=\{1,4,7\}$	$B_7=\{1, 5,9\}$	$B_{10}=\{1, 6, 8\}$
$B_2=\{4,5,6\}$	$B_5=\{2,5,8\}$	$B_8=\{2,6,7\}$	$B_{11}=\{2, 4, 9\}$
$B_3=\{7, 8, 9\}$	$B_6=\{3, 6,9\}$	$B_9=\{3, 4,8\}$	$B_{12}=\{3,5,7\}$

Bu DTBT tasarımını göz önüne alarak;

a)Dual tasarımını bulunuz,

b)Dual tasarımın parametrelerini belirleyiniz,

c)Her iki tasarımın uygun olduğu geometrik yapıyı belirleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Orijinal tasarımın STS(9) olduğu için 3. mertebeden 2 boyutlu Afin (AG(2,3)) düzlemdir

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Bazı çiftler hiç gözükmez iken bazı çiftler 1 kez gözüktüğünden dolayı $\lambda_1=0$ ve $\lambda_2=1$ olan KDTBTdir.

Örnek 4.13: n mertebeli afin düzlem 2-(n^2, n, 1) ve n mertebeli projektif düzlem 2-(n^2+n+1, $n+1$, 1) birer Steiner sistem örneğidir.

Tanım 4.11: 3-(m^2+1, $m+1$, 1) ($m \geq 2$) parametreli Steiner 3-tasarımına " *sonlu tersinir düzlem* " denir. Bu düzlemler afin düzlemlerin genişlemeleridir.

Örnek 4.14: $m = 3$ ise bir S(3, 6, 22) Steiner sistemi vardır. Bu sistem 4 mertebeli projektif düzlemin bir genişlemesidir.

4.7 Notlar

Bütün geometriler projektif geometriden elde edilen alt geometriler gibi düşünülebilirler. Geometriler ile tasarımlar arasında birçok ilişki vardır. Sonlu geometrilerden simetrik DTBT, t-tasarımlar, ortogonal dizimler, ikişerli ortogonal Latin kareler, çözülebilir tasarımlar gibi çok önemli kombinatorik tasarımlar elde edilir. Sonlu lineer uzay ile ilgili bazı iyi ve genel kaynaklar Hanani(1975) ve Beutelspacher ve Rosenbaum (1998) şeklindedir. Rhagvarao(1966), kısmi geometri yapısını dahada geliştirmiştir. Kısmi geometrinin dengeli tamamlanmamış blok tasarımların kuruluşlarında kullanımı üzerinde daha detaylı çalışmalara Benson(1966), Bhagwandas(1968) ve Bose (1963) örnek olarak verilebilir.

4.8 Alıştırmalar

1) PG(3,2) yi kullanarak ilgili dengeli tamamlanmamış blok tasarımını ve parametrelerinin bulunuz.

2) PG(4,2)'den elde edilen AG(4,2)'nin isabet yapısını bulunuz.

3) PG(3,3)'den elde edilen KDTBT'ın parametrelerini belirleyiniz.

4) 2-(15,7,3) DTBT tasarımında;

   a) Geometrik yapıyı belirleyiniz.

   b)Kalıntı tasarımı bulunuz ve parametrelerini belirleyiniz.

5) PG(3,2)'yi kullanarak blok genişliği 6, blok sayısı 8 ve işlem sayısı 12 olan Grup bölünebilir KDTBT(2) kurunuz.

4.9 Kaynaklar

1) Bayrak H., Kısmi Dengeli tamamlanmamış blok düzeninde geometrik gösterim. Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü dergisi,1995, cilt 5, 95-103.
2) Bayrak H., 2003, Eksik Blok Düzenlerin Dual Yapıları, İstatistik Araştırma Dergisi, 2(1):1-9.
3) Bayrak, H. and Gönen, S., 2002, Geometrical Structure of Dual Designs, Hacettepe Bulletin of Natural Science and Engineering, Vol 31,pp53-56.
4) Benson C.T., 1966, A partial Geometry $(q^3+1,q^2-1,1)$ and corresponding PBIB designs. Proc. Am. Math. Soc., 17, 747-749.
5) Beth, B. And Jungnickel, D. And Lenz, H., 1999 "Design Theory, Second Edition" Vol-1, Cambridge University, UK.
6) Beutelspacher, A. & Rosenbaum, U., 1998, Projective Geometry. Cambridge University Press, Cambridge.
7) Bhagwandas,1968, Group divisible designs and partial geometries. Calcutta Stat. Assn. Bull., 17, 115-122.
8) Bose, R.C., 1963, Combinatorial properties of partially balanced incomplete block designs and association schemes. Contributions to Statistics. Presented to Prof. P.C. Mahalonobis, on his 70^{th} Birthday. Pergamon Press, New York, s 21-48.
9) Bose, 1939 R.C.On the construction of balanced incomplete block designs, *Ann. Eugenics* **9** (1939), pp. 353–399.
10) R. C. Bose and K. R. Nair, 1939, Partially balanced incomplete block designs, Sankhya 4:337-372.
11) R. C. Bose and T.,1952, Shimamoto, Classication and Analysis of partially balanced incomplete block Designs with two associate classes, *J. Amer. Statist. Assn.* 47:151-184.
12) Hanani H, 1975, Balanced incomplete block designs and related designs, Discrete Math.,11, 255-369.
13) Hughes and Pipper, Design Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

14) Mann H.B., 1950, Analysis and Design of Experiments. Dover Publications, Inc. New York.

15) Raghavarao D., 1971, Constructions and combinatorial problems in design of experiments. Wiley, New York

16) Shrikhande, S. S. , On The Dual of Some Balanced Incomplete Block Desigs, Biometrics, 8, 66-72, (1952).

17) Shrikhande, S.S. and Bhagwandas, "Duals of Incomplete Block Designs", ***J. Indian Stat. Assn.*** , 3, 30-37, (1965).

18) Stevensen F.W., 1972, Projective Planes, W.H. Freeman and Company San Francisco

19) Stinson D.R.,2004, Combinatorial Designs:Construction and analysis, Springer, New York

20) Street, A.P. and Street, D.J., "Combinatorics of Experimental Design" Clarendon Press, Oxford, UK(1987).

5. GRAFİK TEORİSİ

Tasarım teorisi, kümelerin altkümeleri ile(ya da iki küme arasındaki ilişki) ile ilgilenir. Bunun tersine grafik teorisi, bir kümenin üzerindeki genel ilişkilerle ilgilenir. Bu iki yapının kesiştiği noktalar vardır.

5.1 Genel Bilgi

G grafiği matematiksel bir nesnedir. Bu matematiksel nesne kenarlar ve köşeler olmak üzere iki kümeye ayrılır. Bir grafikte, V köşe kümesini ve E köşeler arası kenar kümesini temsil eder. Eğer bir köşe çifti arasında birden fazla kenar yoksa grafik basittir.

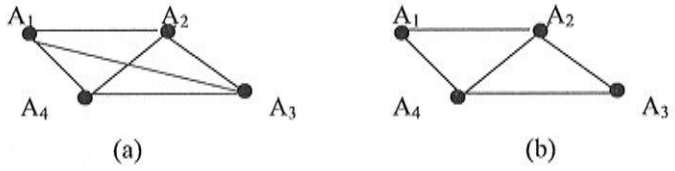
Kenar $(\alpha,\beta)\in E$ ve $(\beta,\alpha)\in E$ şeklinde ise E yön verilmemiş kenar, $(\alpha,\beta)\in E$ şeklinde olup $(\beta,\alpha)\notin E$ ise yön verilmiş kenardır. Yön verilmemiş kenar, çizgi ile, yön verilmiş kenar, $(\alpha,\beta)\in E$ fakat $(\beta,\alpha)\notin E$ ise α'dan β'ya ok ile gösterilir.

Eğer bir grafik tamamen yön verilmemiş kenarlardan oluşuyorsa grafiğe yön verilmemiş grafik denir. Benzer şekilde grafik tamamen yön verilmiş kenarlardan oluşuyorsa grafiğe yön verilmiş grafik denir. Bir grafiğin yön verilmemiş biçimi $G^{\sim}$, oklar yerine çizgi koyarak elde edilir. Ayrıca her iki çeşit kenarı içeren grafikler de mevcuttur.

$A\subseteq V$ köşe kümesinin bir alt kümesi olduğunda, $G_{\wedge}=(A,E_{\wedge})$ G'nin bir alt grafiğidir. Burada kenar kümesi $E_{\wedge}=E\cap(A\times A)$, G'de her iki köşesi A'da olan kenarlardan oluşur.

Bir grafiğin tüm köşeleri arasında çizgi ya da ok varsa bu grafiğe tam denir. V'nin bir alt kümesine, eğer buna ilişkin grafik tam ise, tamdır denir. V'nin tam alt kümelerine klik denir.

Örnek 5.1: Şekil 5.1 (a) grafiğinde tüm köşeler arasında çizgi bulunduğundan (a)'daki grafik tamdır. Fakat (b)deki grafik A_1A_3 kenarı olmadığından tam değildir. Şekil 5.1(b)deki grafikte tam alt kümeler $\{A_1,A_2,A_4\}$ ve $\{A_2,A_3,A_4\}$ olduğundan klikleri $\{A_1,A_2,A_4\}$ ve $\{A_2,A_3,A_4\}$ dir.

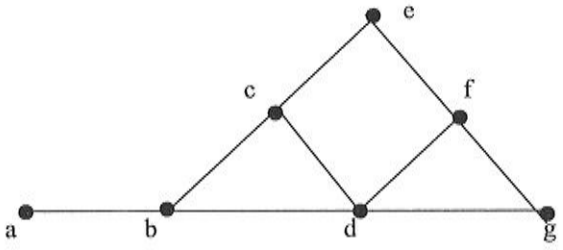


Şekil 5.1: Tam grafik ve tam olmayan grafik

Grafikte α, $\beta \in V$ olmak üzere, α'dan β'ya bir ok varsa α'ya β'nın ailesi, β'ya α'nın çocuğu denir. β'nın aile kümesi $pa(\beta)$, α'nın çocuklar kümesi $ch(\alpha)$ şeklinde gösterilebilir.

α ile β arasında bir çizgi varsa α ve β'ya bitişik ya da komşu denir. α köşesinin komşu kümesi $ne(\alpha)$ şeklinde gösterilebilir.

Örnek 5.2: Şekil 5.2de verilen grafiği dikkate alarak a) Her köşenin komşularını bulunuz.b) $A_1=\{a,b,c\}$ve $A_2=\{c,e,f\}$ olmak üzere $ne(A_1)$ ve $ne(A_2)$yi bulunuz. c) Grafiğin kliklerini bulunuz.



Şekil 5.2: 7 köşeli bir grafik

a) a köşesinin sadece b köşesi ile arasında çizgi olduğundan ne(a)=b'dir. Benzer şekilde ne(b)={a,c,d}, ne(c)={b,d,e}, ne(d)={c,f,g,b}, ne(e)={c,f}, ne(f)={d,e,g}, ne(g)={d,f} bulunur.

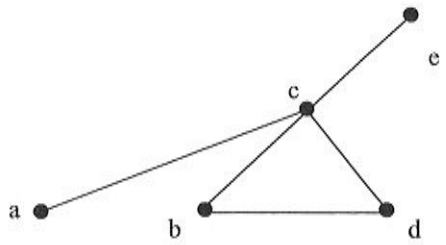
b) $ne(A_1)=ne(a)\cup ne(b)\cup ne(c)\setminus\{a,b,c\}=\{b\}\cup\{a,c,d\}\cup\{b,d,e\}\setminus\{a,b,c\}=\{d,e\}$ olarak elde edilir. Benzer şekilde $ne(A_2)=ne(c)\cup ne(e)\cup ne(f)\setminus\{c,e,f\}=\{b,d,e\}\cup\{c,f\}\cup\{d,e,g\}\setminus\{c,e,f\}=\{b,d,g\}$ dir.

c) Grafiğin klikleri ise {b,c,d},{d,f,g},{a,b},{c,e},{e,f} dir.

α'dan β'ya n adımlık yol, tüm i=1,2,3...n için (α_{i-1}, α_i) olacak şekilde farklı köşelerin $\alpha=\alpha_0, \alpha_1,..., \alpha_n=\beta$ dizisidir. α'dan β'ya yol varsa, $\alpha\mapsto\beta$ şeklinde yazılır. n uzunluğa sahip ve aynı yerde başlayıp biten yola n-devir denir($\alpha=\beta$). Devir ok içeriyorsa yön verilmiş devir denir.

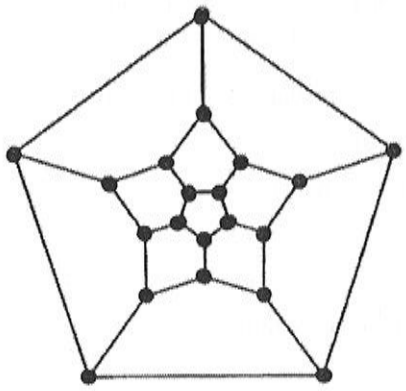
Bir grafikteki x köşesinin valansı, x'in komşu sayısıdır ve N(x) ile gösterilir. Bir grafiğin minimum ve maksimum valansı, tüm köşeler içindeki maksimum ve minimum valans sayısıdır.

Örnek 5.3: Şekil 5.3deki grafikte her köşenin valansları;N(a)=1, N(b)=2, N(c)=3, N(d)=2, N(e)=1; şeklindedir.



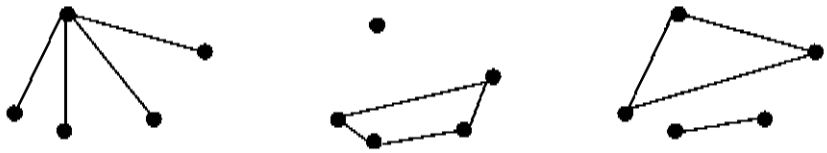
Şekil 5.3: 5 köşeli bir grafik

Bir grafikteki tüm köşelerin valansları eşit ise böyle bir grafiğe k valanslı düzenli grafik ya da k-düzenli grafik denir. 3- düzenli grafiğe kübik 4-düzenli grafiğe ise kuartik denir.



Şekil 5.4: 20 köşeli kübik grafik(dodecahedron)

Grafikler, çeşitli tasarımlar için basit kuruluşlar verir. Örneğin Γ, 5 köşesi olan bir grafik olsun. $\mathcal{B}$, ise aşağıda verildiği gibi alt grafiklerin bir kümesi olsun. E; kenarlar kümesi olmak üzere (E, $\mathcal{B}$), 3-(10,4,1) tasarımını verir.



Şekil 5.5: 3-tasarım

Tanım 5.1: $G_1=(V_1,E_1)$ ve $G_2=(V_2,E_2)$ iki grafik olsun. G_1'in G_2'ye izomorfik olması için V_1'den V_2'ye 1-1 bir f fonksiyonu olması gerekir. Öyle ki G_1den u ve v'nin komşu olması için gerek ve yeter koşul $f(u)$ ve $f(v)$'nin de G_2de komşu olmasıdır. Bir başka değişle;

$\{u,v\} \in E_1$ g.y.k. $\{f(u),f(v)\} \in E_2$

olması gerekir. F fonksiyonuna G_1'den G_2'ye izomorfizm denir.

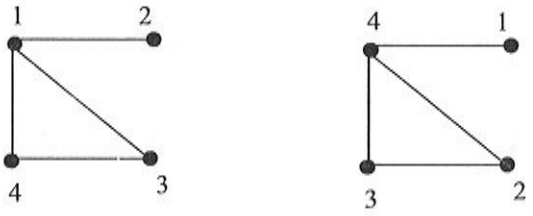
Örnek 5.4: Petersen Grafiği olarak adlandırılan G_1 grafiği şekil 5.4'de verilmiştir. G_1'e izomorfik olan G_2 grafiği ise Şekil 5.xx(b)de verilmiştir
$V(G_1)=\{1,2,..,10\}=V(G_2)$ olur ve $f(i)=i$ izomorfizmdir.

Tanım 5.2: $G=(V,E)$ köşe kimesi $V=\{1,2,\ldots,n\}$ olan bir grafik olsun. $n\times n$ boytlu komşuluk matrisi $A(G)=(a_{ij})$ aşaiğıdaki gibi tanımlanır.

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \{i,j\} \in E \\ 0 & d.h.\end{cases}$$

Örnek 5.5: aşağıdaki 2 komşuluk matrisine ait grafikler şekil 5.6'daki gibidir.

$$A(G_1)=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix} \qquad A(G_2)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$



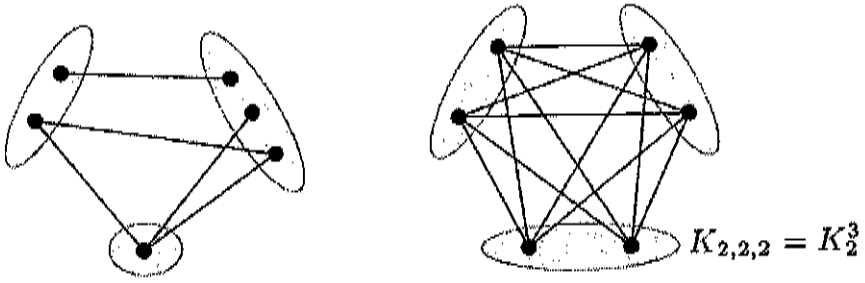
Şekil 5.6: 2 Komşuluk matrisine ait grafikler

İki grafik G_1 ve G_2'in izomorfik olması için gerek ve yeter koşul komşuluk matrislerinin bazı permütasyonlarla birbirlerine geçilebilmesidir. Diğer bir değişle $A(G_2)=PA(G_1)P^{-1}$ olmasıdır.

5.2 İki-Kısımlı(Bipartite) Grafik

r≥2 olan bir tamsayı olsun. G=(V,E) grafiği için, V r tane sınıfa ayrılıyor ve bu sınıflardaki köşelerin kendi içlerinde birbirlerine komşu değillerse, böyle bir grafiğe r-kısımlı grafik denir. Eğer r=2 ise böyle bir grafiğe 2-kısımlı grafik denir. Bir r-kısımlı grafikte farklı sınıflardaki tüm köşeler komşu ise r-kısımlı grafiğe tam denir. n_i r-kısımlı tam grafikte i.nci sınıftaki köşe sayısı olsun. Böyle bir grafik $K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}$ şeklinde ifade edilir. Eğer $n_1=n_2=\ldots=n_r=s$ ise bu gösterim K_s^r şeklinde olur. Böylece K_s^r tam r-kısımlı ve her kısımda s köşe olan bir grafiği gösterir.

Örnek 5.6: Şekil 5.7(a) tam olmayan 3-kısımlı grafiği, şekil 5.7(b) ise tam 3-kısımlı grafiği gösterir.

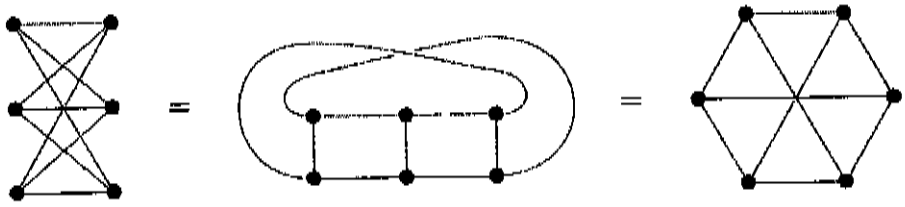


(a) (b)

Şekil 5.7: 3-kısımlı grafik

(K_2^3 grafiği aynı zamanda 'octahedron' olarak da bilinir.)

Örnek 5.7: Şekil 5.5, 2-kısımlı $K_3^2 = K_{3,3}$ grafiğin üç farklı gösterimi verilmiştir.



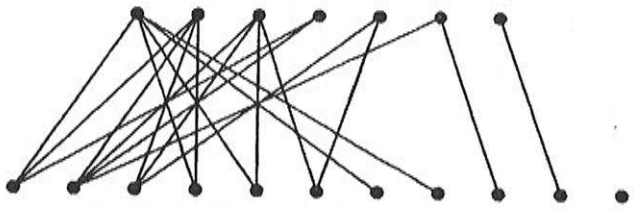
Şekil. 5.8: $K_3^2 = K_{3,3}$ grafiğin üç farklı çizimi

Bir 2-kısımlı grafiğin var olması aşağıdaki teoremle verilir.

Teorem 5.1(Diestel,2000).: Bir grafiğin 2-kısımlı olması için gerek ve yeter koşul tek sayılı devir içermemesidir.

$K_{1,n}$ grafiği yıldız olarak adlandırılır.

X tam iki-kısımlı grafik $K_{7,11}$'in kenar kümesi olsun ve B, şekil 2.4'deki grafiğe izomorfik olan X'in altkümelerinin bir kümesi olsun.(X,B) bazı λ değerleri için bir 3-(77, 20, λ) tasarımıdır.



Şekil 5.9: Bir 3-tasarım

G bir grafik olsun. G'nin iki-kısımlı olması için gerek ve yeter koşul tek sayıda uzunluklu hiçbir devir içermemesidir.

5.3 Doğru Grafiği(Line Graph)

Bir D tasarımının H(D) grafiği 2-kısımlı grafiktir ve şöyle tanımlanır. Her bir işlem için bir köşe ve her bir blok için bir köşe alınır. İki köşenin birleştirilmiş olması için gerek ve yeter koşul birinin işlem ve diğerinin işlemi ihtiva eden bir blok olmasıdır. D tasarımının L(D) doğru grafiği, H(D)nin kenarları olan köşelerin bir grafiğidir. L(D)'in iki köşesinin komşu olması için gerek ve yeter koşul H(D)'nin karşılık gelen kenarların bir ortak köşeye sahip olmasıdır.

x köşesini bulunduran s mertebeli bir pençe(claw) s tane diğer $y_1,y_2,\ldots,y_s$ köşesine birleştirilmiştir. Burada iki y, komşu değildir. x , pençenin köşesi olarak adlandırılır.

Teorem 5.2(Rao ve Rao,1969): *$rv=bk$, $v-1=r(k-1)$* ve $r>k\geq 2$ olsun. *$v,b,r,k,\lambda(\lambda=1)$* parameterleli BIBDin doğru grafiği(G) aşağıdaki koşulları sağlar.

1) G'de köşelerin sayısı rv kadardır.
2) G, $(r+k-2)$ dereceli düzenlidir.
3) $\Delta(x,y)$ x ve y'in her ikisiyle birleşen köşelerin sayısı olmak üzere herhangi (x,y) kenarı için $\Delta(x,y)$, (r-2) yada (k-2) değerini alır.
4) Eğer x ve y'nin farkı 2 ise $\Delta(x,y)=1$dir.

Ayrıca $r-2k+1<0$ dir. Eğer $|K|\geq k$ ise K kliği majör olarak adlandırılır. Bir maksimal majör klik grand klik olarak bilinir.

Teorem 5.2de r=k+1 alındığında sonlu Afin düzlemin doğru grafiğinin bir karaterizasyonunu verir. Diğer karakterizasyonlar, Hoffman ve Chaudjuri (1965), tarafından 1.birliktelik matrisinin özdeğerlerinin kullanarak gösterilmiştir.

Eğer bir DTBT $k=2$ ve $\lambda=1$ parametrelerine sahipse, bu durumda $r=v-1$ ve $b=\frac{(v-1)v}{2}$ olduğu kolayca hesaplanır. Tasarımın blokları noktaların bütün mümkün çiftleridir anlamına gelir. Örneğin blokların seti X'in bütün ikili alt setlerinin setidir. Tasarım noktalarının tepeler olduğunu, bloklarının da kenar olduğu kabul edilirse, bu parametrelerdeki bir tasarım v tepeleri üzerinde tamamlanmış graf 'tır.

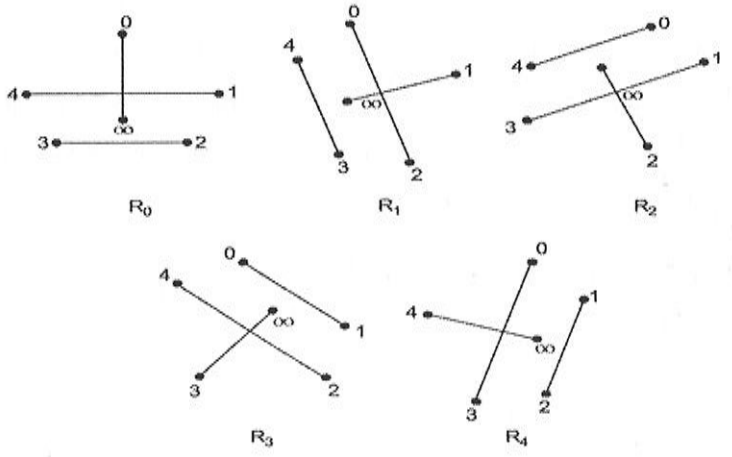
Teorem 5.3(Stinson, 2004): Her n pozitif tamsayı için $(2n, n(2n-1), 2n-1, 2, 1)-$ parametreleri ile DTBT yeniden çözülebilirdir.

2n tepeler yada noktalar seçilsin ve bir kenar her biri ile ayrı noktaların her $\binom{2n}{2}=n(2n-1)$ çiftleri birleşsin. (Bu yapı 2n tepeleri üzerinde tamamlanmış graf K_{2n} dir). Bu kenarların her biri tasarımda bir bloğa tekabül eder. Teorem 5.3 K_{2n}'de

kenarlar, her set her bir tepe ile tesadüfi bir kenarı tamamen içerir iken 2n-1 setleri içine parçalanabilir.

Teorem 5.3'in yapısını tanımlamak için bir tepe seçilir ve ∞ olarak sınıflandırılır ve onun etrafında dairesel olarak $0,1,2,\ldots 2n-2$ tepeleri saat yönünde düzenlenir. Her bir çözümleme sınıfı (yada bir-etken) $\left(360/_{2n-1}\right)^{\circ}$ boyunca bir önceki döndürülerek bulunur.

Örnek 5.8 n=3 için $(2n, n(2n-1), 2n-1, 2, 1)-$DTBT şekilde gösterildiği gibi (6,15,5,2,1)-DTBT dır.



Şekil 5.10: (6,15,5,2,1)-DTBT örneği

5.4: İki-Grafik

Bir iki-grafik X kümesinin 3-altkümelerinin bir B koleksiyonudur. Burada, X'in her 4-altkümesi Y için, B'nın elemanlarının çift sayıdası Y'ye aittir.

Bir iki-grafik düzenli olması için bir 2-(n,3,λ) tasarım olması gerekir. Tam iki-grafik (burada B tüm 3-altkümeleri içerir.) ve boş iki-grafik(B boş iken) düzenlidir. Bu grafiklere trivial iki-grafik denir.

Tasarım terminolojisinde her grafik izole bir nokta eklenerek bir iki-grafiğe genişletebilir.

5.5 Güçlü Düzenli Grafik (GDG)

Güzlü düzenli grafikler, Bose(1963) tarafından ortaya konmuştur.

Tanım 5.3: G=(P,U), n köşe üzerinde r dereceli düzenli bir grafik olsun ve verilen iki,p,q köşesine bitişik köşe sayısının sadece p ve q'nun bitişik olup olmamasına bağlı olduğu varsayılsın. Herhangi iki bitişik köşe λ ortak komşuya sahip olurken herhangi iki bitişik olmayan köşe μ ortak komşuya sahip olursa, G'nin n,k,λ,,μ parametreli bir "güçlü düzenli grafik" (strongly regular graph) olduğu söylenir ve GDG-(n,k,λ,μ) şeklinde gösterilir

Yardımcı Teorem 5.4(Beth ve Diğerleri., 1999) : Bir GDG'nin parametreleri arasında şu eşitlik vardır:

$$k\,(k-\lambda-1) = (n-k-1)\mu$$

G^*, tümleyen grafiği [$G^*=P$, $\binom{\nu}{2} \setminus U$] aynı zamanda GDG dir ve parametreleri şöyledir:

n, $k^*=n-k-1$, $\lambda^*= n-2k-\mu-2$ ve $\mu^*=n-2k+\lambda$.

Tanım 5.4: Simetrik bir D=(P, B) isabet yapısının kutupsal'ı (polarity) aşağıdaki koşulu sağlayan bir π: P⟶ B , 1-1 örten fonksiyondur.

$xIy^{\pi} \Leftrightarrow yIx^{\pi}$, bütün $x,y \in P$ için
D'nin kutupsal'ı bir G grafiğini oluşturmada kullanılabilir(Beth ve Diğerleri., 1999).

P köşe kümesine sahip bu G grafiğinde iki farklı x ve y noktası, x'in y^{π} üzerinde olması gerek ve yeter koşulu altında bitişiktir. D, sabit bir blok genişliğine sahip olsa bile x'in derecesi, x'in x^{π} üzerinde olup olmamasına bağlı olduğundan G, genelde düzenli olmaz. Bu tür özelliğe sahip noktalar "mutlak (absolute) noktalar" olarak adlandırılır.

Teorem 5.5(Beth ve Diğerleri., 1999): Mutlak noktalar dışında bir π kutupsal'ını kabul eden simetrik bir 2-(ν,k,λ) tasarımının mevcut olması için gerek ve yeter koşul (ν,k,λ,λ) parametreli bir GDG olmasıdır.

(ν,k,λ,λ) parametreli GDG " tasarım grafiği" (design graph) olarak adlandırılır. Bu grafiğin mevcut olması için $\nu \leq \lambda^2(\lambda+2)$ koşulu gereklidir.

Teorem 5.6(Beth ve Diğerleri., 1999): Bütün noktaları mutlak olan bir π kutupsal'ını kabul eden simetrik bir 2-(ν,k,λ) tasarımının mevcut olması için gerek ve yeter koşul $(\nu,k-1,\lambda-2,\lambda)$ parametreli bir GDG olmasıdır.

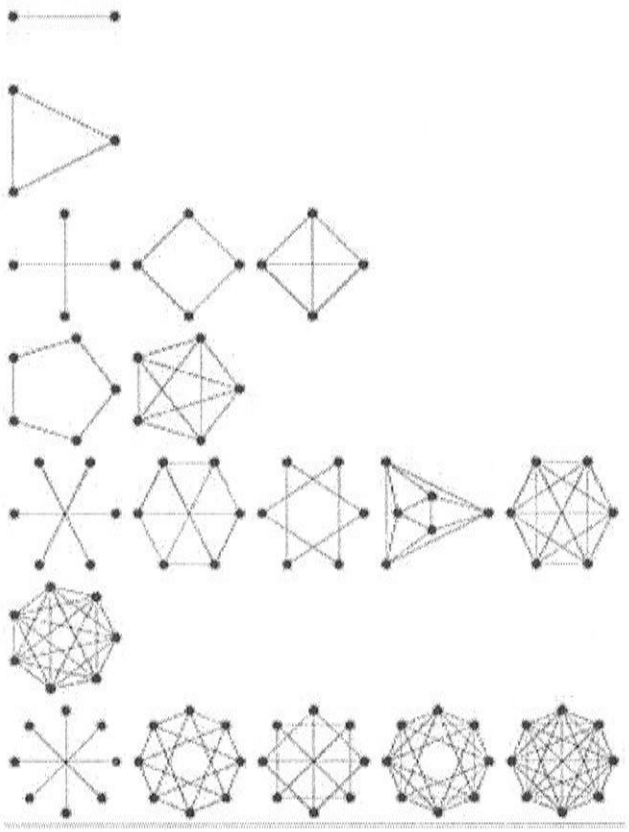
ν köşeleri üzerindeki bir k- düzenli basit G grafiği, köşelerin tüm bitişik çiftlerinin ortak λ komşuluklarına sahip olduğu, ve bitişik olmayan her çiftin ortak μ komşuluklarında (common neighbors), her köşeninde k komşuluklarına sahip olduğu, k,λ,μ pozitif tamsayılar mevcut olduğunda bir güçlü k-düzenli grafiktir.

$\lambda=0$ ve $\mu=2$ olan üç tane güçlü düzenli grafik vardır, bunlar;

a) (4,2,0,2) parametreli CP(2)
b) (16,5,0,2) parametreli Clebsch grafiği
c) (56,10,0,2) paramereli Gewirtz grafiği

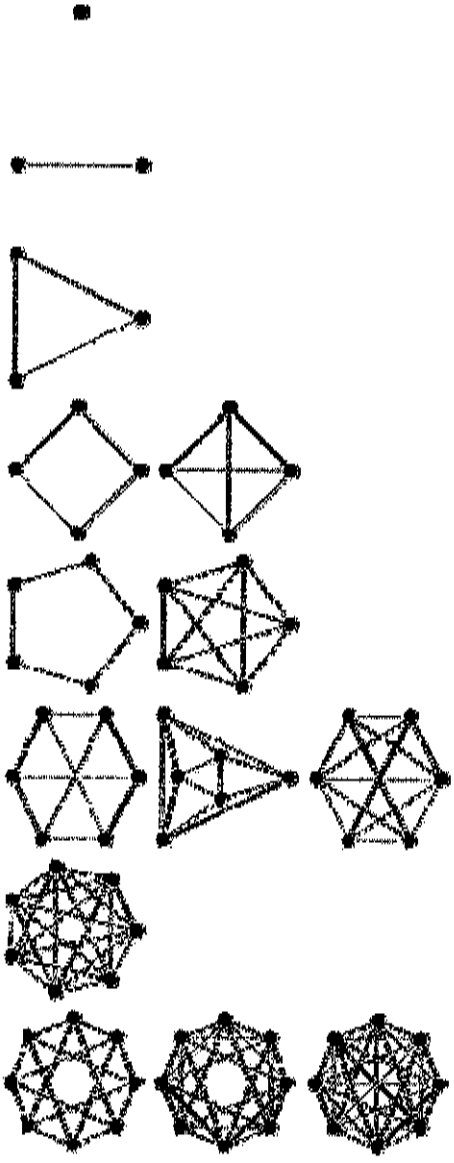
Tüm bu grafikler parametreleri ile belirlenmiş yegâne grafiklerdir. Bunların 2-(4,3,2), 2-(16,6,2) ve 2-(56,11,2) tasarımlarla ilişkisi vardır.

Γ, ($6u$-3, $2u$, 1, u) parametreli GDG olsun. u=2, 3 veya 5 için tek bir tane grafik vardır. GDG'nin parametreleri bağımsız değildir ve parametreler arasında $k(k-\lambda-1)=(n-k-1)\mu$ ilişkisi vardır. GDG'nin komplementi yine GDG'dir.



Şekil 5.11: Bazı güçlü düzenli grafikler

$v=1,2,\ldots$ düğümleri üzerindeki güçlü düzenli grafiklerin sayısı 1,2,2,4,3,6,2,6,5,... , olarak şekil 5.11'de verilmiştir.



Şekil 5.12: Birbirleriyle bağlantılı güçlü düzenli grafikler

Benzer olarak, v=1,2,... düğümleri üzerinde güçlü düzenli grafikle bağlantılı olanların sayısı, 1,1,1,2,2,3,1,3,3,.... şeklindedir. Bunların grafikleri şekil 5.12de verilmiştir. Tamamlanmış grafik K_n, tüm n≥1 için güçlü düzenlidir. Güçlü düzenli grafiklerle bağlantılı olan grafikler Çizelge 5.1 verilmiştir.

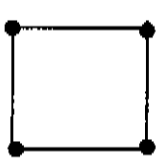
(v, k, λ, μ)	Grafik Türü	(v, k, λ, μ)	Grafik Türü
(1, 0, 0, 0)	tekil grafik	(7, 6, 5, 0)	Tam grafik K_7
(2, 1, 0, 0)	Yol grafiği P_2	(8, 4, 0, 4)	döngü grafiği C_8 (1, 3)
(3, 2, 1, 0)	Tam grafik K_3	(8, 6, 4, 6)	döngü grafiği C_8 (1, 2, 3)
(4, 2, 0, 2)	devir grafiği C_4	(8, 7, 6, 0)	Tam grafik K_8
(4, 3, 2, 0)	Tam gafik K_4	(9, 6, 3, 6)	döngü grafiği C_9 (1, 2, 3)
(5, 2, 0, 1)	devir grafiği C_5	(9, 8, 7, 0)	Tam grafik K_9
(5, 4, 3, 0)	Tam grafik K_5	(10, 3, 0, 1)	Petersen grafiği P
(6, 3, 0, 3)	döngü grafiği C_6 (1, 3)	(16, 5, 0, 2)	Clebsch grafiği
(6, 4, 2, 4)	octahedral grafiği	(50, 7, 0, 1)	Hoffman-Singleton grafiği
(6, 5, 4, 0)	Tam grafik K_6	(56, 10, 0, 2)	Gewirtz grafiği
		(100, 22, 0, 6)	Higman-Sims grafiği

Çizelge 5.1: Güçlü düzenli grafiklerle bağlantılı olan grafikler ve parametreleri

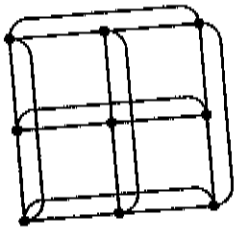
λ=μ olduğunda güçlü düzenli grafikler, simetrik dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarına uymaktadır.

$L_2(m)$ kare Latis grafik s×s köşe kümesine sahiptir. Burada s, m kardinalitesinin bir kümesidir. İki farklı köşenin komşu olması için gerek ve yeter koşul bir kordinatta uyumlu olmalarıdır. $L_2(m)$, aşağıdaki parametrelere sahip GDG'dir.

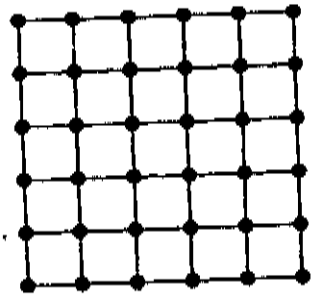
$n = m^2,\ k = 2(m-1),\ \lambda = m-2,\ \mu = 2$



$L_2(2)$



$L_2(3)$



$L_2(6)$

Şekil 5.13: Bazı karo Latis grafikler

Yardımcı Teorem 5.7(Beth ve Diğerleri., 1999): (a) Γ grafiği, hiçbir kesin noktayla kare tasarımın polaritesi ile ilişkili olması için gerek ve yeter koşul $\mu=\lambda$ olan bir güçlü düzenli grafik olmasıdır.

(b) Γ grafiği, her noktayla kare tasarımın polaritesi ile ilişkili olması için gerek ve yeter koşul $\mu=\lambda+1$olan bir güçlü düzenli grafik olmasıdır.

A, (n,k,λ,μ) parametreli Γ güçlü düzenli grafiğinin komşuluk matrisi olsun. Bu durumda;

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A)$$

Olacaktır. Γ düzenli olduğundan,

$$AJ = JA = kJ$$

olacaktır. A ile J geçişli matrislerdir. Tüm elemanları 1 olan vektör *j*, A ve J'nin özvektörleri iken n ve k sırasıyla A ve J'nin özdeğerleridir.

(v,k,λ, λ) parametreli bir GDG tasarım grafiği olarak adlandırılır böyle bir grafiğin var olası için

$$v \leq \lambda^2(\lambda + 2)$$

sağlanması gerekir

5.5.1 Gewirtz Grafiği

Gewirtz(1969) tarafından bulunan Gewirtz grafiğinin parametreleri tek olarak belirlenir.

Tanım 5.5: Grafikte, köşelerin komşuluk ilişkilerini gösteren komşuluk matrisinin (adjacency matrix) öz değerlerine grafik öz değerleri denir. Komşuluk matrisinde iki kenar komşu ise o hücreye gelen eleman 1'dir, diğerleri 0 'dır.

Tanım 5.6: Grafik öz değerlerinin oluşturduğu, kümeye grafik spektrum adı verilir.

Tanım 5.7: Grafik spektrumu tamsayılardan oluşan grafiklere integral grafik adı verilir.

Gewirtz grafiği grafik spektrumu, $10^1 2^{35}(-4)^{20}$ olan ve 56 köşesi olan integral grafiktir. Parametreleri (v=56, k=10, λ=0, μ=2) olan güçlü düzenli grafiktir.

Bu grafik yine GDG'nin özelliğinden 2-(26,11,2) tasarımını vermektedir. Bu tasarım $\lambda=2$ olduğundan ikidüzlem(biplane) olarak adlandırılır.

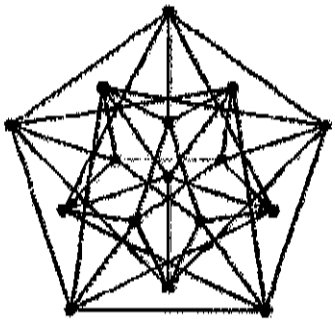
Gewirtz grafiklerin kuruluşundaki bir diğer yöntem PG(2,4) ovallerin 3 sınıfından birini köşelerin bir kümesi olarak kullanır

5.5.2 Clebsch Grafik

Tanım 5.8: Köşelerin tüm yerel dereceleri (köşenin ilişkili olduğu değer sayısı) aynı sayıya eşitse o grafik düzenli (regular) grafik olarak adlandırılır. Quintic grafik 5-regular grafiktir.

Clebsch grafik, grafik spektrumu $(-3)^5 1^{10} 5^1$ olan integral grafiktir. Clebsch grafik 16 köşeli ve 40 kenarlı parametreleri $(v,k,\lambda,\mu)=(16,5,0,2)$ olan güçlü düzenli grafiktir.

{ 1,2,3,4,5} kümesinden elde edilen Clebsch grafik aşağıdaki gibidir.



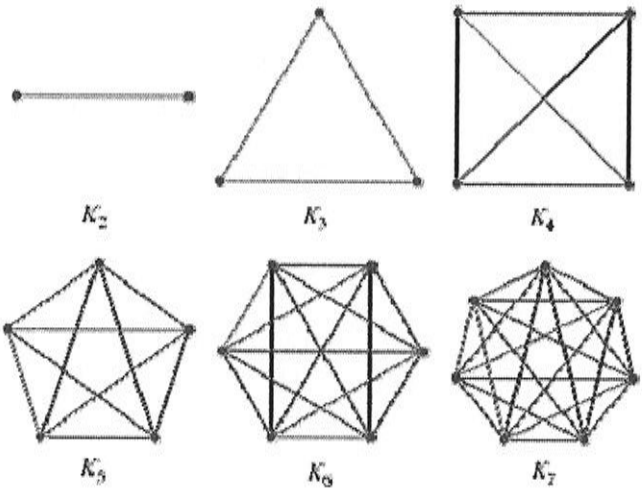
Şekil 5.14: Clebsch Grafiği

Bu grafiğe 2-(16,6,2) karşılık gelir. Bu grafik Gewrirz grafiği gibi tektir. Ayrıca bu grafiğin köşelerinin komşu olmayanın bir kümesi Petersen grafiğine karşılık gelir.

5.5.3 Tam Grafik

Her köşe çifti bir kenarla bağlantılı (bağlanmış) olan grafiğe tam grafik adı verilir. n köşeye sahip tam grafik K_n ile gösterilir ve $\binom{n}{k}$ binomial katsayı olmak üzere,

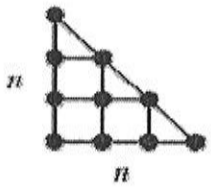
$\binom{n}{2}=n(n-1)/2$ (triangular numbers) tane yön verilmemiş kenara sahiptir. [4]



Şekil 5.15: 2,3,…,7 köşeli olan tam grafikler

5.5.4 Üçgensel (Triangular) Grafik

Bir kenar üzerinde n tane noktası bulunan bir üçgensel grafik (triangular graph) T(n) ile gösterilir. Buna bir örnek şekil 5.16'da verilmiştir.



Şekil 5.16: Üçgensel grafik

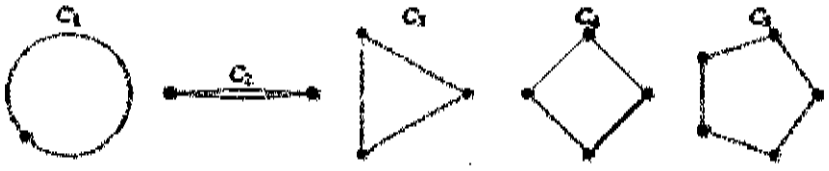
Bir 2-(v,k,1) tasarımında(bu projektif düzlem değildir) iki blok 0 yada 1 noktada kesişir. Tasarımın doğru grafiğinin köşeleri bloklardır. Bloklar bir noktada kesiştiği zaman iki köşe komşu kabul edilir. Bu üçgensel grafik T(n)e genelleştirilir(k=2, v=n). 2 tasarımın λ=1 için doğru grafiği Bose(1963) tarafından çalışılmıştır.

b>v olan 2-(v,k,1) tasarımının doğru grafiği güçlü düzenlidir. Ayrıca yarı simetrik 2-tasarımının blok grafiği güçlü düzenlidir.

Üçgensel grafik bir güçlü ayrıştırılabilir grafiktir. Verilen parametreleri göre üçgensel grafik tektir. Bu da Hall-Connor teoreminin ispatında oldukça faydalıdır. Üçgensel grafiğin tekliği Connor(1958), Shrikhande(1959), Chang(1959) ve Hoffman(1960) tarafından gösterilmiştir.

5.5.5 Devir Grafiği

Bir Devir grafiği, tüm noktalar boyunca, tek bir devri kapsayan n noktaya sahip bir grafiktir.



Şekil 5.17: Devir grafikler

5.5.6 Ladder Grafik

n.K_2 Ladder grafik olarak adlandırılır. n burada tam grafik (her nokta birbiri ile ve bir doğru ile birleşmiştir) sayısıdır. Başka bir deyişle K_n n tane tam grafiğin birleşiminden

oluşmuştur. Burada K_2 iki noktalı bir tam grafiği temsil eder. Bu grafik bir merdivene benzediği için bu adı almıştır.

Devir n grafiklerin K_2 ile grafik kartezyen çarpımından ($L_n=K_2 \times C_n$) elde edilir.

$L_3=K_2 \times C_3$ Ladder grafik aşağıdaki gibidir ve c_1,c_2,c_3,C_3 devir grafikteki noktalar olmak üzere L_3 Ladder grafik $(u_1,c_1)(u_2,c_1),(u_1,c_2),(u_2,c_2),(u_1,c_3),(u_2,c_3)$ noktalarının tam grafiğinden oluşacaktır.

C_3 devir grafik şekil 5.14(a)'deki gibi ve bu devir grafik ve K_2 tam grafiğinden oluşan Ladder grafik şekil 5.14(b)'deki gibidir.



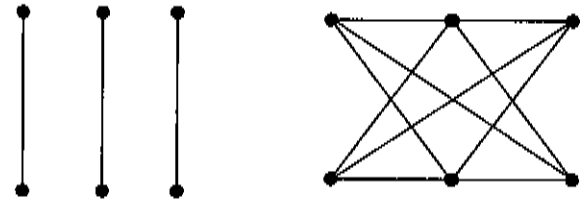
(a) **(b)**

Şekil 5.18: Devir Grafiği ve Ladder Grafiği

5.5.7 Kokteyl Parti Grafiği

Kokteyl parti grafiği , Ladder grafiğin tamamlayıcısıdır. Bu durumda Ladder grafikte birleşen noktalar Kokteyl parti grafikte birleşmeyecektir. Buradan yukarıda gösterilen Ladder grafiklerin tamamlayıcısı olan Kokteyl parti grafikleri aşağıdaki gibidir. Kısaca CP(n) ile gösterilir.

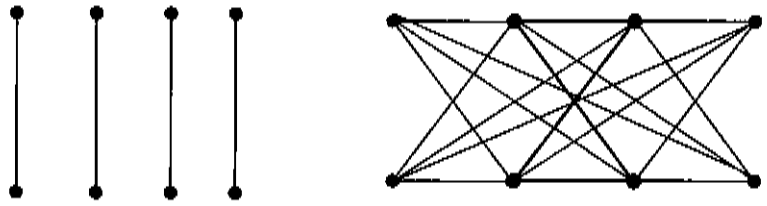
n=3 için aşağıda şekil 5.19(a)'de Ladder grafik (L_3) ve şekil 5.19(b)'da ise bunun tamamlayıcısı olan CP(3) grafik gösterilmiştir.



(a) (b)

Şekil 5.19: L_3 ve CP(3) grafikleri

n=4 için aşağıda şekil 5.20(a)'de Ladder grafik (L_5) ve şekil 5.20(b)'de ise bunun tamamlayıcısı olan CP(4) grafik gösterilmiştir.



(a) (b)

Şekil 5.20: L_5 ve CP(5) grafikleri

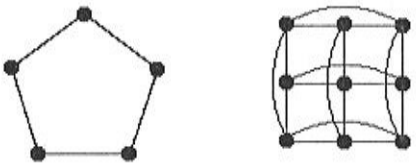
5.5.8 Paley Grafik

q elemana sahip verilen sonlu bir F cismi, farklarının cisim içinde bir kare oluşturduğu, iki köşenin birleştirildiği, F cismine ait köşe setlerine sahip bir grafiktir. $q=1 \pmod 4$ olduğunda bu grafik yön verilmemiş bir grafik olmaktadır.

$q=4t+1$ olduğunda, parametreler, $v=4t+1$, $k=2t$, $\lambda=t-1$, $\mu=t$ olur.

$n=q,\ k=\frac{1}{2}(q-1),\ \lambda=\frac{1}{4}(q-5),\ \mu=\frac{1}{4}(q-1)$ parametreli GDG, komplementine izomorfiktir. Paley grafiğinin komşuluk matrisi, Paley matrisinde -1'in 0 ile yer değiştirmesi ile elde edilir.

q=5 ve q=9 için grafik aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.21: q=5,9 iken Paley grafiği

Bu grafikte iki köşenin komşu olması için gerek ve yeter koşul farklarının sıfır olmayan kare olmasıdır.

D; Γ blok grafiği ile bir yarı simetrik 2-tasarım olsun. Bu taktirde grafikler üzerinde aşağıdaki sonuçlar vardır.

a) Γ bir ladder grafik değildir.
b) Eğer Γ bir kokteyl parti grafiği ise D, Hadamard 3-tasarımıdır.
c) Γ bir $L_2(n)$ kare latis grafik değildir.

Ayrıca, b=2v-2 olan bir yarı-simetrik tasarım, ya Hadamard tasarımdır yada 2-(6,3,2) tasarımıdır.

5.6 Moore grafiği

Bir Γ bağlantılı grafiğinin çapı, Γ'deki iki köşe arasındaki en büyük uzaklıktır; Γ 'nin çevresi (girth) Γ'deki en kısa devirdeki köşelerin sayısıdır.

Buna göre;

Γ, valansı $k>1$ çağı d, çevresi g ve köşe sayısı n olan bir düzenli grafik olsun. Ayrıca

$$f(k,d)=1+k+k(k-1)+\cdots k(k-1)^{d-1}$$

olsun. Aşağıdaki üç koşul sağlanıyorsa böyle bir grafiğe Moore grafik denir.

(i) $g \le 2d+1$;

(ii) $n \ge f(k,d)$

(iii) $n \le f\left(k,\left\lfloor \frac{1}{2}(g-1)\right\rfloor\right)$

$k=2$ ve $k=3$ için yegane örnekler surasıyla Pentagon ve *Petersen* grafikleridir. Moore grafiğinde valans 7 iken bu grafiğe Hoffman-Singleton grafiği denir. Moore grafiği varlığı valansı 57 iken belirsizdir. Bannai ve Ito(1973) ve Damarell(1973) d>2 iken sadece Moore grafiği 2d+1 uzunluklu devirdir(valans 2 iken).

Γ özdeğerleri 1, m-1,m çarpanlarına sahip n=2m köşeli güçlü düzenli grafik olsun. Bu taktirde;

a) Γ yada bir bileşeni ladder grafiğidir.
b) Γ yada bir bileşeni $n=4s^2+4s+2$, $k=s(2s+1)$, $\lambda=s^2-1$, $\mu=s^2$ parametrelerine sahiptir, burada s pozitif ve tam sayıdır.

Yukarıda verilen b'de s=1 alınırda petersen grafiği olur. Bununla birlikte, bu koşullara ilişkin örnekler ailesi vardır. Delsarte ve Goethals(1975) ile Turyn(1974)e göre 2s+1 asal kuvveti olduğunda bu örnekler vardır.

5.7 Net

N, noktalar ve doğrulardan oluşan bir sistem olsun. Bu sistem üzerinde şu özellikler vardır.

1. N sisteminin her bir noktası s farklı doğru üzerindedir.
2. N, $s \times n$ tane farklı doğruya sahiptir, n doğrunun her birinin oluşturduğu s tane paralel sınıf vardır. Aynı paralel sınıftaki farklı doğrular ortak noktaya sahip değildir. Farklı sınıftaki iki doğru bir ortak noktaya sahiptir.
3. Sistemin n^2 farklı noktası vardır.

Bu koşulları sağlayan N sistemi s dereceli n. mertebeden bir net olarak tanımlanır, $n = 1$ ise trivial net, s = 1 ise dejenere net adını alır. $d = k - r + 1$ pozitif tamsayı olmak üzere deficiency olarak adlandırılmaktadır, $d = 0$ ise net n. mertebeden Afin düzlem tanımlar. $d = 0$ olduğunda N netinin S alt seti vardır. Bu sette N 'de birleşmeyen fakat S'de birleşen nokta çiftleri bulunur. Böyle S setine N netinin kısmi transversali denir.

Her sonlu N netinde aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$s + d = n + 1,\ n_1 = s(n-1),\ P_{11}^1 = n - 2 + (s-1)(s-2)$$
$$P_{12}^1 = P_{21}^1 = (s-1)d,\ P_{22}^1 = d(d-1),\ P_{22}^2 = n - 2 + (d-1)(d-2)$$
$$P_{21}^2 = P_{12}^2 = (d-1)s,\ P_{11}^2 = s(s-1)$$

5.8 Grafik Ayrıştırmaları ve Tasarımları

Bir G grafiğinde E yığını içinde, bir kenarın çoğu zaman ortaya çıkmasına izin verilir. Böyle kenarlara çoklu-kenar denir.

Eğer G'ye ait V ve E'nin ikisi birden sonlu ise, G grafiği sonlu bir grafiktir. Aksi takdirde G sonlu olmayan (sınırsız) bir grafiktir. Eğer E, 2-elemanlı olmayan altsetleri kapsıyorsa, bu durumda G bir hiper grafiktir (hypergraph). Eğer E'deki tüm kenarlar k genişliğinde ise, bu durumda grafik k-düzgün hiper grafiktir (k-uniform hypergraph).

Eğer G'ye ait kenar seti, E, her alt setin H içinde bir grafik oluşturduğu, alt setler içine bölünebiliyorsa, bir G grafiğinin, H'daki grafikler içerisinde ayrıştırıldığı söylenebilir. Eğer H={H} ise, bu durumda G'nin H|G ile gösterilen bir H ayrıştırmasına sahip olduğunu söylenebilir.

K_v'ye ait bir H ayrıştırması v. mertebeden bir H tasarımı olarak bilinmektedir. Basit bir grafik çok-kenarlı(multi-edges) olmaksızın, bir 2-düzgün hiper grafiktir. (2-uniform hypergrafik)

çoklu-grafik (multi-graph) 2-düzgün hiper grafiktir. K_v ile gösterilen, v köşeleri üzerinde tamamlanmış bir basit grafik, E'nin V'ye ait tüm 2- elemanlı alt setlerini içerdiği, (V,E) grafiğidir. Dolayısıyla K_v, v(v-1)/2 kenara sahiptir.
λK_v 'yi, λ katlılığı ile birlikte, tamamlanmış çoklu-grafiği göstermek üzere kullanılacaktır.(her kenar λ kez ortaya çıkar.)

v. mertebeden Steiner üçlü sistem, STS(*v*)'nin varlığı, K_v'ye ait, K_3-ayrıştırmasının varlığına denktir.(K_v ayrıştırması, üçgenler içerisindedir) 2-(v,k,λ) tasarımının varlığı, λK_v'ye ait bir K_k-ayrıştırmasını bularak elde edilebilir.

Örnek 5.9: $2K_4$, (1,2,3),(1,2,4),(1,3,4) ve (2,3,4) olmak üzere 4 üçgen içerisinde ayrıştırılabilir. Böylece 2-(4,3,2) tasarımı vardır ve blokları {1,2,3},{1,2,4},{1,3,4} ve {2,3,4}'dür.

5.9 Grafiksel Tasarımlar

Tanım 5.9(t-wise Dengeli tasarımlar): t-(v,K,λ) tipindeki bir t-wise dengeli tasarım (tBD), X'in noktalara ait v elemanlarının bir seti olduğu ve B'nin her bloğa ait büyüklüğün K seti içinde yer aldığı ve X'e ait her t-eleman alt setinin tam olarak λ blokları içerisinde kapsandığı, özellikle birlikte X (bloklar)'e ait alt setlerin bir yığını olduğu bir (X,B) çiftidir.

5.9.1 İkişerli dengeli tasarımlar

Eğer λK_v, K seti içerisindeki diziye ait tamamlamış alt grafikler içerisinde ayrıştırılabiliyorsa, bu durumda bir 2-(v,K,λ) tasarımı ve (v,K,λ) ikişerli dengeli tasarım olarak bilinen tasarım elde edilir.

Eğer K kurallara göre t ve v arasındaki pozitif tamsayıların bir seti ise, bu durumda tBD uygundur. Eğer B , bazı k için , X'e ait tüm k-altsetlerini kapsıyorsa, bu durumda (X,B) bir (trivial) tasarımdır.

Tanım 5.10: Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa t-(v,K,λ) tBD (X,A) grafikseldir.

1. X, tamamlanmış grafik K_n'in $v={}_nC_2$ kenarlarının bir seti olduğunda,
2. A, yaklaşık bir izmorfizme sahip olan grafiklerin bir koleksiyonu olduğunda : yani $A \in A$ ve σ, K_n' e ait bir otomorfizm olmak üzere, $\sigma(A) \in A$ olması.

Bir grafiksel t-$({}_nC_2,K,\lambda)$ tasarımı , bir otomorfizm grubunda olduğu gibi simetrik grup S_n sahiptir.

Yalnızca basit grafiksel t-(10,k,λ) tasarımına ait parametreler $t \geq 2$ iken$(10={}_5C_2)$ (t,k,λ)=(2,3,4), (2,4,2), (2,4,4), (2,4,8), (2,4,10), (2,4,12), (2,5,16), (2,5,20), (3,4,1), (3,5,6) şeklindedir.

(t,k,λ)							
(2,3,1)	(2,4,6)	(2,4,24)	(2,4,30)	(2,4,36)	(2,7,3)	(2,7,24)	(2,7,27,)
(2,7,30)	(2,7,33)	(2,7,36)	(2,7,39)	(3,5,30)	(3,6,100)	(3,7,60)	(3,7,75)
(3,7,90)	(3,7,135)	(3,7,150)	(3,7,165)	(3,7,180)	(3,7,225)	(3,7,240)	(4,7,60)

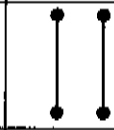
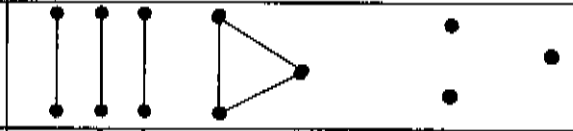
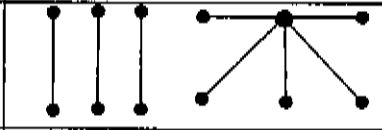
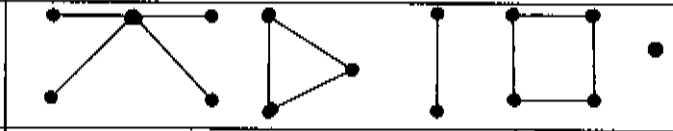
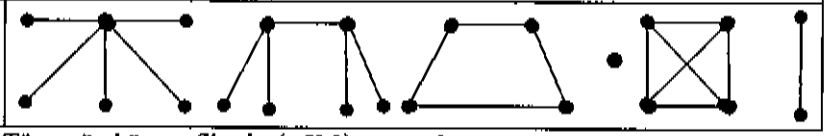
(2,5,λ): $16 \le \lambda \le 142$, $\lambda \equiv 0,2,4,6 \pmod{10}$ $\lambda \neq 20,50$

(2,6,λ): $10 \le \lambda \le 355$, $\lambda \equiv 0,10 \pmod{15}$

(2,7,λ): $48 \le \lambda \le 642$, $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$

Çizelge 5.2 : $t \ge 2$ iken, basit grafiksel t-(15,k,λ) tasarımına ait parametreler

Örnek 5.10: Tüm mümkün grafiksel t-(v,K,1) tasarımları Çizelge 5.3'deki gibidir.

(t,v,k)	Grafik Gösterimi
(1,6,2)	
(2,15,3)	
(2,15,{3,5})	
(3,10,4)	
(4,5,{5,7})	

Çizelge 5.3: Tüm mümkün grafiksel t-(v,K,1) tasarımları

Örnek 5.10'de t-(v,K,1) tasarımları verilmiştir. t>1 olduğu sadece basit grafiksel t-(v,K,2) tasarımları aşağıdaki parametrelere sahiptir. 2-(6,{3,4},2),2-(10,{3,4},2),2-(10,4,2),2-(15,{3,6},2) ,2-(15,{5,6},2) ve 3-(10,{4,5,6},2).[2]

5.10 Bigrafiksel Tasarımlar

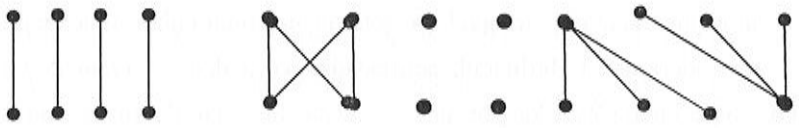
Bir önemli t-(v,K,λ) tBD (X,Λ) aşağıdaki koşullar sağlandığında bigrafikseldir.

1.X , tamamlanmış çift taraflı grafik $K_{m,n}$ 'e ait v=mn kenarlarının bir seti

2. $A \in \Lambda$ ve σ ,iki bağımsız seti bağlayan $K_{m,n}$ 'e ait automorphism ve bu durumda $\sigma(A) \in \Lambda$.

Bir bigrafiksel t-(mn,K,λ) tasarımı bir automorphism grubunda olduğu gibi S_m X S_n sahiptir.

Örnek 5.11 :Bir bigrafiksel 3-(16,{4,6},1) tasarımı aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.22: Bigrafiksel 3-(16,{4,6},1) tasarımı

Teorem 5.8(Colbourn, C.J. And Dinitz J.H.,1996): t>1 olduğu tek bigrafiksel t-(v,K,1) tasarımları 2-(9,3,1),3-(8,4,1),3-(16,4,1) 3-(16,{4,6},1) ve 5-(16,{6,8},1) parametrelerine sahiptir.

5.11 Kısmi Geometri Grafiği

Bose(1963) GDG'leri 2 birliktelik sınıflı PBIBD'lerin birliktelik şemalarına izomorf olduğunun gösterdi. Bose(1963), (r,k,1) kısmi geometrisini, tanımlanmamış doğruların bir sistemi olarak ifade etmiş ve isabet ilişkisini şöyle verdi.

1) Herhangi iki noktadan geçen en fazla bir doğru vardır.
2) Bir noktadan geçen r doğru vardır.
3) Herhangi doğru üzerinde k nokta vardır.
4) l doğrusu üzerinde olmayan bir p noktası alınsın. p ile kesişen ve l'den geçen tam bir doğru vardır. Geometride noktaların ve doğruların sayısı şöyledir.

$v=k[(r-1)(k-1)+1]$
$b=r[(r-1)(k-1)+1]$

(r,k,1) kısmi geometrisinin G grafiğinde, köşeler geometrinin noktalarına karşılık gelir. Iki köşe komşudur(yani 1. birliktelik sınıfındadır) veya değildir (yani 2. birliktelik sınıfında). Diğer bir ifadeyle karşılık gelen noktalar bir ortak doğru üzerindedir veya değildir. Böyle bir grafik (r,k,1) grafiği olarak adlandırılır.

Teorem 5.9(Bhagwandas, 1968): Bir (r,k,1) grafiği aşağıdaki parametrelere sahip GDG'dir.

$v = n_1 + n_2 + 1$
$n_1 = r(k-1) \quad n_2 = (r-1)(k-1)^2$
$P_{11}^1 = k-2 \quad P_{11}^2 = r$
$P_{12}^1 = (r-1)(k-1) \quad P_{12}^2 = r(k-2)$
$P_{22}^1 = (r-1)(k-1)(k-2)$
$P_{22}^2 = (r-1)(k-1)(k-2)+r-k$

Eğer G grafiği, GDG'ı (r,k,t) grafiğin parametrelerine sahip ise G'ye pseudo-(r,k,1) grafik denir. Ancak pseudo (r,k,1) grafiğin (r,k,t) grafik olması gerekmez.

Teorem 5.10(Bhagwandas, 1968): Pseudo-(r,k,1) grafiğinin varlığı için gerekli koşul

$$\alpha = \frac{rk(r-1)(k-1)}{r+k-2}$$

nin bir tamsayı olmasıdır.

Bir pseudo (r,k,1) grafiği ve x köşesi dikkate alınsın. x'in 1. birlikteliği herbir (k-1) köşe ihtiva eden (aynı L_i'de iki köşe 1. birliktelikte bulunacak), L_1, L_2,...,L_r ayrık kümelerine parçalandığı düşünülsün. Bu taktirde $P_{11}^1 = k-2$ olacaktır. Ayrıca farklı L_i'lerden iki köşe 2. birliktelikte bulunacaktır(Bhagwandas,1968)

v, n_i, i,j,k=1,2 parameterlerine sahip bir GDGnin 1. birliktelik(adjacency) matrisi A_1, 2. birliktelik(non-adjacency) matrisi A_2 olsun.

Burada $(A_i)_{\alpha\alpha}$=0 dir.

$$\alpha \neq \beta \text{ için } (A_i)_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha \text{ ve } \beta \text{ 1.birliktelikte ise} \\ 0 & d.d. \end{cases}$$

olarak tanımlanır. A_1, A_2 kare matrislerdir ve ayrıca

$$A_1 + A_2 = J - I$$

J: tüm elemanları 1 olan kare matris

I:birim matris

dır. Bu takdirde;

$$A_1 = \begin{pmatrix} \phi & j & \phi \\ j' & B_1 & C_1 \\ \phi' & C_1' & D_1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \phi & j \\ \phi' & B_2 & C_2 \\ j' & C_2' & D_2 \end{pmatrix} \qquad [5.1]$$

yazılabilir. Burada B_1, B_2 matrisleri n_1 mertebeli simetrik kare matrisler, D_1 ve D_2 matrisleri n_2 mertebeli simetrik kare matrislerdir.

$$A_1^2 = n_1 I + P_{11}^1 A_1 + P_{11}^2 A_2$$

yazılabilir.

Yardımcı Teorem 5.11(Bhagwandas, 1968): 1) B_1, C_1, C_1', D_1 altmatrisleri $P_{11}^1, P_{12}^1, P_{11}^2, P_{12}^2$ satır toplamlarına sahiptir.

2) $J + B_1^2 + C_1 C_1' = n_1 I + P_{11}^1 B_1 + P_{11}^2 B_2$

3) $B_1 C_1 + C_1 D_1 = P_{11}^1 C_1 + P_{11}^2 C_2$

4) $C_1' C_1 + D_1^2 = n_1 I + P_{11}^1 D_1 + P_{11}^2 D_2$

(P) özelliğine sahip bir pseudo (r,k,1) grafiğinin A_i 1. birliktelik matrisi göz önüne alınsın.

A_1 matrisi [5.1]de verildiği gibi olsun. B_1 matrisi ise

$$B_1 = diag(J - I, J - I, ..., J - I) = I \otimes (J - I)$$

olarak alınabilir.

Buradaki *(J-1)* alt matrisleri *(k-1)* mertebeli kare matrislerdir. B_1 ise $n_1=r(k-1)$ mertebeli olur. Yardımcı teorem 5.11'den C_1'in aşağıdaki parametrelere sahip yarı düzenli grup ayrılabilir tasarım olduğu görülür($\lambda_1^* = 0,\ \lambda_2^* = r-1$).

(P) özelliğine sahip bir pseudo *(r,k,t)* grafiğinin varlığı parametreleri aşağıda verilen GDGD tasarımı vurgular.

$$v^* = r(k-1)$$
$$b^* = (r-1)(k-1)^2$$
$$r^* = (r-1)(k-1)$$
$$k^* = r$$
$$\lambda_1^* = 0$$
$$\lambda_2^* = r-1$$

Örnek 5.12 Bir pseudo *(r,3,1)* grafik daima (P) özelliğine sahiptir. Örneğin pseudo-(5,3,1) grafiğinin parametreleri şöyledir.

v=27, n_1=10, n_2=16

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Bu grafik, (5,3,1) kısmi geometrisine karşılık gelir(Bose ve Clatworthy,1955).

Böylece tasarım,

$v^* = 10,\ b^* = 16,\ r^* = 8,\ k^* = 5,\ \lambda_1^* = 0,\ \lambda_2^* = 4$

parametrelerine sahiptir.

GDG kavramı, PBIBD'nin birliktelik sınıfındaki kavrama izomorfiktir. Bu kavram ilk defa Bose ve Shimamoto(1952) tarafından verilmiştir.

Eğer bir G grafiğinin v köşesi ile birliktelik şemasının v işlemi denk tutulursa grafiğin birleştirilmiş ya da birleştirilmemiş olan iki köşesi, işlemlerin 1. ya da 2. birliktelikleri olarak yorumlanır.

Bir Kısmi geometrinin G grafiği, geometrinin noktalarına karşılık gelen köşelerden oluşur. Köşelerin birleştirilmiş ya da birleştirilmemiş oluşu geometrik anlamda karşılık gelen noktaların bir ortak doğru ile ilişkili oluşu veya olmayışı olarak yorumlanır.

Kısmi geometrinin birçok ilginç örnekleri vardır. Özellikle $t=r-1$ olduğunda, k mertebeli, r dereceli bir net söz konusudur. $(r,k,r-1)$ karakteristikli pseudo geometrik grafik, k mertebeli, r dereceli, pseudo-net grafik olarak tanımlanır.

Eğer G, (r,k,t) karakteristikli pseudo-geometrik grafik ise, G'nin bir major kliği en az $k-(r-1)^2(t-1)$ nokta ihtiva eden bir klik olarak yorumlanır. Maksimal olan bir major klik, bir Grand klik olarak tanımlanabilir.

(r,k,t) karakteristikli pseudo-geometrik grafik, $r=t=2$, $k=n-1$ alındığında, üçgensel birliktelik şeması(triangular association scheme) ile aynı parametrelere sahiptir.

k mertebeli r dereceli bir netin deficiency $d=r+1-k$'dir. Bruck(1963), deficiency d, mertebesi k olan bir netin,

$$k > \frac{1}{2}(d-1)(d^3-d^2+d+2)$$

olması durumunda, yeni ilave doğrularla bir Afin düzleme tamamlanacağı göstermiştir.

Bruck'un bu sonucu aşağıdaki teorem ile genelleştirilmiştir.

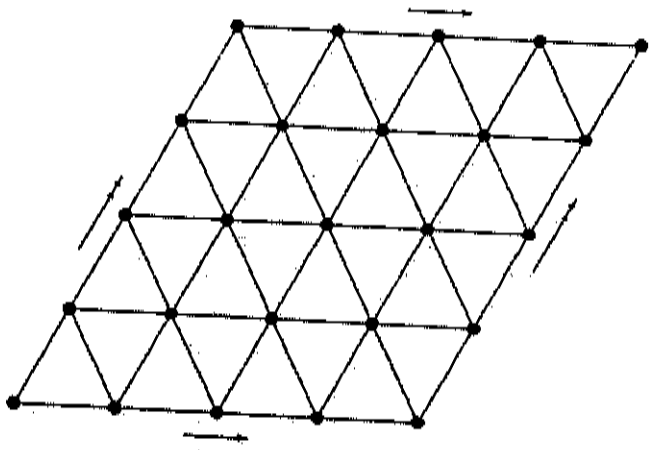
Teorem 5.12(Bose,1963): Parametreleri aşağıda verilen bir birliktelik yapısı üzerine kurulan bir PBIBD $(r,k,\lambda_1,\lambda_2)$ $(\lambda_1>\lambda_2)$ verilsin.

$$n_1=\left[(d-1)(k-1)(k-t)\right]/t, \quad n_2=d(k-1)$$
$$P_{11}^1=\left[(d-1)(k-1)(k-t)-d(k-t-1)\right]/t,$$
$$P_{11}^1=\left[(d-1)(k-1)(k-t-1)\right]/t$$

Aynı işlemleri ihtiva eden yeni blokları ilave ederek tasarım genişletilebilir. Genişletilmiş tasarım(extended design) bir BIBDdir. Bu tasarımda $r=r+d(\lambda_1-\lambda_2)$ tekrar, k blok genişliği olup, her işlem çifti birlikte λ_1 blokta gözükür.

5.12 Shrikhande Grafiği

Bu grafik, $L_2(4)$ten köşelerin diagonal kümesinin yer değiştirmesi ile elde edilir.$L_2(4)$ ile aynı parametreli (16,6,2,2)bir güçlü düzenli grafiktir. Aşağıda bu grafiğe bir örnek verilmiştir(Shrikhande,1959).



Şekil 5.24: Shrikhande grafiği

5.13 Chang Grafiği

T(8)'nin köşe kümesi {1,2,...8}'in 2-altkümesidir. Köşe kümesinin bir altkümesi 8 köşe ile grafiğin kenar kümesi olarak düşünülür. T(8)'in yerdeğiştirilmesi ile üç farklı Chang grafiği aşağıdaki gibi elde edilir(Chang,1959).

1) 4 ayrık kenarlar
2) Bir sekizgen
3) Beşgen ve üçgen ayrık birleşimi.

5.14 Steiner Üçlü Sistemler ve Güçlü Düzenli Grafik

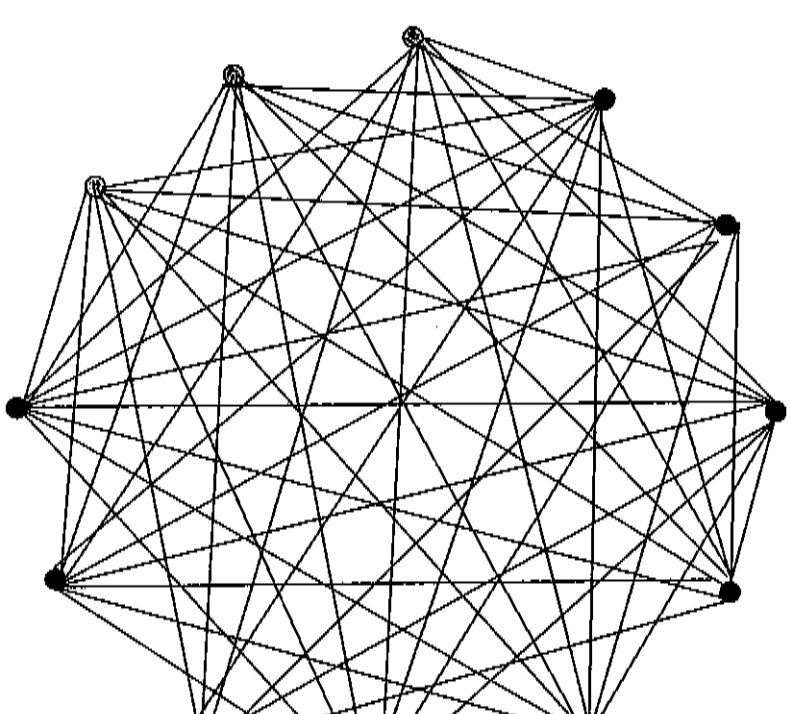
Bir Steiner üçlü sistem 2-(v,3,1) tasarımıdır. Bir GDG'nin var olması için $v \equiv 1,3 (\mathrm{mod}\ 6)$ olması gerekir. Blokların toplam sayısı $v(v-1)/6$,bir noktayı içeren blokların sayısı $(v-1)/2$'dir. D, kesişim sayısı 1,0 olan bir Steiner üçlü sistemdir. STS(v) blok grafiği (v>7) $(\frac{v(v-1)}{6}, \frac{3v-9}{2}, \frac{v+3}{2}, 9)$ parametreli bir GDG'dir. STS(31) blok grafiği bu

durumda (155,42,17,9) parametreli bir GDG'dir. Bu da aynı zamanda 2-(31,7,7)'den elde edilen (155,42,17,9) parametreli GDG'ye denktir.

Örnek 5.13: v=9, b=12, k=3, r=4, λ=1 parametreli bir 2-(9,3,1) tasarımın blokları ve ilişki matrisi aşağıdaki gibi olsun.

$$A = \begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 & B_9 & B_{10} & B_{11} & B_{12} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bu tasarım $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 1$ olan bir quasi-simetriktir ve aynı zamanda parametreleri (12,9,6,9) parameterli bir GDG'ye karşılık gelir. Tasarıma ait olan grafik aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.24: (12,9,6,9) parameterli bir GDG

5.15 Notlar

Bir m mertebeli GDG, m birliktelik sınıflı KDTBT'ın ortaklık şemasını verir(Rhagvarao ve Chanrasekhararao, 1964). Grafik teorisi hakkında daha geniş bilgi için Coulbourn ve Dinitz(1996)a bakılabilir. Ayrıca diğer kombinatorik yapılar ile ilişkileri detaylı olarak Cameron ve Lint(1991), Harari ve Palmer(1973) ve Bondy ve Murty(1976)da verilmiştir. Ayrıca Bruck(1951,1963) netlerle ilgili detaylı bilgi vermiştir.

5.16. Alıştırmalar

1) STS(15) den elde edilen güçlü düzenli grafiğin parametrelerini bulunuz.

2) $K_{2,3,4,3}$ 4-kısımlı grafiğini çiziniz.

3) $K_{3,3,3}$ 3-kısımlı tam grafiğini çiziniz.

4) L_6 Ladder ve CP(6) Kokteyl parti grafiklerini çiziniz.

5.17. Kaynaklar

1. Bannai, E.; Ito, T. (1973). "On Moore graphs". *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Ser. A* **20**: 191–208.
2. Beth, B. And Jungnickel, D. And Lenz, H., 1999 "Design Theory, Second Edition" Vol-1, Cambridge University, UK.
3. Bhagwandas, 1968, Seidel-equivalence of strongly regular graphs, Sankhya, Ser. A 30, 359--368.
4. Bondy J.A., and Murty U.S.R., 1976, Graph Theory and applications, North-Holland, Amsterdam.
5. Bose,R.C,(1963) Strongly Regular Graphs, Partial Geometries and Partially Balanced Designs, Pasific J.Math.,13,389-418.
6. Bose, R. C., Clatworthy, H., and Shrikhande, S. S., 1955,. Tables of partinlly balanced designs with two associate classes. Xorth Carolina Agr. Expt. Stat. Techn. Bull. 107.
7. Bose,R. C. and Simamoto, T. (1952). Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes. J. Amer. Statist. Assoc. 47 151-184.
8. Bruck R.H., 1951, Finite Nets. I. numerical invariants. Can J. Math., 3, 94-107.
9. Bruck R.H., 1963, Finite Nets. II. Uniqueness and imbedding. Pacific J. Math., 13, 421-457.
10. Cameron, P. J. and Van Lint, J. H., Designs, Graphs, Codes and Their Links. Cambridge University Press 1991.
11. Chang L.C., 1959, The uniqueness, and non-uniqueness of the triangular association scheme. Sci Record Peking Math. 3, 604-613.
12. Colbourn, C.J. And Dinitz, J.H. (Eds.), " The CRC Handbook of Combinatorial Designs", CRC Press, Boca Raton, FL, New York, (1996).
13. Connor, W.S., 1958, The Uniqueness of triangular association scheme. Ann. Mat. Stat., 23, 262-266.
14. Damerell, R. M. (1973). "On Moore graphs". *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **74**: 227–236.
15. Delsarte P., and Goethals, J.M, 1975, Bounds for systems of lines and Jacobi polynomials, *Philips Research Reports*, vol. 30, no. 3, pp. 91–105.

16. Diestel, R., 2000, Graph Theory, Springer Verlag, New York.
17. Gewirtz, A. ,1969, Graph of maximal even girth. Canadian J. Math., 21, 915-934.
18. Harari F. and Palmer E., 1973, Graphical Enumeration, Academic Press, New York.
19. Hoffman, A.J, 1960, On the uniqueness of the triangular association scheme. Ann. Math. Stat., 31, 492-497.
20. Hoffman A.J. And Ray-Chaudhuri D. K., On the line graph of a symmetric balanced incomplete block design, Trans. Amer. Math. Soc., 116 (1965), pp.238-252
21. Rao, A. R., Rao, S. B., A Characterization of the Line Graph of a BIBD with l= 1, Sankhya, Vol.:31, Pages:369-370, 1969.
22. Rhagvarao D. and Chandrasekhararao K., 1964, Cubic Designs, Ann. Math. Stat., 35, 389-397.
23. Turyn, R.J.,1974, Hadamard matrices, Baumert-Hall units, four-symbol sequences, pulse compression, and surface wave encoding. *J.* ***Combinatorial Theory (A)*** 16 313-333.
24. Shrikhande, S.S., 1959, On a Characterization of the triangular association scheme. Ann. Math. Stat., 30, 39-47.
25. Stinson D.R., 2004, Combinatorial Designs: Constructions and Analysis, Springer, New York.

6. LATİN KARE, YOUDEN KARE, LATİS TASARIMLARI

6.1 Latin Kare

Matematikte, bir matris türü olarak bilinen Latin Kareler, istatistikte; sıkça başvurulan deney düzenleme yöntemlerinden biridir.

Latin kareler, değişkenlerin tamamen farklı iki yolla, satır ve sütunlarla gruplanmasından dolayı genellikle deneysel tasarımlarda kullanılırlar. Bu çiftli gruplamanın etkisi satır ve sütunlar arasındaki farklılıklardan kaynaklanan hataların küçültülmesi içindir. Latin kare düzeninde deney hatası denemeler arası farkların satır ve sütunlarda sabit kalmadığını belirten bir ölçüdür. Bu ölçü; TxRxC (işlem, satır, sütun) şeklinde ifade edilir. Burada TxR etkileşimi, sütundan sütuna, TxC etkileşimi, ise satırdan satıra değişimi ifade eder. Söz konusu etkileşimin önemli olup olmadığını anlayabilmek için örnekleme hatasını bilmeye gerek vardır. bu ise her parselde birden fazla ölçüm yapmakla hesaplanabilir.

Latin karelerin ortogonal dizimlerle, latis tasarımlarla, transversal tasarımlarla, dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarla ve diğer tasarımlarla ilişkisi vardır.

Çizelge 6.1 de Latin karelerin bazı örnekleri verilmiştir.

				1 2 3 4 5
			4 3 2 1	5 1 2 3 4
	1 2 3	1 3 2	3 4 1 2	4 5 1 2 3
1 2	3 1 2	3 2 1	2 1 4 3	3 4 5 1 2
2 1	2 3 1	2 1 3	1 2 3 4	2 3 4 5 1
	A	B	C	D
n=2	n=3		n=4	n=5

Çizelge 6.1: Farklı mertebeden Latin kareler

Her n pozitif tamsayısı için, n.nci mertebeden en az bir Latin kare vardır. Örneğin bir nxn dizimin (i,j) girişine sahip olduğu tanımlanırsa;

$l_{ij} = j - i + 1 \pmod{n}$, $1 \le l_{ij} \le n$

alınarak bir Latin kare elde edilir.

Latin karenin kurulması için bir yol, uygun mertebeden grup tablosunu yazmaktır. n=4 için iki grubu dikkate alınır. toplama altında $Z_4 \pmod 4$ ve bileşen yönünde toplama altında $Z_2 x Z_2 \pmod 2$ olduğu düşünülsün, bunların grup tabloları Çizelge 6.2'de verilmiştir. Tablo kenarlarının silinmesi ve sembollerin uygun olarak yerleştirilmesi ile sırasıyla {1, 2, 3, 4} 'e dayalı Latin kareler olan E ve F ulaşılır. Latin kare özelliği grup aksiyomlarını sağlar.

+ 4	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Z_4 ' ün grup tablosu

+ 2	00	01	10	11
00	00	01	10	11
01	01	00	11	10
10	10	11	00	01
11	11	10	01	00

$Z_2 x Z_2$ ' nin grup tablosu

4	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2

E (Z_4 ' den)

4	1	2	3
1	4	3	2
2	3	4	1
3	2	1	4

F ($Z_2 x Z_2$ 'den)

Çizelge 6.2: $Z_4 \pmod 4$ ve $Z_2 x Z_2 \pmod 2$den elde edilen Latin kareler

Yarı-grup tablosu bir Latin karedir ve satır ve sütun kenarı ile kurulmuş bir Latin kare bir yarı-grubu belirtir. Bu yüzden, Q = { 1, 2, 3 } kümesinde, Çizelge 6.1'in A ve B kareleri sırasıyla $Q_A ve Q_B$ yarı-gruplarını tanımlar.

Q_A' da

1*1 = 2*2 = 3*3 = 1
1*2 = 2*3 = 3*1 = 2
1*3 = 2*1 = 3*2 = 3

ve Q_B ' de

1*1 = 2*3 = 3*2 = 1
1*3 = 2*3 = 3*2 = 2
1*2 = 2*1 = 3*3 = 3

Bir Latin karenin satır ve sütun sembollerinin değişmesi Latin özelliğini korur.

n mertebeden bir Latin karedeki konum kümelerinin eğer, her bir satırda bir konum ve her bir sütunda bir konum ve aralarındaki konumlar {1, 2, ..., n} kümesinin her bir elemanını bir defa içeriyorsa transversal oldukları söylenebilir. Bir transversal kare, bir transversal içeren Latin karedir. bir idempotent kare, transversal, yani kendi temel köşegenini içerir. Fakat idempotent bir kare transversal olmak zorunda değildir. Çizelge 6.1'deki A, üç transversal içerir. Sırasıyla 1, 2, 3 sembollerini içeren; (1,1),(2,3),(3,2) konumları böylece (2,2),(3,1),(1,3) konumları ve tekrar (3,3),(1,2),(2,1) konumları. Çizelge 6.1'deki B, D ve Çizelge 6.2'deki F transversal karelerdir. Çizelge 6.1'deki n=2 karesi ve Çizelge 6.2'deki E transversal değildir.

n mertebeli bir transversal kare verilmişse, ana köşegen üstündeki pozisyonları transversal hale getirmek için sütunlar değiştirilir. Böylece elemanlar kendi doğal sıralarında olurlar. Başka bir değişle transversal bir kareden değiştirme ile idempotent bir kare elde edilebilir.

n mertebeli bir transversal kare L, aşağıdaki yolla n+1 mertebeli bir Latin kare M'ye genişletilebilir. L transversalinin şu konumlarda olduğun varsayılsın;

$(1, j_1), (2, j_2), \ldots, (n, j_n)$

bu durumda M' nin girişlerinin

$m_{i,j_i} = n+1$ i = 1, 2, …, n için

$m_{n+1,n+1} = n+1$;

$m_{i,n+1} = l_{i,j_i} = m_{n+1,j_i}$ i = 1, 2,…, n için

$m_{i,j} = l_{i,j}$ diğer bütün (i,j) çiftleri için

Girişlerin n+1 ile yer değiştirdiği ve 1, 2, …, n elemanlarının hepsini kapsadığı için M bir Latin karedir ve L' nin genişlemesi diye adlandırılır.

Örneğin n=3

1	3	2
3	2	1
2	1	3

L

Latin karesi göz önüne alınsın. Bundan n=4 olan M karesi elde edilebilir.

$m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_{44} = 4$
$m_{14} = m_{41} = l_{11} = 1$
$m_{24} = m_{42} = l_{22} = 2$
$m_{34} = m_{43} = l_{33} = 3$

4	3	2	1
3	4	1	2
2	1	4	3
1	2	3	4

M

Latin kareler üçlü sistemler (ya da $B[3,\lambda;\upsilon\ ]$ tasarımları) ile yakından ilişkilidirler.

Aşağıda verilen bazı durum için Latin Kare dikkate alınacaktır[Street ve Street, 1987].

$\nu = 6n+3,\ \lambda = 1$ olmak üzere;

L, 2n+1 mertebeden simetrik idempotent bir kare olsun, mesela,

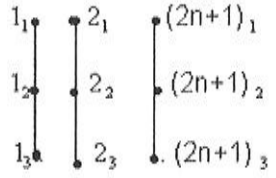
$L=[l_{ij}]\quad l_{ij} = (n+1)(i+j) \pmod{2n+1},\ 1 \le l_{ij} \le 2n+1$

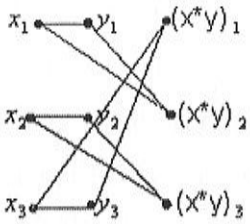
alınsın. $2(n+1) \equiv 1 \pmod{2n+1}$ olduğuna dikkat edildiğinde Z_{2n+1} halkasında $n+1=2^{-1}$ dir. Bir başka deyişle i ve j' nin düzeylerini alarak l_{ij} bulunabilir. Bu yüzden L simetrik, idempotent bir Latin kareyi Q={1, 2, ..., 2n+1} 'da (Q,*) yarı-grubu belirtmektedir.

Şimdi {1, 2, ..., 2n+1} 'in her bir elemanının üç kopyası alınsın ve bir parçalama düşünülsün. Böylece ν=6n+3 seti şunlardan oluşur.

$$\{1_1,1_2,1_3,2_1,2_2,2_3,...,(2n+1)_1,(2n+1)_2,(2n+1)_3\}$$

Çizelge 6.3'de $B[3,1;6n+3]$ tasarımının blokları verilmiştir. Ayrıca şekil 6.1'e bakınız.





$3\binom{2n+1}{2}$ üçlüsü

Şekil 6.1: $v = 6n+3$, $\lambda = 1$ olmak üzere elde edilen üçlü

x_1, x_2, x_3 $\qquad 1 \le x \le 2n+1$

$$\left.\begin{array}{l} x_1, y_1, (x*y)_2 \\ x_2, y_2, (x*y)_3 \\ x_3, y_3, (x*y)_1 \end{array}\right\} \qquad 1 \le x < y \le 2n+1$$

Çizelge 6.3: B[3,1;$6n+3$] tasarımının blokları

Böylece;

$$b=(2n+1)+3\binom{2n+1}{2}=6n^2+5n+1=\frac{(6n+3)(6n+2)}{6}$$

sayıda blok elde edilir. Bunlar her bir elemanı r kez içermektedir. r, aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$r=1+2n+n=\frac{(6n+2)}{2}$$

Yapılması gereken sadece tasarımın dengelenmiş olduğuna dair kontrol etmektir.

x_i, x_j elemanları $\{x_1, x_2, x_3\}$ bloğunda bir araya gelirler; x_i, y_i elemanları $\{x, x_i, (x*y)_{i+1(\text{mod }3)}\}$ bloğunda bir araya gelirler. Böylelikle elemanların her ikilisi, en azından bir blokta birlikte yer alırlar.

Fakat bu mevcut ikililerin toplam sayısıdır ve bir tanesi varolana kadar hiç biri tekrarlanmaz. Böylelikle tasarım $\lambda = 1$ ile dengelenmiş olur.

Diğer v ve λ değerleri için Street ve Street(1987)'ye bakılabilir.

6.2 Ortogonal Latin Kare Tam Setleri (MOLS)

Aynı mertebeden iki latin karenin ortogonal olması için herhangi $x,y \in \{1,2,...n\}$ için $a_{ij}=x$ ve $b_{ij}=y$ olan tek bir (i,j) olması gerekir. Latin karelerin kümesinin ortogonal olması için her çift karenin ikişerli ortogonal olması gerekir. Böyle bir kümeye n. mertebeden ikişerli ortogonal Latin kareler seti(MOLS) denir. Ortogonallikten dolayı $m \leq n-1$ olur. $m=n-1$ ise MOLS'a tam denir.

6.2.1 Ortogonal Latin Karelerin kuruluşu

$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ kümesi göz önüne alınsın. Bu küme üzerinde $L=(a_{ij})$ Latin karesi kurulsun, (b_{ij}) diğer bir Latin kare olmak üzere (a_{ij},b_{ij}) n^2 sıralı çifti farklı ise bu Latin kareler diktir denir. Dik Latin kare setinin oluşturulmasında sonlu cisim (Galois field, GF) kullanılır.

$g_0=0, g_1=1, g_2,...,g_{m-1}$ sonlu cismin (m-1) mertebeden elemanları olsun.

$$L_i=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & g_{m-1} \\ g_i & g_i+1 & \cdots & g_i+g_{m-1} \\ g_i \cdot g_i & g_i \cdot g_i+1 & \cdots & g_i \cdot g_i+g_{m-1} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ g_i \cdot g_{m-1} & g_i \cdot g_{m-1}+1 & \cdots & g_i \cdot g_{m-1}+g_{m-1} \end{bmatrix} \quad i=1,2,...,m-1$$

Böyle verilen L_i düzenleri m-1 tane dik Latin karenin bir seti yazılabilir.

Her asal p ve Her $r \in Z^+$ için p^r sonlu bir cisim vardır. GF(p^r) örneğin; GF(5)={0, 1, 2, 3, 4} bu bir cisim oluşturur.

GF(5) dikkate alınarak aşağıdaki ortogonal Latin kare seti yazılabilir.

0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
1	2	3	4	0	2	3	4	0	1	3	4	0	1	2	4	0	1	2	3
2	3	4	0	1	4	0	1	2	3	1	2	3	4	0	3	4	0	1	2
3	4	0	1	2	1	2	3	4	0	4	0	1	2	3	2	3	4	0	1
4	0	1	2	3	3	4	0	1	2	2	3	4	0	1	1	2	3	4	0
		L_1					L_2					L_3					L_4		

m bir asal sayının kuvveti iken daima (m-1) tane m boyutlu dik (ortogonal) Latin kare seti kurulabilir. Şayet m asalın kuvveti değil ise $m = p_1^{(e_1)}.p_2^{(e_2)}...p_s^{(e_s)}$ $(p_i \neq p_j)$ olacaktır. $g^{(i)} \in GF(p_i^{e_i})$ olmak üzere, $\gamma = (g^{(1)}, g^{(2)}, ..., g^{(s)})$ noktaları göz önüne alınsın. Bu noktalar üzerinde çarpma ve toplama şöyle tanımlansın.

$$\gamma_1 \overset{+}{\times} \gamma_2 = (g_1^{(1)}, g_1^{(2)}, ..., g_1^{(s)}) \overset{+}{\times} (g_2^{(1)}, g_2^{(2)}, ..., g_2^{(s)}) = (g_1^{(1)} \overset{+}{\times} g_2^{(1)}, g_1^{(2)} \overset{+}{\times} g_2^{(2)}, ..., g_1^{(s)} \overset{+}{\times} g_2^{(s)})$$

Teorem 6.1(Mann, 1950): $g_{i1}^{(1)}, g_{i2}^{(2)}, ..., g_{is}^{(s)}$ sırası ile $GF(p_1^{e_1}), GF(p_2^{e_2}), ..., GF(p_s^{e_s})$ 'in elemanları olsun. $g_0^{(i)}, g_1^{(i)}$ $GF(p_i^{e_i})$ 'nin sırası ile sıfır ve birim elemanı olsun. Bu taktirde $\gamma_j = (g_j^{(1)}, g_j^{(2)}, ..., g_j^{(s)})$ $0 < j \leq r = \min(p_i^{e_i}) - 1$ olmak üzere aşağıdaki düzen verilsin.

$$L_j = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \gamma_{m-1} \\ \gamma_j & \gamma_j + 1 & \cdots & \gamma_j + \gamma_{m-1} \\ \gamma_j.\gamma_2 & \gamma_j.\gamma_2 + 1 & \cdots & \gamma_j.\gamma_2 + \gamma_{m-1} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ \gamma_j.\gamma_{m-1} & \gamma_j.\gamma_{m-1} + 1 & \cdots & \gamma_j.\gamma_{m-1} + \gamma_{m-1} \end{Bmatrix} \qquad (j = 1, 2, ..., r)$$

Böylece r tane dik Latin kare elde ederiz. Örneğin: m=6 olsun $p_1^{e_1} = 2, p_2^{e_2} = 3$ $r = \min(p_i^{e_i}) - 1$=2-1=1 GF(2)xGF(3)'ü göz önüne alabiliriz. $(0,1 \in GF(2), 0,1,2 \in GF(3))$ GF(2)xGF(3)={(0,0),(1,1),(0,1),(0,2),(1,0),(1,2)} bu

kartezyen sistemindeki elemanları kullanıldığında aşağıdaki Latin kare seti elde edilir.

(0,0)	(1,1)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,2)
(1,1)	(0,2)	(1,2)	(1,0)	(0,1)	(0,0)
(0,1)	(1,2)	(0,2)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(0,2)	(1,0)	(0,0)	(0,1)	(1,2)	(1,1)
(1,0)	(0,1)	(1,1)	(1,2)	(0,0)	(0,2)
(1,2)	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,2)	(0,1)

Ortogonal Latin Karelerin oluşturulmasında asal kökler de kullanılabilir. w bir asal kök olsun ve $0,1,g_2,\ldots,g_n$ n mertebeli sonlu bir cismin elemanları olsun.

$$L_j = \begin{cases} 0 & 1 & \ldots & g_n \\ w^{0+j} & 1+w^{0+j} & \ldots & g_n+w^{0+j} \\ w^{1+j} & 1+w^{1+j} & \ldots & g_n+w^{1+j} \\ & \ldots\ldots & & \\ & \ldots\ldots & & \\ & \ldots\ldots & & \\ w^{n-2+j} & 1+w^{n-2+j} & \ldots & g_n+w^{n-2+j} \end{cases}$$

Burada, $n-1$ tane ortogonal Latin Kare elde edilir. Son $(n-1)$. satırının devirli permütasyonu ile L_{i+1} karesi elde edilir.

Ortogonal Latin kare tam setlerinin kuruluşunda sonlu geometrik kullanılır. Katsayıları $GF(P^n)$'de bulunan n. dereceden bir $h(x)$ polinomu indirgenemez ise $\bmod h(x)$'in kalan değerleri bir sonlu cisim oluşturur. $h(x)=x^2+x+2$ polinomu dikkate alınsın. Bu $GF(3)$'de indirgenemezdir. $GF(3)$'ün bir genişlemesi olan $GF(3^2)$ cismi dikkate alınsın.

$GF(3^2)=\{0,1,2,w,w+1,w+2,2w+1,2w,2w+2\}$. Bunlar kullanılarak bir Latin Kare oluşturulabilir.

Latin kare göz önüne alındığında aynı denemelerin, deney düzeni içinde belli koşullar altında tekrar ettiği düşünülür, bunlar aynı denemeler olmakla birlikte elde edilen sonuçlar denemenin bulunduğu konuma göre farklıdır. O halde n denemenin bulunduğu bir deney düzeninde n^2 farklı değer vardır. bir Latin karede birinci satır doğal sırada ise; Latin kare standart biçimdedir denir. Bu dik Latin karelerin bir özelliğidir.

2. mertebeden bir Latin kare seti göz önüne alınsın.

$$L=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix} \tag{6.1}$$

(6.1)'deki Latin kare setinde 1. ve 2. denemeler matrisin 2. satırında da görülmektedir. Ancak bu aynı deneylerin farklı koşullarla denendiğini ifade etmektedir.dolayısı ile elde edilen sonuçlar farklı olacaktır. Bu farklılığı ifade etmek için L, Latin karesi yeniden yazılacak olursa;

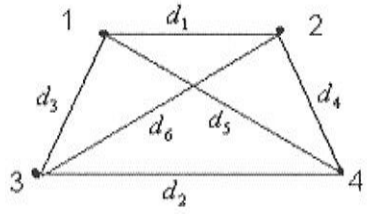
$$L=\begin{bmatrix}N_1 & N_2\\ N_3 & N_4\end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Burada her satır ve her sütun bir doğru olarak düşünülsün. Böylece doğrular;

$d_1=\{N_1,N_2\},d_2=\{N_3,N_4\},d_3=\{N_1,N_3\},d_4=\{N_2,N_4\}$

olacaktır. (6.1)'deki 1 elemanına (6.2)'deki N_1 karşılık gelmektedir. (6.1)'de ikinci satırdaki 1 elemanına (6.2)'de N_4 karşılık gelmiştir. Böylece $d_5=\{N_1,N_4\},d_6=\{N_2,N_3\}$ olacaktır.

Sonuç olarak 4 noktası, 6 doğrusu olan bir sistem elde edilir. Bu 2. mertebeden en küçük afin düzlemdir.

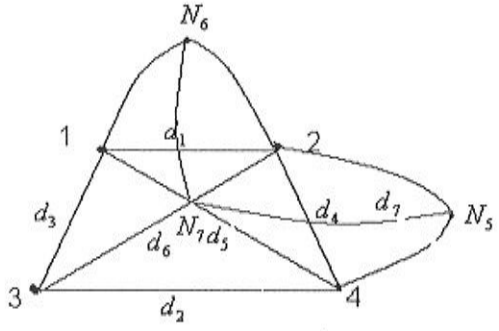


Şekil 6.2: 2. mertebeden Afin Düzlem

2. mertebeden afin düzlem, 2. mertebeden projektif düzleme tamamlanabilir. Bunun için ideal noktalar ve ideal doğru şöyledir;

$$\left.\begin{aligned} d_1 \cap d_2 &= N_5 \\ d_3 \cap d_4 &= N_6 \\ d_5 \cap d_6 &= N_7 \end{aligned}\right\} \text{ ideal noktalar}$$

$d_7 = \{N_5, N_6, N_7\}$ ideal doğru



Şekil 6.3: 2. mertebeden Projektif Düzlem

Böylece 7 noktalı, 7 doğrulu en küçük projektif düzlem elde edilir. Buna "fano düzlemi" denir. Buradan 2. mertebeden Latin kare tam setine 2. mertebeden projektif düzlem karşılık geldiği görüldü(Turgut ve Bayrak,1996).

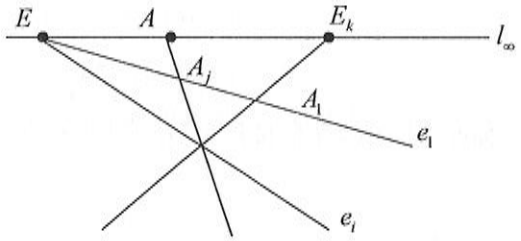
6.2.2 Ortogonal latin kare tam setleri ve geometrik yapıları

Latin Kareler matematikte bir matris olarak bilinir. Bu tasarımlar her denemenin her satır ve her sütunda 1 defa denendiği tasarımlardır. Bu tasarımları elde etmenin birçok yolu vardır. Bunlardan biri sonlu cisimlerdir.

n. mertebeden bir Projektif düzlem $PG(2,n)$ dikkate alınsın. Bu geometri üzerinde elemanların özel seçimleri ile n. mertebeden MOLS tam seti oluşturulabilir. Bu seçimler şöyle yapılır.

1. $PG(2,n)$ üzerinde bir özel doğru l_∞ doğrusu seçilir.
2. l_∞ üzerinde iki özel nokta A ve E seçilir.
3. l_∞'dan başka E'den geçen e_i $(1 \le i \le n)$ doğruları seçilir.
4. l_∞'dan başka A'dan geçen a_j $(1 \le j \le n)$ doğruları belirlenir.

Burada A_j noktaları $e_1 \cap a_j$ gibi düşünülür. E_k $(0 \le k \le n)$, l_∞ üzerindeki noktalar olsun. $E_0 = E$, $E_1 = A$ olsun. Her bir E_k $(2 \le k \le n)$ için bir L_k seti oluşturulabilir. Öyleki, E_k'yı $e_i \cap a_j$'ye birleştiren doğru E_1'i A_1'de keser.



Örnek olarak $PG(2,4)$ dikkate alınsın. $PG(2,4)$'de 21 nokta ve 21 doğru vardır $(n^2+n+1=21)$.

$P_i\,(i=1,2,\ldots,21)$ nokta, $l_i\,(i=1,2,\ldots,21)$ doğru.

l_1: P_2 P_3 P_7 P_{10} P_{11} $\quad$ l_2: P_1 P_3 P_6 P_{12} P_{13}

l_3: P_1 P_2 P_5 P_8 P_9 $\quad$ l_4: P_5 P_6 P_7 P_{20} P_{21}

l_5: P_3 P_4 P_5 P_{16} P_{19} $\quad$ l_6: P_2 P_4 P_6 P_{14} P_{17}

l_7: P_1 P_4 P_7 P_{15} P_{18} $\quad$ l_8: P_3 P_9 P_{17} P_{18} P_{21}

l_9: P_3 P_8 P_{14} P_{15} P_{20} $\quad$ l_{10}: P_1 P_{11} P_{16} P_{17} P_{20}

l_{11}: P_1 P_{10} P_{14} P_{19} P_{21} $\quad$ l_{12}: P_2 P_{13} P_{18} P_{19} P_{20}

l_{13}: P_2 P_{12} P_{15} P_{16} P_{21} $\quad$ l_{14}: P_6 P_9 P_{11} P_{15} P_{19}

l_{15}: P_7 P_9 P_{13} P_{14} P_{16} $\quad$ l_{16}: P_5 P_{10} P_{13} P_{15} P_{17}

l_{17}: P_6 P_8 P_{10} P_{16} P_{18} $\quad$ l_{18}: P_7 P_8 P_{12} P_{17} P_{19}

l_{19}: P_5 P_{11} P_{12} P_{14} P_{18} $\quad$ l_{20}: P_4 P_9 P_{10} P_{12} P_{20}

l_{21}: P_4 P_8 P_{11} P_{13} P_{21}

Böyle bir geometri parametreleri $v=b=21$, $r=k=5$ olan bir DTBT oluşturuyor.

21 doğrudan 1 tanesi seçilir ve seçilen doğru. 21. doğru olsun.

1. $PG(2,4)$ 'deki özel seçimli doğru l_{21} olsun.
2. l_{21} üzerinde iki özel nokta P_4 ve P_8 olsun.
3. l_{21} 'den başka $E=P_4$ 'den geçen doğrular, $e_1=l_5$, $e_2=l_6$, $e_3=l_7$, $e_4=l_{20}$ olur.

4. $A = P_8$ olsun. Bu noktadan geçen l_{21} haricindeki doğrular $a_1 = l_3$, $a_2 = l_9$, $a_3 = l_{17}$, $a_4 = l_{18}$ olur.

L_2 karesini elde etmek için E_2 noktasını $E_2 = P_{11}$ olarak alalım.

$e_1 \cap a_1 = P_5$, $E_2 = P_{11}$. P_5 ve P_{11}'i üzerinde bulunduran doğru l_{19}'dur (Tasarım bir DTBT olduğu için λ tektir ve böyle 1 tane doğru belirlenir). $e_1 \cap l_{19} = P_5 = A_1$ olsun. Latin Karenin $(1,1)$ hücresi $P_5 = A_1$ olur.

$e_1 \cap a_2 = l_5 \cap l_9 = P_3$. P_3 ve P_{11}'i üzerinde bulunduran doğru l_1'dir. $e_1 \cap l_1 = P_3 = A_2$ olsun. Latin Karenin $(1,2)$ hücresi $P_3 = A_2$ olur.

$e_1 \cap a_3 = l_5 \cap l_{17} = P_{16}$. P_{16} ve P_{11}'i üzerinde bulunduran doğru l_{10}'dur. $e_1 \cap l_{10} = P_{16} = A_3$ olsun. Latin Karenin $(1,3)$ hücresi $P_{16} = A_3$ olur.

$e_1 \cap a_4 = l_5 \cap l_{18} = P_{19}$. P_{19} ve P_{11}'i üzerinde bulunduran doğru l_{14}'dur. $e_1 \cap l_{14} = P_{19} = A_4$ olsun. Latin Karenin $(1,4)$ hücresi $P_{19} = A_4$ olur.

$$L_2 = \begin{bmatrix} P_5 & P_3 & P_{16} & P_{19} \\ P_3 & P_5 & P_{19} & P_{16} \\ P_{16} & P_{19} & P_5 & P_3 \\ P_{19} & P_{16} & P_3 & P_5 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} P_5 & P_3 & P_{16} & P_{19} \\ P_{16} & P_{19} & P_5 & P_3 \\ P_{19} & P_{16} & P_3 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_{19} & P_{16} \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} P_5 & P_3 & P_{16} & P_{19} \\ P_{19} & P_{16} & P_3 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_{19} & P_{16} \\ P_{16} & P_{19} & P_5 & P_3 \end{bmatrix}$$

4.mertebeden bir Projektif geometriden 4.mertebeden bir tam Latin Kare seti elde edildi. $n-1$'den daha az olursa bir Net'e dönüştüğü görülebilir (Bayrak ve Turgut, 1996).

6.3 Latin kareler kullanarak afin çözülebilir tasarımların oluşturulması

Parametreleri teorem 2.29de verildiği gibi bir afin yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımı olsun. Bu bölümde afin yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımı A(q_2,β) şeklinde gösterilecektir(Agrawal ve Boob, 1976). Bu tasarımdan ve β asal kuvvet olmak üzere β mertebeli Latin

kare tam setini kullanarak $A(\beta q_2,\beta)$ afin yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımı elde edelebilir. α_i^t $A(q_2,\beta)$nın isabet matrisindeki t.nci tekrarda i.nci bloğu olsun. İkişerli ortogonal Latin kare tam kümesi L_1, $L_2,\ldots L_{m-1}$ olmak üzere L matrisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$L=[\, L_1|L_2|\ldots|L_{m-1}|\, L_m]$

Burada;

$$L_m=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & m-1 \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & m-1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

L matrisinde, sabit t için i yerine α_i^t yazılarak N_t matrisi elde edilir. Buradan;

$N=[N_1, N_2,\ldots,N_r|\, N_{r+1}]$

olur. Buradaki N_{r+1} aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$N_{r+1}=\begin{bmatrix} j_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j_v & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & j_v \end{bmatrix}$$

Bu şekilde oluşturulan N matrisi aşağıdaki parametrelere sahip afin yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımının isabet matrisidir.

$$v^* = \beta^3 q_2 \quad b^* = \beta\left(\frac{\beta^3 q_2 - 1}{\beta - 1}\right),\ r^* = \left(\frac{\beta^3 q_2 - 1}{\beta - 1}\right),\ k^* = \beta^2 q_2 \quad \lambda^* = \left(\frac{\beta^2 q_2 - 1}{\beta - 1}\right)$$

Bu tasarım $A(\beta q_2,\beta)$ afin yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımıdır.

6.4 Yarı-Latin Kare

Yarı Latin kareler ilk kez Yates(1935)de önerildi. Rojas ve White(1957) yarı Latin kareleri modife edilmiş Latin kareler adı altında tekrar ele aldı. Daha sonra Bahrens(1956a,b), Unterstenhöfer(1957, 1963) tarafından ziraat denemelerinde kullanılmak üzere tekrar ele alındı(Preece and Freeman,1983). Preece ve Freeman(1983)de yarı-latin kareler ile ilişkili olan kombinatorik tasarımları vermiştir. Ayrıca yarı-Latin karelerin iç içe dengeli tamamlanmamış blok tasarımları ile ilişkisi Preece(1967b) tarafından verilmiştir. Yarı-Latin karelerin ilişkili olduğu bir diğer tasarım kısmi dengeli tamamlanmamış blok tasarımıdır. Özellikle yarı-düzgün grup bölünebilir tasarımlarla ilişkilidir(Clatworty, 1973). Bailey(1988) yarı-Latin karelerin kuruluşuna ilişkin bazı yöntemler vermiştir.

Bir $(n\times n)/k$ semi Latin kare, aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde olan,

1. Her hücrede k harf olacak (satır ve sütun kesişimlerinde)
2. Her harf, her satır ve her sütunda bir kez meydana gelecek

olan, nk harfin her satır ve her sütunda mutlaka yer aldığı kare dizimidir.

Böyle tanımlanan n^2k noktadan oluşan kümeye Ω denilsin. R, C ve S sırasıyla satır sütun ve sembollerin Ω'daki bir parçalanışını versin. R ve Cnin infumumu $R\wedge C$, k boyutlu n^2 sınıfa bir parçalanmadır(satır ve sütun kesişimi) (Bailey,1985,1990). İki parçalanmanın supremumu ise her bir parçalanmanın tüm sınıflarını ihtiva eden sınıflara sahiptir. Bir yarı Latin kare ortogonal olması için $R\wedge C$ ve S parçalanmalarının ortogonal olması gerekir.

Teorem 6.2: Bir yarı latin karenin ortogonal olması için gerek ve yeter koşul semi Latin karenin inflated Latin kare olmasıdır.(Bailey, 1992)

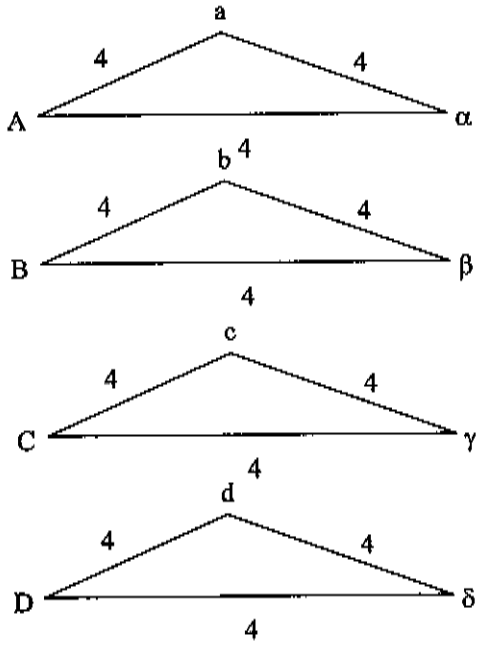
Örneğin olarak, 6×6 boyutlu yani 6 satır ve 6 sütunlu, her hücrede $k=3$ tane harf bulunan ve her satır ve her sütununda toplam 18 $(=n\times k=6\times3)$ harf bulunan Yarı-Latin kare örneği mevcuttur.

Yarı-Latin karede, Latin Kareden farklı olarak gözelerde 1'den fazla işlem yer almaktadır.

Örnek 6.1: Aşağıdaki yapı 4×4/3 lük bir yarı-latin karedir.

Aαa	Bβb	Cγc	Dδd
Dδd	Aαa	Bβb	Cγc
Cγc	Dδd	Aαa	Bβb
Bβb	Cγc	Dδd	Aαa

Bu yarı Latin karenin grafiği aşağıda verildiği gibidir.



Şekil 6.4: 4×4/3 lük bir yarı-latin karenin grafiği

Bir ortogonal yarı Latin karenin işlem ilişki grafiği, her biri k tane köşeden oluşan ve her bir kenarın n kez tekrar ettiği n tane tam grafikten oluşmaktadır.

6.5 Trojan Kare

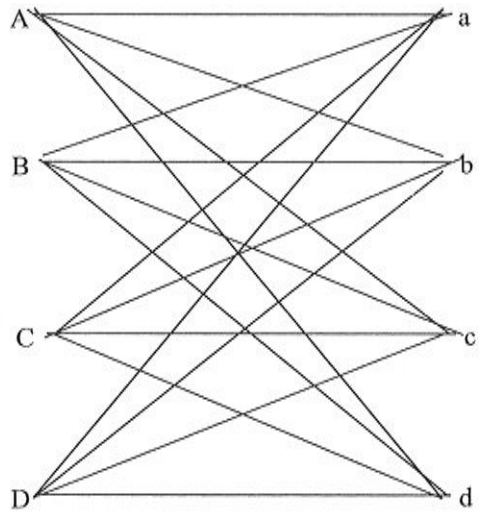
Trojan kare optimal Yarı Latin karedir. Bu isim Darby ve Gilbert(1958) tarafından verilmiştir. Harsberger ve Davis(1952) elde ettikleri Trojan Kareye, Latinize edilmiş Dikdörtgensel Latin kare adını vermişlerdir. Bir Trojan kare, $n \times n$ boyutlu Latin karelerin k karşılıklı bağımsız (mutually orthogonal) bir setini içerir. Yarı Latin karenin her bloğu, tüm tek karelerin uygun hücrelerinde meydana gelen işlemleri içerir. *AGSEMILATIN*, Greko-Latin karenin varolduğu herhangi bir n değeri için Trojan kare oluşturabilir. Örneğin, $n = 6$ için Trojan kare yoktur. Trojan kare'de k, 1'den büyük ve n 'den küçük olmalıdır $1 < k < n$.

Trojan kareler,her bir hücre bir blok gibi düşünüldüğünde çift yeniden çözülebilir eksik blok tasarımlar gibi düşünülebilir. Bununla ilgili çalışmalar Robinson(1966)da bulunabilir. Bu tasarımların detaylı olarak incelenmesi Preece(1967a)da bulunabilir. Trojan karelerin istatistiksel uygulamaları Edmonson(1998) tarafından verilmiştir. Trojan karelerin genelleştirilmişi Edmonson(2002) tarafından çalışılmıştır.

4x4/2'lik Trojan kare için bir örnek aşağıdaki gibi verilebilir.

Aa	Bb	Cc	Dd
Bc	Ad	Da	Cb
Cd	Dc	Ab	Ba
Db	Ca	Bd	Ac

Bu trojan karenin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 6.5: 4x4/2'lik Trojan karenin grafiği

Buradan görüldüğü gibi trojan karenin işlem ilişki grafiği iki-kısımlı tam grafiktir. Bu ifade genelleştirilecek olursa, bir yarı Latin karenin trojan kare olması için işlem ilişki grafiğinin k-parçalı tam grafik olmasıdır(Bailey,1992).

6.6 Yarı Tamamlanmış Latin Kare

A	B	C	D	E
E	C	A	B	D
C	D	B	E	A
D	A	E	C	B
B	E	D	A	C

Bu bir Latin karedir çünkü her harf satır ve her sütunda yalnızca bir kere gözükmüştür. Bu aynı zamanda yarı tamamlanmış özelliğini de sağlamaktadır. Çünkü her harf komşu (bitişik) harfi ile yatay ve dikey olarak 2 kez gözükmüştür.

6.6.1 Satır- yarı tamamlanmış latin kare

Bir Latin kare, eğer harf sembollerinin her sıralandırılmamış (unordered) çifti, karenin her bir satırında ardışık pozisyonda kesin olarak 2 defa gözüküyor ise Satır- Yarı Tamamlanmış olarak isimlendirilir.

Örneğin, A-C, A-D, A-E, B-D, B-E, C-E sıralanmamış çiftlerdir. A-C için, AC çifti 2. satır ve 5. satır' da ardışık olarak yan yana gelmiştir. B-D için, BD çifti 2. satır ve 3. satır'da yan yana gelmiştir.

6.6.2 Sütun- yarı tamamlanmış latin kare

Bir Latin kare, eğer harf sembollerinin her sıralandırılmamış (unordered) çifti, karenin her bir sütununda ardışık pozisyonda kesin olarak 2 defa gözüküyor ise Sütun- Yarı Tamamlanmış olarak isimlendirilir.

Örnek olarak, sütuna göre A-C, A-D, A-B, E-D, E-B, C-B sıralanmamış çiftlerdir. A-C için, AC çifti 3. sütun ve 4. sütun' da ardışık olarak yan yana gelmiştir.

6.7 İzotopik Latin Kareler

Bir Latin kare, diğer bir Latin karenin satırları, sütunları ve sembollerinin yer değiştirmesi ile elde edilebiliyorsa, bu iki Latin kare *izotopik* denilir.

İzotopi, bir denklik ilişkisidir (equivalence relation). Latin karelerin tüm setleri *izotopik sınıfı* adı verilen alt setlere bölünebilir. Şöyle ki, aynı sınıftaki iki kare izotopik, farklı sınıftakiler izotopik değildir.

6.8. İkişerli Yaklaşık Ortogonal Latin Kare Seti (MNOLS-Mutually Nearly Ortogonal Latin Square)

Tanım 6.1: L_1 ve L_2 , v=2m olan ve {0,1,2,...,2m-1} sembollerinden oluşan Latin kareler olsun. Bu iki Latin karenin MNOLS olması için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır.

1. Bu Latin karelerin her birinin i. satır ve j. sütun elemanları eşleştirildiğinde aynı elemandan iki tane yan yana olmayacak. Başka bir deyişle, L_1'den gelen eleman l ve L_2'den gelen eleman l' ise $l' \neq l$ olmalıdır.
2. $|l - l'| \neq m$ ise bu çift 2 kere, değil ise 1 kez gözükmelidir.

Çift mertebeli ikişerli yaklaşık ortogonal latin karelerin sınırları aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 6.3(Bose ve Bush,1952): L_1, L_2, ...,L_t $v=2m$ mertebeli ve {0,1,2,...,2m-1} sembollerinden
oluşan t tane Latin kare olsun. Bu Latin kareler karşılıklı yakın ortogonal ise

$$t \leq \frac{v}{2} + 1 \quad v \equiv 2 \bmod 4$$

$$t \leq \frac{v}{2} \qquad v \equiv 0 \bmod 4$$

eşitsizlikleri sağlanır.

t tane ikişerli yaklaşık ortogonal Latin kare(MNOLS) de t, sınırlara eşit olursa, bu t tane ikişerli yaklaşık ortogonal Latin tam(complete) *MNOLS* seti oluşturur.

6.9 Youden Kare

Deney düzenlemede kullanılan youden kare eksik blok düzenler sınıfına girer. Kuruluşunda simetrik dengeli tamamlanmamış blok tasarımı (SDTBT)kullanılır.

Youden kare tasarımlar, tekrarların ve denemelerin eşit sayıda olması için yeterli materyalin olmadığı durumlarda deney birimlerinin heterojenliğini ortadan kaldırmak için kullanılır.

Tanım 6.2: $T_1, T_2, \ldots\ldots T_n$ boş olmayan ve ayrık olmaları gerekmeyen setler olsun. $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ seti, her i için $a_i \in T_i$ her $i \neq j$ için $a_i \neq a_j$ olmak üzere $T_1, T_2, \ldots, T_n$ seti için bir *SDR* (system of distinct representatives) dir.
b sütunun oluşturduğu SDR, v sembolün bir permütasyonu olacaktır ve youden kare SDR'nin ardışık olarak alınması ile elde edilecektir.

Teorem 6.4(Raghavarao,1971): $T_1, T_2, \ldots, T_n$ setinin *SDR* ye sahip olması için gerek ve yeter koşul $k, i_1, i_2, \ldots, i_k$ için $1<k<n$ ve $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n$ olmak üzere $\left|T_{i_1} \cup T_{i_2} \cup \ldots \cup T_{i_k}\right| > k$ olmasıdır.

Teorem 6.4'e göre DTBT nin bir SDR oluşturduğu açıktır.

Tanım 6.3: v sembolün aşağıdaki koşullan sağlayacak şekilde k satır ve v sütunda düzenlenmesi youden kare düzeni olarak bilinir.

a) Her eleman her satırda bir kez görünür,

b) Sütunlar DTBT biçimindedir

Teorem 6.5(Raghavarao,1971): Bir Youden kare daima DTBT den kurulabilir.

Teorem 6.6(Raghavarao,1971): DTBT ye karşılık gelen youden karelerin saynsı en az $k!(k-1)!\ldots.1!$ kadardır.

Çizelge 6.4'deki gibi bir tasarım ele alınsın.

Bloklar

İşlemler	1	2	3	4	5	6	7
A	X				X		X
B	X	X				X	
C		X	X				X
D	X		X	X			
E		X		X	X		
F			X		X	X	
G				X		X	X

Çizelge 6.4: $b = v = 7$, $r = k = 3$, $\lambda = 1$ parametreli SDTBT

Çizelge 6.4'de SDTBT verilmiştir. Bundan faydalanarak aşağıdaki Youden karesi yazmak mümkündür.

BLOKLAR

1	2	3	4	5	G	7
A	B	C	D	E	F	G
B	C	D	E	F	G	A
D	E	F	G	A	B	C

Çizelge 6.5: Youden kare

Çizelge 6.4'de verilen Youden karenin Teorem 6.6'ya göre bir tane olmadığı açıktır. Bu yapı *PG(2,2)* ile tanımlanabilir. Burada *PG(2,2),* elemanları *GF(2)* ile tanımlanan projektif geometriyi göstermektedir.

6.10 Latis tasarımlar

Çok sayıda işlem bulunduğu bir deneyde, bunları bloklara yerleştirmek çok zordur (bazen olanaksızdır). Bazı yerleştirmelerde bloklar arası varyans, bloklar içi varyanstan küçük olur. Bu ise arzu edilmez. Bu durumda işlemler varyeteler çok etkenli bir deney düzenindeki etkenler arası kombinasyonlar gibi düşünülür. Elde edilen tasarıma Yarı Çok Etkenli tasarım (Quasi Factorial Design),

Dörtköşe Düzen (Lattice Design) denir. Bu tasarımlar, Homojen veri bulmanın zor olduğu ve çok sayıda işlemin bulunduğu yerlerde kullanılabilir. Bu tasarımlar ilk defa Yates tarafından 1936' da kullanılmıştır.

Bazı sanal etkenlerin ve bunların etkileşimlerinin etkileri blok etkileriyle farklı tekrarlarda karıştırılır. Bunun sonucu, bloklar içi varyansta, bloklar arası varyansa göre azalmalar gözükür. Böylece etkisi karışmamış etki ve etkileşimlerin testlerinde rastgele bloklara göre etkinlik elde edilir.

İşlemlerin bloklara dağıtımı geometrik bilgilere göre yapılırsa homojen tekrarlara ulaşılır. Bu durumda etkisi karışmamış etken ya da kombinasyonların testlerinde aynı duyarlılık sağlanır.
Latis tasarımda, p^n tane işlem vardır. Bunlar, önce p genişlikli bloklara yerleştirilir. Bu, herbiri p düzeyli n tane etkenin oluşturduğu faktöriyel tasarım gibi düşünülür. Diğer taraftan çok sayıda işlem, p yerine k genişlikli $(k<p)$ bloklara dağıtılarak bir çözüm yolu denenebilir. Latis düzen ile dengeli tamamlanmamış blok düzeni aşağıdaki bağıntılara uyar.

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1},\ r=k+1=p+1,\ bk=rv$$

Latis tasarımda, işlem sayısının, bir asal veya asal sayın kuvveti olduğu durumlar Bruck(1963) tarafından verilmiştir. Daha sonra latis tasarımların geometrik özellikleri Bayrak ve Gönen(1998, 2000)de verilmiştir.

Latis tasarımlarda sonlu geometri ilişkilendirildiğinde, etken ve etken kombinasyonları noktalarla, bloklar da doğrularla gösterilebilir. Noktaların uzayı ve doğruların uzayı birbirinin dual uzayları olmaktadır. Latis tasarımlara ait bazı bilgiler dual uzaylara ait özelliklerle açıklanabilir.

Latis tasarımda işlemin her biri p genişlikli p^{n-1} bloka dağıtılır. p^n işleme ait p^n-1 serbestlik derecesi, her sanal etken için p-1 serbestlik derecesine bölününce, $p^{n-1}+p^{n-1}+\ldots+p+1$ tane farklı etki karışımı elde edilir.

Burada, sanal düzen ile p^n elemanlı sonlu cisim GF(p^n) ilişkilendirilecektir. *PG(m,p^n)* nin doğruları bir uzay oluşturur. Her doğru bir bloğa karşılık geldiğinden ilgili uzaya *Bloklar Uzayı* denilir.

Doğrular üzerindeki noktalar etken ve/veya etki karışımı diye adlandırılır ki bunlar *işlemlere* karşılık gelir. Bu noktaların da oluşturduğu bir uzay vardır. Bu iki uzay birbirinin *dual uzayı* olur. Sanal düzenin geometrik açıklamasın yapmak için dual uzaylar kavramından yararlanılır.

27 tane işlem olsun. Bunlar her biri üçer düzeyli *3* etkenden oluşan faktöriyel düzene benzemektedir. Bu $p^n=3^3$ şeklinde gösterilir. *27* tane işlem ile aynı zamanda her biri p düzeyli n tane etkenden meydana gelen Latis tasarım oluşturulur. Buradan, etki ya da etki karışımlarının düzeyleri *GF(3)* ile tanımlanabilir. *GF(3)* üzerine kurulan *PG(2, 3)* sonlu analitik projektif geometrisinin uygunluğu açıktır. Bu takdirde *PG(2, 3)'* deki blok sayısı $p^2 + p + 1 = 13$ ve *EG(2, 3)* deki blok sayısı $p^2+p = 12$' dir. *PG(2, 3)'*deki nokta sayısı $p^2 + p + 1 = 13$ ve *EG(2, 3)'* deki nokta sayısı p^2=9'dur. *PG(2, 3)* ün her noktasından $p+1=4$ tane doğru geçer, her doğru üzerinde $p+1=4$ nokta bulunur. *PG(2, 3)* ün bir doğrusu çıkarıldığında, bunun üzerindeki $p+1=4$ noktanın her birinden geçen doğruların sayısı $p = 3$ olur. Böylece doğrular ortak noktası olmayan, bir anlamda paralel doğrulara dönüşür. Paralel kalan her $p = 3$ doğru grubunun atılan bir düğüm noktası vardır. Bu düğüm noktalarından geçen doğru demetleri, çıkarılan doğru üzerindeki noktaların dualidir.

Paralel doğru gruplarından her birinin kapsadığı etken ve/veya etkileşim kombinasyonları homojen tekrarları oluşturur. Böylece $p + 1$ homojen tekrar elde edilir. Bu homojen tekrarlar veya $p + 1$ tane doğru demeti, düğüm

noktalarının dual uzayını meydana getirir. Dolayısıyla, bir homojen tekrar, geometrik anlamda düğüm noktası çıkarılmış doğrular demetidir. Homojen tekrarlar öyle bloklar oluşturur ki bu bloklar *EG(2, 3)* geometrisinin tüm özelliklerini taşır. Oluşturulan bu bloklar yardımıyla etken veya etkileşim kombinasyonlarının her biri için eşit sayıda tekrar elde edilir. Bu özellik test yapımında blok içi hata hesabını kolaylaştırır.

Homojen tekrarlanan *EG(2, 3)* uzayında, bir doğrunun dışındaki bir noktanın, bu doğrunun her noktası ile toplamı alındığında diğer doğru (yani diğer blok) elde edilir.

Her noktasının toplamı alınan doğru ile, dışarda alınan noktayı taşıyan doğru bağımsız kabul edilir. Toplam yoluyla bulunan doğru bağımlı olacağından, her tekrarda $p - 1$ serbestlik derecesinin mevcut olacağı söylenir. İlave olarak p^3 sanal düzeni için $(p + 1)(p - 1)$ serbestlik derecesi elde edilir. Bu serbestlik derecesi sanal düzeninde etki karışımı için gerekli olan miktardır.

Örnek 6.2 : *27* işlemi olan Latis Tasarım $b = v = 13$, $r = k = 4$, $\lambda = 1$ parametreli bir tasarım şeklindedir. Aşağıdaki Çizelgede, etken ve etkileşimlerin mümkün karışımlarının bir Çizelgesi verilmiştir.

Sistem	A	B	AB	AB^2	C	AC	AC^2	BC	BC^2	ABC	ABC^2	AB^2C	AB^2C^2
1	X	X	X	X									
2	X				X	X	X						
3	X							X		X			X
4	X								X		X	X	
5		X			X			X	X				
6		X				X				X		X	
7		X					X				X		X
8			X		X					X	X		
9			X				X	X				X	
10				X	X							X	X
11			X			X			X				X
12				X		X		X			X		
13				X			X		X	X			

Çizelge 6.6: Etken ve etkileşimlerin mümkün karışımları

Çizelge 6.6'da *A* etkeninin etkisinin karıştığı düşünülsün. Eğer *B* karışmış ise bu takdirde *AB* ve AB^2' de karışmıştır. Böyle oluşturulan *A, B, AB,* AB^2 grubuna **sistem** denir. Diğer bir karışan grubun *A, C, AC* ve AC^2 olduğu görülmektedir. *A, BC, ABC,* AB^2C^2 grubunun ve *A,* BC^2, ABC^2, AB^2C grubu da karışmıştır. Diğer karışan etken ve etkileşimler çizelgeden okunabilir.

$PG(m, p^n)$ ve $EG(m, p^n)$ geometrilerinin özellikleri kullanarak karışması mümkün olabilen etken ve etkileşim gruplarını ortaya koyulabilir. Çizelge 6.6da verilen etken ve etkileşim karışımları $PG(2,3)$ de Çizelge 6.7'deki gibi yazmak mümkündür.

Çizelge 6.7'deki 5 nolu sistem dikkate alınsın. Bu bloğun *PG(2, 3)'* deki karşılığı [1, 0, 0] doğrusudur. *B, C, BC, BC^2'* nin etkileri karıştığından bunların oluşturduğu doğruda *PG(2, 3)'* den çıkarılmış olur. Elde edilen *EG(2, 3)'* deki değerler, $b = 12$, $v = 9$, $k=r=4$ ve $\lambda=1$ olacaktır.

Sistem		A	B	AB	AB^2	C	AC	AC^2	BC	BC^2	ABC	ABC^2	AB^2C	AB^2C^2
		100	010	110	1-10	001	101	10-1	011	01-1	111	11-1	1-11	1-1-1
1	[0,0,1]	X	X	X	X									
2	[0,1,0]	X				X	X	X						
3	[0,-1,1]	X							X		X			X
4	[0,1,1]	X								X		X	X	
5	[1,0,0]		X			X			X	X				
6	[1,0,-1]		X				X				X		X	
7	[1,0,1]		X					X				X		X
8	[1,-1,0]			X		X					X	X		
9	[-1,1,1]			X				X	X				X	
10	[1,-1,1]				X	X							X	X
11	[1,1,0]			X			X			X				X
12	[1,1,-1]				X		X		X			X		
13	[1,1,1]				X			X		X	X			

Çizelge 6.7: *PG(2,3)* de etken ve etkileşim karışımları

Dikkate alınan [1, 0, 0] doğrusu üzerindeki noktaların (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 1, -1) olduğu Çizelge 6.7'den görülmektedir, [1, 0, 0] doğrusunun çıkarılması ile üzerindeki noktaların da çıkarılacağı aşikardır. Bu noktaların her biri bir

düğüm noktasıdır. Bu düğüm noktalarından geçen doğrular [1, 0, 0] doğrusu üzerindeki noktaların dualleri olan doğrulardır.

Doğrular	Doğrular Üzerindeki Noktalar				Etken ve Etki Karışımları			
[1, 0, 0]	(0,1,0)	(0,0,1)	(0,1,1)	(0,1,-1)	B	C	BC	BC^2
[0, 0, 1]	(1,0,0)	(0,1,0)	(1,1,0)	(1,-1,0)	A	B	AB	AB^2
[1, 0, 1]	(0,1,0)	(1,0,-1)	(1,1,-1)	(1,-1,-1)	B	AC^2	ABC^2	AB^2C^2
[1, 0, -1]	(0,1,0)	(1,0,1)	(1,1,1)	(1,-1,1)	B	AC	ABC	AB^2C

Çizelge 6.8: (0, 1, 0) noktasını düğüm noktası olarak kabul eden doğrular ve üzerindeki noktalar

Doğrular	Doğrular Üzerindeki Noktalar				Etken ve Etki Karışımları			
[1, 0, 0]	(0,1,0)	(0,0,1)	(0,1,1)	(0,1,-1)	B	C	BC	BC^2
[0, 1, 0]	(1,0,0)	(0,0,1)	(1,0,1)	(1,0,-1)	A	C	AC	AC^2
[1, 1, 0]	(0,0,1)	(1,-1,1)	(-1,1,1)	(1,-1,0)	C	AB^2C	AB^2C^2	AB^2
[1, -1, 0]	(1,1,0)	(0,0,1)	(1,1,1)	(1,1,-1)	AB	C	ABC	ABC^2

Çizelge 6.9: (0, 0,1) noktasını düğüm noktası olarak kabul eden doğrular ve üzerindeki noktalar

Doğrular	Doğrular Üzerindeki Noktalar				Etken ve Etki Karışımları			
[1, 0, 0]	(0,1,0)	(0,0,1)	(0,1,1)	(0,1,-1)	B	C	BC	BC^2
[0, 1, -1]	(1,0,0)	(0,1,1)	(1,1,1)	(1,-1,-1)	A	BC	ABC	AB^2C^2
[1, 1, -1]	(1,-1,0)	(1,0,1)	(0,1,1)	(1,1,-1)	AB^2	AC	BC	ABC^2
[1,-1,-1]	(1,1,0)	(1,0,-1)	(0,1,1)	(1,-1,1)	AB	AC^2	BC	AB^2C

Çizelge 6.10: (0, 1,1) noktasını düğüm noktası olarak kabul eden doğrular ve üzerindeki noktalar

Doğrular	Doğrular Üzerindeki Noktalar				Etken ve Etki Karışımları			
[1, 0, 0]	(0,1,0)	(0,1,1)	(0,0,1)	(0,-1,1)	B	C	BC	BC^2
[1, 1, 1]	(1,1,1)	(1,-1,0)	(1,0,-1)	(0,-1,1)	ABC	AB^2	AC^2	BC^2
[0, 1, 1]	(1,0,0)	(0,-1,1)	(1,-1,1)	(1,1,-1)	A	BC^2	AB^2C	ABC^2
[-1, 1, 1]	(1,1,0)	(1,0,1)	(-1,1,1)	(0,-1,1)	AB	AC	AB^2C^2	BC^2

Çizelge 6.11: (0,1,-1)noktasını düğüm noktası olarak kabul eden doğrular ve üzerindeki noktalar

Bu işlemlerden sonra elde edilen homojen tekrarlar aşağıdaki gibidir;

Homojen Tekrar-1			Düğüm Noktası
A	AB	AB^2	B
AC^2	ABC^2	AB^2C^2	
AC	ABC	AB^2C	

Çizelge 6.12: Çizelge 6.8'den Elde Edilen Homojen Tekrarlar

Homojen Tekrar -2			Düğüm Noktası
A	AC	AC^2	C
AB^2C	AB^2C^2	AB^2	
AB	ABC	ABC^2	

Çizelge 6.13: Çizelge 6.9'den Elde Edilen Homojen Tekrarlar

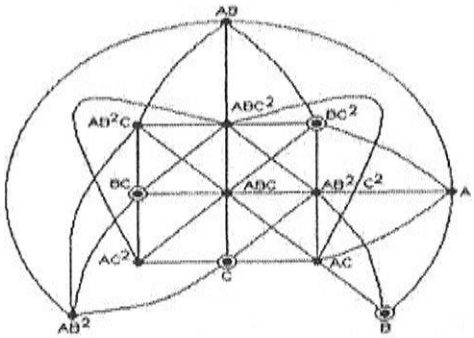
Homojen Tekrar-3			Düğüm Noktası
A	ABC	AB^2C^2	BC
AB^2	AC	ABC^2	
AB	AC^2	AB^2C	

Çizelge 6.14: Çizelge 6.10'dan Elde Edilen Homojen Tekrarlar

Homojen Tekrar-4			Düğüm Noktası
ABC	AB^2	AC^2	BC^2
A	AB^2C	ABC^2	
AB	AC	AB^2C^2	

Çizelge 6.15: Çizelge 6.11'dan Elde Edilen Homojen Tekrarlar

Bu dört homojen tekrardan aşağıdaki şekil elde edilir(Bayrak ve Gönen, 1998).



Şekil 6.6: Dört Homojen tekrarın EG(2,3)'de bir gösterimidir.

Burada dikkat edilecek diğer bir durum, homojen tekrarların her satırının, *PG(2,3)* de bir doğru olarak düşünüldüğüdür. Bu doğru üzerindeki her noktanın, homojen tekrarların diğer bir doğrunun tüm noktalan ile toplamları alındığında homojen tekrarların yukarıda bahsedilen iki doğrusunun dışındaki doğrusu elde edilir. Dolayısıyla her tekrardaki serbestlik derecesi *2* olup, dört tekrar için *8* serbestlik derecesi elde edilir. Bu etki karışım sistemi için gerekli olan değerdir.

Ayrıca, geometrik özelliklerin kullanımı nedeniyle blok yapma, keyfi ve yanlış olmaz. Düğüm noktaları çıkarılmış doğru demetlerinin paralellik özelliğinden hangi bloğa hangi kombinasyonların gireceği bellidir.

6.10.1 Dikdörtgensel Latisler

Latis deneme tasarımlarının bu tipi Harsbarger tarafından tanıtılmıştır (Harshberger, 1947). Kare latislerden daha az simetrik olmalarına rağmen daha avantajlıdırlar. Bu düzenlerde $k>w$ olmak üzere $k(k-w)$ işlem test edilmek istenir.

Eğer k, asal sayı ise $k(k-w)$nın k ve $k-w$ çarpanları vardır. O halde bu düzeni oluşturmanın bir yolu kxk boyutlu bir karede, her satır ve sütundan w tane harfin silinmesi ile, işlemlerin $(k-w)$ bloğa yerleştirilmesi olabilir.

$w=1$ için, k, asal sayı veya asalın kuvveti ise; köşegen elemanları aynı harften oluşan latin kare gözönüne alındığında, buna ortogonal olan diğer kareler istenilen özelliği sağlar.

k, teksayı olduğunda, 1. satın 0,1,2,...,k-1 gibi numaralandırıp, i. satıra 1 ekleyerek (modulo k ya göre indirgenmiş olarak) $i+1$ satırı,... ve dolayısıyla tam kare yi elde etmek mümkündür. Bu kare istenilen özelliği sağlar.

Dikdörtgensel latislerde, yalnız iki ortogonal tekrar varsa, Basit Dikdörtgen Latis tasarımı elde edilir. Üç tekrar kullanıldığında, tasarım denge durumuna daha çok yaklaşır. Çünkü bir blokta daha fazla işlem birlikte gözükmüş olur.

6.10.2 Latinleştirilmiş Dikdörtgensel Latis Düzenleri

İşlem sayısının, iki ardışık tam sayının çarpımı olduğu durumdur. Bu düzenlerde, birbirine ortogonal olan k satır ve k set mevcuttur. Her set. (k-1) işleme sahip tamamlanmamış bloklardan oluşur (Harshberger, 1952).

Bu düzenleri oluşturmada ortogonal latin kare tam seti gözönüne alınacaktır. Çünkü tam setler istenen Özelliğe sahiptir.

4. mertebeden ortogonal latin kare tam seti aşağıdaki gibidir

$$L_1 = \left\{ \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & C & D & B \\ B & D & C & A \\ C & A & B & D \\ D & B & A & C \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & D & B & C \\ B & C & A & D \\ C & B & D & A \\ D & A & C & B \end{bmatrix} \right\}$$

Lı seti 4. mertebeden projektif düzlem tanımlar. Lı sisteminden, Latinleştirilmiş Dikdörtgen Latis düzeni elde edilebilir. Latinleştirilmiş dikdörtgensel latis tasarımlarının homojen tekrarları elde etmek için şu işlemler sırasıyla yapılır:

(i) L_1de 1. latin karesinin ilk sütunu atılır. Geriye kalan üç sütunu yazılır.

(ii) Birinci sütunda kalan üç harfe (B,C,D) alfabedeki sıralarına göre 1,2,3 numaralan verilir

(iii) İkinci satırdaki kalan üç harfe (A,D,C) alfabedeki sıralarına göre 4,6,5 numaraları verilir. Bu numaralandırma dördüncü satır içinde tekrarlanır. Böylece 1.Tekrar elde edilir.

(iv) Birinci Latin kareden sırasıyla A,B,C,D'nin bulundukları konumların numaralan yazılır. Böylece 2. Tekrar elde edilir.

(v) L_1'in 2. Latin karesinin yine 1. Sütünü atılır geri kalan üç sütünün harfleri 1.Latin karenin üç sütununun altını aynı konumlarda yazılır. Böylece 2.Tekrar elde edilir,

(vi) Aynı düşünce tarzıyla L_1'in üçüncü Latin karesinden 4. Tekrar elde edilir.

L_1 tam setinden elde edilen Latinleştirilmiş dikdörtgensel Latis (LDL1) seti aşağıdadır.

$$LRL_1 = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 9 & 7 & 8 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}}^{Tek1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 1 & 8 & 11 \\ 2 & 5 & 12 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}}^{Tek2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 5 & 9 & 11 \\ 3 & 7 & 12 \\ 1 & 6 & 10 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}}^{Tek3}, \overbrace{\begin{pmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 2 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 11 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}}^{Tek4}, \right\}$$

L1 , 4. Mertebeden Projektif düzlem tanımlamakla birlikte LDL1 , projektif düzlem aksiyomlarını sağlamaz. Çünkü 1. Sütunun atılışı geometrik olarak, bir doğru ve üzerindeki noktaların atılışı anlamındadır.

Bloklar doğrular gibi, işlemler doğru üzerindeki noktalar gibi düşünüldüğünde. 16 doğrusu, 12 noktası olan bir isabet yapı ortaya çıkar.

d_1: 1,2,3 d_2=4,6,5 d_3=9,7,8 d_4=12,11,10
d_5=4,7,10 d_6=l,8,ll d_7=2,5,12 d_8=3,6,9
d_9=5,9,ll d_{10}=3,7,12 d_{11}=l,6,10 $d_{,12}$=2,4,8
d_{13}=6,8,12 $d_{,4}$=2,9,10 d_{15}=3,4,ll d_{16}=l,5,7

λ : Herbir işlem çiftinin birlikte görünme sayısı olmak üzere λ_1=1 ve λ_2=0 durumu gözlenir. LDL_1 ile verilen sistemin birliktelik yapısı Çizelge 6.16 deki gibidir.

	Tek 1				Tek 2				Tek 3				Tek 4			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	X					X					X					X
2	X						X					X		X		
3	X							X		X					X	
4		X			X							X			X	
5		X					X		X							X
6		X						X			X		X			
7			X		X					X						X
8			X			X						X	X			
9			X						X	X				X		
10				X	X						X			X		
11				X		X			X						X	
12				X			X			X			X			

Çizelge 6.16: LDL_1 için birliktelik yapısı

Tanım 3.1 dikkate alındığında, Çizelge 6.16'in (r, k, 1, 0) karakteristikli iki birliktelik sınıfına sahip KDTBT oluşturduğu görülmektedir. Çizelge 6.16 için ilgili parametreler aşağıdaki gibi bulunur.

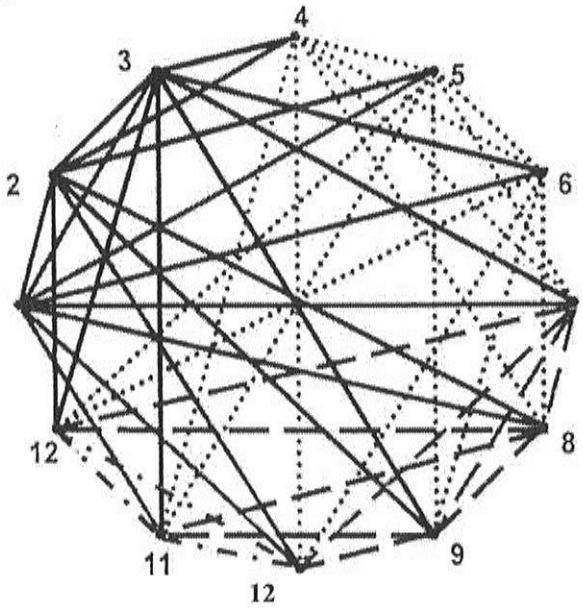
$n_1=8$, $n_2=3$, $v=12$, $b=16$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$

$$P_1=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Dikkat edilecek olursa, kare latislerde homojen tekrarların net Özelliğini göstermesine rağmen, dikdörtgensel latis durumunda bu özellik görülmemektedir.

Çizelge 6.16da verilen birliktelik yapısı (r, k, t) karakteristikli GDG'ye izomorftur

Çizelge 6.16da verilen birliktelik yapısının GDG üzerine kurulan (4,3.2) kısmi geometrisi olduğu görülür. Bunun için bir gösterim aşağıda verilmiştir (Bayrak ve Gönen, 2000).



Şekil 6.7: (4,3,2) kısmi geometrisinin bir gösterimi

Lı setinde, her bir kareden bir blok yerine ardışık iki blok atıldığında $k(k\text{-}w)$ dikdörtgensel Latis tasarımı elde edilir. Bunun için birliktelik yapısı ve parametreleri aşağıdaki gibidir.

Bloklar

	Tek 1				Tek 2				Tek 3				Tek 4			
İşlemler	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	X						X					X		X		
2	X							X		X					X	
3		X						X			X		X			
4		X					X		X							X
5			X		X					X						X
6			X			X						X	X			
7				X		X			X						X	
8				X	X						X			X		

Çizelge 6.17: $k(k\text{-}w)$ dikdörtgensel Latis için birliktelik yapısı

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, $n_1=4$, $n_2=3$, $v=8$, $b=16$, $r=4$, $k=2$, $t=1$

$$P_1=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Çizelge 6.17'deki yapının (4,2,1) kısmi geometrisi olduğu görülür. Homojen tekrarlar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}5 & 8\\ 6 & 7\\ 1 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}4 & 7\\ 2 & 5\\ 3 & 8\\ 1 & 6\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 8\\ 2 & 7\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

Çizelge 6.17 ile verilen birliktelik yapısının (r, k, t) karakteristikli GDG'ye izomorftur. Bu grafiğin duali, 8 doğrusu 16 noktası olan pseudo geometrik grafiktir.

d_1=1,7,12,14
d_2=1,8,10,15
d_3=2,8,11,13
d_4=2,7,9,16
d_5=3,5,10,16
d_6=3,6,12,13
d_7=4,6,9,15
d_8=4,5,11,14

parametreler şöyledir: n_1=6, n_2=9, k=4, r=2, λ_1=1, λ_2=0, v=16, b=8,

$$P_1=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}\quad P_2=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}$$

pseudo geometrik grafiğinin karakteristikleri (2, 4, 1) dir.

t=r-l olduğundan, pseudo geometrik grafik, pseudo net grafiktir veya dejenere net grafiktir.

Duallik gözönüne alındığında 2 tekrara sahip kare Latis elde edilir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 12 & 14 \\ 2 & 8 & 11 & 13 \\ 3 & 5 & 10 & 16 \\ 4 & 6 & 9 & 15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 10 & 15 \\ 3 & 6 & 12 & 13 \\ 2 & 7 & 9 & 16 \\ 4 & 5 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

- Homojen tekrarlar pseudo net grafik özelliği gösterdi. Pseudo net için defişinsi d= k-r+1 = 4-2+1=3 dir.
- GDG'in duali pseudo net grafiktir.

3. mertebeden ortogonal Latin kare tam seti alınmış olsun.

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} A & C & B \\ B & A & C \\ C & B & A \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \\ C & A & B \end{pmatrix} \right\}$$

L_2 setinden elde edilen latinleştirilmiş dikdörtgensel latis düzeni için Homojen tekrarlar şöyledir.

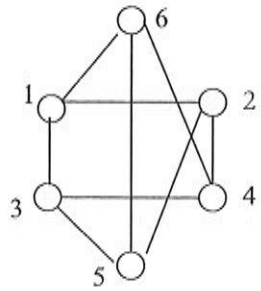
$$\underset{\text{Tek 1}}{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{Tek 2}}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{Tek 3}}{\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}$$

Homojen tekrarlara ilişkin birliktelik yapısı Çizelge 6.18'de verilmiştir.

	BLOKLAR								
İşlemler	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		X		X				X	
2			X	X					X
3	X				X			X	
4			X		X		X		
5	X					X			X
6		X				X	X		

Çizelge 6.18:Homojen tekrarla ilişkin birliktelik yapısı

Homojen tekrarlar (3, 2, 1) kısmi geometrisidir. (3, 2, 1) kısmi geometrisinin bir gösterimi aşağıda verilmiştir(Gönen ve Bayrak, 2001).



Şekil 6.8: (3,2,1) kısmi geometrisine ilişkin bir gösterim

(3, 2, 1) kısmi geometrisinin duali ; (2, 3, 1) pseudo geometri özelliği gösterir. ($k>r$). Elde edilen Homojen tekrarlar aşağıdaki gibidir.

$$\underset{\text{Tek 1}}{\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{Tek 2}}{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}}$$

Bu yapıda t=l olduğundan. Homojen tekrarlar pseudo net graf özelliği taşır. Bu net için defişinsi d=2 dir.

Dengeli tamamlanmamış bloklar düzeninin geometrik yapısı Projektif geometridir. Bu düzenlerden elde edilen kare Latislerin homojen tekrarları Öklit geometrisidir.

Kısmi dengeli tamamlanmamış blok düzenlerinin birliktelik şemasının geometrik yapısı GDG'a izomorftur. Dikdörtgensel Latislerin homojen tekrarlarının geometrik yapısı (r, k, t) kısmi geometrisine uyar.

q mertebeli MOLS' nin tam kümeleri DTBT'lerin ilişkili iki ailesini oluşturmada kullanılabilir. İlk aile,

$$v = q^2 \ , \ b = q(q+1) \ , \ r = q+1 \ , k = q \ , \lambda = 1$$

parametrelerine sahiptir ve ikinci aile parametreleri aşağıdaki gibi olan bir SDTBT' dir :

$$v = q^2+q+1 \ , \ k = q+1 \ , \ \lambda = 1$$

Bu tasarımlar sonlu geometrinin örnekleridir; birincisi afin düzlem ikincisi projektif düzlemdir.

İlk tasarım şu şekilde bulunur:

$L_1, L_2,...,L_{q-1}$, q mertebeli MOLS' nin bir tam kümesi ve A, q^2 kadar farklı sembol içeren $q \times q$ matrisi olsun. q^2 tane sembolün bu kümesi üzerinde q genişliğindeki bloklar şu yolla tanımlanır: q blok vardır, bunlar A' nın satırlarıdır ve yine q blok vardır, bunlar da A' nın sütunlarıdır. Geri kalan q^2-q blok; her L_i sırasıyla alınıp A üzerine oturtularak ve L_i' de tek bir sembole karşı gelen A' nın elemanları bloklar gibi alınarak düzenlenir.

Örnek olarak 4 mertebeli MOLS tam kümesi düşünülsün.

1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
2 1 4 3	3 4 1 2	4 3 2 1
3 4 1 2	4 3 2 1	2 1 4 3
4 3 2 1	2 1 4 3	3 4 1 2

A matrisi ise aşağıdaki gibi olsun:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Tasarımın blokları şöyledir :

Satır ve sütunlar dikkate alındığında,

{1, 2, 3, 4} , {5, 6, 7, 8} , {9, 10, 11, 12} , {13, 14, 15, 16} ,

{1, 5, 9, 13} , {2, 6, 10, 14} , {3, 7, 11, 15} , {4, 8, 12, 16}

yazılabilir.

Latin kareler dikkate alındığında,

{1, 6, 11, 16} , {2, 5, 12, 15} , {3, 8, 9, 14} , {4, 7, 10, 13} ,

{1, 7, 12, 14} , {2, 8, 11, 13} , {3, 5, 10, 16} , {4, 6, 9, 15} ,

{1, 8, 10, 15} , {2, 7, 9, 16} , {3, 6, 12, 13} , {4, 5, 11, 14}

elde edilir.

Dolayısıyla tasarım, bir 2-(16, 4, 1) tasarımıdır.

İkinci tasarım birinciden aşağıdaki şekilde bulunur:

A' nın bir satırı olan her bloğa yeni bir eleman eklenir. A' nın bir sütunu olan her bloğa farklı yeni bir eleman eklenir. Bunun yanında diğer yeni elemanlar, aynı latin kareden gelen bloklara eklenir. Bu şekilde $q+1$ yeni eleman eklenmiş olur ve her blok $q+1$ genişliğine sahip olur. Yeni elemanların hepsini içeren yeni bir blok tasarıma eklenir. Böylece tasarımın blokları elde edilmiş olur.

Bu yöntem uygulanarak bulunan ikinci tasarımın blokları şöyledir :

Satır ve sütunlar dikkate alındığında,

{1, 2, 3, 4, α} , {5, 6, 7, 8, α} , {9, 10, 11, 12, α} , {13, 14, 15, 16, α} ,

{1, 5, 9, 13, β} , {2, 6, 10, 14, β} , {3, 7, 11, 15, β} , {4, 8, 12, 16, β}

yazılabilir.

Latin kareler düşünüldüğünde,

{1, 6, 11, 16, γ} , {2, 5, 12, 15, γ} , {3, 8, 9, 14, γ} , {4, 7, 10, 13, γ} ,

{1, 7, 12, 14, 0} , {2, 8, 11, 13, 0} , {3, 5, 10, 16, 0} , {4, 6, 9, 15, 0} ,

{1, 8, 10, 15, δ} , {2, 7, 9, 16, δ} , {3, 6, 12, 13, δ} , {4, 5, 11, 14, δ} , { α, β, γ, 0, δ}

elde edilir.

Sonuç olarak, bulunan tasarım bir 2-(21, 5, 1) tasarımıdır.

Genişliği n, grup sayısı k olan bir transversal tasarımın varlığı, mertebesi n olan $k-2$ ikişerli ortogonal latin kare $(MOLS)$ varlığına eşit olduğu bilinmektedir. Genişliği n olarak verilen ikişerli ortogonal latin karenin maksimum sayısı $N(n)$ ile gösterilsin. Bu yüzden bir $TD(k,n)$ tasarımının var olması $N(n) \geq k-2$ eşitsizliğinde sağlanır.

6.11. Notlar

Ortogonal Latin kare çiftlerinin($n \neq 2,6$) kuruluşu Bose ve Shrikhande(1960) ile Bose, Shrikhande ve Parker(1960) tarafından verilmiştir. Hedayat ve Shrikhande(1971) Latin kare, MOLS ve deneysel çalışmalardaki diğer tasarımlarla ilişkilerini ortaya koymuştur. Daha genel olarak Cochran ve G.M. Cox(1957), D.R. Cox(1958) ve Preece(1983) ise diğer tasarımlar arasından deney için uygun olan seçimi üzerinde çalışmışlardır. 6.nci merteben bir ortogonal Latin kare çiftinin mevcut olmayışı Stinson (1984) tarafından ispatlanmıştır. 10000 mertebeliye kadar MOLS'ların genişletilmiş listesi (Abel ve ark., 1996) de verilmiştir. Ayrıca Youden Karelere ilişkin detaylı bir çalışma Preece(1990) tarafından yapılmıştır. Federer(1949), Kempthorne ve Federer(1948a,b) çalışmalarında asal mertebeli Latis tasarımları dikkate almıştır.

6.12. Alıştırmalar

1) m=7 iken Latin kare tam setini oluşturunuz.
2) 1.sorudan faydalanarak a) afin b) projektif geometrinin isabet yapısını elde ediniz ve parametrelerini belirleyiniz.
3) m=6 iken Latin kare tam setinden faydalanarak Afin çözülebilir tasarımı elde ediniz.
4) 6x6/3 yarı Latin karesini oluşturunuz.
5) m=6 iken Latin kare tam setinden faydalanarak 6x6/3 Trojan karesini elde ediniz.
6) (7,4,2) tasarımından faydalanarak ilişkili Youden kare'yi kurunuz ve ilgili parametreleri belirleyiniz.
7) Bir Latin kare transpozuna ortogonal ise self-ortogonal olarak adlandırılır. $a,b \in Z_n$ alınsın. Z_n'in elemanlarıyla $m_{i,j}=a.i+b.j(\text{mod } n)$ kuralı kullanılarak $M=\{m_{i,j}\}$ tanımlansın. a) M matrisinin self ortogonal olduğunu gösteriniz. b) 7.nci mertebeden bir self ortogonal Latin kare kurunuz.

6.13. Kaynaklar

1. Abel R.J.R. Brouwer A.E., Colbourn C.J. and Dinitz J.H.,1996, Mutually orthogonal Latin squares(MOLS). In The CRC Handbook of Combinatorial Designs(Colbourn C.J. and Dinitz J.H. eds.), CRC Press, Boca Raton, s. 111-142.
2. Agrawal,H.L and Boob,B.S (1976) A Note on Method of Construction of Affine Resolvable Balanced Incomplete Block Designs,The Annls of Statistics,Vol. 4, No 5, 954-955.
3. Bailey R. A: Restricted randomization for neighbour-balanced designs. *Statistics and Decisions, Supplement* **2** (1985), pp. 237-248.
4. Bailey R. A., 1988, Semi-Latin squares. *Journal of Statistical Planning and Inference* **18**: 299-312.
5. Bailey R. A.: An efficient semi-Latin square for twelve treatments in blocks of size two. *Journal of Statistical Planning and Inference* **26** (1990), pp. 262-266.
6. Bailey R.A.: Efficient semi-Latin squares. *Statistica Sinica* **2** (1992), pp. 413-437.
7. Bayrak, H.; Gönen S. , Sanal deney düzeninde dualite. İstatistik koferansı, 1998,bildiriler kitabı, 245-250.
8. Bayrak, H. ; Gönen S., Dikdörtgensel Latisler üzerine bir çalışma, İstatistik sempozyumu 2000, Bildiriler Kitabı,37-54.
9. Bayrak H. and Turgut A.,1996, the classification of complete sets of pairwise orthogonal latin square corresponding the projective plane of order 4. Journal

of the institute of science and Technology, Gazi University, vol 9, no 4, 647-653.

10. Bose, R. C., and Bush, K. A., "Orthogonal Arrays of Strength Two and Three" ***Ann. Math. Stat.,*** 508-524, (1952)

11. Bose, R.C., and Shrikhande S.S., 1960, on the construction of sets of mutually orthogonal Latin squares and falsity of conjecture of Euler. Transactions of the American Mathematical Society, 95,191-209.

12. Bose R.C., Shrikhande S.S. and Parker E.T., 1960, Further results on the construction of mutually othogonal Latin squares and falsity of Euler's conjecture. Canadian Journal of Mathematics, 12, 189-203.

13. Clatworthy W.H., 1973, Tables of two-associate class partially balanced designs. National Bureau of standards applied mathematics series No. 63. Washington, D.C.: National Bureau of standards.

14. Cochran W.G. and Cox G.M.,1957, Experimental Designs, 2nd Ed. John Wiley , New York.

15. Cox D.R., 1958, Planning of Experiments. John Wiley, New York.

16. Darby L. A. and Gilbert N., The Trojan square. *Euphytica* 7 (1958), pp. 183-188.

17. Edmondson R. N.: Trojan square and incomplete Trojan square designs for crop research. *Journal of Agricultural Science* **131** (1998), pp. 135-142.

18. Edmondson R. N., 2002, Generalised incomplete Trojan designs, *Biometrika* 89(4):877-891.

19. Federer, W.T., 1949, The General Theory of Prime-Power Lattice Designs II. The Analysis for p^3 Varieties in Block of p Plots with more than 3 Replicates, Biometrics, 4, 144-161.

20. Gönen , S.; Bayrak H.; Latis Deneme Düzeni üzerine Bir Çalışma, İstatistik 2. Kongresi, 2-6 Mayıs 2001, Bildiriler Kitabı,188-191

21. Harshbarger B., 1947, Rectangular Lattices. Virginia Agr. Exp. Sta. Mem., 1.

22. Harshbarger B., Davis L.L., 1952, Latinized Rectangular Lattices, Biometrics, 8, 73- 84.

23. Hedayat A., and Shikhande S.S.,1971, Experimental Designs and Combinatorial systems associate with Latin Squares and Sets of mutually orthogonal square of order 6. Sankhaya A, 33, 423-432.

24. Kempthorne, O. and Federer, W.T., 1948a, The General Theory of Prime-Power Lattice Designs I. Introduction and Designs for p^n Varieties in Block of p Plots, Biometrics, 4, 54-79.

25. Kempthorne, O. and Federer, W.T., 1948b, The General Theory of Prime-Power Lattice Designs II. Designs for p^s Plots and Squares, Biometrics, 4, 109-121.

26. Mann, H.B., 1950, Analysis and Design of Experiments, Dover Publications, New York.

27. Preece D.A., 1967a, Cycle Generation of Robinson's Balanced Incomplete Block designs. Biometrics, 23, 574-578.

28. Preece D.A., 1967b, Nested Balanced Incomplete Block Designs. Biometrica, 54, 479-486.

29. Preece D.A., 1983, Latin Square, Latin Cubes, Latin Rectangles etc. In Kotz-Johnson, Encyclopedia of statistical Sciences Vol. 4, 504-510. John Wiley, New York.

30. Preece D.A., 1990, Fifty years of Youden squares: A Review, Bull. Inst. Math. Applic., 26, 65-75.

31. Preece D. A. and Freeman G. H.: Semi-Latin squares and related designs. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **45** (1983) pp. 267-277.

32. Raghavarao D., 1971, Constructions and combinatorial problems in design od experiments. Wiley, New York

33. Robinson, J., 1966, Balanced incomplete block designs with double Grouping of Blocks into replications. Biometrics, 22: 368-373.

34. Rojas B. and White R. F.: The modified Latin square. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **19** (1957), pp. 305-317.

35. Stinson, D.R.,1984, A short prof of the nonexistence of a pair of orthogonal Latin squares of order six. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 36, 373-376.

36. Street, A.P. and Street, D.J., "Combinatorics of Experimental Design" Clarendon Press, Oxford, UK(1987).

37. Turgut, A. ve Bayrak, H., 2.,3. ve 4. mertebeden ikili dik latin kare tam setlerine karşılık gelen projektif düzlemler, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü dergisi,1996, cilt 6,139-146.

38. Unterstenhöfer, G., 1957, The basic princibles of plant protection field trials. Höfchen-Briefe, 10, 173-236.

39. Unterstenhöfer, G., 1963, The basic Princibles of crop protection field trials. Pflanzenschutz-Nachrichten "Bayer", 16:81-164.

40. Yates F., 1935, Complex Experiments, J. Roy. Statist. Soc. Suppl. 2, 181-247.

41. Yates F., 1936, Incomplete randomized block designs, Ann. Eugenics, 7, 121-140.

7. ORTOGONAL DİZİMLER

Matematikte matris olarak bilinen ortogonal Dizimler istatistikte başvurulan deney Dizimleme yöntemlerinden biridir. Ortogonal Dizimler kendilerine uyan yapıdan başka bir yapıya geçişte kullanılır. Bu deneme Dizimlerinde işlem çiftlerinin birlikte görülme sayısı her deneme Diziminde farklıdır.

Kishen (1942), ortogonal Latin kareler ve Latin kareler kavramını tanıtmıştır ve Latin kare Dizimleri Latin küplere, hiperküplere ayrıca, ortogonal Latin küplere genelleştirmiştir (Raghavarao,1971).

Plackett ve Burman (1943), faktörlerin sayıları çok fazla olduğunda standart prosedürün kullanışsız olduğunu belirtmişler ve bundan dolayı endüstriyel denemelerde tam faktöriyel denemelerden kaçınmak için bazı yöntemleri geliştirmişlerdir. Basit lineer hipotezlerin varsayımı altında, ana-etkilerin belirlenen problemi ile maksimum kesinliğin bir kombinatöryele indirgenebildiğini açıklamışlardır. Tüm kullanışlı çözümlerin pratik olarak faktörlerin her biri iki düzeyli olduğunda bulunabildiğini; fakat çözümlerin iki düzeyden fazlası için oldukça sınırlı olduğunu vurgulamışlardır. Dengeli tamamlanmamış bloklarda bazı karşılaştırmalar için bu çözümleri göstermişlerdir. Plackett ve Burman 2 düzeyli tüm olası $N \leq 100$ ($N=92$ hariç) için tasarımların tablolarını oluşturmuşlardır. [Daha sonra L. Baument, S. Golomb ve M. Hall Jr. (1962) $N=92$ için çözüm bulmuşlardır (Chakravarti, 1963)].

Etki karışımlı faktöriyel tasarımlarla bağlantı kurarak onları kullanmıştır. Ayrıca, projektif geometriyi [PG(t,s)] kullanarak hiperküplerin kuruluşunu düşünmüştür.

Rao (1947), ortogonal Dizimlerin, d kuvvetli hiperküplerin alt sınıfı biçiminde olduğunu açıklamış ve ortogonal Dizim kavramının en genel biçimini göstermiştir. Rao, ortogonal Dizimlerde kullanılan özelliklerin tüm t faktör etkileşimleri kadar ölçülen kesirli yinelenen tasarımlar için de kullanılabileceğini ispatlamıştır

Kishen (1949), birinci mertebeden $s \times s \times s$ ikişerli ortogonal küplerin maksimum sayısının s^2+s-2 olduğunu göstermiş ve s asal sayı yada asal sayının kuvveti olduğunda bu Dizimler için bir kuruluş yöntemini vermiştir (Raghavarao, 1971).

Bose ve Bush (1952), ortogonal Dizimlere ilişkin teoriyi geliştirmişlerdir. Ortogonal Dizimlerin, ortogonal Latin karelerin doğal bir genelleştirmesi gibi düşünülebileceğini vurgulayarak, bazı deney tasarımlarının çeşitli problemlerinde faydalı olacağını açıklamışlardır. Plackett ve Burman tarafından düşünülen optimum çok faktörlü tasarımların aslında 2 kuvvetli ortogonal Dizimler olduğunu göstermişlerdir. 2 ve 3 kuvvetli ortogonal Dizimler için kısıtların maksimum olası sayısını bulmak için üst sınır vermişlerdir. Ayrıca, bu ortogonal Dizimlerin kuruluşu için bazı yöntemler üzerinde çalışmışlardır.

Tanım 7.1: $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ matrisi düşünülsün, her bir a_{ij} 0, 1, ..., s-1 tamsayılarını göstersin. Burada $s>1$ dir. A matrisi, N sütunlu k satırlı dikdörtgensel matristir ve sütunlar Dizimin bloklarıdır. Bu Dizimden elde edilebilen tüm t-satırlı N sütunlu alt matrisler düşünülsün, ($t \leq k$). Herhangi t-satırlı alt matrisin her bir sütunu t-özdeş alt sütun vektörü (tuple) gibi, N' yi kapsayan her bir t-satırlı alt matris olarak kabul edilebilir. C_t^k nın her biri t-satırlı, N sütunlu λ defa tekrarlanan her bir s^t olası sıralı t-özdeş alt sütun vektörünün (tuple) her birini kapsayan Dizimden elde edilen alt matris olan A matrisine OA(N,k,s,t) ortogonal Dizimi denilecektir. Burada N büyüklük, k kısıtlar, s düzeyler, t kuvvet ve λ indekstir. Her bir λs^{t-1} defa tekrarlı 0,1,...,s-1, s tamsayılarını kapsayan satırları bu tanıma uyar. λ=1 durumunda böyle Dizimlere "birim indeksli ortogonal Dizimler" denilecektir.

Ortogonal Dizimlerde düzeyin iki olması durumunda aşağıdaki tanımlama yapılabilir:

Tanım 7.2: λ, t ve k pozitif tamsayı olsun (burada $t \geq 2$ ve $k \geq t$ dir). $k \times \lambda 2^t$ boyutlu sıfır ve birlerden oluşan matris S olsun. $t \times \lambda 2^t$ boyutlu S'nin alt matrisi t alınsın. Bu takdirde S'ye (2-düzeyli) ortogonal dizim denilir, Eğer t'nin her birinin seçimi için 2^t

olası sütun vektörlerinin her biri λ defa görülüyor ise. S'ye λ indeksli, t kuvvetli ve k kısıtların (k, λ, t)-Tasarımı denilir.

7.1 Ortogonal Dizimlerde Kısıtların Maksimum Sayısı

Ortogonal Dizimlerin kuruluşunda kısıtların maksimum sayısı önemlidir. Kısıtlara ilişkin tanım ve teoremler aşağıda verilecektir.

f(N, k, s) (Bazen sadece k alınır) olası kısıtların maksimum sayısını göstersin. Böylece s asal sayı yada asal sayının kuvveti olduğunda f(N, s, 2)=s+1 dir (Bush, 1952).

Ortogonal Dizimlerin özelliği, tüm t faktör etkileşimleri kadar ölçülen kesirli yinelenen tasarımı için kullanılabilmesidir.

Teorem 7.1(Rao, 1947).: λ indeksli (N, k, s, t) ortogonal Diziminde (N=λs^t);

$$N-1 \geq \binom{k}{1}(s-1)+\ldots+\binom{k}{u}(s-1)^u, \qquad t=2u \quad \text{ise} \qquad (7.1)$$

ve

$$N-1 \geq \binom{k}{1}(s-1)+\ldots+\binom{k}{u}(s-1)^u+\binom{k-1}{u}(s-1)^{u+1}, \; t=2u+1 \quad \text{ise} \qquad (7.2)$$

dir.

Bush (1952) birim indeksli ortogonal Dizimler için Rao'nun (7.1) ve (7.2) sınırlarını değerlendirdi ve aşağıdaki teoremi ispatladı.

Teorem 7.2(Raghvaro, 1971): Birim indeksli OA(s^t, k, s, 3) ortogonal Dizimi için, $t \leq s$ ise, bu takdirde

$$k \leq s+t-1 \qquad s \text{ çift ise} \qquad (7.3)$$

ve

$k \leq s + t - 2$ s tek ve $t \geq 3$ ise (7.4)

vardır. Bu teoremin ispatı aşağıdaki yardımcı teoreme dayandırılmıştır.

7.2 Ortogonal Dizimlerin Kuruluşunda Projektif Geometrinin Kullanımı

Ortogonal Dizimlerin kuruluş yöntemlerinden birisi de sonlu geometrinin kullanımıdır. Özellikle sonlu, analitik projektif geometri bu Dizimlerin kuruluşu için faydalı olmaktadır.

Teorem 7.3(Bose ve Bush, 1952): $k \times r$ boyutlu bir C matrisi göz önüne alınsın.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} c_{12} \ldots c_{1r} \\ c_{21} c_{22} \ldots c_{2r} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ c_{k1} c_{k2} \ldots c_{kr} \end{bmatrix}$$

Burada $c_{ij} \in GF(p^n)$ dir. Eğer t satırlı t ranklı kısmi matrisler bulunabiliyorsa, bu takdirde $OA(s^r, k, s, t)$ ortogonal Dizimi kurulabilir. Burada $s=p^n$ dir.

C matrisinin satırları $PG(r\text{-}1, p^n)$ sonlu projektif uzayındaki noktanın koordinatları gibi yorumlanabilir öyle ki noktaların t tanesi birleştirilmemiştir. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 7.4(Bose ve Bush, 1952): $PG(r\text{-}1,p^n)$ de t tanesi birleştirilmemiş k noktaları bulunabilirse, bu takdirde $\lambda=s^{r-t}$, $s=p^n$ olan $OA(s^r, k, s, t)$ ortogonal Dizimi kurulabilir.

Bu teoremler 3 kuvvetli ortogonal Dizimlerin kuruluşunda kullanıldı.

(a) $s=2$ özel durumu dikkate alınsın. $(r\text{-}2)$-düzleminde olmayan $PG(r\text{-}1,2)$ deki tüm noktaların seti düşünülsün. Bu takdirde,

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_r = 0 \qquad (7.5)$$

dir. Böyle 2^{r-1} tane nokta vardır. PG(r-1,2) deki her bir doğru üç noktadan geçmediğinden dolayı bu noktaların üçü aynı doğru üzerinde değildir ve setin dışında bunların biri (7.5) düzleminde değildir. Teorem 7.3deki C matrisinin satırları için bu noktaların koordinatları alınır, 3 kuvvetli OA(2^r, 2^{r-1}, 2, 3) ortogonal Dizimi kurulabilir ve 2^{r-1} tane kısıt vardır.

Örneğin, r=3 durumu düşünülsün. PG(2,2) nin (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1) dört noktası $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ doğrusu üzerinde değildir. Bundan dolayı uygun C matrisi

$$C = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \\ 111 \end{bmatrix}$$

Sekiz tane olası ξ sütun vektörü

01000111
00101011
00011101

OA(8,4,2,3) Diziminde gerekli sütunlar aşağıda verilen Cξ formuyla bulunur.

01000111
00101011
00011101
01110001

Çizelge 7.1: OA(8,4,2,3) ortogonal Dizimi

Böylece OA(8,4,2,3) ortogonal dizimi kuruldu.

Örneğin, s=3 durumu düşünülsün. PG(3,3)'ün $x_1^2 + x_2^2 = x_3 x_4$ karesclinde bulunan 10 noktanın koordinatları (0,0,1,0), (0,0,0,1), (0,1,1,1), (0,1,2,2), (1,0,1,1), (1,0,2,2), (1,1,1,2), (1,1,2,1), (1,2,1,2), (1,2,2,1) dir. Bunlar C matrisinin satırları gibi kullanılırsa, OA(81,10,3,3) ortogonal Dizimi ve geometrik yöntemle bulunabilen kısıtların maksimum sayısının 10 olduğu görülür.

7.3 Ortogonal Dizimlerin Kuruluşunda Hadamard Matrisleri

2-sembollü Dizimlerin kuruluşu için kullanılan tekniklerin çoğu s-sembollü Dizimler için kullanılan tekniklerin özel durumudur.

Hadamard matrisinin satır ya da sütunundaki her bir hücre –1 ile çarpılırsa Hadamard matrisi özelliğini kaybetmez. Böylece, uygun sütunlardaki hücrelerin –1 ile çarpılmasıyla, H_n biçimindeki Hadamard matrisinin daima bulunabilmesi n mertebeli Hadamard matrisinin varlığını sağlar.

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \underline{1}^{'} \\ & A_{n-1,n} \end{bmatrix}$$

n=4λ yazılırsa (λ pozitif tamsayı), $A_{n-1,n}$ nin OA(4λ,4λ-1,2,2) olduğu kolayca gösterilebilir, bu yapı temelde 1 ve –1 sembollerinden oluşur. Teorem 7.1 ile f(4λ,2,2)= 4λ-1 den dolayı, aşağıdaki sonuç bulunur.

1) f(4λ,2,2)= 4λ-1 için gerekli ve yeterli koşul 4λ mertebeli Hadamard matrisinin varlığıdır.

Yukarıdaki gibi OA(4λ,4λ-1,2,2) Dizimi, OA(8λ,4λ,2,3) Diziminin kuruluşunda kullanılabilir. Verilen A Dizimi için, 0'lar ve 1'lerin sırasıyla değiştirilmesiyle A'dan bulunan Dizimi $\overline{A}$ ile gösterilecektir.

2) t çift olduğunda ve OA($\lambda 2^t$,k,2,t) ise, bu takdirde B Dizimi

$$B = \begin{bmatrix} A & \overline{A} \\ 0\ldots0 & 1\ldots1 \end{bmatrix}$$

gibi bulunan $OA(\lambda 2^{t+1},k+1,2,t+1)$ dir.

Bu teoremlerden aşağıdaki sonuçlar bulunabilir.

3) $OA(8\lambda,4\lambda,2,3)$ ün var olması için gerek ve yeter koşul 4λ mertebeli Hadamard matrisinin mevcut olmasıdır.

4) t çift ise, $f(\lambda 2^t,2,t)=f(\lambda 2^{t+1},2,t+1)-1$ dir.

5) $\lambda=2^{n-t+1}$ olsun. Noktaların herhangi t tanesi lineer bağımsız olan (yani, t tanesi aynı doğru üzerinde bulunmayan) $PG(n,2)$ deki k noktalarının seti $OA(\lambda 2^t,k,2,t)$ nin nedenidir (Hedayat, Sloane ve Stufken, 1999).

Örnek 7.1: $t=2$ için 8.inci mertebeden bir Hadamard matrisi alınsın.

$$H = \begin{bmatrix} +&+&+&+&+&+&+&+ \\ +&+&+&-&+&-&-&- \\ +&-&+&+&-&+&-&- \\ +&-&-&+&+&-&+&- \\ +&-&-&-&+&+&-&+ \\ +&+&-&-&-&+&+&- \\ +&-&+&-&-&-&+&+ \\ +&+&-&+&-&-&-&+ \end{bmatrix}$$

Hadamard matrislerinin özelliğinden dolayı

$$A=\begin{bmatrix}++-+---\\-++-+--\\--++-+-\\---++-+\\+---++-\\-+---++\\+-+---+\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \overline{A}=\begin{bmatrix}--+-+++\\+--+-++\\++--+-+\\+++--+-\\-+++--+\\+-+++--\\-+-+++-\end{bmatrix}$$

bulunur (Bayrak, 1996).

+ ve – yerine sırasıyla 1 ve 0 yazılırsa OA(4λ,4λ-1,2,2) Dizimi yani OA(8,7,2,2) Dizimi aşağıdaki gibi bulunur.

11101000
10110100
10011010
10001101
11000110
10100011
11010001

(5)'den dolayı da OA(16,8,2,3) Dizimi aşağıdaki gibi bulunur.

1110100000101110
1011010010010110
1001101011001010
1000110111100100
1100011001110010
1010001110111000
1101000101011100
0000000011111111

Çizelge 7.2: OA(16,8,2,3) ortogonal Dizimi

7.4. Ortogonal Latin Kare Setleri ve İki Kuvvetli, Birim İndeksli Birleşik Ortogonal Dizimler

Burada s mertebeli m tane ikişerli ortogonal Latin karelerin seti olduğu farz edilsin. s mertebeli m tane ikişerli ortogonal Latin karelerin setinin varlığı OA($N=s^2$, k=m+2, s, 2) ortogonal Diziminin varlığını ifade eder ve OA($N=s^2$, k=m+2, s, 2) ortogonal Dizimin varlığı s mertebeli m tane ikişerli ortogonal Latin karelerin setinin varlığını ifade eder.

Örnek 7.2: 3 mertebeli iki tane ikişerli ortogonal Latin kare düşünülsün

0 1 2	0 1 2
1 2 0	2 0 1
2 0 1	1 2 0

ayrıca, satırlar ve sütunlara uygun iki tane ortogonal olmayan kareler de

0 0 0	0 1 2
1 1 1	0 1 2
2 2 2	0 1 2

bu yapılabildiği takdirde üç satırın biri sonra diğerleri aynı satırda yerine konulmasıyla her bir kare 9 tamsayı ihtiva eden tek satır gibi yazılır. Bu ise aşağıdaki Dizimi verir.

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	1	2	0	2	0	1
0	1	2	2	0	1	1	2	0

Çizelge 7.3: OA(9,4,3,2) ortogonal Dizimi

s asal sayı yada asal sayının kuvveti iken s mertebeli s-1 ikişerli ortogonal Latin karelerin maksimal setinin varlığı iyi bilinir. Bu OA(s^2,s+1,s,2) ortogonal Dizimin varlığını ifade eder. s=6 durumu hariç tüm s için, OA(s^2,4,s,2) ortogonal Dizimi vardır.

7.5 Birim İndeksli Ortogonal Dizimin Kuruluşu ve Polinomlar

s asal sayı yada asal sayının kuvveti ve $t<s$ iken OA(s^t,s+1,s,t) ortogonal Dizimi kurulabilir (Bush, 1952). t=3 ve s tek iken, kısıtların maksimum sayısı Teorem 7.2'de verildiği gibi bulunur. Bununla birlikte, s çift ise, s+1 satırlardan diğer ortogonal satırlar kurularak kısıtların maksimum sayısı bulunur.

α_0=0, α_1, α_2, ..., a_s-1 GF(s) nin elemanları olsun ve s^t polinomlan düşünülsün.

$$y_j(x) = a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \cdots + a_1x^1 + a_0;\ a_i \in GF(s), i = 0,1,...,t-1 \qquad (7.6)$$

Böyle s^t tane polinom olduğu açıktır, t katsayılarının her birinden dolayı cisimde s faklı değerin olduğu varsayılır ve 0,1,...,s^t-l değerleri üzerinde j alt indis sıralaması yapılabilir. O'dan s-l'e satırların sayısı ve O'dan s^t-l'e sütunların sayısı iken sxs^t Dizimi oluşturulur. Özellikle i.inci satır ve j.inci sütunda bulunan eleman

$$y_j(e_i) = e_u$$

olur (u tamsayı). Dizimin sonunda birim indeksli ve t kuvvetli ortogonal Dizim elde edilebildiğim söylemek mümkündür.

Tersine özdeş iki t-özdeş alt sütun vektörü (tuple) nedeniyle t satırların seçilebildiği farz edilsin ve polinomlar birleştirilsin. Bu takdirde;

$$a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \cdots + a_1x^1 + a_0 = y_j(x)$$
$$a'_{t-1}x^{t-1} + a'_{t-2}x^{t-2} + \cdots + a'_1x^1 + a'_0 = y'_j(x)$$

olur. Satırlar $e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_t}$ sonlu cisminin elemanlarıdır. Yukarıdaki eşitlikler taraf

tarafa çıkarıldığında,

$$A_{t-1}e_{i_r}^{t-1} + A_{t-2}e_{i_r}^{t-2} + \ldots A_{t-1}e_{i_r} + A_0 = 0$$

elde edilir. 1'den t'ye kadar r sıralamada gösterildiği gibi, A_{t-1}, A_{t-2},... ,A_1, A_0 t tane türdeş lineer denklem elde edilir. Polinomların özdeş olmasından dolayı, A'ların hepsi sıfır olamaz. Dolayısıyla çözümün varlığı için Vandermonde tipindeki matrisin determinantı kullanılır (Bush, 1952).

t=3 iken kısıtların maksimum sayısına sahip olan s+1 satırlar nedeniyle OA(s^t,s+1,s,t) ortogonal Diziminin kurulabilecceği görülür.

Örnek 7.3: t=3 ve s=3 olsun. OA(27,4,3,3) ortogonal Dizimini kuralım. GF(3) ün elemanları 0, 1, 2 ve bunlara ait 27 polinom aşağıdaki gibidir:

y_1=0 , y_2= 1 , y_3= 2 , y_4= x , y_5= x+1 , y_6= x+2 , y_7= 2x , y_8= 2x+1 , y_9= 2x+2 , y_{10}=x^2, y_n= x^2+1 , y_{12}= x^2+2 , y_{i3}= x^2+x , y_{14}- x^2+x+1 , y_{15}= x^2+x+2 , y_{16}= x^2+2x , y_{17}= x^2+2x+1 , y_{1g}= x^2+2x+2 , y_{19}= 2x^2 , y_{20}= 2x^2+1 , y_{21}= 2x^2+2 , y_{22}- 2x^2+x , y_{23}= 2x^2+x+1 , y_{24}=2x^2+x+2 , y_{25}= 2x^2+2x , y_{26}= 2x^2+2x+1 , y_{27}= 2x^2+2x+2 .

Bu takdirde ortogonal Dizimin dört satırı aşağıda gösterildiği gibi oluşturulur(Bayrak ve Alhan, 2002):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
1	0	1	2	1	2	0	2	0	1	1	2	0	2	0	1	0	1	2	2	0	1	0	1	2	1	2	0
2	0	1	2	2	0	1	1	2	0	1	2	0	0	1	2	2	0	1	2	0	1	1	2	0	0	1	2
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Çizelge 7.4: OA(27, 4, 3, 3) için ortogonal Dizim

7.6. Latis Tasarımı ve Ortogonal Dizimler

k mertebeli (r-2) tane ikişerli dik latin kare verilsin. Bunlar üst üste konsun. Bu taktirdeherbir hücre farklı karelere ait (v-2) sembol bulunduracaktır. k^2 hücre burada k^2 işlem ile aynı düşünülecektir. Aynı satıra ait işlemler k blokların bir kümesini verir. I.nci Latin larenin aynı sembolu ihtiva eden işlemleri i(i=1,2,,,...,r-2) için

blokların bir kümesini verir. Böylece blokların r seti elde edilir. İşlemler ve bloklar bir latis tasarımı oluşturur. Tersine k blok genişlikli r tekrarlı bir latis tasarım verilsin. k mertebeli (r-2) ikişerli dik latin kare kurulabilir. $n \times n$ mertebeli kareler alınsın. Köşegenin dışında kalan hücrelere $1,2,\ldots,n(n-1)/2$ sayıları verilsin. n=5 için aşağıdaki kare düşünülebilir.

*	1	2	3	4
1	*	5	6	7
2	5	*	8	9
3	6	8	*	10
4	7	9	10	*

Hücrelerdeki aynı sayılar, aynı noktalar gibi düşünülecektir. Böylece, aynı noktayı gösteren iki farklı hücre vardır ve $v=n(n-1)/2$ olacaktır. r=2 $k=n-1$ için kısmi geometri aksiyomlarının sağlanacağı aşikardır. Herhangi iki doğrunun bir noktada kesişeceği görülmektedir. Böylece t=2 olacaktır ve ($2,n-1,2$) kısmi geometrisi elde edilir.

7.7. Notlar

Bose ve Kishen (1940), ortogonal düzenler ve simetrik faktöriyel düzenlerde etki karışımı teorisi arasındaki ilişkiyi kurmuşlardır (Bose ve Bush, 1952). Rao (1946), ortogonal düzen kavramını geliştirmiştir ayrıca d kuvvetinden hiperküpleri bularak λ indeksinin, s'nin kuvveti olduğunda ortogonal dizimler için d kuvvetli hiperküpler üzerine çalışmıştır. Ray-Chadhuri ve Singhi (1988), işaretli ortogonal dizimlerin varlığı üzerinde durmuşlardır. Hedayat ve Stufken(1988), iki düzeyli faktörlere sahip ortogonal dizimlerde faktörlerin maksimum sayısını ve kuruluşunu çalışmışlardır. t>2 olduğunda bazı genel kuruluş metodları Coulbourn ve Dinitz(1996) ve Kraher(1996)da verilmiştir. Orthogonal dizimler için son yıllarda çıkmış ve doğrudan orthogonal dizimleri ve ilişkili yapıları ele almış bir çalışma Hedayat ve ark.(1999) tarafından ortaya konmuştur.

7.8. Alıştırmalar

1) OA(9,4,3,2) ortogonal dizimini yazınız.

2) PG(2,4)den faydalanarak ilişkin OA'yi oluşturunuz ve parametrelerini belirleyiniz.

3) H_{12}yi kullanarak elde edilen OA'yı ve parametrelerini belirleyiniz.

4) 4 mertebeli ikişerli ortogonal Latin kare tam setini kullanarak elde edilen OA'yı ve parametrelerini belirleyiniz.

7.9. Kaynaklar

1. Bayrak, H., 1996, Hadamard matrisleri ve Deney Düzeninde Bazı Uygulamaları, Gazi Üniversitesi , Fen Bilimleri Enstitüsü dergisi,cilt 9, No 3, 355-366
2. Bayrak H. and Alhan A., 2002, The use of orthogonal Latin square in the construction of orthogonal array of index unity, Journal of Institute of science and Technology, Gazi University, 15, No 1, 345-350.
3. Bose, R. C., and Bush, K. A., "Orthogonal Arrays of Strength Two and Three" ***Ann. Math. Stat.,*** 508-524, (1952).
4. Bose, R.C. and Kishen, K., 1940, On the problem of confounding in the general symmetrical factorial design, **Sankhyā,** 5, 21-36.
5. Bush K.A., 1952, Orthogonal Arrays of index unity, Ann Math. Stat. , 23 , 293-295.
6. Chakravarti, I.M., 1963, Orthogonal and partially balanced arrays and their applications in design of experiments, **Metrika,** 7, 231-243.
7. Hedayat A.S., Sloane N.J.A, Stufken J.,1999 Othogonal Arrays, Springer, New York.
8. Hedayat, A. and Stufken, J., 1988, Two-Symbol Orthogonal Arrays, **Optimal Design and Analysis of Experiments,** Y. Dodge, V.V. Fedorov and H.P. Wynn (Editors), pp. 47-58.
9. Kishen, K., 1942, On Latin and hypergraecolatin cubes and hypercubes, **Current Science,** 11, 98-99.
10. Kishen, K., 1949, On the construction of latin and hypergraecolatin cubes and hypercubes, J. Indian Soc. Agric. Stat., 2, 20-48.

11. Plackett, R.L.,and Burman, J.P., 1943, The design of optimum multifactorial experiments, **Biometrika,** 33, 305-325.

12. Raghavarao D., 1971, Constructions and combinatorial problems in design od experiments. Wiley, New York.

13. Rao, C.R., 1946, Hypercubes of Strength "d" Leading to Confounded Designs in Factorial Experiments, **Bull. Cacutta Math. Soc.,** 38, 67-78.

14. Rao, C.R., 1947, Factorial Arrangements Derivable from Combinatorial Arrangements of Arrays, **Jour. Roy. Stat. Soc., Suppl.,** 9, 128-139.

15. Ray-Chaudhuri, D.K. and Singhi, N.M., 1988, On existence and number of orthogonal arrays, **Journal of Combinatorial Theory, Series A,** 47, 28-36.

8. KODLAMA TEORİSİ

8.1 Temel Tanımlar ve Bazı özel kodlar

GF(q), q mertebeli Galois Cismi olmak üzere, V_n, GF(q) üzerinde vektör uzayı olsun. $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ V_n'in elemanı olmak üzere aralarındaki *hamming uzaklığı* $\rho(x,y)$ x ve y vektörleri arasındaki farklı noktaların sayısıdır:

$$\rho(x,y)=\left|\{i|x_i \neq y_i\}\right| \qquad [8.1]$$

Bir q-ary C kodu V_n'in bir alt kümesidir. Burada C'deki vektörler kod kelimeler olarak adlandırılır. Tüm $x,y \in C$ çiftleri arasındaki uzaklıkların en küçüğüne *minimum uzaklık* adı verililir.

$$d = \min\{\rho(x,y) : x,y \in C\} \qquad [8.2]$$

Minimum uzaklığı d olan bir C kodu için düzeltilebilecek maksimum hata sayısı (d-1)/2 dir.

$C \subseteq V_n$ olmak üzere minimum uzaklık d, $|C|=M$ ve uzunluğu n olan bir koda (n,M,d) ((n,M,d,q), $(n,M,d)_2$) kodu denir.

Örnek 8.1: Aşağıdaki gibi bir C koduna sahip olunsun.

$$C = \begin{pmatrix} 10101 \\ 01110 \\ 11100 \\ 10111 \end{pmatrix}$$

Buradan uzaklıklar hesaplanacak olursa;

$\rho(C1, C2)=4$

$\rho(C1, C3)=3$

$\rho(C1, C4)=1$

$\rho(C2, C3)=2$

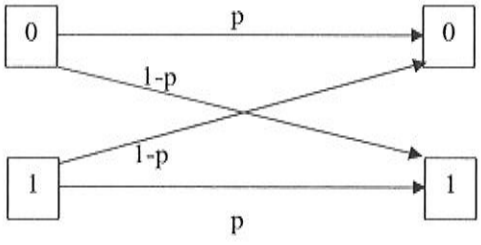
$\rho(C2, C4)=3$

$\rho(C3, C4)=3$

şeklindedir. Minimum uzaklık d=1 olur. Dolayısıyla C kodu (5,4,1) parametrelidir.

8.1.1 En Çok Olabilirlik Çözümlemesi

Kodlama teorisinde temel çözümleme tekniği En çok olabilirlik çözümlemesidir(EÇOÇ). Bu bölümle bu tekniğin kullanarak nasıl çözümleme yapıldığından bahsedilecektir. Bu teknik için önce, ikili simetrik kanaldan(İSK) bahsetmek gerekir. İkili simetrik kanal, sadece ikili(binary) kodlar için kullanılan bir kanal türüdür. Bu kanala benzer birçok tane kanal vardır. ikili simetrik kanalı aşağıdaki şekil ile ifade edilsin.



Burada p, İSK kanaldan gönderilen dijitin doğru olarak iletilmesi olasılığıdır. Ayrıca $0.5<p\leq 1$ olduğu varsayılır aksi halde kanal kullanılmaz ya da $0.5<p\leq 1$ olacak şekilde düzenlenir. 5 uzunluklu bir kelimenin doğru olarak gönderilmesi olasılığı p^5'tir. Fakat 2 hatayla gönderilmesi olasılığı $10p^3(1-p)^2$ şeklindedir.

En çok olabilirlik çözümlemesi aşağıdaki örnek üzerinde anlatılacaktır.

Örnek 8.2: (10,15,3) parametreli C kodu aşağıdaki gibi olsun.

$$C=\begin{array}{c}\\ A\\ E\\ O\\ İ\\ C\\ K\\ T\\ S\\ U\\ V\\ D\\ F\\ L\\ N\\ P\end{array}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&0&1&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&1&0&0&1&1&0&0\\1&1&1&0&0&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&0&1&1&0&1\\1&0&0&0&0&1&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1&0&1&0&0\\1&1&1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&0&1&0&1&1\\1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&1&0&1&0\\1&0&0&0&0&1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1&1&0&0&1&1\end{pmatrix}$$

d=3 olduğundan e=1'dir. Harfler yukarıdaki gibi şifrelensin. Böyle şifrelenen bir alfabe için İSTATİSTİK kelimesini şifreledikten sonra İSK geçirip çözmeye çalışalım. Şifrelenmiş mesaj;

İ	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
S	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
T	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
A	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
T	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
İ	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
S	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
T	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
İ	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
K	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0

şeklinde olur. İSK çıktıktan sonra bazı hatalar olmuş olsun. Alıcıya gelen şifrelenmiş mesaj;

1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0

gelen mesajdaki vektörler ile C'deki kod kelimeler arasındaki uzaklık 1 yada 0 ise vektör o kodkelime olarak çözümlenir. Eğer hiçbirine 1 yada 0 uzaklıkta değilse o kod kelime çözümlenemez ve tekrar gönderim istenir. Buna göre ilk kelimeye baktığımızda d(1101010010, 0101010010)=1 olduğundan ilk kod kelime U olarak çözümlenir. Benzer şekilde diğerleri yapıldığında;

U	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0
S	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
T	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
A	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
İ	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
P	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
T	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
İ	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1
K	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0

olarak çözümlenir. Burada * ile gösterilen ifade de vektörün hiçbir kodkelimeye 1 yada daha az uzaklıkta olmadığından dolayı çözümlenemediğini ifade eder.

Kodlama teorisi bu çerçevede daha çok hata düzeltmek için çeşitli sınırlar ve bunları sağlayan kodlar geliştirmiştir.

Kodlama teorisinde iki temel amaç vardır:

1) sabit n ve d değerleri için M=M(n,d) değerini maksimize etmek.
2) sabit M ve d değerleri için d=d(n,M) değerini maksimize etmek.

M(n,d) ve d=d(n,M) fonksiyonları için çeşitli sınırlar geliştirilmiştir. Bunların en önemlilerden biri Plotkin sınırıdır. Plotkin sınırı q=2 olan kodlar için geçerlidir.

Teorem 8.1(Hoffman ve diğerleri,1992)(*Plotkin Sınırı*): C, n<2d olan bir (n,M,d) kodu olsun.

d çift ve 2d>n ise

$$M(n,d) \leq 2\left\lfloor \frac{d}{2d-n} \right\rfloor \qquad [8.3]$$

$$M(2d-1,d) \leq 2d \qquad [8.4]$$

$$M(2d,d) \leq 4d \qquad [8.5]$$

d tek ve 2d+1>n ise;

$$M(n,d) \leq 2\left\lfloor \frac{d+1}{2d+1-n} \right\rfloor \qquad [8.6]$$

$$M(2d+1,d) \leq 4d+4 \qquad [8.7]$$

dir.

[8.3)-[8.7)deki ifadelerde eşitliği sağlayan kodlara *maksimal* denir.

Örnek 8.3: Bir (7,6,3) kodu aşağıdaki gibi olsun.

$$C = \begin{bmatrix} 0\,1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \end{bmatrix}$$

Burada n=2×3+1 olduğundan; M(7,3)=16>6 olup bu kod maksimal değildir. Ancak;

$$C' = \begin{bmatrix} 0\,1\,0\,1\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \end{bmatrix}$$

Kodu (7,8,4) parametreli olup M(7,4)=2[2×4/(2×4-7)]=8=M olduğundan C′ kodu maksimaldir.

8.1.2 Eşit Uzaklıklı Kodlar

Bundan böyle (n,M,d,q) notasyonu q-ary (n,M,d) kodu için kullanılacaktır. Bir kod için minimum uzaklık kodkelimeler arası ortalama uzaklığı geçemez.

$$d \le \bar{d} = \frac{1}{M(M-1)} \sum_{x \in C} \sum_{y \in C} \rho(x,y) \qquad [8.8]$$

Eğer $\bar{d}$ tamsayı ve her kod kelime arasındaki uzaklık $\bar{d}$ ise böyle bir koda *eşit uzaklıklı kod* denir.

Teorem 8.2(Tonchev,1988): Eşit uzaklıklı her (n,M,d,q) kodu için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$d \le d_{\max} = nM(q-1)/(M-1)q \qquad [8.9]$$

Eşitliğin sağlanması için M'nin q'nun katı ve 0,1,...q-1 sembollerinin M×n boyutlu kodkelimeler matrisinin her sütununda t=M/q defa bulunması gerekir.

$d=d_{max}$ ise eşit uzaklıklı koda *optimal* denir. Ve parametreleri aşağıdaki gibidir.

n, M=qt, $d = nt(q-1)/(qt-1)$ [8.10]

Örnek 8.4: Bir (4,9,3,3) parametreli kod aşağıdaki gibi olsun.

$$C=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&2&2&2\\1&0&2&1\\1&1&0&2\\1&2&1&0\\2&0&1&2\\2&1&2&0\\2&2&0&1\end{bmatrix}$$

Burada $d=4\times3(3-1)/(3\times3-1)=3=d_{max}$ olduğundan bu kod optimal koddur.

8.1.3 Lineer Kodlar

V_n, GF(q) üzerine kurulmuş n-boyutlu vektör uzayı ve $C\subseteq V_n$ olan bir kod olsun. Eğer C toplama işlemi üzerinden kapalı ise böyle bir koda *lineer kod* denir. Lineer kodun uzunluğu n ve boyutu k(lineer bağımsız kodkelime sayısı) ise [n,k] lineer kodu olarak adlandırılır. Lineer kodların önemli özelliklerinden biri minimum uzaklığının minimum ağırlığa eşit olmasıdır. C q-ary (n,M,d) kodu olsun e=[(d-1)/2] olsun. $x\in C$ olmak üzere x'ten i uzaklıkta olan kod kelimelerin sayısı $\binom{n}{i}(q-1)^i$ dir.

x'e en fazla e kadar uzaklıkta olan vektörler düşünüldüğünde x civarında e çaplı bir küre oluşur. Bu küre içinde kalan elemanların sayısı;

$$\sum_{i=0}^{e}\binom{n}{i}(q-1)^i \qquad [8.11]$$

dir. C'nin M tane elemanı olduğundan ve bu elemanların küreleri birbirlerinden ayrık olduğundan bu kürelerde bulunan tüm elemanların sayısı

$$M\sum_{i=0}^{e}\binom{n}{i}(q-1)^i \le q^n \qquad [8.12]$$

şeklinde olur. Bu eşitsizlik M için bir üst sınır verir. Bu sınır *küre paketleme* ya da *hamming sınırı* olarak adlandırılır. Eşitlik sağlanırsa böyle bir koda *tam(Mükemmel)* denir. Bir başka deyişle koddaki tüm kodkelimeler gözönüne alındığında bu kod kelimeler tüm uzayı kapsıyorsa bu koda tam denir.

C, GF(q) üzerinde n uzunluklu k boyutlu lineer kod olsun. Satırları C'nin basis'i olan GF(q) üzerindeki k×n boyutlu ve k ranklı matrise *üreteç matris* denir. GF(q) üzerindeki k×n boyutlu bir üreteç matristen $M=q^k$ olarak elde edilir. C'nin kodkelimeleri bunların lineer kombinasyonudur.

Örnek 8.5: C kodu {0000,1110,0111,1001}şeklinde olsun. Bu kodun üreteç matrisi ikili elementer operasyon yardımıyla bulunur.

$$C=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Üreteç matris;

$$G=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Örnek 8.6: C lineer kodunun G üreteç matrisi;

$$G=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&0\end{bmatrix}$$

şeklinde olsun. Buradan C kodu tüm satır kombinasyonlarını birbirleriyle toplandığında(mod q'ya göre) ve C toplama işlemi üzerinden kapalı olduğundan elde edilen yapı C kodudur.

C={00000, 10101, 11011, 11100, 10101+11011, 10101+11100, 11011+11100, 10101+11011+11100}

Buradan;

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Olarak bulunur.

$C^{\perp}=\{y \in V_n | xy=0, \forall x \in C\}$ koduna (n,n-k) parametreli C'nin *duali* ya da *ortoganali* denir. Dual kodun üreteç matrisine *parity check matris(*PCM*)* denir.

Örnek 8.7: C={00000, 11110, 01111, 10001} olsun bu kodun PCM'si aşağıdaki gibi bulunur. Parity check matrisin tanımından $yc_i^T=0$ olan tüm y'leri bulmak gerekmektedir($\forall c_i \in C$ için). $y=(y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5)$ olsun.

$(y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5)(0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T=0$

$(y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5)(1\ 1\ 1\ 1\ 0)^T=0$

$(y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5)(0\ 1\ 1\ 1\ 1)^T=0$

$(y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5)(1\ 0\ 0\ 0\ 1)^T=0$

olmalıdır. Böylece;

$y_1+y_2+y_3+y_4=0$

$y_2+y_3+y_4+y_5=0$

$y_1+y_5=0$

dır. Bu denklemleri sağlayacak kod ise;

$C^{\perp}=\{00000, 01100, 01010, 00110, 11111, 11001, 10101, 10011\}$

şeklinde olan bir d=2 olan (5,3) lineer kodudur. C kodunun duali yine kendisi ise($C=C^{\perp}$), C'ye self-dual denir.

Ayrıca üreteç matrisi $G=[I_k\ X]$ olan bir lineer C kodunun PCMsi

$$H=\begin{bmatrix} X \\ I_{n-k} \end{bmatrix}$$

olur.

8.1.3.1 Hamming kodları

$r\geq 2$ ve H_r sütunları tümü sıfır olmayan r boyutlu ikili vektörlerden oluşan $r\times(2^r-1)$ boyutlu matris olsun. H_r'yi parity check matris olarak kabul eden ikili koda r mertebeli *Hamming kod* denir. r mertebeli Hamming kodu $n=2^r-1$, $k=2^r-1-r$, $d=3$ parametreli dolayısıyla tek hata düzeltebilen koddur. Hamming kod tam koddur.

Örnek 8.8: Aşağıda verilen kodu göz önüne alalım.

$$C=\begin{pmatrix}
0000000\\
0001111\\
0010110\\
0011001\\
0100101\\
0101010\\
0110011\\
0111100\\
1000011\\
1001100\\
1010101\\
1011010\\
1100110\\
1101001\\
1110000\\
1111111
\end{pmatrix}$$

Bu koda dikkat edilecek olursa $n=2^3-1=7$, $d=3$ $k=4$ olan bir hamming kodudur. Bu kodun üreteç matrisi ise;

$$G=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}$$

şeklindedir.

8.1.3.2 Reed-Muller Kodları

r.nci mertebeden ve 2^m uzunluklu Reed-Muller kodları RM(r,m) şeklinde gösterilir. Bu kodun kuruluşu aşağıdaki gibidir.

(1) RM(0,m)={00...0,11...1}, $RM(m,m)=V_{2^m}$ [8.13]

(2) RM(r,m)={(x,x+y)|x∈RM(r,m-1), y∈RM(r-1,m-1)} 0<r<m [8.14]

Örnek 8.9: RM(1,2) Reed-Muller kodu;

RM(1,2)={(x,x+y)|x∈RM(1,1), y∈RM(0,1)}

şeklinde yazılabilir. Burada RM(1,1)={00,01,10,11} ve RM(0,1)={00,11}dir. Böylece;

RM(1,2)={(x,x+y)|x∈{00,01,10,11}, y∈{00,11}}

olur. Buradan;

RM(1,2)={0000,0011,0100,0111,1000,1011,1100,1111}

olur. Görüldüğü gibi n=4, d=2, M=8 ve k=3 olan bir lineer koddur.

Reed-Muller kodunun üreteç matrisi G(*r*,*m*);

$$G(r,m)=\begin{bmatrix} G(r,m-1) & G(r,m-1) \\ 0 & G(r-1,m-1) \end{bmatrix} \quad [8.15]$$

şeklindedir. r=0 için

$G(0,m)=[1\ 1\ \ldots 1]$ [8.16]

olur ve r=m için

$$G(m,m)=\begin{bmatrix} G(m-1,r) \\ 00\ldots01 \end{bmatrix} \quad [8.17]$$

olur.

Örnek 8.10: Örnek 8.9deki RM(1,2)'nin üreteç matrisi;

$$G(1,2)=\begin{bmatrix} G(1,1) & G(1,1) \\ 0 & G(0,1) \end{bmatrix}$$

dir. Burada;

$$G(1,1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G(0,1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan;

$$G(1,2)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 8.3(Hoffman ve diğerleri 1992): *r*.nci mertebeden Reed-Muller kodu RM(*r*,*m*) aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(1) Uzunluğu $n=2^m$dir

(2) Minimum uzaklığı $d=2^{m-r}$dir

(3) Boyutu $k=\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}$dir

(4) Rm(r,m) kodu, RM(r-1,m) kodunu içerir, $r>0$

(5) Dual kodu RM(m-1-r, m)dir, ($r<m$)

Örnek 8.11: RM(1,3) kodunun üreteç matrisi;

$$G(1,3)=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0&1&0&1\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Kodun uzunluğu $n=2^3=8$, minimum uzaklığı $2^{3-1}=4$ boyutu $k=1+3=4$ şeklindedir. Ayrıca duali yine RM(1,3) olduğundan kod aynı zamanda self dualdir.

8.2 Kodlama Teorisi Ve Tasarım Teorisi

8.2.1 2-tasarımlar ve maksimal kodlar

Teorem 8.4(Tonchev, 1988): $n=4\lambda$ ve A 2-(4λ-1, 2λ, λ) tasarımının ilişki matrisi olmak üzere;

1) $A_n=\begin{pmatrix}0\cdots0\\A\end{pmatrix}$ kodu (n-1,n,n/2) parametreli maksimal koddur.

2) B_n kodu A_n ve A_n^cdan meydana gelen (n-1, 2n, n/2-1) parametreli maksimal koddur.

3) A_n' 0'la başlayan kodkelimelerin silinmesiyle elde edilen maksimal (n-2, n/2, n/2) kodudur.

Örnek 8.12: $\lambda = 2$ olan $2-(7,4,2)$ tasarım ele alındığında A ilişki matrisi aşağıdaki gibi olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Burada elde edilen A_n, B_n ve A_n' kodları maksimaldir. Ayrıca B_n dikkat edilecek olursa elde edilen kodun maksimal olmasının yanı sıra lineer olan bu kod Hamming sınırını sağladığından tam koddur.

8.2.2 Eşit Uzaklıklı Kodlar, Çözülebilir Tasarımlar ve Afin Geometri

Çözülebilir tasarımlar ve eşit uzaklıklı kodların arasındaki ilişki ilk olarak Semakov ve Zinoviev(1968) tarafından verilmiştir.

Teorem 8.5 (Semakov & Zinoviev, 1968): (n,M,d,q) optimal eşit uzaklıklı kodunun varlığı ancak ve ancak aşağıdaki parametrelere sahip çözülebilir 2-tasarımın varlığıyla sağlanır.

$$v=M,\ r=n,\quad k=t,\quad \lambda=n-d,\quad b=nq$$

Eğer tasarım afin çözülebilir ise bu durumda teorem 4.4 geçerlidir.

Teorem 8.6: (Semakov & Zinoviev, 1968): $n=\frac{(qt-1)}{(q-1)}$ uzunluğunda her optimal eşituzaklıklı kod aşağıdaki parametrelere sahip çözülebilir tasarıma denktir.

$$v=qt, \quad k=t, \quad \lambda=\frac{(t-1)}{(q-1)}$$

Eğer q=t ise özel olarak teorem 8.7 geçerlidir.

Teorem 8.7(Semakov, & Zinoviev, 1969):

q=t iken,

$$n=q+1, \quad M=q^2, \quad d=q,$$

karşılık gelen tasarım

$$v=q^2, \quad k=q, \quad \lambda=1$$

olur. Bu da optimal eşit uzaklıklı $(q+1,q^2,q;q)$ kodu q mertebeli afin düzleme karşılık gelir.

Örnek 8.8: Aşağıda AG(2,3) ve buradan elde edilen optimal kod verilmiştir.

$n=4$ $q+1=3+1=4$ $m=q^2=3^2=9$ $d=q=3$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0\\0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&1&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&1&1\\0&2&2&2\\1&0&2&1\\1&1&0&2\\1&2&1&0\\2&0&1&2\\2&1&2&0\\2&2&0&1\end{bmatrix}=C$$

8.2.3 Tam Kodlar Ve Steiner Sistemler

Tam kodlar ve Steiner sistemleri arasındaki ilişkiyi vermeden önce lineer C kodundan elde edilmiş genişletilmiş $\hat{C}$ kodunu vermek gerekir. C lineer (n,k) kodu C kodu verilmişken (n+1,k) parametreli $\hat{C}$ kodu (n+1).nci elemanı diğer elemanların mod 2'ye göre toplamı şeklinde yazılarak elde edilir. (n+1).nci elemana parity check digit denir. Eğer C kodu tek sayıda hata düzelten tam kod ise $\hat{C}$ kodu bir tasarıma karşılık gelir.

Teorem 8.9 (Tonchev,1996):: C, n uzunluklu ve d=2e+1 minimum uzaklıklı tam kod olsun. $\hat{C}$daki 2e+2 ağırlıklı kod kelimeler S(e+2, 2e+2, n+1) bir Steiner sistem oluşturur.

Örnek 8.14: n=7, d=3, e=1 M=16 olan bir C tam kodu aşağıdaki gibi olsun. Buradan C'in genişletilmiş kodundan elde edilen S(3, 4, 8) olan Steiner sisteminin ilişki matrisi A^Tdaki gibidir.

$$C=\begin{pmatrix}0000000\\0001111\\0010110\\0011001\\0100101\\0101010\\0110011\\0111100\\1000011\\1001100\\1010101\\1011010\\1100110\\1101001\\1110000\\1111111\end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix}00011110\\00101101\\00110011\\01001011\\01010101\\01100110\\01111000\\10000111\\10011001\\10101010\\10110100\\11001100\\11010010\\11100000\end{pmatrix}$$

$\hat{C}$ genişletilmiş kodunun vektörlerinden oluşan Steiner S(e+2,2e+2,n+1) sistemi, C vektörlerinden oluşan Steiner S(e+1,2e+1,n) sistemin bir genişlemesidir.

Teorem 8.10 (Tonchev,1996):: H_r hamming kodunda 3 ağırlıklı vektörler 2-(2^r-1,3,1) tasarımını oluşturur ve genişletilmiş kod $\hat{H}_r$ 4 ağırlıklı vektörlerden Steiner S(3,4,2^r) sistemini oluşturur.

Örnek 8.15: örnek 8.14daki bir kod hamming kod olduğundan S(3, 4, 2^3) olan steiner sisteminin ilişki matrisi A'daki gibidir.

8.2.4 Ortogonal Dizimler Ve Tam Kodlar

Tam ortogonal dizimler ile tam lineer kodlar arasında yakın ilişki vardır. $OA(q^m,(q^m-1)/(q-1),q,2)$ tam ortogonal dizimine karşılık gelen $n=(q^m-1)/(q-1)$ uzunluğunda kod, q-ary Hamming kodunun dual kodudur.

Örnek 8.16: (7,16,3) parametreli ikili Hamming kodu, aşağıdaki gibidir.

$$C=\begin{pmatrix}
0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\\
0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\\
0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\\
0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\\
0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\\
0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\\
0\,1\,1\,0\,0\,1\,1\\
0\,1\,1\,1\,1\,0\,0\\
1\,0\,0\,0\,0\,1\,1\\
1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\\
1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\\
1\,0\,1\,1\,0\,1\,0\\
1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\\
1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\\
1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\\
1\,1\,1\,1\,1\,1\,1
\end{pmatrix}$$

Bu kodun dual kodu ise;

$$C^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buradan $C^{\perp}$'in OA(8,7,2,2) tam ortogonal dizimdir.

8.3. Notlar

Maksimal hata düzeltme kodlarının Hadamard matrislerini temel alan kuruluş teknikleri Bose ve Shrikande (1959), Plotkin (1960) ve Peterson (1961)e dayanır. Ayrıca Hadamard matrisleri Walsh fonksiyonuna dayalı olarak sinyal modellemesinde kullanılır [Harmurth, 1960]. Bu fonksiyon kullanılarak sıkıştırılmış resimdeki verinin gönderilmesi ve şifrelenmesi de mümkündür [Jain, 1989].

Bir diğer önemli kod türü olan optimal eşituzaklıklı kodların ilk kuruluşu Preece(1967) tarafından verilmiştir. Ayrıca bu kodların çözülebilir tasarımlardan kurulmasını ilk olarak Semakov ve Zinoviev (1968) vermiştir. Daha sonra bu kuruluş tekniği Tonchev (1988) ve Sinha (1994) tarafından geliştirilmiştir. Sinha ve Mitra (1999) çözülebilir ve ç içe dengeli tamamlanmamış blok tasarımını kullanarak yaklaşık optimal kodları vermişlerdir. Çözülebilir ve ç içe dengeli tamamlanmamış blok tasarımını kullanarak yaklaşık optimal kodların bir diğer kuruluş Miao ve Kageyama (1999) tarafından verilmiştir.

8.4. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki kodların maksimal olup olmadığını belirleyiniz.
   a) (4,8,1)
   b) (7,8,4)
   c) (4,6,1)

2) Aşağıdaki kodların optimal olup olmadığını belirleyiniz.
   a) (4,6,1,2)
   b) (7,16,3,3)

3) RM(4,5) kodunu oluşturunuz.

4) 3.de verilen kodun üreteç matrisini yazınız.

5) 2-(31,15,7) tasarımından elde edilen kodun maksimal olduğunu gösteriniz.

6) A(2,4)den elde edilen optimal kodu ve parametrelerini belirleyiniz.

7) OA(16,3,4,2) ortogonal diziminden elde edilen tam kodu ve parametrelerini elde ediniz.

8.5. Kaynaklar

1. Bose, R.C., Shrikhande, S.S.,"A note on result in the theory of code construction", ***Inf. and Control***, 2:183–194 (1959).

2. Hoffman D.G., Leonard, D.A., Lindner, C.C., Phelps, K.T., Rodger, C.A., Wall, J.R.,1992, Coding Theory, Markel Deccer, Inc., New york..

3. Jain, A.K., "Fundamentals of digital image processing", ***Prentice-Hall***, Englewood Cliffs, 73-78 (1989).

4. Miao, Y., Kageyama, S., "Two classes of q-ary codes based on group divisible association schemes", ***Discrete Mathematics,*** 195:269-276(1999).

5. Peterson, W.W., "Error correcting codes", ***The M.I.T. Press***, New York, 56-87 (1961).

6. Plotkin, M., "Binary codes with specified minimum distance", ***IRE Transactions***, 6: 445-450 (1960).

7. Preece, D.A., "Nested balanced incomplete block designs", ***Biometrika***, 54:479-486 (1967).

8. Semakov, N.V., Zinoviev, V.A., "Equidistant q-ary codes with maximal distance and resolvable incomplete block designs", ***Problemi peredatchi informatsii***, 4(2):3-10 (1968).

9. Semakov, N.V., Zinoviev, V.A., (1969), Equidistant codes and tactical configurations, Problemi peredatchi informatsii 5,No 3, 28-37

10. Sinha, K., "A class of q-ary codes", ***Discrete Mathematics***, 126:439-940 (1994).

11. Sinha, K., Mitra, R.K., "Construction of nested balanced block designs, rectangular designs and q-ary codes", ***Annals of Combinatorics***, 3:71-80(1999).

12. Tonchev, V.D., 1988, Combinatorial Configurations Designs, Codes, Graphs, Longman, London.

13. Tonchev V.D.,1996, Codes, In the CRC Handbook of Combinatorial Designs(C.J. Colbourn and Dinitz, eds),CRC Press, Boca Raton, pp 517-543.

9. BAZI ÖZEL TASARIMLAR

9.1 Dairesel Blok Tasarımları

Tanım 9.1: v işlemleri için bir komşu tasarım (veya bir dairesel blok tasarımi), her bir işlem setinin r defa gözüktüğü ve herhangi iki işlemin λ defa komşular olarak (yani yakın pozisyonda) gözüktüğü k boyutlu b blokta yerleşmiş bir tasarımdır. Bir bloktaki işlemlerin farklı olması ve bir işlemin sadece kendi komşusu olarak gözükmesi gerekmez. Bir komşu tasarımın bir bloğu $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ olarak yazılır ve a_i nin komşularının a_{i-1} ve a_{i+1} olduğu söylenir, burada indisler modül k üzerinden hesaplanır.

Örnek 9.1: Çizelge 9.1 daki tasarım $v=b=15$, $r=k=7$ ve $\lambda=1$ ile bir komşu tasarımdır.

1	2	4	1	5	15	9	6	7	9	6	10	5	14	11	12	14	11	15	10	4
2	3	5	2	6	1	10	7	8	10	7	11	6	15	12	13	15	12	1	11	5
3	4	6	3	7	2	11	8	9	11	8	12	7	1	13	14	1	13	2	12	6
4	5	7	4	8	3	12	9	10	12	9	13	8	2	14	15	2	14	3	13	7
5	6	8	5	9	4	13	10	11	13	10	14	9	3	15	1	3	15	4	14	8

Çizelge 9.1: Bir komşu tasarım

Eğer $k=2$ ise her bir bloktaki işlem çiftlerinin komşular olarak iki kere hesaba katıldığı kabul edilir. O zaman parametreler arasında aşağıdaki bağıntı elde edilir.

Bir komşu tasasrımda aşağıdakiler mevcuttur:

(i) $vr=bk$;

(ii) $\lambda(v-1)=2r$

k=2 veya v=2 ise o zaman gerekli koşullar, bir komşu tasasrımın var olması için yeterlidir.

9.2. c-Bhaskar-Rao Tasarımları (c-BRT)

Tanım 9.2: Elemanları {0,1,-1} olan $v$xb boyutlu W matrisi göz önüne alınsın, her bir satırdaki v hücre ve her bir sütundaki k hücre düşünüldüğünde herhangi iki satırda karşılık gelen elemanların çarpım toplamı bir c sabitini verir.

Bu, bir DTBT nin özellikle isabet matrisinin bir genelleşmesidir. Orijinal Bhaskar-Rao tasasrımlar (BRD) inde c=0 dır.

Tanım 9.3 (Genelleşmiş Bhaskar-Rao Tasarımları (GBRT)): g mertebeli h_1, h_2, ..., h_g elemanlı bir G grubu dikkate alınsın, burada h_1 grubun birim elemanıdır. Her bir satırında k tane her bir sütununda r tane sıfır olmayan elemana sahip G den elde edilen vxv boyutlu W matrisi düşünülsün. A_i, 0-1 elemanlı $v$xb boyutlu bir matris olmak üzere W, $h_1A_1+ h_2A_2+...+ h_gA_g$ şeklinde yazılabilir. $N=A_1+ A_2+...+ A_g$ ve $W^* = (h_1)^{-1}A_1' + (h_2)^{-1}A_2' + ... + (h_g)^{-1}A_g'$ olmak üzere

1. $NN'=(r-\lambda)I+\lambda J$

2. $WW^*=rh_1I+(\lambda/(g(h_1+ h_2+...+ h_g))(J-I)$

eşitlikleri sağlanır.

9.3 Mendelsohn Tasarımları

x_1 v elemanlı bir küme olsun. X'in döngüsel k elemanlı bir alt kümesi $(x_0, x_1), (x_1, x_2).....(x_{k-1}, x_0)$ olcak şekilde X'in farklı elemanlarından oluşsun.Burada $3 \le k \le v$'dür.Bu k elemanlı alt küme$(x_0, x_1,....,x_{k-1})$ şeklinde gösterilir.Bu (v,k,λ) tasarımına Mendelsohn tasarım(MD) yada MD(v,k,λ) tasarımı adı verilir.x'ten elde

edilen döngüsel elemanlı blokların b koleksiyonu şeklinde ifade edilir.DTBT tasarımlarından farklı olarak burada çiftlerin sıralanışı önemlidir.

Eğer k=3 ise böyle bir sisteme Mendelson üçlü sistem adı verilir.

Örnek 9.2: MTS(4,1) olmak üzere B={(0,1,2)(1,0,3)(2,1,3)(0,2,3)}
Burada tüm sıralı çiftler (0,1),(1,0),(1,2),(2,1)....gibi bütün sıralı çiftler bir kez gözüktüğünde dolayı k=3 olan MTS(4,1) tasarımı elde edilir.

Örnek 9.3: v=5 b=20 λ=3 k=3 olan bir Mendelson tasarım;

1 3 1 4 1 5 1 4 1 5 1 5 1 4 2 5 2 5 3 5
2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 3 3 4 4 4 4 4
3 1 4 1 5 1 4 1 5 1 5 1 4 2 5 2 5 2 5 2

Mendelson tasarımının tersi blokların ter düz edilmesiyle elde edilir.

Örnek 9.6: MTS(4,1) olmak üzere B={(0,1,2)(1,0,3)(2,1,3)(0,2,3)} tasarımın tersi B'={(2,1,0)(3,0,1)(3,1,2)(3,2,0)} şeklindedir.

Eğer bir Mendelson tasarımında tüm tasarıma ilişkin tüm(x,y) çiftleri tam olarak λ blokta görünüyor ise bu tasarıma tam Mendelson tasarım(PMD) adı verilir.Bu ifadeden de anlaşılacağı gibi her Mendelson tasarım tam değildir.

Bir (v,k,λ) tasarımının varlığı gerekli koşul $\lambda v \equiv 0 (\mathrm{mod}\, k)$ 'dır.
Bir Mendolson tasarımının çözülebilir olması için gerekli şartlar;

a) $v \equiv 0 (\mathrm{mod}\, k)$ ve blokların $\lambda(v\text{-}1)$ çözülme sınıfına ayrılıyor olması gereklidir.

b) $v \equiv 1 (\mathrm{mod}\, k)$ ve blokların λv tanesi yakın çözülme sınıfına ayrılabilmesi gerekmektedir.

Bu tasarımın Quasi gruplar ve latinkarelerle ilişkisi varır. Ayrıca v mertebeli Latinkare tam setiyle dolayısıyla ortogonal dizimlerle ilişkisi vardır.

Mendelson tipi iki tasarımın denk olması için ya ikisininde izomorfik olması gerekir yada bir tanesinin diğerine izomorfik olması gerekmektedir.

p tek ve asal ise ve bir $(v,p,1)$DTBT tasarımı mevcut ise PMD$(v,p,1)$ vardır.

$v \equiv 1 (\text{mod } p)$ ve DTBT tasarımda çözülebilir ise PMD tasarımda çözülebilirdir.

9.4 Tam Graeco-Latin Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları (Pergola)

Bir Tam Graeco-Latin Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasasrımı (pergola), iki işlem seti için bir blok tasarımıdır, burada (a) her bir set dengeli tamamlanmamış blok tasarımı (DTBT) içindeki bloklara göre tasarımlenir, (b) her bir set bir simetrik DTBT içindeki bir diğerine bağlantılı tasarımlenir ve (c) iki set arasındaki uygun ortogonallik göz önüne alınarak tasarımleme yapılır.

Tanım 9.4: S1 ve S2 nin her ikisi de v-set ihtiva etsin, I bir birim matrisi ve J bütün elemanları 1 olan bir matrisi tanımlasın. Bir Tam Graeco-Latin Dengeli Tamamlanmamış Blok tasarımı (pergola), her bir bloğunun k giriş ihtiva ettiği bir tasarımleme olan (v,b,r,k,λ) parametre seti ile tanımlanır, burada her bir hücrede $(x,y) \in S1xS2$ olacak şekilde bir sıralı çift vardır ve S1 ve S2 setlerinin her biri içindeki elemanlar sıralanmış olmalıdır:

(i) Eğer S2 nin elemanları ihmal edilirse tasarım B1 olarak tanımlanan (v,b,r,k,λ) parametre seti ile n_{10} isabet matrisli bir dengeli tamamlanmamış blok tasarımi DTBT olur şöyle ki

$$n_{10}n'_{10} = (r-\lambda)I + \lambda J \qquad [9.1]$$

(ii) Eğer S1 in elemanları ihmal edilirse B2 olarak tanımlanan (v,b,r,k,λ) parametre setli ve n_{20} isabet matrisli bir DTBT olur şöyle ki

$$n_{20}n'_{20} = (r-\lambda)I + \lambda J \qquad [9.2]$$

(iii) Eğer n_{21}, (i,j). elemanı (i,j=1,2,...,v), S1 in j. elemanı ile S2 nin i. elemanının eşleştiği tekrar sayısı olan vxv matrisi ise o zaman bazı f ve g tamsayıları için

$$n_{21}n'_{21} = n'_{21}n_{21} = fI + gJ \qquad [9.3]$$

eşitliği sağlanır.

(iv) $m_{21} = n_{21} - (1/k)n_{20}n'_{10}$ ile tanımlı "düzeltilmiş isabet matris",

$$m_{21}=0 \qquad [9.4]$$

eşitliğini sağlar. İsabet matrisi n_{21} olan tasarım S ile tanımlanır.

S1 ve S2 setleri pergola içinde sırayla "işlemlerin birinci seti" ve "işlemlerin ikinci seti" olarak tanımlanabilir. (iv) durumu, iki işlem seti arasındaki "düzeltilmiş ortogonallik" olarak yorumlanabilir.

Pergolaları bulmak ve sınıflandırmak için, p, q ve t tamsayıları için S isabet matrisi

$$n_{21} = pn + qI + tJ \qquad [9.5]$$

eşitliğini sağlarsa Eş. 4.3 ü kullanmak yararlıdır, burada p=0 ise n matrisi herhangi bir vxv matrisidir fakat $p \neq 0$ ise n matrisi v işlemli ve $1<k^*<v/2$ yi sağlayan k^* blok boyutlu bir simetrik DTBT in (SDTBT in) isabet matrisidir. (v işlemli ve $v/2<k^{**}<v-1$ i sağlayan k^{**} blok boyutlu bir SDTBT, onun isabet matrisinin j-n olarak yazılmasıyla elde edilir.) $q \neq 0$ için S1 ve S2 elemanlarının sıralanması açık bir şekilde yapılmalıdır; $q \neq 0$ için bir pergola verilerek istenen bağıntı tamamlanacaktır. p ve q nün her ikisi de sıfır değilse (9.3), n nin

$$n + n' = J - I \qquad [9.6]$$

yı sağlaması gerektiğini ifade eder. Eş. 4.6 durumu; v=4z-1, k=2z-1 (Hadamard tasarımleri), z pozitif tamsayısı ve 4z-1 asal kuvvet ile SDTBT lerin iyi bilinen serilerinden SDTBT ler için elde edilir, bu nedenle sıfır olmayan her iki p ve q nun varlığı göz ardı edilemez (Rees and Preece,1999).

pergolalar için iki örnek aşağıda verilmiştir, burada sütunlar bloklar olarak alındı:

Örnek 9.4: (v,b,r,k,λ)=(4,6,3,2,1) ve S1=S2={0,1,2,∞} ile:

0,∞	1,∞	2,∞	∞,0	∞,1	∞,2
2,1	0,2	1,0	1,2	2,0	0,1

[9.7]

Çizelge 9.2: (v,b,r,k,λ)=(4,6,3,2,1) pergolası

Örnek 9.5: (v,b,r,k,λ)=(5,10,6,3,3) ve S1=S2={0,1,2,3,4} ile:

0,0	1,1	2,2	3,3	4,4	0,0	1,1	2,2	3,3	4,4
2,3	3,4	4,0	0,1	1,2	1,4	2,0	3,1	4,2	0,3
3,2	4,3	0,4	1,0	2,1	4,1	0,2	1,3	2,4	3,0

[9.8]

Çizelge 9.3: (v,b,r,k,λ)=)=(5,10,6,3,3) pergolası

Bu örnekler karşılaştırılarak (9.8) n_{21}=J+I iken (9.7)nin n_{21}=J-I olduğu görülür, bu denklemlerin her ikisi (9.5)in özel durumu olur. Böylece (9.8) için S bir dengeli "süper tam" blok tasarımi olarak tanımlanırken (9.7) için S tasarımi, v-1=4 boyutlu bloklardaki v=5 işlemleri ile bir SDTBT tir.

9.5 Ortogonal Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımleri (ODTBT)

Burada göz önüne alınan tasarımler, Dengeli Tamamlanmış Blok Tasarımlerinin (DTBT lerin) bir genelleştirmesidir ve v işlemlerinin bir setinin, her birinin DTBT(v,k,λ) formunda olduğu v nün s işlem seti ile yer değiştirmesi olarak

tanımlanır. Uygulamada s tane DTBT aynı blok tasarımi üzerine koyulur şöyle ki; verilen tasarımde v işlemlerinin 1xbk tasarımlemesi bir sxbk sıralı tasarımlemesiyle yer değiştirmesi olarak kabul edilebilir. Her bir plottaki bir işlem s işlemlerinin bir tasarımlemesiyle yer değiştirmesi olarak göz önüne alınabilir. Bundan başka verilen bir setten her bir işlem, tasarımin bir sütununda her diğer setin bir kolonundaki her işlemiyle birlikte gözükür ve bir blokta her diğer setin bir kolonundaki her işlemiyle tam k defa ve kendi setinin her diğer işlemiyle k-1 defa gözükür. (Setlerin her biri aynı sayıda verilir ve bir setin x işleminin, her diğer setin x hariç her işlemiyle gözüktüğü farz edilir.) Bu tasarımlerde $r=(v-1)$ ve $\lambda=(k-1)$ dir.

Tanım 9.5: Üst üste konmuş s tane DTBT tasarımının bir seti düşünülsün öyle ki, verilen bir plotta bir işlem s tane işlemin bir vektörü ile yer değiştirsin. Ayrıca bloklara göre i-yinci işlem setinin isabet matrisi n_{i0} ve j-yinciye göre n_{ij} ise bu taktirde $n_{ij} - n_{i0}n'_{j0} = 0$ dır.

Ortogonal Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımleri, ODTBT(v,b,r,k,λ;s) notasyonu ile gösterilir.

Örnek 9.6: 24 bloklu bir ODTBT(9,3,2;3) aşağıdaki gibidir. Bloklar parantez içine alınır ve plotlar noktalı virgül ile ayrılır; her bir plottaki fark setlerinden işlemler tasarım içinde verilir ve her bir işlem seti $Z_8 \cup \{\infty\}$ dur. Bir satır içindeki üç blok her bir işlem seti için bir paralel sınıf oluşturur.

(∞,1,5;0,7,2;4,6,3),	(1,5,∞;7,2,0;6,3,4),	(5,∞,1;2,0,7;3,4,6),
(∞,2,6;1,0,3;5,7,4),	(2,6,∞;0,3,1;7,4,5),	(6,∞,2;3,1,0;4,5,7),
(∞,3,7;2,1,4;6,0,5),	(3,7,∞;1,4,2;0,5,6),	(7,∞,3;4,2,1;5,6,0),
(∞,4,0;3,2,5;7,1,6),	(4,0,∞;2,5,3;1,6,7),	(0,∞,4;5,3,2;6,7,1),
(∞,5,1;4,3,6;0,2,7),	(5,1,∞;3,6,4;2,7,0),	(1,∞,5;6,4,3;7,0,2),
(∞,6,2;5,4,7;1,3,0),	(6,2,∞;4,7,5;3,0,1),	(2,∞,6;7,5,4;0,1,3),
(∞,7,3;6,5,0;2,4,1),	(7,3,∞;5,0,6;4,1,2),	(3,∞,7;0,6,5;1,2,4),
(∞,0,4;7,6,1;3,5,2),	(0,4,∞;6,1,7;5,2,3),	(4,∞,0;1,7,6;2,3,5)

Çizelge 9.4: Bir ODTBT(9,3,2;3)

ODTBT lerde bir blok içindeki (devirli tasarımlardaki) fark setlerinde işlemler arasındaki farklar, DTBT lerdeki bloklar içindeki işlemler arasındaki farklara benzerdir.

9.5.1. ODTBT ler İçin Fark Kareler

Her bir initial blok için girişleri, ilk işlem setindeki k girişleri ve ikinci işlem setindeki k girişleri arasındaki farklar olan bir kxk dörtlüsü kurulsun. (Her iki işlem setinin blokları uygun parametreli bir DTBT in initial bloklarından meydana gelmelidir.) Köşegen üzerindeki girişler, bir plottaki birinci ve ikinci işlemler arasındaki farkları ihtiva eder oysa köşegen dışı farklar, blok içindeki birinci ve ikinci işlemler arasındaki farkları ihtiva eder. Bunlar, ODTBT tanımında verildiği gibi $n_{ij} - n_{i0}n'_{j0} = 0$ matris denkleminin sol tarafındaki iki kısma tekabül eder.

Köşegen üzerinde s fark gözükürse (tekrar sayısının eşit olması gerekmez), bu taktirde tümü birlikte, karede k defa gözükmelidir.

Örneğin bir ODTBT(9,24,8,3,2;2) de, ilk bloklar (I,1;0,7;4,6), (1,5;7,2;6,3) (5,I;2,0;3,4), mod 8 ile verilir, burada I bir sabit işlemdir. Fark kareler; Çizelge 9.5 de verildiği gibidir:

	1	7	6		5	2	3		I	0	4
I	-I	-I	-I	1	4	1	2	5	I	3	7
0	1	7	6	7	6	3	4	2	I	6	2
4	5	3	2	6	7	4	5	3	I	5	1

Çizelge 9.5: ODTBT(9,24,8,3,2;2) için fark kareler

I ve -I ile beraber 1-7 değerlerinin her biri köşegen üzerinde ve baştan başa üç defa gözükür.

ODTBT ler için fark kareler Rees(2004) tarafından ortaya konmuştur. Böyle kareler ve dönüşümler, işlemlerin çok katlı (ODTBT ler için üst üste konan) setleriyle bütün işlem setleri çiftleri arasından kurulabilir.

Sonuç 9.1: i setin x işlemi, j setin x işlemi olarak aynı plotta veya blokta gözükmez bu nedenle işlem setleri arasındaki fark önemsiz olduğu zaman her bir blok ks farklı işlem ihtiva eder ve böylece $v \geq ks$ bir ODTBT($v,k,\lambda;s$) nin varlığı için gerekli bir durumdur (Greig and Rees, 2003).

Bir çok tasarım devirli veya yarı devirli formda gösterilebilir yani tasarımler initial blokların bir setinden oluşturulabilir. İnitial blokların özelliklerini göstermek için uygun bir yol fark kareleri kullanmaktır.

9.5.2 ODTBT lerin Geometrik Yorumu

Bazı mertebeler için geometrik olmayan metotlarla kurulan tasarımler bir geometri gibi kurulduğu şeklinde yorumlanabilir. Uygun olan tasarımin dört özelliği vardır.

1- İki setten birinin her bir noktasıyla diğer setin r noktası birleştirilir yani r noktalı setler düzlemler olarak yorumlanır.

2- r tane ilişkili nokta k noktalı r doğru içine gruplandırılabilir yani bloklar diğer setin verilen bir noktasıyla ilişkilendirildiğinde gözükür. Noktaların her biri k defa gözükür, böylece bunlar bir konfigürasyon biçimindedir.

3- Bu bloklar veya doğrular, düzlemlerin arakesiti olarak kabul edilebilir.

4- Bu doğrular diğer setin doğrularıyla çiftlere ayrılır; diğer setin doğruları ilişkili olan diğer düzlemlerin noktalarından meydana gelir.

5-Konfigürasyonların çok yönlü arakesitleri ilginç olabilir. k=3 ve λ=1 iken 3 doğru, bu 3 konfigürasyonun ikişer ikişer arakesitinin alınmasıyla ortaya çıkar.

. Yukarıda sayılanların hepsi aynı zamanda olabilir,
. Üçü karşılıklı bükülebilir,
. İkisi üçüncü bükümde her ikisiyle kesişebilir,
. Üçü sabit bir noktadan geçebilir,
. veya bir doğru, farklı noktalardaki diğer ikisini kesebilir.

Bu modellerde ihtiva edilen noktaların sayısı sırayla 3,9,8,7,7 dir.

Kaç tane konfigürasyon olduğu üstel formda $a^i b^j$ .... şeklinde yazılır.

9.6. İç İçe Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları(NDTBT)

Tanım 9.6: Bir DTBT in her bir bloğu, her biri bir DTBT olacak şekilde eşit boyutlu alt bloklara bölünür. Örneğin 10 bloklu bir DTBT, 5 alt-bloklu yeni bir tasarım verebilir. Bir alternatif NDTBT, 2 li alt-bloklardan elde edilebilir. Bu, her bir işlemin bir blokta her bir diğer işlemle eşit sıklıkta gözüktüğü ve aynı şekilde bir alt-bloktaki her diğer işlemle eşit sıklıkta (daha az sıklıkta) gözüktüğü anlamındadır.

Bu tasarımler, NDTBT(v, b_1, b_2, r, k_1, k_2, λ_1, λ_2) notasyonu ile gösterilir.

Böyle tasarımler, genellikle Whist Tasarımler, Pitch Tournamend Tasarımleri ve Taam Tournaments gibi farklı başlıklar altında çözümlenebilir veya yakın çözümlenebilir sınırlamasıyla araştırılırlar. Genelleştirilmiş Bhaskar-Rao tasarımlerinin NDTBT lerle bağlantıları vardır: Eğer bir GBRD her bir sütunda eşit sıklıkta G grubunun her elemanına sahipse ve eğer satırların sıfır olmayan her eleman çifti farklı aynı sayıda yerde ise sonucun, g alt gruplarıyla bir NDTBT e eşit olduğu çalışmalarda gösterilmiştir.

NDTBT in bu tanımı Preece'nin tanımına uygundur: NDTBT in oldukça farklı bir tanımı Federer(1993) tarafından verilmiştir. İkisi bir tanımda birleştirilebilir; bütün bloklar aynı genişlikte olması zorunlu olmayan alt-bloklara aynı yolda bölünebilir ve sonra ana bloktaki verilen genişlikteki blokların bir alt seti bir DTBT olarak seçilir. Böylece eğer blok genişliği 20 ise bölünme {2,2,2,3,3,4,4} şeklinde ise o zaman bir tasarım; bir DTBT formunda olması gereken 2 boyutlu 3 alt blok, bir DTBT ihtiva etmesi gereken 3 boyutlu 2 blok, 4 boyutlu blokların her biride bir DTBT ihtiva edecek şekilde oluşturulabilir.

Başka bir ifadeyle; (v,b_1,r,k_1) parametreli bir D_1 DTBT inin blokları her biri k_1 in bir alt çarpanı olan k_2 boyutlu alt bloklara bölünürse ve $b_2=b_1k_1/k_2$ alt blokları (v,b_2,r,k_2) parametreli bir D_2 DTBT kurarsa o zaman blokların sistemi, alt bloklar ve işlemler $vr=b_1k_1=b_2k_2$ yi sağlayan (v,b_1,b_2,r,k_1,k_2) parametreli bir Nested DTBT (NDTBT) olarak tanımlanır. Böylece buradaki iç içe olma durumu, k_1 boyutlu bloklar içinde k_2 boyutlu bloklar olması durumudur, tasarımler içinde tasarımler olması durumu değildir. D_1 ve D_2 lerin, NDTBT in sırasıyla uygun λ_1 ve λ_2 parametreli "DTBT elemanları" olduğu söylenir(Morgan and Preece, 2001).

Nested DTBT (NDTBT) e örnek olarak; 0,1,2,3,4 işlemli ve (5,5,10,4,4,2) parametreli NDTBT göz önüne alınsın, burada her bir blok yuvarlak parantez içindedir ve bir blok içindeki alt bloklar düşey çubukla ayrılmıştır:

(1 4 | 2 3)(2 0 | 3 4)(3 1 | 4 0)(4 2 | 0 1)(0 3 | 1 2)

Bu NDTBT tek bir initial blokla tayin edilebilir ve daha kısaca

(1 4 | 2 3) mod 5

olarak yazılabilir.

Çözümlenebilir bir DTBT in tanımına kıyasla NDTBT, eğer k_1 boyutlu bloklarının seti her biri bir çözümlenebilir alt setlere bölünebilirse çözümlenebilirdir denir. Bir çözümlenebilir NDTBT eğer çözüm sınıfları içinde tasarımlenen k_1 boyutlu bloklarıyla verilirse çözüme sahiptir denir. Bir NDTBT, eğer k_1 boyutlu bloklarının seti, her biri her bir işlemi tam olarak α kere ihtiva eden alt setlere bölünebilirse "α-çözümlenebilir" dir. Bir "α-"çözümlenebilir" NDTBT, eğer α-çözümlenebilir sınıflar içinde tasarımlenen k_1 boyutlu bloklarıyla verilirse "α-çözüme" sahiptir denir. v işlemli bir NDTBT, eğer k_1 boyutlu blok setleri her biri bir yakın-çözüm sınıfı olan alt setlere bölünebilirse "hemen hemen çözümlenebilir" dir. Hemen hemen çözümlenebilir NDTBT bu şekilde bölünebilir bloklarıyla verilirse "hemen hemen çözümlenebilir" dir.

Örnek 9.7: Çözümlü NDTBTe bir örnek olarak 0,1,2,3,4,5,6,∞ işlemleriyle ve (8,14,28,7,4,2) parametreleriyle NDTBT göz önüne alınsın:

v=8, k_2=2, r=7, b_2=28, λ_2=1

(1) 0 1	(5) 0 2	(9) 0 3	(13) 0 4	(17) 0 5	(21) 0 6	(25) 0 ∞
(2) 2 3	(6) 1 ∞	(10) 1 6	(14) 1 2	(18) 1 3	(22) 1 5	(26) 1 6
(3) 4 5	(7) 3 4	(11) 2 5	(15) 3 6	(19) 2 ∞	(23) 2 4	(27) 2 6
(4) 6 ∞	(8) 5 6	(12) 4 ∞	(16) 5 ∞	(20) 4 6	(24) 3 ∞	(28) 3 5

v=8, k_1=4, r=7, b_1=14, λ_1=3

(1) 0 1 2 3	(3) 0 1 6 ∞	(5) 0 2 5 ∞	(7) 0 3 5 6
(2) 4 5 6 ∞	(4) 2 3 4 5	(6) 1 3 4 6	(8) 1 2 4 ∞
(9) 0 1 4 5	(11) 0 2 4 6	(13) 0 3 4 ∞	
(10) 2 3 6 ∞	(12) 1 3 5 ∞	(14) 1 2 5 6	

Çizelge 9.6: Bir NDTBT örneği

Aşağıdaki köşeli parantez içindeki bloklar bir çözüm sınıfı kurar ve ∞ işlemi, initial blokların devirsel gelişimi altında sabittir:

[(0 1 | 4 2)(3 6 | 5 ∞)] mod 7.

Bu, "4 kişilik iskambil oyunu" gibi yorumlanabilir. Bir 4 kişilik iskambil oyunu, k_1=2k_2=4 ve r=v-1 ile v≡0 (mod 4) ise bir çözümlenebilir NDTBT, v≡1 (mod 4) ise hemen hemen çözümlenebilir NDTBT tir; k_1 boyutlu bloktaki 4 işlem, oynanan oyunda aynı masaya oturtulan "4 kişilik" kart oyununun 4 oyuncusudur ve k_2 boyutlu alt-bloktaki 2 işlem, oynanan oyunda birbiri ile eşleşen 2 oyuncudur. 4 kişilik kart oyunları; her v=4,8,... ve her v=5,9,... için mevcuttur.

9.7. DTBT, ODTBT, NDTBT ve PMD'ler arasındaki ilişkiler

NDTBT lerin tanımı dikkate alındığında DTBT leri pergolalara bağlayan bir dizi tasarım vardır. λ parametresi göz önüne alınan tasarıme göre farklı değerler alacaktır. Bir pergola olan bir ODTBT(v,v(v-1)/k,v-1,k,k-1; 2) nin var olduğu farz edilsin. Bu aynı zamanda bir DTBT(v,v(v-1)/k,2(v-1),2k,2(2k-1)) olarak düşünülebilir. Bu DTBT den sonra, 2k boyutlu bloklar ve k boyutlu alt-bloklar ile NDTBT(v,v(v-1)/k,2v(v-1)/k,2(v-1),2k,k,2(2k-1),2(k-1)) olan Preece tipli bir NDTBT(v,b_1,b_2,r,k_1,k_2,λ_1,λ_2) olacaktır. Ayrıca, daha genel tipte bir NDTBT tanımlanır, burada k boyutlu bloklar içinde iki alt-DTBT vardır: NDTBT(v,v(v-1)/k,v(v-1)/k,2(v-1),2k,k,2k-1,k-1). Daha sonra bir ODTBT in bloklarının karşılaştırılması olan blok tasarımi karşılıklı ilişkilendirilir ve sonunda bir orijinal

ODTBT meydana gelir. Tam Mendelsohn tasarımlerinden başka: bir PMD(v,v(v-1)/k,v-1,k,1) den bir ODTBT(v,v(v-1)/k,v-1,k,k-1;2) kurulabilir fakat genellikle tersi doğru değildir.

Ayrıca PMD ler ve NDTBT ler arasında daha direkt bir ilişki vardır: Eğer bir farklı blok boyutlu bir PMD varsa o zaman çarpanların her birine eşit alt-blok boyutlu ve orijinal tasarım ile aynı boyutlu bir NDTBT olabilir. Böylece eğer k=m.n ise bir (m,k)NDTBT(v), (a_1, a_2, a_3,...,a_{mn}) bloklarını ($a_1a_{(n+1)}...a_{((m-1)n+1)}|a_2a_{n+2}...a_{((m-1)n+2)}|...a_na_{2n}...a_{mn}$) olarak yeniden tasarımlemeyle bir PMD(v,k,1) den elde edilebilir (Rees,2004).

9.8 Quasi Simetric Tasarım

Bir tasarımda herhangi 2 bloğun birbirleriyle kesişmesi 2 farklı değer alıyor ise bu dizayna quasi-simetrik adı verilir.

Bir t-(v,k,λ) dizaynı (X,B) çiftinden oluşur. Burada X'e noktalar kümesi B'ye ise X'in k elemanlı alt kümelerinden oluşan bloklar kümesi adı verilir. Burada herhangi bir t nokta tam olarak λ blokta gözükür. Kesişim sayısı (λ_i); farklı iki bloktaki işlem sayısıdır. Bir tasarıma quasi-simetrik grup denmesi için tasarımın kesişim sayısının sadece 2 değer alması gerekir.

Örnek 9.8:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

A işaret matrisinde 1.inci ve 2.inci bloklar 1 noktada, 1.inci 3.üncü bloklar hiçbir noktada, 1.inci ve 4.üncü bloklar 1 noktada kesişiyor. Diğer bütün bloklar 2 şerli taranırsa keşim sayısının ya 1 ya da 0 olduğu görülür. Bu durumda blokların kesişim sayısı sadece 2 farklı değer aldığından bu dizayn bir quasi-simetrik tsaarımdır.

9.9. (r,λ) tasarımları

Tanım 9.7: bir (r,λ) tasarımı, bir (V;B) çiftidir. V, v elemanlı noktalar kümesi; B, b bloktan oluşan bloklar kümesidir. Her farklı nokta çifti tam olarak λ blokta görünür ve her nokta bloklarda r kez tekrarlanır. n=r-λ dir. (r,λ) tasarımında i.nci bloktaki nokta sayısını yani i.nci bloğun genişliğini gösterir. Dolayısıyla (r,λ) tasarımlarında bloklardaki eleman sayıları birbirlerinden farklıdır.

Örnek 9.9: Bir tasarımın blokları aşağıdaki gibi olsun.

Bloklar

İşlemler	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}
1	X	X	X	X	X					X		
2	X	X	X			X	X				X	
3	X	X		X		X		X	X			
4	X		X		X	X	X	X	X			
5	X			X	X		X					X

k_1=5, k_2=3, k_3=3, k_4=3, k_5=3, k_6=3, k_7=3, k_8=2, k_9=2, k_{10}=1, k_{11}=1, k_{12}=1, k_{13}=1

Dikkat edilecek olursa $k_i$ler birbirlerinden farklıdır fakat diğer parametreleri r=6, λ=3, b=12, v=5dir. Bu tasarım 5 nokta ve 12 blok için (6,3) tasarımıdır.

Tanım 9.8: bir blok noktaların tamamını içeriyorsa bu bloğa "tam blok" denir. V tane bloğun kümesi yalnızca bir nokta içeriyorsa bu bloklara "tekil" blok ve tekil blokların birleşimi V noktalar kümesini veriyorsa böyle bir kümeye " tekillerin tam kümesi" denir.

Tanım 9.9: λ tam bloklarından ve ve tekillerin n tam kümelerinden meydana gelen bir (r,λ) tasarımlar bazen (r,λ) sistemler olarak adlandırılır. Eğer $k_i \geq 2$ ise bu tasarımlar tasarımli ikişerli dengeli tasarımlardır.

Tanım 9.10: yalnızca kümedeki eleman sayısı 1, $(v-1)$ ya da v elemandan oluşan blokları içeren tasarımlar yaklaşık trivialdir. Herhangi bir tam blok ya da tekillerin tam kümesini içeren (r,λ) tasarım indirgenebilirdir.

9.10 Transversal Tasarımlar

Tanım 9.11

$k \geq 2$ ve $n \geq 1$ olmak üzere bir transversal tasarım $TD_\lambda(k,n)$ ile ifade edilir ve aşağıdaki özellikleri sağlayan $(\mathcal{X},\mathcal{G},\mathcal{B})$ sıralı üçlüsünden oluşur.

(*i*) $\mathcal{X}$, kn elemanlı bir settir, elemanları noktalar olarak adlandırılır.

(*ii*) $\mathcal{G}$, $\mathcal{X}$'in bir parçasıdır. Genişliği n olan k tane alt setten oluşur. Bu setler gruplar olarak adlandırılır.

(*iii*) $\mathcal{B}$, $\mathcal{X}$'deki k alt setin bir setidir ve bloklar olarak adlandırılır.

(*iv*) Herhangi bir grup ve bloğun sadece bir tek ortak noktası vardır.

(*v*) Farklı gruplardan gelen tüm nokta çiftleri bir blokta yer alır.

Bir transversal tasarımda gruplar, noktaların alt setidir. Ayrıca $n \geq 1$ olan tamsayılar için bir $TD_{\lambda}(2,n)$ tasarımı mevcuttur.

Transversal tasarımların gösterilmesinde farklı notasyonlar kullanılmaktadır. Örneğin, $T[k,\lambda;n]$ n hacimli, k grup ve λ indeksli bir transversal tasarımı ifade eder. $\lambda = 1$ durumunda tasarıma birim indeksli transversal tasarım denir.

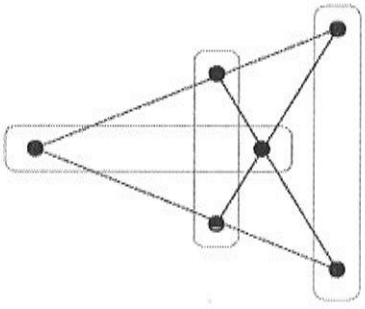
Örnek 9.10:

$TD_1(3,2)$ tasarımı aşağıdaki gibidir:

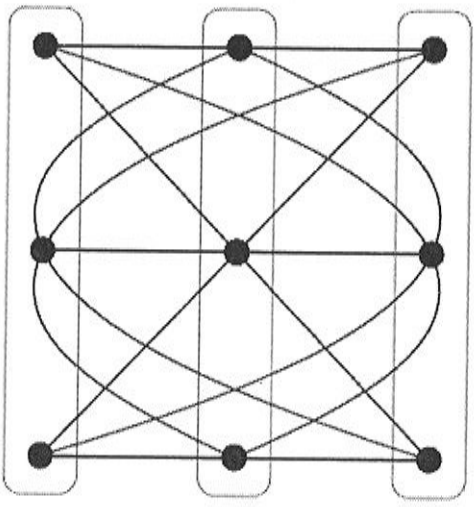
$X = \{1,2,3,4,5,6\}$

$G = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$

$B = \{\{1,3,5\},\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\}$



Şekil 9.1: $TD(3,2)$ transversal tasarımı



Şekil 9.2: $TD(3,3)$ transversal tasarımı

9.10.1 Transversal tasarımların ortogonal tasarımler ile ilişkisi

Öncelikle bir $OA(k,n)$ ortogonal tasarımından bir $TD_\lambda(k,n)$ transversal tasarımının nasıl elde edileceği gösterilecektir. A, sembol seti $\{1,...,k\}$ olan bir $OA(k,n)$ ortogonal tasarımı olsun. A'nın kolon etiketleri $1,...,k$, satır etiketleri ise $1,...,n^2$ şeklinde alınsın.

$\mathcal{X} = \{1,...,n\} x \{1,...,k\}$, $1 \le i \le k$ için, $G_i = \{1,...,n\} x \{i\}$ tanımlanır.

$\mathcal{G} = \{G_i : 1 \le i \le k\}$, $1 \le r \le n^2$ için, $B_r = \{(A(r,i),i) : 1 \le i \le k\}$ olmak üzere; $\mathcal{B} = \{B_r : 1 \le r \le n^2\}$ elde edilir.

$(\mathcal{X},\mathcal{G},\mathcal{B})$ üçlüsünün, bir $TD_\lambda(k,n)$ transversal tasarım oluşturduğu görülebilir.

Örnek 9.11: $OA(4,3)$ ortogonal tasarımından $TD_1(4,3)$ transversal tasarımının elde edilişi:

$OA(4,3)$

1 1 1 1

1 2 2 2

1 3 3 3

2 1 2 3

2 2 3 1

2 3 1 2

3 1 3 2

3 2 1 3

3 3 2 1

$TD_1(4,3)$ transversal tasarımının grup ve blokları:

$B_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$

$B_2 = \{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$

$B_3 = \{(1,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

$B_4 = \{(2,1),(1,2),(2,3),(3,4)\}$

$B_5 = \{(2,1),(2,2),(3,3),(1,4)\}$

$B_6 = \{(2,1),(3,2),(1,3),(2,4)\}$

$B_7 = \{(3,1),(1,2),(3,3),(2,4)\}$

$B_8 = \{(3,1),(2,2),(1,3),(3,4)\}$

$B_9 = \{(3,1),(3,2),(2,3),(1,4)\}$

$G_1 : \{(1,1)\ (2,1)\ (3,1)\}$

$G_2 : \{(1,2)\ (2,2)\ (3,2)\}$

$G_3 : \{(1,3)\ (2,3)\ (3,3)\}$

$G_4 : \{(1,4)\ (2,4)\ (3,4)\}$

$n \geq 2$ ve $k \geq 3$ olsun. Aşağıdaki tasarımlardan herhangi birinin varlığı diğer ikisinin varlığını gerektirir.

(*i*) $k-2$ $MOLS(n)$

(*ii*) $OA(k,n)$

(*iii*) $TD_\lambda(k,n)$

Örnek 9.12: $TD_1(4,3)$ transversal tasarımı ve $k-2$ $MOLS$:

$X = \{0 \quad a \quad \alpha \quad \clubsuit$
$\quad 1 \quad b \quad \beta \quad \blacklozenge$
$\quad 2 \quad c \quad \gamma \quad \spadesuit\}$

$G_1 : 0 \quad 1 \quad 2$ $\qquad$ $B_1 = 0 \quad a \quad \alpha \quad \clubsuit$

$G_2 : a \quad b \quad c$ $\qquad$ $B_2 = 0 \quad b \quad \beta \quad \blacklozenge$

$G_3 : \alpha \quad \beta \quad \gamma$ $\qquad$ $B_3 = 0 \quad c \quad \gamma \quad \spadesuit$

$G_4 : \clubsuit \quad \blacklozenge \quad \spadesuit$ $\qquad$ $B_4 = 1 \quad a \quad \gamma \quad \blacklozenge$

$B_5 = 1 \quad b \quad \alpha \quad \spadesuit$

$B_6 = 1 \quad c \quad \beta \quad \clubsuit$

$B_7 = 2 \quad a \quad \beta \quad \spadesuit$

$B_8 = 2 \quad b \quad \gamma \quad \clubsuit$

$B_9 = 2 \quad c \quad \alpha \quad \blacklozenge$

	0	1	2
a	α	γ	β
b	β	α	γ
c	γ	β	α

	0	1	2
a	$\clubsuit$	$\blacklozenge$	$\spadesuit$
b	$\blacklozenge$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
c	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\blacklozenge$

Teorem 9.2: $TD_1(k,n)$ tasarımının varlığı n nci mertebeden $k-2$ $MOLS$ varlığına eşittir [Stinson, 2004].

9.10.2 Simetrik transversal tasarım

Tanım 9.12: Eğer bir isabet yapısı $\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa simetrik transversal tasarım $STD_{\lambda}(k,n)$ adını alır. Burada $k \geq 2$, $n \geq 2$ ve $\lambda \geq 1$ dir.

(*i*) $\mathcal{S}$ bir $TD(k,n)$ tasarımıdır.
(*ii*) $\mathcal{S}$ 'nin dual yapısı da yine bir $TD(k,n)$ tasarımıdır. $\mathcal{S}$ 'nin dualinin nokta grupları, $\mathcal{S}$ 'nin blok gruplarıdır.

Eğer $\mathcal{S}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$, bir simetrik transversal tasarım $STD_{\lambda}(k,n)$ ise $k=\lambda n$ olur.

Teorem 9.3: $k \geq 6$ ve $k \equiv 0 \bmod(2)$ olsun. $STD_{\frac{k}{2}}[k;2]$ ve de $k \equiv 0 \bmod(4)$ mevcut ise parametreleri $\left(k-1,\frac{1}{2}k-1,\frac{1}{4}k-1\right)$ olan bir Hadamard tasarım mevcuttur. Bu teoremin tersi de doğrudur(Stinson,2004).

Teorem 9.4: $k \geq 8$ ve $k \equiv 0 \bmod(4)$ olsun. Parametreleri $\left(k-1,\frac{1}{2}k-1,\frac{1}{4}k-1\right)$ olan Hadamard tasarım mevcut ise $STD_{\frac{k}{2}}[k;2]$ olan bir simetrik transversal tasarım mevcuttur (Stinson,2004).

Örnek 9.13: $STD_4(8,2)$ tasarımının isabet matrisine karşılık gelen matris, ayrıca parametreleri (7,3,1) olan Hadamard tasarımın isabet matrisi, aşağıda gösterilmiştir.

1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	
1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	
1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	
0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	
0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	

1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1

Bir $STD_m[k;n]$ ve bir $STD_h[t;r]$ mevcutsa bir $STD_{kh}(kt,r)$ de mevcuttur. Ayrıca p bir asal sayı ise $0 \le n \le m$ koşuluyla tüm m ve n ler için bir $STD_{p^{m-n}}(p^m, p^n)$ mevcuttur.

9.10.3 Transversal tasarımların geometrik yapıları

$n+1$ mertebeli ve $k+1$ dereceli bir *net* in duali $TD(k+1,n+1)$ tasarımıdır.

$TD(k,n)$ tasarımında elemanlar ve blokların işlevi yer değiştirdiğinde (k,n)-*net* elde edilir.

Örnek 9.14: $TD(5,4)$ tasarımından $(5,4)$-*net* elde edilebilir. Bu bir dördüncü mertebeden afin düzlemdir.

Bu yapılar Drake ve Jungnickel (1978) tarafından tanıtılmıştır. Ancak bu yapıların duali ki bunlar transversal tasarım olarak adlandırılır ve Hanani (1974) tarafından gerçekleştirilen transversal tasarımlara ilişkin çalışmalar daha eskidir .

n nci mertebeden bir projektif düzlem mevcut ise bir $STD_1(n,n)$ simetrik transversal tasarımı mevcuttur.

Teorem 9.6: $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B},\mathcal{I})$ olmak üzere bir $STD_1(n,n)$ mevcut ise n nci mertebeden bir projektif düzlem ve $\mathcal{D}$ yi içeren n nci mertebeden afin düzlem mevcuttur(Stinson, 2004).

9.11 Bölünmüş Dengeli Tamalanmamış Blok Tasarımlar

v, l, u, k, λ pozitif tamsayılar olsun. X noktalar kümesi ve B X'in l boyutlu altkümelerinin bir koleksiyonu olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan bir tasarıma Bölünmüş Dengeli Tamalanmamış blok tasarım denir.

1) her $B\in B$ k boyutlu u tane altbloğun ayrık bir birleşimi, $B=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_u$, olarak ifade edilebilir.
2) X kümesinden her {x,y} çifti içintam olarak λ blok mevcuttur. Burada, $x\in B_i$, $y\in B_j(i\neq j)$(Du, 2004).

9.12 İzomrfizm ve Otomorfizm

X sonlu bir küme olsun. π, X üzerinde bir permütasyon ya da bire bir fonksiyon tanımlasın. $|X|=v$ ise $v!$ kadar permütasyon vardır. Bu tarz permütasyonlar X üzerinde simetrik grup S_x'i oluşturur. π, X'in bir permütasyonu olsun. π, $D=(X,B)$

tasrımını E=(X,$\mathcal{C}$) tasarımına dönüştürürse D tasarımı E tasarımına izomorfiktir denir. Böylece π, D ve E arasındaki izomorfizmi tanımlar. Eğer π permütasyonu sonucunda $\mathcal{B}=\mathcal{C}$ ise π, D'nin otomorfizmidir denir. π, D'in bir otomorfizmi olsun. Tüm $i\in\{1,2,\ldots,b\}$ için $B_i\pi=B_j$ olacak şekilde bazı $j\in\{1,2,\ldots b\}$ vardır. Böylece $B_i=B_j\pi^{-1}$ diğer bir deyişle π^{-1} D'nin bir otomorfizmidir. π ve σ D'nin otomorfizmleri olsun. Bu taktirde $B_i\pi\sigma= B_j\sigma= B_h$ olur. Böylece, $\pi\sigma$, D'nin bir otomorfizmini tanımlayacaktır. Bir tasarımın tüm otomorfizmlerinin kümesi birleşim işlemi altında grup oluşturur. Bu Aut D ifadesi ile gösteririlir ve $S_x$in bir alt grubudur.

9.12.1 Simetrik DTBTlerin otomorfizmi

Bir DTBTin otomorfizmi, blok ve işlem kümeleri üzerinde bir permütasyon gibi düşünülebilir. Eğer tasarım simetrik ise, permütasyon v elemanlı kümeler üzerinde iki farklı şekilde oluşur. Permütasyonu göstermenin bir yolu da permütasyon matrisidir. Permütasyon matrisi her satır ve sütunun da sadece bir tane 1 olan ve geri kalan elemanlar 0 olan bir kare matristir. Bir simetrik DTBTnin otomorfizmi eşit sayıda nokta ve blokları sabitler. SDTBTlerin bir otomorfizmi aynı devire yapısına sahiptir. Noktaların devirleri ve blokların devirleri arasında birebi karşılık varıdr ve karşılık gelen devirler aynı uzunluktadır.

9.13 Ayrık Tasarımlar

X kümesi üzerinde $D_i=(X,\mathcal{B}_i)$ i=1,2 tasarımları ele alınsın. Bu iki tasarımın ortak bloğu yoksa ayrıktır denir. D_1 ve D_2 ayın parametrelere sahip olsun. D_1 ve $D_2\alpha$'nın ortak bloğu olmayacak şekilde X üzerinde bir α permütasyonuna sahip olabilmesi için α=1 ve $k\geq 3$ olmalıdır.

9.14 Golf Tasarımları

V, 2n+1 elemanlı bir küme olsun. 2n+1 mertebeden bir Golf tasarım V üzerinde tanımlı 2n-1 tane $L_1, L_2, \ldots, L_{2n-1}$ simetrik idempotent Latin karelerin bir kümesidir.

Burada $x,y \in V$, $L_i(x,y) \neq L_j(x,y)$ $i,j=1,2,\ldots 2n-1$ olur. $v=2n+1$ olsun. n pozitif tamsayı olmak üzere n=2 durumu hariç v mertebeli bir golf tasarım vardır.

9.15 Room Kareler

S, n+1 elemanın bir kümesi olsun. n boyutlu bir Room kare, F, aşağıdaki özellikleri sağlayan n×nlik bir tasarımlemedir.

i) F'in her hücresi ya boş ya da S'nin elemanlarının sıralı olmayan bir çiftini bulundurur.

ii) S'nin her elemanı F'nin her satır ve sütunda bir kez gözükür.

iii) Elemanlrın sıralı olmayan her çifti Fnin tam olarak bir hücresinde güzükür.

Eğer (i,i) hücresi {∞,i} çiftini ihtiva ediyorsa Room kare standarttır denir (∞ lemanına göre).

∞,0			1,5		4,6	2,3
3,4	∞,1			2,6		5,0
6,1	4,5	∞,2			3,0	
	0,2	5,6	∞,3			4,1
5,2		1,3	6,0	∞,4		
	6,3		2,4	0,1	∞,5	
		0,4		3,5	1,2	∞,6

Room karelerin kuruluşu için oldukça etkili bir metod Hill-Climbing Algoritmasıdır (Dinitz ve Stinson, 1992).

9.16 Howell Tasarımlar

S, n+1 elemanın bir kümesi olsun. Bir Howell tasarım(s,2n), H, aşağıdaki özellikleri sağlayan s×slik bir tasarımlemedir.

i) H'in her hücresi ya boş ya da S'nin elemanlarının sıralı olmayan bir çiftini bulundurur.

ii) S'nin her elemanı H'nin her satır ve sütunda bir kez gözükür.

iii) Elemanlrın sıralı olmayan her çifti H'nin en fazla bir hücresinde güzükür.

Bir H(4,6) ve H(4,8) tasarımları aşağıda verildiği gibidir.

0,4		1,3	2,5
2,3	1,4	0,5	
	3,5	2,4	0,1
1,5	0,2		3,4

1,5	2,6	3,7	4,8
4,7	3,8	2,5	1,6
2,8	1,7	4,6	3,5
3,6	4,5	1,8	2,7

n boyultu ortogonal Latin kare çiftinin varlığı H(n,2n) tasarımının varlığına denktir. Ayrıca H(2n-1, 2n) tasarımı 2n-1 boyutlu bir Room kareyi ifade eder(Colbourn and Dinitz, 1996).

9.17 GenişletilmişTasarımlar(Augmented Designs)

Genişletilmiş (deney) tasarımlarının sınıfı kontrol(yada standart) ve yeni olmak üzere 2 tür işlem içerir. Yeni diye adlandırılılan işlemler rasgele ve kontrol diye adlandırılan işlemler sabit olarak ele alınır. Yeni işlemler tekrarlanmazken kontroller hatanın tahminini ve bloklama etkisini elde etmek için tekrarlanır. Deney tasarımı kontrol işlemleri için seçilir, daha sonra bloklar, satırlar ve/veya işlemleri için yeni işlemleri yerleştirmek için genişletirilir. Bu şekilde oluşturulan bir tasarıma genişletilmiş tasarım denir. Genişletilmiş tasarımları ilk olarak Federer(1956) vermiştir. Daha sonra yine Federer ve ark.(1975) ve Federer(1993,1998) tarafından geliştirilmişitir. Bu tasarımların sistemetik düzenleme üzerinde birçok avantajları mevcuttur. Özellikle genotip, ilaç ve bitkiler gibi yeni işlemlerin gözlemlenmesi üzerine oldukça etkili olduğu söylenebilir.

9.18 Turnuva Tasarımları (Tournament Designs)

bir turnuva tasarımı TA(m,c) cxt şeklinde bir dizimdir. Bu dizim m tane elemanın $\binom{m}{2}$ farklı sralanmamış çiftini içerir. V deki her eleman her dizimim her sütununda en fazla bir kez görünür. Bu tasarımların Room kareler ve Howell tasarımlarla çok yakın ilişkisi vardır. Turnuva tasarımların detaylı incelemesi için Wallis ve ark.(1972)ye ve Colbourn ve Dinitz(1996) ya bakılabilir.

9.19. Kaynaklar

1. Colbourn, C.J. And Dinitz, J.H. (Eds.), "The CRC Handbook of Combinatorial Designs", CRC Press, Boca Raton, FL, New York, (1996).

2. Dinitz J.H. and Stinson D.R., 1992, Room Squares and Related designs. Contemporary Design Theory: A collection of Surveys, Wiley,.New York.

3. Drake D.A. and Jungnickel D., 1978, Klingenberg structures and partial designs II. Regularity and uniformity, Pacific J. Math., 77, 389-415.

4. Du, B., 2004, "Splitting balanced incomplete block designs with block size 3× 2" J. Combin. Des. 12: 404-420.

5. Federer, W. T. (1956). Augmented (or hoonuiaku) designs. Hawaiian Planters' Record LV(2):191-208

6. Federer, W. T. (1993). Statistical Design and Analysis for Intercropping Experiments. Volume I. Two. Crops. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, Chapter 10.

7. Federer, W. T. (1998). Recovery of interblock, intergradient, and intervariety information in incomplete block and lattice rectangle designed experiments. Biometrics 54:471-481.

8. Federer, W. T., Nair, R. C., and Raghavarao, D. (1975). Some augmented row-column designs.Biometrics 31:361-373.

9. Greig, M. And Rees, D.H., "Existence of balanced incomplete block designs for many sets of treatments", ***Discrete Mathematics***, 261:299-324 (2003).

10. Hanani H., 1974, On resolvable balanced incomplete block designs, J. Comb. Theory Ser. A 17, 275--289.

11. Morgan, J.P. And Preece, D.A. And Rees, D.H., "Nested balanced incomplete block designs", ***Discrete Mathematics***, 231:351-389 (2001).

12. Rees, D.H. And Preece, D.A., "Perfect Graeco-Latin balanced incomplete block designs (pergolas)", ***Discrete Mathematics***, 197/198:691-712 (1999).

13. Stinson D.R.,2004, Combinatorial Designs:Construction and analysis, Springer, New York.

14. Wallis W.D., Street A.P. and Wallis J.P., 1972, Combinatorics; Room Squares, Sum-Free Sets, Hadamard Matrices, Lecture Notes in Mathmatics vol 292, Springer-Verlag.