ÜSTÜN YETENEKLİ ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ PROBLEMLERİ YOLUYLA AKIL YÜRÜTME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Birnaz Kanbur Tekerek

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT, 2023

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU

Bu tezin tüm hakları saklıdır. Kaynak göstermek koşuluyla tezin teslim tarihinden itibaren on iki (12) ay sonra tezden fotokopi çekilebilir.

YAZARIN

Adı: Birnaz

Soyadı: Kanbur Tekerek

Bölümü: Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

İmza:

Teslim Tarihi:

TEZİN

Türkçe adı: Üstün Yetenekli Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Problemleri Yoluyla Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi

İngilizce adı: Investigation of Reasoning Skills of Gifted Primary Students Through Geometry Problems

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı: Birnaz KANBUR TEKEREK

İmza: …….

JÜRİ ONAY SAYFASI

Birnaz Kanbur Tekerek tarafından hazırlanan "Üstün Yetenekli Ortaokul Öğrencilerinin Geometri Problemleri Yoluyla Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Gazi Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı'nda doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ziya Argün ……..

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Başkan: Prof. Dr. Erdinç Çakıroğlu ……..

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Üye: Prof. Dr. Yüksel Dede ……...

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Üye: Doç. Dr. Gönül Yazgan Sağ ……

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Zeynep Sonay Ay ……

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Hacettepe Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 09/02/2023

Bu tezin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Prof. Dr. Şaban Çetin

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü ……

Can parçam kızım Hatice Zeynep'e

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitim hayatım boyunca değerli tecrübeleriyle bana her zaman yol gösteren, sabırla ve her koşulda vakit ayıran, zor zamanlarımda destek olan ve akademik gelişimime katkı sağlayan çok saygıdeğer danışmanım ve hocam Prof. Dr. Ziya Argün'e tüm kalbimle teşekkür ederim.

Tez izleme sürecimi takip eden, bilgi, deneyim ve önerileriyle bana katkıda bulunan ve farklı bakış açıları kazanmamı sağlayan değerli hocalarım Prof. Dr. Yüksel Dede, Prof. Dr. Erdinç Çakıroğlu, Doç. Dr. Gönül Yazgan Sağ ve Dr. Öğr. Üyesi Zeynep Sonay Ay'a en içten teşekkürlerimi sunarım. İhtiyaç duyduğum zamanlarda yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Mahmut Çitil'e teşekkür ederim.

Tez çalışmamı gerçekleştirdiğim Bilim ve Sanat Merkezi müdürü Derya Boçkay'a araştırmanın gerçeklemesindeki katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Lisansüstü hayatım boyunca iyi ve kötü her anımda yanımda olan, doktora eğitimi sürecinde karşılaştığımız engelleri birlikte aştığımız, kıymetli meslektaşım ve arkadaşım Cansu BAKIRCI SAYMAZ'a teşekkür ederim.

Yaşadığım zorluklara rağmen her zaman anlayış gösteren, desteğini ve sonsuz sevgisini hiç eksik etmeyen, her durumda yanımda olan sevgili eşim Doç. Dr. Adem TEKEREK'e ve hayatıma renk katan kızıma teşekkür ederim.

Beni yetiştiren ve bu günlere getiren her konuda beni dinleyip teselli etmekten yorulmayan annem, babam ve kardeşime sonsuz sevgimi ve teşekkürlerimi sunuyorum.

ÜSTÜN YETENEKLİ ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ PROBLEMLERİ YOLUYLA AKIL YÜRÜTME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

(Doktora Tezi)

Birnaz Kanbur Tekerek

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2023

ÖZ

Bu araştırmanın amacı üstün yetenekli ortaokul öğrencilerinin geometri problemleri yoluyla akıl yürütme becerilerini incelemektir. Öğrencilerin düşünme süreçlerini derinlemesine incelemek amaçlandığından nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Katılımcılar belirlenirken amaçsal örnekleme yöntemlerinden biri olan kolay ulaşılabilir örnekleme metodu uygun görülmüştür. Böylece araştırmanın çalışma grubunu 8.sınıfa devam eden iki üstün yetenekli öğrenci oluşturmuştur. Öğrencilere sunulacak veri toplama araçlarına literatür ışığında belirlendikten sonra uzman görüşü de alınarak son şekli verilmiştir. Araştırmanın yürütülebilirliğini ve veri toplamada kullanılmaya karar verilen problem durumlarının uygunluğunu tespit etmek amacıyla bir öğrenciyle pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Verilerin analizi sırasında kullanılacak "Akıl Yürütme Bileşenleri" yine uzman görüşleri alındıktan sonra son halini almış ve toplanan veriler bu bileşenlere göre betimsel ve içerik analizine tabi tutulmuştur. Araştırmada elde edilen bulgulara göre, üstün yetenekli öğrenciler akıl yürütürken "fikir ileri sürme, çıkarım yapma ve gerekçelendirme" bileşenleri ile daha sık karşılaşılmıştır. Bunun yanında, bu bileşenlerin görülme sıklığından farklı olarak "iddia etme, seçim yapma ve doğrulama/yanlışlama" akıl yürütme bileşenlerine

daha az rastlanılmıştır. “Gerekçeyi kontrol etme ve argüman zincirleri oluşturma” bileşenleri de yine az görülen akıl yürütme bileşenleridir. Öğrencilerin çözmeye alışık oldukları ve bir tek cevabı olan problemlerde zorlanmayarak akıl yürüttükleri ve alışık olmadıkları rutin olmayan problemlerin çözümünde zorlandıkları ancak o ana kadar görmedikleri, farklı olan problemleri de hevesle çözmeye çalışmış olmaları da araştırmanın diğer sonuçlarındandır. Bu sonuç, bazı durumlarda onların akıl yürütme seviyesinin beklenenin (varsayılanın) altında kaldığını işaret etmektedir. Dolayısıyla bu öğrenciler daha çok rutin olmayan, farklı ve derin düşünmeyi gerektiren, merak uyandıran problem durumlarıyla karşılaştırılması, onların akıl yürütmede ve problem çözmede var olan potansiyellerini kullanabilmeleri ve temel matematiksel düşünme becerilerini geliştirebilmeleri açısından önem arz etmektedir. Buna uygun öğrenme ortamları hazırlamak için öğretmenlerin bu durumlar göz önünde bulundurularak yetiştirilmesi, kendilerini buna göre hazırlamaları yerinde olacaktır. Ayrıca, program geliştiriciler de bu öğrencilere uygun öğretim programları hazırlamaları onların beklenilen şekilde yetiştirilmelerinde etkili olacağı düşünülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Üstün Yeteneklilik, Akıl Yürütme, Geometrik Akıl Yürütme, Akıl Yürütme Bileşenleri

Sayfa Adedi: xvii+170

Danışman: Prof. Dr. Ziya Argün

INVESTIGATION OF REASONING SKILLS OF GIFTED PRIMARY STUDENTS THROUGH GEOMETRY PROBLEMS

(Ph.D Thesis)

Birnaz Kanbur Tekerek

GAZI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES

February 2023

ABSTRACT

The purpose of this study is to investigate of reasoning skills of gifted primary students through geometry problems. Since it is aimed to examine the thinking processes of the students in depth, the qualitative case study method was used. While determining the participants, convenience sampling which is one of the purposeful sampling is seen appropriate. As a result, the participants of the study are consisted of two gifted students. Data collection tools which will be presented to students after identified in the light of literature and after they were finalized by taking expert opinion. A pilot study was conducted with a student to determine feasibility of the study and suitability of problem situations decided to be used in data collection. “Reasoning Components” to be used in the analysis of the data were finalized by taking expert advices and the collected data were subjected to descriptive and content analysis according to these components. According to the findings obtained in the study it was encountered more often that the gifted students displayed “producing ideas, making inferences and justifications” during their reasoning process. In addition, the reasoning components of "claiming, making choices and verifying/falsifying"

were encountered less frequently. The components of "checking the reasoning and creating argument chains" were rarely encountered. Moreover, it was observed that participants reasoned easily on questions that have only one answer and they used to solve and that they had difficulty in solving non-routine questions that they were not used to. Nevertheless, they tried to solve the different questions that they had not seen until that time. This result is, in some cases, the level of intelligence they exercised above the expected (default) indicates below. Therefore, bringing these students faced with non-routine, different and requiring deep-thinking problem situations are important for them to use their potential in reasoning and problem solving and to develop their basic mathematical thinking skills. In order to prepare suitable learning environments, it would be appropriate to train teachers considering these circumstances and to prepare themselves as a mathematics teacher accordingly. In addition, program developers should prepare appropriate teaching programs for these students. It is thought that it will be effective in their upbringing as expected.

Key Words: Giftedness, Reasoning, Geometric Reasoning, Reasoning Components

Page Number: xvii+170

Supervisor: Prof. Dr. Ziya Argün

İÇİNDEKİLER

TELİF HAKKI VE TEZ FOTOKOPİ İZİN FORMU i
ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI ii
JÜRİ ONAY SAYFASI iii
TEŞEKKÜR v
ÖZ vi
ABSTRACT viii
İÇİNDEKİLER x
TABLOLAR LİSTESİ xiii
ŞEKİLLER LİSTESİ xv
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ xvii
BÖLÜM I 1
GİRİŞ 1
1.1. Problem Durumu 1
1.2. Araştırma Problemi 7
1.3. Araştırmanın Amacı 7
1.4. Araştırmanın Önemi 8
1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları 10
1.6. Tanımlar 10
BÖLÜM II 13
KAVRAMSAL ÇERÇEVE 13
2.1. Üstün Yetenekli Öğrenciler 13
2.2. Matematiksel Yeterlilikler 16
2.3. Matematiksel Akıl Yürütme 19
2.3.1. Matematiksel Akıl Yürütme ve Matematik Öğretimi 20
2.3.2. Matematiksel Akıl Yürütme Yaklaşımları 23
2.3.2.1. Geometrik Akıl Yürütme *27*
2.3.3. Üstün Yetenekli Öğrenciler ve Akıl Yürütme 33

BÖLÜM III **36**
YÖNTEM **36**
3.1. Araştırmanın Deseni **36**
3.2. Araştırmacının Rolü **37**
3.3. Çalışma Grubu **37**
3.4. Veri Toplama Araçları **38**
3.4.1. Tanışma Soruları **38**
3.4.2. Veri Toplama Aracı Olarak Geometri Problemleri **39**
3.5. Verilerin Toplanması **42**
3.6. Verilerin Analizi **44**
3.7. Geçerlik ve Güvenirlik **50**
BÖLÜM IV **51**
BULGULAR VE YORUMLAR **51**
4.1. Geometri Problemleri Bağlamında Üstün Yetenekli Ortaokul Öğrencilerinin Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Bulgular **51**
4.1.1. Ayşe'nin Geometri Problemleri Bağlamında Akıl Yürütme Becerisinin İncelenmesine İlişkin Bulgular **52**
4.1.1.1. Fikir İleri Sürme ***58***
4.1.1.2. İddia Etme ***63***
4.1.1.3. Seçim Yapma ***67***
4.1.1.4. Çıkarım Yapma ***70***
4.1.1.5. Doğrulama/yanlışlama ***75***
4.1.1.6. Gerekçelendirme ***79***
4.1.1.7. Gerekçeyi Kontrol Etme ***82***
4.1.1.8. Matematiksel İfadeleri Birbirine Bağlayan Düşünme Süreci Boyunca Argüman Zincirleri Oluşturma ***86***
4.1.2. Demet'in Geometri Problemleri Bağlamında Akıl Yürütme Becerisinin İncelenmesine İlişkin Bulgular **90**
4.1.2.1. Fikir İleri Sürme ***94***
4.1.2.2. İddia Etme ***99***
4.1.2.3. Seçim Yapma ***102***
4.1.2.4. Çıkarım Yapma ***106***
4.1.2.5. Doğrulama/yanlışlama ***110***

4.1.2.6. Gerekçelendirme *114*
4.1.2.7. Gerekçeyi Kontrol Etme *117*
4.1.2.8. Matematiksel İfadeleri Birbirine Bağlayan Düşünme Süreci Boyunca Argüman Zincirleri Oluşturma *120*
4.2. Öğrencilerin Akıl Yürütmelerinin Arasındaki Benzerlikler ve Farklılıklara İlişkin Bulgular **123**
BÖLÜM V **131**
SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER **131**
KAYNAKÇA **139**
EKLER **160**
Ek 1. Araştırma İzin Belgesi **161**
Ek 2. Geometri Problemleri **162**

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1 *Tanışma Soruları* 39
Tablo 2 *Örnek Problemler ve Akıl Yürütme Bileşenleri* 41
Tablo 3 *Veri Toplama Süreci* 43
Tablo 4 *Verilerin Toplanmasından Önce Oluşturulan Akıl Yürütme Bileşenleri* 45
Tablo 5 *Son Hali Verilen Akıl Yürütme Bileşenleri* 46
Tablo 6 *Betimsel Analiz Örneği* 48
Tablo 7 *İçerik Analizi Örneği* 49
Tablo 8 *Ayşe'ye Ait Akıl Yürütme Bileşenlerinin Sıklık Tablosu* 53
Tablo 9 *Fikir İleri Sürme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 58
Tablo 10 *İddia Etme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 63
Tablo 11 *Seçim Yapma Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 67
Tablo 12 *Çıkarım Yapma Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 70
Tablo 13 *Doğrulama/yanlışlama Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 75
Tablo 14 *Gerekçelendirme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 79
Tablo 15 *Gerekçeyi Kontrol Etme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 82
Tablo 16 *Argüman Zincirleri Oluşturma Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 86
Tablo 17 *Demet'e Ait Akıl Yürütme Bileşenlerinin Sıklık Tablosu* 91
Tablo 18 *Fikir İleri Sürme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 94
Tablo 19 *İddia Etme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 99
Tablo 20 *Seçim Yapma Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 102
Tablo 21 *Çıkarım Yapma Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 106
Tablo 22 *Doğrulama/yanlışlama Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 110
Tablo 23 *Gerekçelendirme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 114
Tablo 24 *Gerekçeyi Kontrol Etme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 117
Tablo 25 *Argüman Zincirleri Oluşturma Bileşenine Ait Sıklık Tablosu* 120

Tablo 26 *İspat Yapmayı Gerektiren Problemler*.....128
Tablo 27 *İlişki Kurmayı Gerektiren Problemler*.....129
Tablo 28 *Soru Kökü "nasıldır?" Olan Problemler*.....129
Tablo 29 *Soru Kökü "nedir?" Olan Problemler*.....130

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Matematiksel yeterlilikler 17
Şekil 2. Lithner (2008) tarafından oluşturulan akıl yürütme sınıflandırması 25
Şekil 3. Öğrencinin Problem 4'e ait çalışması 55
Şekil 4. Öğrencinin Problem 13'e ait çalışması 57
Şekil 5. Öğrencinin Problem 18'e ait çalışması 59
Şekil 6. Öğrencinin Problem 21'e ait çalışması 61
Şekil 7. Öğrencinin Problem 6'ya dair çalışması 64
Şekil 8. Öğrencinin Problem 2'ye ait çalışması 65
Şekil 9. Öğrencinin Problem 19'a ait çalışması 66
Şekil 10. Öğrencinin Problem 8'e ait çalışması 73
Şekil 11. Öğrencinin Problem 17'ye ait çalışması 74
Şekil 12. Öğrencinin Problem 10'a ait çalışması 78
Şekil 13. Öğrencinin Problem 7'ye ait çalışması 80
Şekil 14. Öğrencinin Problem 2'ye ait çalışması 83
Şekil 15. Öğrencinin Problem 8'e ait çalışması 85
Şekil 16. Öğrencinin Problem 1'e ait çalışması 88
Şekil 17. Öğrencinin Problem 14'e ait çalışması 89
Şekil 18. Öğrencinin Problem 27'ye ait çalışması 90
Şekil 19. Öğrencinin Problem 1'e ait çalışması 95
Şekil 20. Öğrencinin Problem 5'e ait çalışması 96
Şekil 21. Öğrencinin Problem 2'ye ait çalışması 98
Şekil 22. Öğrencinin Problem 13'e ait çalışması 101
Şekil 23. Öğrencinin Problem 19'a ait çalışması 104
Şekil 24. Öğrencinin Problem 13'e ait çalışması 107
Şekil 25. Öğrencinin Problem 1'e ait çalışması 108

Şekil 26. Öğrencinin Problem 19'a ait çalışması 112
Şekil 27. Öğrencinin Problem 2'ye ait çalışması 113
Şekil 28. Öğrencinin Problem 7'ye ait çalışması 115
Şekil 29. Öğrencinin Problem 8'e ait çalışması 116
Şekil 30. Öğrencinin Problem 2'ye ait çalışması 118
Şekil 31. Öğrencinin Problem 14'e ait çalışması 121
Şekil 32. Öğrencinin Problem 8'e ait çalışması 122
Şekil 33. Öğrencinin Problem 25'e ait çalışması 123

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

BİLSEM	Bilim ve Sanat Merkezleri
MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
NAGC	National Association of Gifted Children (Ulusal Üstün Zekalı Çocuklar Birliği)
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Birliği)
NRC	National Research Council (Ulusal Araştırma Konseyi)
TIMSS	Trends in International Mathematics and Science Study (Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması)

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın problemi, amacı, önemi, varsayımları, sınırlılıkları ve tanımlara yer verilmiştir.

1.1. Problem Durumu

Bilişsel ihtiyaçlara daha çok cevap arandığı bu çağda araştıran, sorgulayan ve merak eden bireylerin rolü ortaya çıkmaktadır. Bu özellikleri taşıdığı düşünülen bireylerden olan üstün yetenekli öğrencilerin diğer öğrencilere göre bu yetenekler bakımından öne çıkmalarının nedenlerinin neler olduğu önemi bir merak konusudur. Bilim ve Sanat Merkezleri Yönergesi'ne (2022) göre üstün yetenekli öğrenci yaşıtlarına göre daha hızlı öğrenen; yaratıcılık, sanat, liderliğe ilişkin kapasitede önde olan, özel akademik yeteneğe sahip, soyut fikirleri anlayabilen, ilgi alanlarında bağımsız hareket etmeyi seven ve yüksek düzeyde performans gösteren bireydir. Ulusal Üstün Zekâlı Çocuklar Birliği (National Association of Gifted Children [NAGC], 2019) üstün yetenekli öğrencilerin bir veya daha fazla alanda yaşıtları olan diğer öğrencilerden yüksek performans sergileme potansiyelleri olduğunu vurgulamıştır. Geary ve Brown (1991) üstün yetenekli öğrencilerin diğer öğrencilere nazaran uzun süreli belleklerini daha iyi kullandıklarını ve bilgiyi bu bellekten daha hızlı çağırdıklarını ifade etmişlerdir. Dark ve Benbow (1990) ise üstün yetenekli öğrencilerin kısa süreli belleğin faaliyetlerinin normal başarılı öğrencilerden daha iyi performans sergilediklerini ve bilgiyi işleme konusunda üstün başarı gösterdiklerini ifade etmişlerdir. Aydın Güç, Aygün ve Orbay (2021) üstün yetenekli öğrencilerin üstün yetenekli olmayan öğrencilere kıyasla matematiksel düşünme becerilerinin daha yüksek olduğu sonucuna

varmışlardır. Koç Koca ve Gürbüz (2019) ise üstün yetenekli öğrencilerin diğer öğrencilere göre problem çözme süreçlerinde daha fazla strateji ortaya koyduklarını ve açık uçlu sorularda daha fazla doğru cevap verdiklerini tespit etmişlerdir. Üstün yetenekli öğrenciler dünyaya matematiksel bir gözle bakabilirler (Krutetski, 1976). Ancak ileride büyük işler başaracakları kabul edilen üstün yetenekli öğrencilerin bu özelliklerinin geliştirilerek devam ettirilmesi büyük önem taşımaktadır. Bu çalışmalardan da anlaşılacağı üzere üstün yetenekli öğrenciler, normal başarılı akranlarına göre birçok konuda yüksek performans göstermektedirler. Dolayısıyla bu öğrencilerin eğitimi ülkeler ve insanlık için büyük önem arz etmektedir. Ancak Çitil (2018)'e göre ülkemizde üstün yetenekli öğrencilere yönelik planlı ve sistemli bir politika oluşturulamamış ve bu politikaların ancak 2010'lu yıllardan itibaren tutarlı bir görünüme kavuştuğu sonucu çıkarılmıştır. Son zamanlarda normal başarılı öğrencilerle karşılaştırıldığında üstün yetenekli öğrencilerin özelliklerinden dolayı onların ihtiyaçlarının nasıl karşılanabileceği ile ilgili yollar daha çok aranmaya başlanmıştır. Eğitimde eşitlik ilkesinden dolayı bu öğrencilerin farklılaştırılmış eğitim olanaklarından yararlanmaları en doğal haklarıdır (M. M. Wilkins, Wilkins & Oliver, 2006). Ancak aynı zamanda üstün yetenekli öğrenciler için bir problem olan eğitimde eşitsizlikten dolayı (Baykoç, 2014; Diezmann & Watters, 2001; Johnson, 2000; Sriraman, 2003) bu öğrencilerin gelişimi ve sınıf ortamındaki ihtiyaçlarına çözüm aramak şart olmuştur. Bu nedenle bu öğrencilere ihtiyaç duydukları ve potansiyellerini ortaya çıkarabilecek eğitim ortamlarının hazırlanması büyük önem arz etmektedir. Bu öğrenme ortamları öğrencilerin matematiksel olarak yeterli olmalarını, akıl yürütme, eleştirel düşünme ve yaratıcılık gibi özelliklerini kullanarak matematiksel anlamda donanımlı olmalarını sağlayacak ortamlar olmalıdır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018).

Bireylere uygun eğitim koşullarında matematiksel becerileri kazandırabilmek için eğitim sistemleri de yeniden şekillenmeye başlamıştır. Bu anlamda ABD, Avustralya, Norveç ve İsveç reformlar yaparak yeni ulusal standartlarını uygulayan ülkeler arasındadır (Boesen, Lithner & Palm, 2018). Bu reformların gerçekleşmesini sağlayan düşünce sistemi "matematiği bilmek" ifadesinin "matematik yapmak" olarak değerlendirilmesidir (National Council of Teachers of Mathematics (Ulusal Matematik Öğretmenleri Birliği) [NCTM], 1989). Eski öğretim programları ile karşılaştırıldığında; reformlar sonucu ortaya çıkan müfredatların ortak noktası, matematik çalışmanın matematiksel olarak yeterli olmak şeklinde ifade edilmesidir (Boesen vd., 2018). Öğrencilerin matematikte yeterli olmaları için sadece matematiksel kavramlara hakim olmaları değil aynı zamanda bildiklerini uygulamalı

olarak da göstermeleri gerekmektedir. Matematikte yeterli olmanın en temel unsuru problem çözme, ispat yapma, matematiksel temsiller, matematiksel dilin ve tanımların doğru kullanımı, genelleme yapma, akıl yürütme, örüntüleri keşfetme gibi becerilerden oluşan matematiksel uygulamalardır (Research and Development Corporation [RAND], 2003). Bu anlamda matematiksel yeterlik hakkında en kapsamlı literatür National Reseach Council (NRC, 2001) tarafından oluşturulan çerçevede yer almaktadır. Matematiksel yeterlik, matematiği başarılı bir şekilde öğrenmektir (NRC, 2001). Ayrıca matematiğin rol aldığı matematik içi ya da dışı bağlamlarda matematiği anlama, değerlendirme, yapma ve kullanma yeteneği olarak da tanımlanmaktadır (Boesen vd., 2014).

Ülkemizde ise matematiksel yeterlikler 2018'de yürürlüğe giren Matematik Dersi Öğretim Programına Türkiye Yeterlikler Çerçevesi kapsamında dâhil edilmiştir (MEB, 2018). Bu yeterlikler içinde yer alan matematiksel yeterliğin mantıksal ve uzamsal düşünme becerisi içerdiği belirtilmiş ve günlük yaşamda karşılaşılan sorunları çözmek amacıyla matematiksel düşünme becerisini geliştirme şeklinde tanımlanmıştır (MEB, 2018). Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD, 2019) matematiksel okuryazarlığın temelinin bir dizi matematiksel yeterliklerden oluştuğunu vurgulamıştır. Literatürde matematiksel yeterliklerin ve bileşenlerinin tanımlandığı çalışmalar mevcuttur (Lithner vd., 2010; Niss, 2015; OECD, 2019). Bu yeterliklerin ne olduğuna dair araştırmacılar arasında bazı farklı söylemler bulunsa da hem fikir olunan bileşenler; matematiksel düşünme, problem kurma, modelleme, akıl yürütme, matematiksel temsil, sembol ve formülize etme, matematiksel araç kullanabilme ve iletişim yeterliği şeklinde sıralanabilir. Bu çerçevede yer alan bileşenlerden biri de matematiksel akıl yürütme yeterliğidir. Akıl yürütme, yeni bilgi edinmek, bir sonuç çıkarmak için iki veya daha fazla düşünceyi birleştiren düşünme sürecidir. Bir başka ifade ile akıl yürütme "bir sonuca götürdüğü bilinen gerçekleri veya kanıtları birbirine bağlamaya çalışan düşünme süreci" dir. Dolayısıyla, akıl yürütme, gerçeğin önceden kanıtlandığı veya varsayıldığı ilgili gerçeklere dayanan mantıksal sonuçlar elde etmek için bir düşünce süreci olarak yorumlanabilir (Keraf (1982) & Shadiq (2004)'ten aktaran Hasanah, Tafrilyanto & Aini (2018)). Matematik öğrenmede başarı, öğrencilerin öğrenme sürecinden sonra elde ettikleri sonuçtur. Akıl yürütme yeteneği, sonuçların düşünme ve akıl yürütme biçimini eğitmek ve matematiksel problemleri çözme yeteneğini geliştirmek için matematik öğrenimindeki hedeflerden biri haline gelir. Okullarda matematik öğrenmenin amacı, sonuç çıkarmada, problem çözme becerilerini geliştirmede ve sözlü, yazılı, grafik, harita, diyagram vb. yoluyla bilgi aktarma veya fikir iletme becerisini

geliştirmede düşünme ve akıl yürütme uygulamaktır (Sumartini (2015)'den aktaran Hasanah vd., 2018).

Bu bağlamda öğrencilerin sahip olması gereken en temel becerilerden biri olan matematiksel akıl yürütme; matematiksel argümanları kullanarak seçimleri veya sonuçları doğrulamak ya da savunmak (Lithner vd. 2010), bütün etkenleri göz önüne alıp mantıklı bir sonuca ulaşma süreci (Umay, 2003) ve problem çözerken iddialar üretmek ve sonuca ulaşmak için benimsenen bir düşünce şekli (Lithner, 2008) olarak tanımlanmaktadır. Matematiksel akıl yürüten biri problem çözebilen ve kurabilen, tanımlar, örnekler veya varsayımlar arasında ilişki kurabilen ve kavramlar arasında ilişkiyi geniş açıdan görebilen kişidir. Matematik eğitiminin temel amacı da karşılaştığı zorluklar karşısında problem çözebilen, tahmin yürütebilen, genellemeler yapabilen, analiz yapabilen ve neden sonuç ilişkisi kurabilen yani akıl yürüten bireyler yetiştirmektir.

Battista (2017) matematiksel yeterliklerin temelinin matematiksel akıl yürütme olduğunu ve akıl yürütme becerisinin eksik olduğu bir matematik öğretiminin başarısızlığa neden olacağını ifade etmektedir. Matematiksel akıl yürütmenin gelişmesini sağlayan bir öğretim programı hazırlamak ise matematiksel akıl yürütme becerisi kazandırmayan bir matematik öğretiminin başarısızlıkla sonuçlanacağının farkındalığıyla mümkündür (Steen, 1999). "Matematik yapmak" için gerekli unsurlardan biri matematiksel akıl yürütme becerisidir. Ayrıca, matematiksel akıl yürütme becerisi ilişkilendirme ve problem çözme gibi diğer süreç becerileri ile doğrudan bağlantılıdır. Örneğin; kişi matematiksel bir problem çözerken matematiksel akıl yürütme becerisini, akıl yürütürken de ilişkilendirme becerisini kullanır. Bir problemin analizi veya planlaması sırasında akıl yürütme becerileri devreye girer. Dolayısıyla "matematik yapmak" ve bir problemi çözmek akıl yürütme becerisi gerektirdiğinden bu becerinin matematik öğretiminden ayrı tutulması söz konusu değildir (Ansjar & Sembiring'den aktaran Bernard & Chotimah, 2018). Akıl yürütme matematiği anlamak için gerekli bir unsurdur. Öğrenciler fikir üreterek, durumları keşfederek, sonuçları gerekçelendirerek ve matematiksel varsayımları kullanarak matematiği anlamlandırabilmelidirler. Akıl yürütme yoluyla öğrenciler cevap verirken mantıksal düşünme becerilerini geliştirebilirler ve mantıksal düşünme alışkanlığı edinirler.

Matematiksel akıl yürütme becerisi problem çözerken mantıksal çıkarımlar yapmayı sağlarken eleştirel düşünme becerisi de gerektiren bir süreçtir. Hipotez üretmeyi, matematiksel argümanlar oluşturmayı ve değerlendirmeyi, örüntü ve ilişkileri belirlemeyi ve problem çözme stratejilerini seçmeyi ve uygulamayı içerir (Kramarski & Mevarech, 2003;

Stein, Grover, & Henningsen, 1996). Dolayısıyla ne yaptığını ve neden yaptığını düşünerek uygulayan öğrenciler, ne yaptığını bilmeden kurallar bütününü ezbere uygulamaya koyan öğrencilerden daha başarılıdır (Steen, 1999).

NRC (2001) matematiksel akıl yürütmenin matematiğin diğer öğrenme alanlarıyla iç içe olduğunu vurgulamıştır. Bu öğrenme alanlarından birisi de geometridir. Literatürde cebirsel (Bishop, Otto & Lubinski, 2001), orantısal (Akkuş Çıkla & Duatepe, 2002), istatistiksel (Garfield, 1991) ve geometrik akıl yürütme (Wong, 2017) çeşitlerine değinilmiştir. Orantısal (Akkuş Çıkla & Duatepe, 2002; Gündoğdu, 2021; Öz, 2020), istatistiksel (Dayan, 2021; Zora, 2019), ve cebirsel (Adıyaman, 2019; Dinçer, 2019) akıl yürütme konularında birçok çalışma yapılmıştır. Ancak araştırmacılar akıl yürütme becerisinin gelişiminin en iyi görüldüğü öğrenme alanın geometri olduğunu ifade etmişlerdir (Arıcı, 2012; MEB, 2018; NCTM, 2000). Tümevarım ve tümdengelim akıl yürütme, varsayımlarda bulunma ve bunları doğrulama, geometrik nesneleri tanımlama ve sınıflandırma dahil olmak üzere geometri akıl yürütme gelişimi için eşsiz bir öğrenme alanıdır (NCTM, 2000). Bu konuda Battista (2001) ise öğrencilerin kavramları ve şekillerin özelliklerini ezberlemek yerine, problemleri iyi analiz edebilmek için anlamlı düşünme yolları ve geometrik kavramların tanımlarını içselleştirmeleri gerektiğini ifade etmiştir. Geometri öğrenme alanına ait yapılan çalışmalar incelendiğinde ilköğretim öğrencilerinin (Kızıltoprak, 2020), ortaöğretim öğrencilerinin (Arıcı, 2012) ve öğretmen adaylarının (İlhan & Aslaner, 2018) akıl yürütme becerileri üzerine araştırmaların mevcut olduğu görülmektedir. Ancak özellikle geometri öğrenme alanında üstün yetenekli öğrenciler matematik yaparken nasıl akıl yürüttüklerine ışık tutacak yeterli nicelikte ve nitelikte çalışma bulunmamaktadır ve bu alanla ilgili daha çok çalışmaya ihtiyaç olduğu barizdir.

Üstün yetenekli öğrencilerin davranışsal özellikleri, tanılanması, eğitim hayatları ve karşılaştıkları zorlukların neler olduğu gibi birçok duyuşsal alanda çalışmalar mevcuttur (Çitil, 2018; Çitil & Ataman, 2018; Sak, 2010). Bunun yanında üstün yetenekli öğrencilerin geometri öğrenme alanında da yeterli olduklarını gösteren veriler mevcuttur (Krutetskii, 1976). Fakat günümüz eğitim şartlarının değişmesi ve gelişmesiyle birlikte daha güncel çalışmalara ihtiyaç vardır. Görsel ve kavramsal bilginin iyi bir etkileşim içinde olduğu geometri öğrenme alanı (Duval, 2017) üstün yetenekli öğrenciler gibi yaratıcılığı yüksek, ilişkileri çabuk kavrayan ve fark eden öğrenciler için uygun bir öğrenme alanı olduğu açıktır. Geometri öğrenme alanı sağladığı zengin içerikle üstün yetenekli öğrenciler için en uygun çalışma alanıdır (Kulm, 2010). Geometri, birbiriyle bağlantılı birçok kavramı içerdiğinden

bu öğrencilerin düşünme süreçlerini teşvik eden bir öğrenme alanıdır. Akıl yürütme becerisi üst düzey bir beceri olduğundan üstün yetenekli öğrencilerin de problem çözme süreçlerinde bu beceriyi gösterebiliyor olmaları beklenmektedir. Üstün yetenekli öğrencilerle yapılan çalışmalar; üstün yetenekli öğrencilerin geometrik düşünme şekilleri (Özçakır, Özdemir ve Kıymaz, 2020), geometrik yapılandırmaları (Yıldız, 2016), ispat yapma becerileri (Lee, 2005), kavram yanılgıları (Mason, 1989), orantısal akıl yürütme becerileri (Nemutlu İnanır, 2019) hakkındadır. Bu çalışmaların ortak özelliği deneysel olmalarıdır. Dolayısıyla üstün yetenekli öğrencilerin düşünme süreçlerine odaklanarak nasıl düşündükleri, kendilerini matematiksel dil kullanarak nasıl ifade ettikleri ve nasıl akıl yürüttükleri hakkında bilgi verecek daha detaylı araştırmalara ihtiyaç vardır. Üstün yetenekli öğrenciler ile ilgili rutin ve rutin olmayan problem çözme süreçleri (Garofalo, 1993), üstün yetenekli tanısı konmayan öğrencilerle karşılaştırılmaları (Aydın Güç vd., 2021; Berg ve McDonald, 2018), problem kurma süreçleri (Yılmaz, 2019), ispat yapma süreçleri (Dinamit, 2020), görsel ve uzamsal zeka ile akıl yürütmeleri (Aziz, Juniati ve Wijayanti, 2020), düşünme süreçleri (Aydın Güç vd., 2021), ilişkilendirme becerileri (Aydın Güç vd., 2021) ve mantıksal muhakeme becerileri (Yıldız, 2022) hakkında araştırmalar mevcuttur. Ancak bu çalışmalarda özgün bir veri toplama aracı kullanarak analiz yapmak yerine literatürde bulunan veri toplama araçları veya akıl yürütme sınıflandırmaları kullanılmıştır. Dolayısıyla üstün yetenekli öğrencilerin özelliklerinde belirtildiği gibi matematiksel düşünme becerilerini özelde akıl yürütme becerilerini onlardan beklenildiği gibi gösterip gösteremedikleri ve düşündüklerini bir başkasına ne kadar aktarabildikleri bu araştırma için merak konusu olmuştur. Bundan dolayı öğrencilerin akıl yürütme becerilerini derinlemesine incelemek amacıyla nasıl bir düşünme sürecinden geçtiklerini anlamayı sağlayan özgün çalışmalara ihtiyaç olduğu açıktır. Bu öğrencileri her zaman karşılaşmadıkları, düşünme güçlerini zorlayacak, onları düşünmeye sevk edecek ve böylece motivasyonlarını da arttıracak problemlerle karşılaştırmak potansiyellerini açığa çıkarmayı sağlayacaktır. Özellikle geometri öğrenme alanında varsayımlarda bulunmalarını, doğrulama ve ispat yapmalarını, gerekçeler sunmalarını destekleyecek durumlarla karşılaşmaları onları bu alanda geliştirecektir. Dolayısıyla bu tez çalışmasında üstün yetenekli ortaokul öğrencilerinin geometri problemleri yoluyla akıl yürütme becerilerini araştırmak amaçlanmaktadır.

1.2. Araştırma Problemi

Bu araştırmada "Üstün yetenekli ortaokul öğrencilerinin akıl yürütme becerileri nasıldır?" sorusuna cevap aranmaktadır. Bu doğrultuda aşağıdaki alt problemlere cevap aranmıştır.

1- Geometri problemleri bağlamında üstün yetenekli ortaokul öğrencilerinin akıl yürütme becerileri nasıldır?
2- Katılımcı üstün yetenekli ortaokul öğrencilerinin akıl yürütmeleri arasındaki benzerlikler/farklılıklar nasıldır?

1.3. Araştırmanın Amacı

Matematik tahminler yapmayı, ilişki kurmayı, sonuç çıkarma ve gerekçelendirme gibi öğrencinin akıl yürütmesi gereken becerileri kapsar. Akıl yürütme becerisi iyi olan bireyin matematik başarısı da iyi derecededir denebilir (Kramarski, Mevarech ve Lieberman, 2001). Bu anlamda akıl yürütme matematiksel anlayışın gelişimini ve yeni matematiksel bilgilerin inşası için gerekli olan önemli becerilerden birisidir (Ball & Bass, 2003). Öğrencilerin akıl yürütme becerilerini geliştiren en iyi öğrenme alanının geometri olduğu da birçok araştırmacının hemfikir olduğu bir konudur (Arıcı, 2012; NCTM, 2000; NCTM, 2010; Seah & Horne, 2019).

Aynı şekilde araştırmaya değer bir diğer konu da üstün yetenekli öğrencilerdir. Üstün yetenekli öğrencilerin devletler ve toplumlar için önemli insan kaynağı olduğu, bu öğrencilerin diğer öğrencilerden bilişsel ve duyuşsal olarak farklı oldukları ve hatta üstün yetenekli öğrencilerin kendi aralarında bile farklı özelliklere sahip oldukları birçok araştırmada görülmektedir (Çitil & Ataman, 2018; Metin, 1999; Türkiye Büyük Millet Meclisi (TBMM), 2013; Webb, 1993). Bundan dolayı üstün yetenekli öğrencilerin aynı zamanda akıl yürütme becerilerinin de diğer öğrencilerden daha iyi olduğu söylenebilir (Abidin vd., 2021; Kurnaz, 2018; Yıldız, 2022). Ancak bu öğrencilerin akıl yürütme becerilerinin incelendiği çalışmalar deneysel boyutta olup (Abidin vd., 2021; Kurnaz, 2018; Nemutlu İnanır, 2019; Yıldız, 2022) bu öğrencilerin akıl yürütme süreci boyunca neyi nasıl düşündükleri ve attıkları adımların nedenlerinin açıklandığı bir çalışmaya rastlanmamıştır. Özelde geometri öğrenme alanı için bakıldığında ise üstün yetenekli öğrencilerin geometrik akıl yürütme becerilerinin incelendiği bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Dolayısıyla bu araştırmanın amacı üstün yetenekli ortaokul öğrencilerinin geometri problemleri bağlamında akıl yürütme becerilerinin nasıl olduğunu belirlemektir.

1.4.Araştırmanın Önemi

Akıl yürütmenin özü "çünkü…" veya "eğer… ise…" dir (Mason, 2001). Fakat akla uygun olması için mantıklı sebepler öne sürülmelidir. Akıl yürütme becerisi kişilerin kavramsal çerçevesinin büyüklüğü ve derinliğiyle ilişkilidir (İlhan & Aslaner, 2018). Matematikte ve günlük hayatta akıl yürütmenin neden önemli olduğu ile ilgili dört sebep sunulmuştur:

1- Matematik yaparken akıl yürütme: Matematiğin gelişimi ve uygulamada akıl yürütmenin önemini vurgular.
2- Okul matematiğinde akıl yürütme: Matematik öğretiminde uygun matematik bilgisine sahip olmaktır.
3- Başka içeriklerde akıl yürütme: Akıl yürütme farklı bilgilere uygulanabilir ve gelişimi sağlar.
4- Günlük hayatta akıl yürütme: Günlük hayatta karşılaşılan problemlerin üstesinden gelmeyi sağlar (Baroody'den aktaran Rohana, 2015).

NCTM (2000) ise akıl yürütme sürecinin öğrencinin aşağıdakileri gerçekleştirdiğinde ortaya çıkacağını belirlemiştir.

1- Örüntüleri gözlemleme
2- Gözlenen örüntüyle ilgili varsayımları veya genellemeleri formüle etme
3- Varsayımı değerlendirme/test etme
4- Matematiksel argümanı inşa etme ve değerlendirme
5- Bazı fikirler hakkında tanım yapma (doğrulama)

Dolayısıyla öğrencinin problem çözerken karar verme aşamasında öğrencinin akıl yürütme düşüncesindeki şemalar üzerinde etkili olduğundan öğrencilerin akıl yürütme becerisinin geliştirilmesi önemli hale gelmiştir. Akıl yürüten öğrenci bir anlayış geliştirir, ihtiyaç duyulan hesaplamaları yapabilir, başkalarına kendi akıl yürütme yollarını açıklayabilir ve matematiği daha mantıklı görmeye başlar (NRC, 2002). Ball ve Bass (2003) matematiksel fikirlerin ve prosedürlerin eksikliğini kullanarak önceden bilinen bilginin unutulduğu zaman akıl yürütme yoluyla yeniden inşa edilebileceğini vurgulamışlardır. Öğrenciler matematiksel akıl yürütmeyi kullanarak problemleri anlar, analiz eder ve planlama yaparlar.

Geometri öğrenme alanı akıl yürütme sürecinde problem durumlarını mantıklı şekilde analiz etmeyi, doğru çözüm yollarını belirlemeyi ve doğru matematiksel prosedürleri kullanmayı içerir (Karamikabir, 2012). Geometrinin, matematik yapmanın önemli bir parçası olduğu, mantıksal düşünme becerisini geliştirdiği ve üst düzey matematik bilgisi sağladığı düşünülmektedir (Suydam, 1985). Ayrıca Masfingatin ve Murtafiah (2020) da birçok yeni fikir barındıran geometri öğrenme alanında problem çözmenin gelişmiş bir akıl yürütme becerisi gerektirdiğini vurgulamıştır. Poon ve Leung (2016) öğrenci başarısının geometri öğrenme alanı ve akıl yürütme becerisi ile güçlü bir ilişki içinde olduğunu belirtmişlerdir. Öğrencinin verimli şekilde akıl yürütme süreci geçirmesi kendinden emin olmasına bağlıdır. Bu konuda MEB (2018) öğretim programında matematiksel okuryazarlık becerisini geliştirebilecek, problem çözerken kendi düşüncelerini ve nasıl akıl yürüttüğünü açıklayabilecek, üstbilişsel bilgi ve becerilerini geliştirebilecek donanımda bireyler yetiştirilmesi amaçlanmaktadır. Bu amaca yönelik yetiştirilecek insan kaynaklarından biri de üstün yetenekli öğrencilerdir.

Üstün yetenekli öğrencilerin meraklı oldukları ve problem çözme yeteneklerinin gelişmiş olduğu (Tucker & Hafenstein, 1997), hızlı öğrendikleri (Winebrenner, 2000), soyut düşünme, eleştirel düşünme, keşfetme ve fikir üretme becerilerinin iyi olduğu (Sak, 2013; Yılmaz, 2015) ve yaşıtlarına göre yüksek başarı potansiyellerinin olduğu (F. M. Uçar, Uçar & Çalışkan, 2017) bilinen özelliklerindendir. Ayrıca üstün yetenekli öğrencilerin iyi hafıza veya matematik zevklerinin olması gibi genel özelliklerinin yanında farklı ögeler arasındaki örüntüleri ve ilişkileri fark etmeleri, bağlamlar arasındaki matematiksel fikirleri dönüştürmeleri veya genelleme yapabilmeleri veya matematiksel akıl yürütme prosedürlerini mantıklı şekilde üretmeleri gibi spesifik özellikleri vardır (Freiman, 2006; Greenes, 1981; Krutetskii, 1976; Miller, 1990).

Üstün yetenekli öğrencilerin diğer öğrencilerden farkı; zihinsel olarak ileri düzeyde olmaları, sanat, müzik vb. gibi farklı alanlarda özel yetenekleri olması ve çeşitli durumlara yaratıcı bakış açılarıyla yaklaşmalarıdır. Üstün yetenekli öğrencilerin normal başarılı öğrencilerden matematiksel olarak daha başarılı olmaları onların kendi başlarına her şeyi öğrenebilecekleri anlamına gelmez. Bu öğrencilerin de uygun eğitim koşulları sağlanarak öğrenmelerinin desteklenmesine, yeni zorluklarla veya tecrübelerle karşılaşarak yeni matematiksel fikirler üretmelerine zemin hazırlanmalıdır. Üstün yetenekli öğrencilerin normal başarılı öğrencilerden farklılıkları nedeniyle daha farklı öğretim programlarına ihtiyaçları vardır. Literatürde üstün yetenekli öğrencilerin üstün yetenekli tanısı konmayan öğrencilerle

karşılaştırıldığı çalışmalar mevcuttur (Aydın Güç vd., 2021; Berg & McDonald, 2018). Ayrıca ders kitaplarının özellikle geometri öğrenme alanında üstün yetenekli öğrenciler için yetersiz kaldığını belirten çalışmalar da yapılmıştır (Çitil, 2018; Talsma & Helsberger, 1990). Dolayısıyla bu öğrencilerin akıl yürütme becerilerinin de üstün yetenekli tanısı konmayan öğrencilerden farklı olabileceği düşünülerek bu konuda yapılan bir tez çalışmasının üstün yetenekli öğrencilerin matematik eğitimine ve uygun öğretim programları geliştirilebilmesine katkı sağlayacağı düşünülmüştür. Üstün yetenekli tanısı konmayan öğrencilere göre sayıca az olmasından ve ulaşmak zor olabildiğinden bu öğrencilerle çalışmaktan kaçınılabilmektedir. Dolayısıyla bu tez çalışmasının literatüre yaptığı katkılardan biri literatürde bulunan sınıflandırmalardan farklı olarak bu araştırma için oluşturulan akıl yürütme bileşenlerinin kullanılacak olmasıdır. Ayrıca geometri öğrenme alanının akıl yürütme becerisinin bileşenlerinin tetiklenmesinde daha elverişli bir araç (Arıcı, 2012; Couto & Vale, 2014; Marchis, 2012; MEB, 2018; NCTM, 2000) olması ve üstün yetenekli ortaokul öğrencilerinin geometri problemleri yoluyla akıl yürütme becerilerini belirleyen bir çalışma olması açısından büyük bir öneme sahiptir.

1.5.Araştırmanın Sınırlılıkları

Araştırma 19 Şubat 2020 tarihinde başlamış dört hafta boyunca devam etmiştir. 11 Mart 2020 tarihinde ise Türkiye'de pandemi ilan edilmiştir. Bilim ve Sanat Merkezi'nde yapılan görüşmeler pandemi nedeniyle bu kurumlar da kapatıldığı için devam edememiştir. Bu sürecin nasıl ilerleyeceği ön görülemeyeceğinden araştırmaya ara verilmiştir. Uzaktan eğitimin yaygınlaşmasıyla öğrencilerle görüşülmüş ve 17 Ekim 2020 itibariyle uzaktan eğitim ile birebir görüşmeler yeniden başlamıştır. Bir öğrenciyle yapılan pilot çalışma süreci pandemiden önce tamamlanmıştır. Ancak uygulama aşamasında olan üç öğrenciden biri bu süreçte çalışmaya devam etmek istemediğinden kalan iki öğrenciyle birebir görüşmeler uzaktan eğitimle yapılmıştır. Bu nedenle pandemi durumu bu araştırmanın sınırlılığı olarak kabul edilmiştir.

1.6. Tanımlar

Üstün yetenekli öğrenci: Belli bir alana özgü üst düzey akıl yürütebilen, uzamsal düşünebilen, yaşıtlarına göre daha hızlı öğrenen; yaratıcılık, sanat, liderliğe ilişkin

kapasitede önde olan, özel akademik yeteneğe sahip, soyut fikirleri anlayabilen ve yüksek düzeyde performans gösteren bireydir (BİLSEM, 2022; Brody & Stanley, 2005).

Akıl yürütme: Akılcılık felsefi yaklaşımının gerekliliklerini yerine getirmeyi sağlayan zihinsel bir faaliyettir (Broome, 2013).

Matematiksel akıl yürütme: Bir problem durumunda bireyin düşünüp, tahminler yapıp, gerekçeler öne sürerek mantıklı bir sonuca varmak, matematiksel argümanlarla bir durumu savunmak veya doğrulamaktır (Lithner, 2008; NCTM, 2000; Umay, 2003). Bu araştırmada kullanılan matematiksel akıl yürütme göstergelerinin tanımları da aşağıda verilmiştir.

Etkenleri, değişkenleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak fikir ileri sürme, fikir oluşturma, fikir üretme (Ball & Bass, 2003; Lithner vd., 2010): Öğrencinin probleme başlarken attığı ilk adım ya da ilerleyen aşamalarda farklı/yeni bir fikirle probleme devam etmesidir.

Etkenleri, değişkenleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak iddia etme (Ball & Bass, 2003; Johansson, 2015; Niss, 2015): Fikir ileri sürmeye göre daha üstü düzey bir düşünme sürecinin sonucunda ortaya çıkan ifadedir. Yanlış da olsa öğrenciye göre doğru olduğundan emin olduğu durumu kendinden emin olarak açıklayabiliyorsa bu iddia etmedir.

Seçim yapma (Boesen vd., 2018; Lithner vd., 2010): Problem çözme süreci boyunca seçenekler söz konusuysa ve öğrenci birini seçerek ilerliyorsa bu seçim yapmadır.

Etkenleri, değişkenleri, var olan veya açığa çıkarılan ögeleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak çıkarımda bulunma (Battista, 2017; Lithner, 2008; OECD, 2019): Öğrenci "bu böyle ise böyledir" şeklinde bir sonuca varıyorsa bu çıkarım yapmadır.

Doğrulama/yanlışlama (teyit etme, onaylama, kontrol, çürütme) (Niss, 2015; Rohana, 2015): Öğrenci ulaştığı sonucu, yaptığı açıklamayı veya kullandığı yöntemi başka bir yolla daha gösterebiliyorsa ya da kendi yaptığını çürütüyorsa bu doğrulama-yanlışlamadır.

Çözümleri, cevapları ve ulaşılan sonuçları gerekçelendirme (Lithner vd., 2010; Niss, 2015; OECD, 2019): Öğrencinin attığı adımlara ulaştığı sonuca veya açıklamalarına gerekçe sunması ve nedenleriyle açıklamasıdır.

Açıklamalara veya çözümlere verilen bir gerekçeyi kontrol etme (OECD, 2019; Turner, 2010): Ortaya atılan gerekçeler başka gerekçelerle destekleniyorsa gerekçe kontrol edilmektedir.

Matematiksel ifadeleri (teoremler, önermeler, iddialar, problem kurmalar, çözümler, ispatlar ve bunlarda kullanılan semboller ile matematiksel kavramların temsiller) birbirlerine bağlayan (mantığa dayalı) düşünme süreci boyunca argüman zincirleri oluşturma (Niss, 2015; Zeidmane, 2013);

a) adımlar atma,

b) atılan adımları izleme,

c) atılan adımları değerlendirme: Burada birbiriyle bağlantılı adımlar söz konusudur. Atılan adım bir öncekiyle ilişkilidir. Böylece adım atılır, bir sonraki adım izlenebiliyor ve sonuca bağlanabiliyorsa bu üç madde de öğrencinin izlediği süreçte vardır denilebilir. Bir zincir gibi birbirini izleyen adımlar vardır.

BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölüm çalışmanın kavramsal ve kuramsal çerçevesinin sunumu ile başlamaktadır. Bu bağlamda literatür ışığında önce; "Üstün Yetenekli Öğrenciler" in özellikleri, daha sonra "Matematiksel Yeterlikler" ve bu yeterliklerden olan "Akıl Yürütme" nin ne olduğu, neleri içerdiği ve insanlar tarafından ne gibi akıl yürütme yaklaşımlarının sergilendiği, özelde de "Geometrik Akıl Yürütme" nin neleri kapsadığı ve son olarak da üstün yetenekli öğrencilerin nasıl akıl yürüttükleri ile ilgili bilgi ve yaklaşımlar ele alınacaktır.

2.1. Üstün Yetenekli Öğrenciler

Üstün yetenekli çocuklar, yetenekleri ve başarı potansiyeli o kadar istisnai olan ve eğitim programlama ihtiyaçlarını karşılamak için özel hükümler gerektiren kişiler anlamına gelir. Üstün yetenekli öğrenciler, engelli üstün yetenekli öğrencileri ve tüm sosyo-ekonomik ve etnik, kültürel nüfuslardan potansiyel için olağanüstü yeteneklere sahip öğrencileri içerir. Üstün yetenekli öğrenciler, bu üstün yetenek alanlarının herhangi biri veya bir kombinasyonu sayesinde yüksek performans, istisnai üretim veya istisnai öğrenme davranışı yeteneğine sahiptir. Üstün yeteneklilik standartlardan nicelik ve nitelik olarak farklı ileri becerileri içeren uyumsuz gelişim (Morelock, 1992), sürekli ve düzenli olarak başarı sergileyen kişiler (Cutts & Moseley, 2001) olarak tanımlanmıştır. I. Özel Eğitim Konseyi'nde (1991) ise yaşıtlarına göre yüksek performans gösteren bireyler üstün yetenekli olarak adlandırılmıştır. Literatürde üstün yetenekliliği farklı yaklaşımlar açıklayan araştırmacılar mevcuttur. Bunlardan biri Gagne (2003) tarafından öne sürülen farklılaştırılmış üstün yeteneklilik modelidir. Bu modelde doğuştan sahip olunan

yeteneklerle öğrenme potansiyeline sahip olunan yetenekler arasındaki farka dikkat çekilmiştir. Doğuştan sahip olunan yetenekler zihinsel, yaratıcı, sosyal duyarlı olma ve duyu motor yeteneklerdir. Öğrenme potansiyeline sahip olunan yetenekler ise akademi, sanat, iş dünyası vb. gibi alanlarda ortaya çıkmaktadır. Ayrıca Gagne (2003) kişinin yeteneklerini aile, okul, çevre ve kişiye özgü davranışların da etkili olduğunu belirtmiştir.

Sternberg (2003) tarafından ortaya atılan başarılı zeka teorisinde üstün yetenekli bir kişi analitik, sentetik ve pratik olmak üzere üç yeteneğe sahiptir. Analitik yetenekler kişi analiz ederken, karşılaştırma yaparken, değerlendirme yaparken ve karar verirken ortaya çıkar. Sentetik yetenekler sentezi gerektiren özgün fikirler üretirken; pratik yetenekler ise gerçek hayatta karşılaşılan sorunlar için analitik ve sentetik yetenekleri kullanmayı gerektiren yeteneklerdir.

Renzulli (2003) üçlü halka modelinde üstün yetenekliliği ortalamanın üzerinde bir yetenek, görev üstlenme ve yaratıcılığın birleşimi olarak tanımlamıştır. Ortalamanın üzerinde bir yetenek hem genel hem de özel alanlarda bir yetenek içermektedir. Yaratıcılık problemlere farklı ve özgün çözümler üretme yeteneğidir. Görev üstlenme ise üzerinde çalışılan probleme yoğun şekilde motive olma yeteneğidir.

Gagne (2000) tarafından yapılan araştırmada öğrenciler arasında yaratıcılık, zihinsel beceriler, akademik yetenek ve sosyo-duyuşsal etkinlik gibi özelliklerde farklılıklar olduğu görülmüştür. Gagne'nin amacı üstün zekanın bilim, matematik veya sanat gibi alanlarda üstün yeteneğe dönüşmesi için çevresel etkilerin ve öğrenme sürecinin önemine dikkat çekmektir (Kaufman & Sternberg, 2008).

Özel olarak matematiksel üstün yetenekli öğrenciler üzerinde çalışan araştırmacılardan Rosenbloom (1960) bu öğrencilerin soyutlama ve genelleme kapasitesinin olduğunu, hızlı ve derin düşündüklerini ve keşif yapabildiklerini vurgulamıştır. Krutetskii (1976) matematiksel üstün yetenekliliğin, matematiksel bir aktivitede başarılı bir performans ve bir konudaki üstün yaratıcılık olarak kendini gösteren matematiksel yeteneklerin birleşimi olduğunu ve üç bileşenden oluştuğunu ifade etmiştir.

1- Bilgiyi alma: Problemi kavrama yeteneğidir.

2- Bilgiyi işleme: Mantıksal düşünme, genelleme yapma ve sorgulamayı içerir.

3- Bilgiyi akılda tutma: Matematiksel ilişkileri genelleme, iddia ve ispatlar için problem çözme yöntemlerini kapsar.

Miller (1990) matematiksel üstün yeteneği matematiksel fikirleri anlamak ve akıl yürütmek için gösterilen yüksek kabiliyet olarak tanımlamaktadır. Matematikte alınan yüksek notlar ya da hızlı problem çözme matematiksel üstün yetenekli olmak için temel bileşenlerden değildir (Miller, 1990; Wieczerkowski, Cropley & Prodo, 2000).

Üstün yetenekli bireyler kolay ve hızlı öğrenirler. Bilgi edinmek için istekli ve hırslıdırlar. Çok iyi konsantre olurlar ve dikkat becerileri oldukça yüksektir. Yaratıcı özellikleri güçlüdür, orijinal fikirler geliştirirler. Çalışkan yapıları sayesinde yeni ve zor deneyimleri tercih ederler (Çitil & Ataman, 2018).

Matematik eğitiminde üstün yetenekli öğrencilerle yapılan çalışmalar incelendiğinde, Özdemir ve Işıksal Bostan (2021) 5.ve 6.sınıf üstün yetenekli öğrenciler için farklılaş tırılmış etkinlikleri tasarlamak amacıyla tasarım tabanlı bir araştırma; Yılmaz (2019) karma araştırma modeliyle 9.sınıf üstün yetenekli öğrencilerin problem kurma becerilerinin incelenmesi, Gutierrez, Benedicto, Jaime ve Arbona (2018) 9 yaşındaki bir üstün yetenekli öğrencinin geometrik örüntü problemlerine verdiği cevapların bilişsel istemi üzerine çalışmalar gerçekleştirmişlerdir.

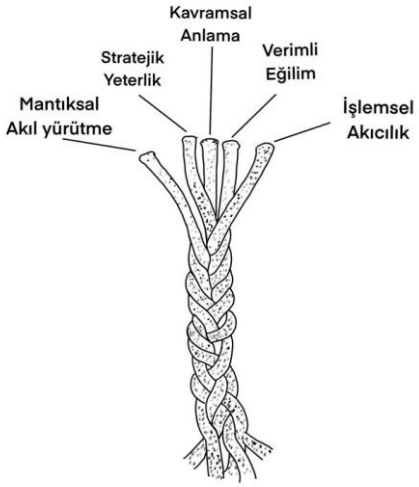
Öztürk, Akkan ve Kaplan (2017) 6-.8.sınıf üstün yetenekli öğrencilerin problem çözerken sergiledikleri üst bilişsel becerileri, Dinamit (2020) ispat yapma süreçlerini, F. M. Uçar, Uçar ve Çalışkan (2017) problem çözme becerilerini, Öztürk, Akkan ve Kaplan (2014) matematik kavramına yönelik algılarını, Yazgan Sağ (2012) matematik sel problem çözme durumlarındaki öz düzenleme davranışlarını incele mişlerdir.

Son yıllarda üstün yetenekli öğrenciler ile yapılan lisansüstü tezler de artış göster miştir. Üstün yetenekli ilköğretim öğrencilerin modelleme yeterlikleri (Karataş Aydın, 2022), muhakeme becerileri (Çınargil, 2022), kodlama ve dijital oyun tasarımı destekli 5e modelinin üstün yetenekli öğrencilerin akademik başarılarına ve problem çözmele rine etkisi (Bozan, 2022), üst bilişsel farkındalıkları, problem becerileri ve öz yeterlik algı düzeylerinin incelenmesi (Çağlar, 2022) ve 8.sınıf üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapma süreçlerinin incelenmesi (Vatandaş, 2022) gibi birçok çalışma gerçekleştiril miştir.

Bu çalışmalar ve yabancı literatür incelendiğinde "soyutlama ve genelleme yapabilme" (Krutetskii, 1976; Rosenbloom, 1960), "mantıksal düşünme" (Krutetskii, 1976), "ilişkileri görme yeteneği" (Wagner & Zimmermann, 1986) gibi özellikler ortaya çıkmaktadır. Bu özellikleri akıl yürütme literatüründe de gözlemlemek mümkündür.

2.2. Matematiksel Yeterlilikler

Matematiksel yeterlilik genel anlamda matematiğin kendisini, araçlarını ve onu yapma yollarını bilme ve gerektiğinde bunları ihtiyaca göre ustaca kullanma becerisi olarak ifade edilebilir. Birinin matematiksel yeterliliğiyle yani; birinin bildiği, yapabileceği ve matematiksel olarak yapmaya hazır olduğu şeyle ilgileniyorsanız, matematiksel yeterliliğin dört önemli yönünü de dikkate almanız gerekmektedir. Bunlar; içerik bilgisi-hangi matematiksel bilgiyi temel aldığımız, stratejiler-matematik problemlerini formüle etme, temsil etme ve çözme, üstbiliş- bildiklerinizi etkili bir şekilde kullanma, inançlar ve eğilimler- çalışkanlığa ve kişinin kendi etkinliğine olan inancıyla birlikte matematiği mantıklı, faydalı ve değerli görme eğilimidir. Problem kurma, problem çözme, matematiksel modelleme gibi matematiksel mantık yürütmeyi gerektiren becerileri kullanabilmek için matematiksel olarak yeterli olmak gerekmektedir. Literatür incelendiğinde matematiksel yeterlik için çeşitli tanımlar yapıldığı görülmektedir. Matematiksel yeterlilik matematiğin rol aldığı çeşitli matematiksel bağlamlar ve durumların içinde ya da dışında matematiği anlama, değerlendirme, yapma ve kullanma yeteneğidir (Boesen vd., 2014). NRC (2001) ise matematiksel yeterliliği bir kişinin başarılı şekilde matematik öğrenmesi olarak tanımlamışlardır. Matematiksel yeterlilik kavrama, karar verme ve matematiksel bir bağlamın içinde ya da dışındaki, matematiğin rol aldığı çeşitli durumlarda matematiği kullanma yeteneğidir (Niss, 2003). Son olarak Lithner vd. (2010) ise matematiksel yeterliliği bir şeyin üstesinden gelme yeteneği olarak tanımlamıştır. Bu tanımlardan yola çıkarak literatürde farklı sınıflandırmalar mevcuttur. Araştırmacılar farklı isimlendirmeler kullansa da matematiksel düşünme, problem kurma, akıl yürütme, matematiksel modelleme, işlemsel akıcılık, kavramsal anlama, verimli eğilim, stratejik yeterlik, temsil, sembolleştirme, iletişim ve matematiksel araçları kullanabilme başta olmak üzere bir takım matematiksel yeterliklerden bahsetmişlerdir (Lithner vd., 2010; Niss, 2015; NRC, 2001; OECD, 2019).



Şekil 1. Matematiksel yeterlilikler

Şekil 1'e göre NRC (2001) bu beş ögenin birbirinden bağımsız olmadığını birbirleriyle ilişki içinde olduğunu bir halat benzetmesiyle vurgulamıştır.

Niss (2015) ise bu yeterlikleri bir çiçeğe benzetmiş ve bu çiçeği her yeterliğin birbirini örtmesi ancak farklı yeterlikler olduğunu göstermek amacıyla kullanmıştır. Ayrıca her yeterlik merkezde birleşip bir kesişim noktası oluşturmakta ancak açıldıkça her birinin kendine özgü yeterlikler olduğu görülmektedir.

Literatür incelendiğinde bu sınıflandırmaların kullanıldığı birçok çalışma görmek mümkündür. Boesen vd. (2014) tarafından yapılan araştırmada matematiksel yeterlikler reformunun etkisi incelenmiş ve öğretmenlerin matematiksel yeterliklerle ilgili verilmek istenen mesajın yeterli ve gerekli şekilde veremediğini ve öğretim programıyla entegre edemedikleri sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmenlere verilen yeterliklerle ilgili aktivitelerde öğretmenlerin içinde bulunduğu koşullardan dolayı bu aktiviteleri yeterli şekilde uygulayamadıkları ortaya çıkmıştır.

Dinamik geometri yazılımı kullanarak ortaöğretim öğrencilerinin matematiksel yeterliklerini geliştirmenin amaçlandığı başka bir çalışmada ise dinamik geometri yazılımı kullanmanın genel olarak bir iyileştirmeye neden olduğu öne sürülse de akıl yürütme, argümantasyon ve iletişim yeterliklerini iyi düzeyde etkilemediği görülmüştür (Albaladejo, Garcia & Codina, 2015).

Yaşar Er (2007), 2004, 2005 ve 2006 yıllarına ait Ortaöğretim Kurumları Seçme ve Yerleştirme Sınavı'ndaki soruların bu öğrencilerde olması gereken matematiksel yeterliklerin ne kadarını ne derece ölçtüğünü araştırmıştır. NRC (2001) tarafından hazırlanan çerçeveyi kullanmış ve 8.sınıf öğrencilerinin 2004 yılında işlemsel akıcılık gerektiren maddelerde stratejik başarı gerektiren maddelere göre daha başarılı oldukları görülmüşken 2005 yılında bu durumun tam tersi sonucuna ulaşmıştır. Yine aynı sınıflandırmanın kullanıldığı bir araştırmada 7.sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanında matematiksel yeterlikleri incelenmiş ve matematiksel yeterlikler içinde bulunan bir boyutun olumlu/olumsuz etkilenmesi diğer boyutu da aynı şekilde olumlu/olumsuz etkilediği sonucuna varılmıştır (Kırnap Dönmez, 2021).

Bir başka araştırmada ise Matematik Dersi Öğretim Programının öğrencilere kazandırmayı hedeflediği matematiksel yeterlik ve becerilere ilişkin öğretmen görüşleri incelenmiştir (Demir & Vural, 2017). Bu çalışmada mevcut sınav sisteminin, öğretim programını kısıtlı zamanda yetiştirme zorunluluğunun ve öğrencilerin hazırbulunuşluk seviyelerinin hedeflenen matematiksel yeterlik ve becerilere ulaşmak için yeterli olmadığı sonucuna varılmıştır.

Bunlar dışında son yıllarda öğretmen adaylarının matematiksel yeterlik algılarının (Yanbıyık, 2022), uzaktan eğitim yoluyla verilen hizmet içi öğretmen eğitiminin ve eğitimin içeriğine uygun olarak hazırlanmış ders modüllerinin kullanım sürecinin matematik öğretmenlerinin matematiksel muhakeme etme yeterliğine etkisinin (Özaydın, 2022), Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı'nın matematiksel yeterlik boyutunda değerlendirilmesi (Çelikel, 2022) ve günlük yaşam problemleri ile altıncı sınıf öğrencilerinin matematiksel yeterliklerinin (Akkurt, 2020) incelendiği çalışmalar mevcuttur.

Literatürde bulunan bu çalışmalar incelendiğinde, matematiksel yeterlikler sınıflandırmaları matematiksel becerileri kullanabilme, matematiksel problemlerin üstesinden gelme ve matematiği öğrenme yetisine sahip olmak üzerine dayandırıldığı görülmektedir. Araştırmacılar, matematiksel olarak yeterli olmanın matematiği anlamlandırabilmek, problem çözebilmek, problem çözerken matematiksel kavramları doğru kullanarak mantıklı argümanlar geliştirebilmek olduğunu ifade etmişlerdir (Lithner vd., 2010; Niss, 2015; NRC, 2001). Farklı açılardan bakılmış olsa da matematiksel kavramlar ve işlemler arasındaki mantıksal ilişkilere, problemlere getirilen çözümlerin özellikle mantıklı gerekçelerle açıklanması gerektiğine ve diğer matematiksel yeterliliklerle olan güçlü ilişkisinden dolayı akıl yürütme yeterliliğine özellikle dikkat çekilmiştir (Kilpatrick & Swafford, 2002).

2.3. Matematiksel Akıl Yürütme

Matematiksel akıl yürütme, verilen ifadelerin doğruluk değerlerini belirlediğimiz matematiği yapma araçlarının bir parçasıdır. Mantıksal akıl yürütmenin günlük hayatımızda oynayacağı önemli bir rolü vardır. Epistemolojik olarak akıl yürütme matematiğin temelidir. Bilim gözlem yoluyla doğrulamaya, matematik ise mantığa dayanır. Matematiğin, bir asırdan fazla bir süre önce filozof C. S. Peirce tarafından verilen "gerekli sonuçları çıkarma bilimi" olarak tanımlanması, günümüzün matematikçileri arasında hala yankılanıyor. Örneğin, matematikçilerin okul matematiği üzerine çağdaş bir raporu, "matematiğin özünün kanıtlarda yattığını" ileri sürmektedir (Ross, 1997).

Kilpatrick ve Swafford (2002) akıl yürütme için bir probleme sunulan bir çözümü doğrulamak ve açıklamak veya bilinen bir şeyden yola çıkıp bilinmeyen bir şeye ulaşırken mantığı kullanmak şeklinde bir tanım yapmışlardır. Erdem (2011) ise akıl yürütmenin düşünme eyleminin çok üzerinde bir uğraş olduğunu, ilgili olay, problem ya da durumun bütün hususlarını etraflıca düşünüp mantıklı bir sonuca varma işi olarak tanımlamıştır. Matematiksel yeterliliklerden biri olan akıl yürütme yeterliliği varsayımlar üretmek ve sonuca ulaşmak için benimsenen düşünme yolu (Lithner, 2006), fikirler üretme (Lithner, 2008) ve matematiksel olarak gerekçelendirme (Lithner vd., 2010) barındırır. Niss (2015) ise matematiksel iddiaların, cevapların ve çözümlerin doğrulanması ve gerekçelendirilmesi, bu adımlar için argüman zincirlerinin oluşturulması ve bu adımları takip edebilme becerisi olarak tanımlarken OECD (2019) problemlerin analizini, onlardan çıkarım yapılmasını, elde edilen çözümlerin gerekçelendirilmesini içeren mantıklı düşünme süreçleri şeklinde betimlemiştir. Matematiksel akıl yürütmeyi tanımlayanlar arasında farklı yönlerine değinen araştırmacılar da mevcuttur. Matematiksel akıl yürütmenin ikili doğası (ürüne karşı süreç) (Arsac ve Cabassut'tan aktaran Jeannotte ve Kieran, 2017), yeni bir bilgi üretme süreci (Arsac'dan aktaran Jeannotte ve Kieran, 2017; Lithner, 2008) ve belli bir önermenin epistemik değerini değiştirme (Duval, 2017) şeklinde farklı bakış açılarına değinilmiştir.

Matematiksel akıl yürütme gerekçelendirme ve genelleme olmak üzere iki önemli beceri barındırırken iletişim, temsil etme ve sembollerle ifade etme becerileri de bu iki beceriyi desteklemektedir (Ball & Bass, 2003; Brodie, 2010). Russell (1999) ise matematiksel akıl yürütmenin, matematiksel bilgilerin birbirleriyle ilişki içinde olmasını sağlayan matematiksel genellemelerin, gelişimi, gerekçelendirilmesi ve kullanımını gerektirdiğini vurgulamaktadır.

Kilpatrick ve Swafford (2002) öğrencilerin bir problemin ögelerindeki kavramlar arasındaki ilişkileri düşünerek nasıl bir araya geldiklerini görmeleri ile akıl yürütmeyi matematiği bir arada tutan bir yapıştırıcıya benzetmişlerdir.

Ball ve Bass (2003) akıl yürütmeyi matematiksel bilgileri veya yapıları kullanarak yeni iddialar ve fikirler üretmeyi temel alan bir düşünme süreci olarak ele almışlardır. Matematiksel akıl yürütmede iki sürecin önemli olduğuna değinmişlerdir. Birincisi, atılan adımların birbiri ile ilişkili olmasıdır. İkincisi ise, bu ilişkilerin gerekçeli olması, atılan adımların nasıl bir araya geldiğinin bir nedeni olması ve bu adımların birbirini izlemesi gerektiğidir.

2.3.1. Matematiksel Akıl Yürütme ve Matematik Öğretimi

Matematik Dersi Öğretim Programlarında matematiksel süreç becerileri, iletişim, ilişkilendirme, matematiksel modelleme ve akıl yürütme olarak belirlenmiştir (MEB, 2018). Ayrıca Matematik Dersi Öğretim Programında (MEB, 2018) belirtildiği gibi aşağıda verilen genel amaçların öğrencilere kazandırılması gerekmektedir.

1. Matematiksel okuryazarlık becerilerini geliştirebilecek ve etkin bir şekilde kullanabilecektir.

2. Matematiksel kavramları anlayabilecek, bu kavramları günlük hayatta kullanabilecektir.

3. Problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini rahatlıkla ifade edebilecek, başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksiklikleri veya boşlukları görebilecektir.

4. Matematiksel düşüncelerini mantıklı bir şekilde açıklamak ve paylaşmak için matematiksel terminolojiyi ve dili doğru kullanabilecektir.

5. Matematiğin anlam ve dilini kullanarak insan ile nesneler arasındaki ilişkileri ve nesnelerin birbirleriyle ilişkilerini anlamlandırabilecektir.

6. Üstbilişsel bilgi ve becerilerini geliştirebilecek, kendi öğrenme süreçlerini bilinçli biçimde yönetebilecektir.

7. Tahmin etme ve zihinden işlem yapma becerilerini etkin bir şekilde kullanabilecektir.

8. Kavramları farklı temsil biçimleri ile ifade edebilecektir.

9. Matematiği öğrenmede deneyimleriyle matematiğe yönelik olumlu tutum geliştirerek matematiksel problemlere öz güvenli bir yaklaşım geliştirecektir.

10. Sistemli, dikkatli, sabırlı ve sorumlu olma özelliklerini geliştirebilecektir.

11. Araştırma yapma, bilgi üretme ve kullanma becerilerini geliştirebilecektir.

12. Matematiğin sanat ve estetikle ilişkisini fark edebilecektir.

13. Matematiğin insanlığın ortak bir değeri olduğunun bilincinde olarak matematiğe değer verecektir.

Diğer taraftan, NCTM (2000) bütün öğrencilerden;

- Akıl yürütme ve ispatın matematiğin temel boyutu olduğunu kabul etmelerini,
- Matematiksel varsayımlarda bulunmalarını ve araştırmalarını,
- Matematiksel argümanlar ve ispatlar geliştirmelerini ve değerlendirmelerini,
- Çeşitli akıl yürütme ve ispat yöntemleri seçip kullanmalarını

beklemektedir.

Bu vurgulara bakıldığında süreç becerilerinden olan akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesi ile ortak amaçlar olduğu görülmektedir. Matematiksel akıl yürütme tanımlarına bakıldığında araştırmacıların bazı kavramlarda hemfikir oldukları görülmektedir (Çiftci, 2015; NCTM, 1989; Pilten, 2008; TIMSS, 2011). Bu beceriler;

- Belli bir mantık çerçevesinde tahminlerde bulunma
- Matematiksel durumlarda ilişkileri keşfetme ve kullanma
- Çözüme ulaşmak için mantığa uygun stratejiler geliştirme ve tartışmalar ortaya koyma. Çözüme ilişkin mantıklı tartışmalar geliştirme, matematiksel fikirlerin gerekçelerini araştırıp bunları izah etme olarak ifade edilebilir (Pilten, 2008).
- Farklı gösterimleri ortaya konan verileri tanıma
- Seçilen çözüm yolunun ve ulaşılan sonucun mantıklı olduğuna ve doğruluğuna karar verme
- Genellemeler yapma
- Bilinen yöntemlerle çözülemeyen (Rutin olmayan) problemleri çözme
- Karşılaşılan problem durumlarında en uygun muhakeme yolunu belirleyip uygulamaya koyma.
- Ortaya konan düşünceleri ve varsayımları gerekçelendirme, olarak ifade edilebilir. Ortak olarak ifade edilen bu beceriler ise araştırmalarda matematiksel muhakeme ölçeklerinin alt boyutlarını oluşturmuştur (Çoban, 2010; Pilten, 2008).

Şeklinde açıklanmıştır (Çoban, 2019).

Literatürde akıl yürütme ile ilgili yapılan çalışmalara bakıldığında; Potari, Zachariades ve Zaslavsky (2009) matematik öğretmenlerinin, öğrencilerin geçersiz iddialarını reddederken ortaya koydukları akıl yürütmelerini incelemişlerdir. Matematik öğretmenleri öğrencilerin geçersiz iddialarını çürütürken ya karşıt örnek verme ya da bilinen teoremleri kullanma yoluna gittikleri görülmüştür. Doğru karşıt örnek bulma konusunda ise zorlandıklarını tespit etmişlerdir.

Çiftci (2015) ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel akıl yürütme becerilerinin nasıl olduğunu incelemiş ve nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanmıştır. Lithner (2008) tarafından oluşturulan matematiksel akıl yürütme sınıflandırmasını kullanarak betimsel analiz yapılmıştır. Bunun sonucunda öğretmen adaylarının çoğunun yüzeysel düşünerek benzetmeye dayalı akıl yürütme becerisi sergilediklerini ve konuya dair kavramsal bilgileriyle düşünme şekillerini bütünsel olarak kullanamadıklarını ortaya koymuştur. Yaratıcı akıl yürütme yaklaşımını kullanan öğretmen adaylarının ise matematiksel kavramlara daha çok hakim oldukları söylenebilir.

Öz (2017) ise 7.sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanına ait matematiksel akıl yürütme becerilerini durum çalışması deseni ile ortaya çıkarmayı amaçlamıştır. Bu çalışmada da yine Lithner (2008) tarafından oluşturulan matematiksel akıl yürütme sınıflandırması kullanılarak betimsel analiz yapılmıştır. Bulgular öğrencilerin algoritmaya dayalı akıl yürütme türünü daha sık kullandıklarını ve öğretmenlerin de genel olarak sınıfta öğrencilerin akıl yürütme becerilerini sergileyebilecekleri fırsatları çok sık sunamadıklarını göstermiştir.

Çoban (2019) 6.sınıf öğrencilerinin farklılaştırılmış öğretim tasarımının öğrencilerin matematiksel muhakeme becerilerine, bilişötesi öğrenme stratejilerini kullanma düzeylerine ve problem çözme başarısına etkisini incelemiştir. Araştırmacı bunu yaparken yarı deneysel desen kullanmış ve sonuçlar farklılaştırılmış öğretim tasarımının öğrencilerin akıl yürütme becerisini olumlu yönde etkilediğini doğrular niteliktedir.

Rachmaningtyas, Jailani ve Fitriyani (2020) 5.sınıf öğrencilerle yaptığı nicel bir çalışmada öğrencilerin matematiksel problem çözerken matematiksel akıl yürütme yeterliklerini sınıflandırmışlar ve gösterdikleri performansa göre matematiksel işlemler yapabilmek, bilgi/kanıt toplamak veya formülleri kullanabilmek ve sonuç çıkarmak olmak üzere üç akıl yürütme yeterliği sınıflandırması olduğunu göstermişlerdir.

Bernard ve Chotimah (2018) açık uçlu yaklaşım şeklinde tanımladıkları bir sistemin öğrencilerin matematiksel akıl yürütmelerini geliştirip geliştirmediğini ortaya çıkarmak amacıyla deneysel bir çalışma yürütmüşlerdir. Bu çalışma sonucunda bu yöntemin öğrencilerin matematiksel akıl yürütme becerilerini geliştirdiği sonucuna varmışlardır.

Rohana (2015) öğretmen adaylarının yansıtıcı öğrenme ile matematiksel akıl yürütme becerilerinin gelişme durumunu incelemek için yarı deneysel araştırma yöntemi kullanmıştır. Araştırma sonucunda yansıtıcı öğrenme ile eğitim alan grubun geleneksel eğitim alan gruba göre matematiksel akıl yürütme becerilerinin geliştiği görülmüştür.

Gürbüz ve Erdem (2016) ise 5.sınıf öğrencileri ile deneysel bir çalışma yürüterek matematiksel akıl yürütme ile zihinden işlem yapma arasındaki ilişkiyi göstermeyi amaçlamışlardır. Yapılan istatistiksel hesaplamalar bu iki önemli beceri arasında pozitif yönde bir ilişki olduğu olduğunu göstermektedir.

Başka bir araştırmada matematiksel akıl yürütme yoluyla matematiksel problemler çözen 8.sınıf öğrencilerinin matematiksel yeteneklerini belirlemek amaçlanmıştır (Hasanah vd., 2019). Nitel yöntemlerle toplanan veriler matematiksel yeteneklerin düşük ya da yüksek olması şeklinde analiz edilmiştir. Elde edilen bulgulara göre yüksek matematiksel yeteneği olan öğrencilerin matematiksel akıl yürütme becerileri de iyi derecede ve düşük matematiksel yeteneği olan öğrencilerin ise matematiksel akıl yürütme becerileri zayıftır.

Görüldüğü gibi literatürde önemli bir yer kaplayan matematiksel akıl yürütme ile ilgili birçok araştırma yapılmıştır. Bu araştırmaların bir kısmı nicel yöntemler izleyerek yapılmış olup nitel yöntemlerle yapılan araştırmalarda da çeşitli sınıflandırmalar kullanıldığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla matematiksel akıl yürütme yaklaşımlarının neler olduğunu incelemek faydalı olacaktır.

2.3.2. Matematiksel Akıl Yürütme Yaklaşımları

Literatürde akıl yürütme ile ilgili birçok sınıflandırma yapılmıştır. En temel haliyle araştırmacılar matematiksel akıl yürütmeye tümevarımsal akıl yürütme ve tümdengelimsel akıl yürütme şeklinde yaklaşmışlardır. Tümevarımsal akıl yürütme "belli durumlardan genelleştirilmiş sonuç" (Miss'den aktaran Simon, 1996), tümdengelimsel akıl yürütme ise her adımın bir öncekinden zorunlu olarak çıktığı akıl yürütme zinciridir (Ennis'den aktaran Simon, 1996). Tümevarımsal akıl yürütmeye tek tek durumlardan genel bir sonuca varma,

tümdengelimsel akıl yürütmeye ise genelden özele yani birden fazla öncül kullanarak sonuca ulaşma da denilebilir. Tümevarımsal akıl yürütmeyle ulaşılan bir sonucun doğru olup olmama durumu olduğundan genellikle bir varsayım olarak kabul edilir (Aufmann, Lockwood, Nation & Clegg, 2007). Ancak tümdengelime dayalı muhakemede öncüllerin kabul edilmesi durumunda sonucun doğruluğu kesindir (Çoban, 2010).

Öğrenme alanlarına, bakış açılarına ve düşünme tarzlarına göre akıl yürütme yapılmaktadır. Çözüm yöntemi düşünüldüğünde ise pratik, soyut ve yaratıcı akıl yürütme türlerinden bahsedilebilir (Sternberg, 1999).

Pratik akıl yürütme: Karşılaşılan günlük problemlerin farklı problem durumlarına da uyarlanabilmesidir.

Soyut akıl yürütme: Akıl yürüten kişinin bir formülü öğrenmesi ve bunu soyut matematik problemlerine uygulayacağı zaman analiz edebilmesidir.

Yaratıcı akıl yürütme: Kendi problemlerini yeni fikirler ortaya atarak bulmak veya bunları uygulayacak yeni durumlar yaratabilmektir.

Düşünme tarzına göre ise analitik ve holistik akıl yürütme yaklaşımları benimsenmektedir (Malloy, 1999).

Analitik akıl yürütme: Parçalar birleştirilerek bütünsel bir anlam elde edilir.

Holistik akıl yürütme: Bütünden yola çıkarak parçaların anlamları üzerine akıl yürütülür.

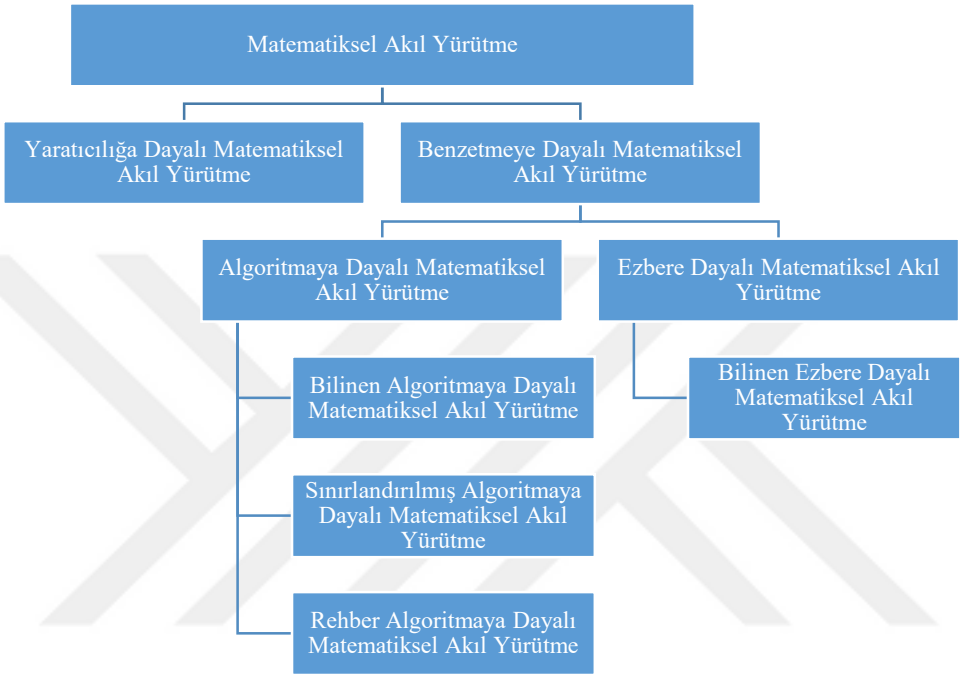
Öğrenme alanlarına göre ise cebirsel (Bishop vd. 2001), orantısal (Akkuş Çıkla & Duatepe, 2002), istatistiksel (Garfield, 1991) ve geometrik akıl yürütme (Wong, 2017) üzerine farklı öğrenme alanlarında çalışmalar yapılmıştır.

Trends in Mathematics and Science Study (TIMSS, 2023), matematiksel akıl yürütme becerilerini şu şekilde sınıflandırmıştır:

- Analiz etme: Sayılar, ifadeler, nicelikler ve şekiller arasındaki ilişkiyi tanımlamak, analiz etmek veya kullanmaktır.
- Birleştirme: Bilginin farklı ögelerini, ilgili gösterimleri ve prosedürleri arasında bağlantı kurmaktır.
- Genelleme: İlişkilerin daha genel ve daha yaygın uygulanabilir terimlerle ifade edilmesidir.

- Doğrulama: Bir stratejiyi veya çözümü desteklemek için matematiksel argümanlar sunmaktır.

Literatürde en çok karşılaşılan akıl yürütme sınıflandırması ise Lithner (2008) tarafından yapılmıştır. Bu sınıflandırma Şekil 2'de görülmektedir.



Şekil 2. Lithner (2008) tarafından oluşturulan akıl yürütme sınıflandırması

1-Yaratıcılığa dayalı matematiksel akıl yürütme

- Özgünlük: Yeni bir akıl yürütme dizisi oluşturulur ya da unutulan bir akıl yürütme dizisi yeniden yapılandırılır.
- Akla yatkınlık: Sonuçların neden doğru veya mantıklı olduğunu açıklayan seçimler veya stratejiler matematiksel argümanlarla desteklenir.
- Matematiksel temel: Argümanlar akıl yürütmede bulunan bileşenlerin matematiksel özelliklerine bağlıdır.

2-Benzetmeye dayalı matematiksel akıl yürütme: Derinlemesine düşünce yapısı içermez. Örnekleri takip etmeyi içerir.

a. Ezbere dayalı matematiksel akıl yürütme: Strateji seçimi tüm çözümü hatırlamayı içeriyorsa ve strateji uygulanması sadece yazmayı içeriyorsa bu akıl yürütme türüne örnektir.

b. Algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme: Strateji seçimi çözüm algoritmasını hatırlamayı içerir. Yeni bir çözüm yolu bulmayı gerektirmez. Stratejinin geriye kalan uygulama kısmı akıl yürüten kişi için önemsizdir. Hatalar ancak dikkatsizlik sonucu ortaya çıkabilir. Bu akıl yürütme biçimi aşağıdaki gibi üç alt başlık altında ele alınmaktadır.

i. Bilinen algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme: strateji seçiminin nedeni problemin bilinen bir algoritma ile çözülebileceğinin fark edilmesidir. Algoritmanın uygulanmasıyla strateji uygulanmış olur.

ii. Sınırlandırılmış algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme: Algoritma akıl yürüten kişi tarafından sınırlı bir kümeden seçilir. Burada sonuç tahmin edilmez. Eğer seçilen uygulama sonuca götürmezse değerlendirmeden vazgeçilir ve sınırlı kümeden yeni bir algoritma seçilir.

iii. Rehber algoritmaya dayalı matematiksel akıl yürütme: Doküman rehberliğinde ise; strateji seçimi problemle bir metindeki kural, teorem veya bir örnekle benzerlik kurularak gerçekleşir. Algoritma doğrulama gerektirmeden uygulanır. Kişi rehberliğinde ise; strateji seçimi akıl yürüten kişi için tahmine dayalı olmayan argümanlar bir rehber tarafından yapılır. Strateji uygulanmasında rehber takip edilir ve kalan rutin dönüşümlerde doğrulayıcı argüman aranmaz.

Bishop vd. (2001) 7.sınıf öğrencilerinin geometrik örüntüler kullanarak cebirsel akıl yürütme becerilerini geliştirmek, matematiksel sembol ve gösterimleri anlamlandırmak amacıyla bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Örüntü bloklarının kullanılmasının öğrencilerin problem çözme becerilerini, sembolik gösterimler ve sayma stratejileri arasındaki ilişkileri açıklayabilme ve cebirsel akıl yürütme becerilerini geliştirdikleri sonucuna varmışlardır.

Güray, Gök ve Bilgin (2019) 8.sınıf öğrencilerinin istatistiksel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi amacıyla yaptıkları çalışmada nitel araştırma deseni kullanmışlar ve sonuçları Jones vd. (2014) tarafından hazırlana çerçeve kullanılarak betimsel analiz ile analiz etmişlerdir. Buna göre öğrencilerin büyük kısmı istenen nitelikte istatistiksel akıl yürütme becerisi sergileyememişler ve üst düzey yorumlama ve yordama yapamamışlardır.

Gergin (2022) 8.sınıf öğrencilerinin stratejik cebirsel akıl yürütme becerilerini incelemiştir. Araştırma deseninin nitel araştırma yöntemlerinden biri olan örnek olay olan bu çalışmada öğrencilerin açık uçlu problemlerdeki bağlamları anlamlandırmada farklı çözüm stratejileri kullandıkları görülmüşken bazı öğrencilerin ise problem içeriğinde bulunan nicelikleri ve

bunlar arasındaki ilişkileri kurmada zorluk yaşadıkları gözlemlenmiştir. Ayrıca kavramsal bilgileri yeterli olan öğrenciler nicelikler arası ilişkileri cebirsel olarak ifade edebilmişlerdir.

Boesen, Lithner ve Palm (2010) ortaöğretim öğrencileriyle yaptıkları bir çalışmada öğrencilere verilen soruların türleriyle bu soruları çözerken kullandıkları akıl yürütme şekilleri arasında bir ilişki olup olmadığını incelemişlerdir. Eğer öğrencilere ders kitaplarından benzer bir soru veriliyorsa öğrenciler benzetmeye dayalı akıl yürütme yolunu kullanarak ya ezberledikleri bir formülü kullandıkları ya da benzer bir algoritmaya başvurdukları gözlemlenmiştir. Ancak ders kitaplarından farklı sorularla karşılaştıklarında yaratıcı akıl yürütme becerisi sergilemişlerdir.

Masfingatin ve Murtafiah (2020) keşfedici öğrenme yoluyla öğretmen adaylarının geometri öğrenme alanında yaratıcı akıl yürütme becerilerini nitel araştırma yöntemleri kullanarak incelemişlerdir. Verilerin analizi Lithner (2008) tarafından yaratıcı akıl yürütme göstergelerine göre yapılmıştır. Sonuç olarak keşfedici öğrenmenin öğretmen adaylarının yaratıcı akıl yürütme becerilerini geliştirdiği kanısına varılmıştır.

Başka bir araştırmada ise yüksek düşünme becerisi gerektiren geometri soruları ile 8.sınıf öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme becerilerini belirlemek amaçlanmıştır (Mafada, Kusmayadi & Fitriana, 2019). Nicel yöntemle veri toplanan ve analiz edilen bu çalışmada bu tür sorulara maruz kalan öğrencilerin akıl yürütme becerilerinin ortalama seviyede olduğu gözlemlenmiştir.

2.3.2.1.Geometrik Akıl Yürütme

Matematiğin öğrenme alanlarından biri olan geometri, insanların şekiller ve boyutları anlamasını sağlayan bir bilim dalıdır. Geometri, şekillerin özelliklerinin analiz edilmesini ve geometrik ilişkiler hakkında argümanlar geliştirilmesini içerir. Geometri, her eğitim seviyesindeki öğrencilerin ve onların matematik eğitiminin önemli bir parçasıdır ve temel bir matematik becerisi olarak kabul edilir (Armah, Cofieh & Okpoti, 2018; NCTM, 2000). Geometri, mekansal hayal gücünün, tümdengelimli düşüncenin gelişimini destekler ve bunlarda kilit rol oynayan çeşitli matematiksel ve matematiksel olmayan alanların temelini oluşturur (Reilly, Neumann & Andrews, 2017). Dolayısıyla geometri, öğrencilerin akıl yürütme becerisini geliştiren doğal bir alandır (NCTM, 2000) ve onun matematikteki ve akıl yürütme becerilerini geliştirmedeki yeri yadsınamaz bir gerçektir (Atiyah, 2001; Günhan, 2014; NCTM, 2000).

Fischbein (1993) şekilsel kavramları geometrik akıl yürütmede araştırma konusu olarak görür ve bu zihinsel olayların uzamsal özellikler (şekil, konum, büyüklük) ve kavramsal nitelikler (ideallik, genellik, soyutluk) içerdiğini belirtir. Bu nedenle şekilsel ve kavramsal ilişki geometrik akıl yürütmeyi karakterize eder (Jones, 1998). Geometrik şekillerin sadece kavram olarak düşünülemeyeceğini şeklin doğasına özgü özelliklerinin de olduğunu vurgulamış ve bu yüzden geometrik şekillerin iki farklı kategori olarak ele alınması gerektiğini belirtmiştir.

Geometrik akıl yürütmeye Duval (1998) ve Smith (2010) bilişsel açıdan, van Hiele ise gelişimsel açıdan yaklaşmıştır (Arıcı, 2012). Ancak van Hiele geometrik akıl yürütme yerine geometrik düşünme kavramını kullanmıştır. Duval (1998) geometrik akıl yürütmeyi görselleştirme, inşa etme ve akıl yürütme olmak üzere üç bölümde incelemiştir. Görselleştirme, geometrik şekillerin iki boyutlu veya üç boyutlu olarak gösterilmesi; inşa etme, cetvel, pergel veya herhangi bir geometrik aracı kullanarak geometrik nesneleri temsil eden bir model oluşturma süreci; akıl yürütme ise, bilinenlerin yayılması, açıklamalar ve ispatların yapılması için ortaya atılan söylemsel süreçleri ifade eder. Duval (1998) bu üç sürecin birbirinden bağımsız gerçekleşebileceğini ancak birbirleri ile de ilişki içinde olduğunu belirtmiştir. Bilişsel süreçlerin yanında kavramsal boyutu da ele almış ve algısal, işlevsel, sıralı ve söylemsel kavrama şeklinde dört başlıkta incelemiştir. Algısal kavrama şeklin ilk bakışta tanınması, işlevsel kavrama şeklin ilk görünümü üzerinde parçalara ayırma, başka yerlere taşıma gibi durumlarla problemin çözümüne katkıda bulunmayı, sıralı kavrama bir şeklin oluşum sıralamasının açıklanması ve söylemsel kavrama ise bir şekil üzerinden tanım, aksiyom veya teorem gibi matematiksel çıkarımların yapılması anlamlarına gelmektedir.

Smith (2010) ise geometrik akıl yürütmeyi kanıtlama, doğrulama ve tartışma olarak sınıflandırmıştır. Kanıtlama, aksiyomatik bir yapıda verilen durumlara, teoremlere veya varsayımlara dayanan mantıklı argümanlar üretme süreci; doğrulama, matematiksel bir eylemin geçerli olduğunu göstermek için öne sürülen nedenler; tartışma ise, mantıksal olarak birbiriyle ilişkili matematiksel söylemlerin üretildiği bir süreçtir.

Gelişimsel bir yaklaşım benimseyen van Hiele ise geometrik düşünme kavramını ele alarak, beş düşünme aşaması ortaya koymuştur.

1. Düzey: Geometrik şekiller sadece görünümleri ile bilinir.

2. Düzey: Geometrik şekiller görünümleri dışında karakteristik özellikleri ile de bilinir.

3. Düzey: Geometrik şekiller arasındaki ilişkiler kurulur.

4. Düzey: Aksiyomatik sistem içinde ispatlar yapılır, teoremler geliştirilebilir.

5. Düzey: Matematiksel sistemler arasında ilişkiler kurulur.

Battista (2007) van Hiele teorisinin sıralı, ayrık ve nitel olarak farklılaştırılmış olduğunu, bir üst seviyeye geçmek için alttaki seviyeleri tamamlamış olmak gerektiğinden çok katı bir hiyerarşiye sahip olduğunu ifade etmiştir. Battista (2007) geometrik akıl yürütmenin şekilleri ve uzayı araştırmak ve keşif yapmak için kavramsal sistemlerin kullanıldığı bir süreç olduğunu söylemiştir. Araştırmalar akıl yürütmenin basit bir düşünceden ziyade derinlemesine düşünme içerdiğini gösterdiği için bu tez çalışmasında bu tür düşünme türlerine odaklanılacaktır.

Geometrik akıl yürütme ile ilgili çalışmalara bakıldığında; van Hiele teorisine göre ikinci düzeyde yani analiz yapma düzeyinde olan ortaokul öğrencilerinin dikdörtgeni sınıflandırırken geometrik akıl yürütme becerilerinin incelendiği nitel bir çalışmada van Hiele başarı testi kullanılmış ve ardından görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmaya göre bazı öğrenciler Seah ve Horne (2019) tarafından belirtilen tanımlayıcı ve analitik akıl yürütme becerilerini sergilerken bazı öğrenciler dikdörtgen, eşkenar dörtgen ve kare kavramları arasındaki ilişkileri açıklayamamaktadır (Afifah, Susanto & Lestari, 2022).

Van Hiele geometri düşünme düzeylerine göre yapılan çalışmalarda Arıcı (2012) 10.sınıf öğrencilerinin origami temelli öğretimin geometrik akıl yürütme becerilerine etkisini incelemek için nicel araştırma yöntemlerine başvurmuş ve olumlu sonuçlar elde etmiştir. Şahin (2012) ise öğretmen adaylarının geometrik akıl yürütme becerileri üzerinde çalışmıştır. İlişkisel tarama modeline göre gerçekleştirilen bu çalışmada öğretmen adaylarının geometrik akıl yürütmeleri van Hiele geometrik düşünme düzeylerine göre istatistiksel olarak anlamlı bulunmuş ancak daha düşük düzeyde olduğu görülmüştür. Aziz vd. (2020) 9.sınıf öğrencilerinin akıl yürütme becerilerini incelemiştir. Nitel araştırma yöntemlerine göre yapılan bu çalışmada öğrencilerin geometrik düşünmeleri van Hiele geometrik düşünme düzeylerine göre test edilmiş ve öğrencilerin geometrik şekilleri ve özelliklerini tanımlayabildikleri ve analiz edebildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Pavlovicová ve Bocková (2021) de yine öğretmen adaylarının geometrik akıl yürütme becerilerini araştırırken hem nitel hem de nicel yöntemlere başvurmuştur. Öğretmen adaylarının çoğunun istenen akıl yürütme düzeyinde olmadıkları ve kavramlar hakkında yeterli bilgi sahibi olmadıkları sonuçlarına ulaşmışlardır.

TIMSS'in akıl yürütme göstergelerine göre 8.sınıf öğrencilerin akıl yürütme becerileri incelenmiş ve nitel araştırma yöntemlerinin benimsendiği bu çalışmalar sonucunda öğrencilerin geometri bilgilerinin yetersiz olduğu, verilen bir geometrik nesneyi görselleştiremedikleri, var olan örüntüleri fark etseler de işlemsel ve kavramsal bilgi arasında ilişki kuramadıklarını, genel olarak hatalı ya da kusurlu akıl yürütme becerileri sergiledikleri ve ancak odak grup görüşmelerinin olumlu etkileri nedeniyle doğru akıl yürütmelere ulaştıkları bulguları elde edilmiştir (Cantürk Günhan, 2014; Sırtmaç, 2018).

Diğer araştırmalarla karşılaştırıldığında daha özgün sayılabilecek bir araştırma Berenger (2017) tarafından yapılmıştır. Bu araştırmada 7 ve 8 yaşlarında olan öğrencilerin geometrik akıl yürütme becerilerini gözlemlemek amacıyla tasarım tabanlı araştırma modeline uygun olarak Sfard (2008) tarafından geliştirilen yorumlayıcı çerçeve kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin şekilleri tanımlamak için diyagram kullanmak yerine bilinen şekillerin özelliklerini ayrıntılı şekilde açıkladıkları bulunmuştur. Sınıf normlarının açıkça tanımlanmadığı durumlarda sınıf içi tartışmaya girmedikleri gözlemlenmiştir. Ayrıca şekilleri tanımlamak için kullanılan anahtar kelimelerin karmaşıklığında artış olması öğretmenlerin geometri öğretimine ve müdahaleye hazır olup olmadıkları hakkında soruları gündeme getirmiştir.

Duval'in geometrik akıl yürütme sınıflandırmasına göre yapılan araştırmalardan ise Kızıltoprak (2020) 7.sınıf öğrencilerinin geometrik akıl yürütme becerilerini incelemek amacıyla bir öğretim deneyi gerçekleştirmiştir. Buna göre öğrencilerin Duval'in kavrama türlerine göre söylemsel kavrama türüne yaklaştığı ve sınıf içi uygulamalarda olumlu etkilerin arttığı sonucu çıkarılmıştır. Öğretmenlerin geometrik akıl yürütme süreçlerinin incelendiği bir çalışmada, öğretmenlerin akıl yürütme süreçlerinin Duval'in akıl yürütme çerçevesiyle uyum içinde olduğu gözlemlenmiştir (Tutan, 2019). İlköğretim ve ortaöğretim öğrencilerinin geometrik akıl yürütme süreçlerinin karşılaştırıldığı bir çalışmada öğrencilerin doğal geometriden doğal aksiyomatik geometriye geçiş sürecindeki zorluklar tanımlanmış ve öğrencilerin gözlem geometrisinden tümdengelim geometrisine geçmelerine yardımcı olma ihtiyacı vurgulanmıştır (Panaoura & Gagatsis, 2009). 9.sınıf öğrencilerin geometrik şekilleri algılama süreçlerinin incelendiği nitel bir çalışmada ise öğrencilerin çoğunun verilen şekillerdeki alt şekilleri tanımada, sözel olarak verilen bir bilgiyi görselleştirmede ya da görsel bilgiye dayalı bir sözel bilgi üretmede ve şeklin görünüşünden bağımsız şekilde sonuca ulaşmada başarısız oldukları görülmüştür (Karpuz & Atasoy, 2019).

Bostancı (2019) ise 8.sınıf öğrencilerinin geometriye yönelik öz yeterlik algıları ile geometrik akıl yürütme becerileri arasındaki ilişkiyi incelerken TIMSS'in akıl yürütme göstergelerinden yararlanmıştır. Araştırma sonucunda geometriye yönelik öz yeterlik algısının akıl yürütme becerisini olumlu yönde etkilediği ortaya çıkmıştır.

İlhan ve Aslaner (2018) ise geometrik şekiller üzerine akıl yürütme testi geliştirerek öğretmen adaylarının akıl yürütme becerilerini belirlemek amacıyla bir tarama modeline uygun araştırma yapmışlardır. Araştırmanın sonuçlarına göre öğretmen adaylarının akıl yürütme becerileri orta düzeyde olduğu görülmüştür.

Buraya kadar verilen matematiksel akıl yürütme özelde geometrik akıl yürütme ile ilgili tanımlarından, sınıflandırmalarından ve araştırmalardan yola çıkarak bu tez çalışmasında daha özgün bir ölçme aracı ve akıl yürütme gereklilikleri açısından kullanılmak üzere "Akıl Yürütme Bileşenleri" adı altında oluşturulan içerik aşağıda verilmiştir:

1- Etkenleri, değişkenleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak fikir ileri sürme, fikir oluşturma, fikir üretme (Ball & Bass, 2003; Lithner vd., 2010) (çözüm yolu seçiminde, probleme çözüm için faydalı olacak çizim vs. ekleme yapma): Öğrencinin probleme başlarken attığı ilk adım ya da ilerleyen aşamalarda farklı/yeni bir fikirle probleme devam etmesidir.

2- Etkenleri, değişkenleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak iddia etme (Ball & Bass, 2003; Johansson, 2015; Niss, 2015) (ileri sürdüğü fikirlerin kendince doğruluğunda ısrarcı olma): Fikir ileri sürmeye göre daha üstü düzey bir düşünme sürecinin sonucunda ortaya çıkan ifadedir. Yanlış da olsa doğru olduğundan emin olunan bir durum, ısrarla doğru olduğu ifade ediliyorsa, arkasında duruluyorsa bu iddia etmedir.

3- Seçim yapma (Boesen vd., 2018; Lithner vd., 2010) (kullanılacak yollar, modeller, stratejiler, araç gereçler, probleme çözüm için faydalı olacak çizim vs. ekleme yapma vs. gibi): problem çözme süreci boyunca seçenekler söz konusuysa ve öğrenci birini seçerek ilerliyorsa bu seçim yapmadır.

4- Etkenleri, değişkenleri, var olan veya açığa çıkarılan ögeleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak çıkarımda bulunma (Battista, 2017; Lithner, 2008; OECD, 2019): "bu böyle ise böyledir" şeklinde bir sonuca varılıyorsa bu çıkarım yapmadır.

5- Doğrulama-yanlışlama (teyit etme, onaylama, kontrol, çürütme) (Niss, 2015; Rohana, 2015) (kullanılan ispat teknikleri, atılan adımların geçerliliği, yapılan tahminler veya çıkarımlar, ulaşılan çözüm, başka çözüm yolları vs. gibi…): ulaşılan sonucu, yapılan açıklamayı veya kullanılan yöntemi başka bir yol kullanılarak gösterebiliyorsa ya da iddialar veya savunulan fikirler çürütüyorsa bu doğrulama-yanlışlamadır.

6- Çözümleri, cevapları ve ulaşılan sonuçları gerekçelendirme (Lithner vd., 2010; Niss, 2015; OECD, 2019): atılan adımlara, ulaşılan sonuçlara veya açıklamalara gerekçe sunma ve nedenleri ifade etmedir.

7- Açıklamalara veya çözümlere verilen bir gerekçeyi kontrol etme (OECD, 2019; Turner, 2010): ortaya atılan gerekçeler başka gerekçelerle destekleniyorsa gerekçe kontrol edilmektedir.

8- Matematiksel ifadeleri (teoremler, önermeler, iddialar, problem kurmalar, çözümler, ispatlar ve bunlarda kullanılan semboller ile matematiksel kavramların temsiller) birbirlerine bağlayan (mantığa dayalı) düşünme süreci boyunca argüman zincirleri oluşturma (Niss, 2015; Zeidmane, 2013);

   a) adımlar atma,

   b) atılan adımları izleme,

   c) atılan adımları değerlendirme: Burada birbiriyle bağlantılı adımlar söz konusudur. Atılan adım bir öncekiyle ilişkilidir. Böylece adım atılır, bir sonraki adım izlenebiliyor ve sonuca bağlanabiliyorsa bu üç madde de öğrencinin izlediği süreçte vardır denilebilir. Bir zincir gibi birbirini izleyen adımlar vardır.

Literatür incelendiğinde geometri öğrenme alanında yapılan akıl yürütme araştırmalarının yeterli olmaması, araştırmalarda nicel araştırma yöntemlerinin kullanılması ve literatürde özgün bir sınıflandırmanın bulunmaması bu çalışmada yukarıda ifade edilen akıl yürütme bileşenlerinin kullanılmasına itmiştir.

2.3.3. Üstün Yetenekli Öğrenciler ve Akıl Yürütme

Üstün yetenekli bireylerin araştırma yapmayı sevmeleri ve bilgiyi derinlemesine öğrenme istekleri, edindikleri bilgileri kolayca başka alanlara da transfer edebilmeleri, kolayca genellemeler yapabilmeleri, eleştirel düşünme, soyut düşünme ve problem çözme becerilerine sahip olmaları, onları diğer bireylerden ayıran önemli özelliklerdendir. Bu özelliklere bakıldığında üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel yeterliliklerinin ve özel olarak matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerilerinin de gelişmiş olması beklenmektedir. Singer, Sheffield, Freiman ve Brandl (2016) matematiksel üstün yeteneklilik ile matematiksel akıl yürütmeyi ilişkilendirmiş ve bu bireylerin akıl yürütme becerilerinin de gelişmiş olacağını vurgulamıştır. Akıl yürütme becerisi gelişmiş olan kişiler mantıklı çıkarımlarda ve genellemelerde bulunur. Çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini ortaya koyabilir. Bu nitelikler de üstün yetenekli bireylerin özellikleri ile uyumludur. Akıl yürütme üstün yetenekli bireylerin düşünce yapıları ve nasıl çıkarımlar yaptıkları hakkında derinlemesine bilgi verir.

Literatürde üstün yetenekli öğrencilerin akıl yürütme becerilerine yönelik çalışmalara bakıldığında, Abidin vd. (2020) üstün yetenekli öğrencilerin problem tabanlı ve proje tabanlı öğrenme üzerinde akıl yürütme becerilerini incelemiş ve nicel araştırma yöntemiyle gerçekleştirilen bu çalışmada problem tabanlı ve proje tabanlı öğrenme alan üstün yetenekli öğrenci grubunun akıl yürütme becerilerinin daha iyi olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Yıldız (2022) üstün yetenekli ilkokul öğrencilerinin mantıksal akıl yürütme becerilerini yine nicel yöntemlerle araştırmış ve öğrencilerin hiçbirinin soyut işlemler döneminde olmadığı gözlemlenmiştir. Kurnaz (2018) üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel problem çözme, matematiksel akıl yürütme ve uzamsal yetenekleri ile akademik başarıları arasındaki ilişkiyi inceleyerek matematiksel yetenekleri ile akademik başarıları arasında yüksek bir ilişki bulmuştur. Syazali, Listiani ve Farid (2019) problem tabanlı ve rehberli keşif öğrenme yollarının üstün yetenekli öğrencilerin akıl yürütme becerilerini nasıl etkilediğini araştırmış ve rehberli keşif öğrenmenin üstün yetenekli öğrencilerin akıl yürütme becerilerini daha iyi geliştirdiği sonucuna ulaşmışlardır. Nemutlu İnanır (2019) üstün yetenekli öğrencilerin orantısal akıl yürütme becerilerini incelemiş ve nicel bir çalışma gerçekleştirmiştir.

Geometri öğrenme alanı için bakacak olursak, Mason (1989) üstün yetenekli öğrencilerin geometrik anlayışları ve kavram yanılgıları, Sriraman (2004) geometri problemleri ile üstün yetenekli öğrencilerin gerçeği ortaya çıkarmak için geçtikleri süreçleri yorumlamış ve bu süreçleri profesyonel matematikçiler ile karşılaştırmıştır. Özçakır vd. (2020) dinamik

geometri yazılımı ile zenginleştirilen sınıfların üstün yetenekli öğrencilerin geometrik düşünmelerine ilişkin matematikte üstün yetenekli olma olasılığına etkisi üzerine bir çalışma yapmışlardır. Öğrencilerin görsel ipuçlarıyla şekilleri tanımaya yönelik geometri düşünme düzeyinden şekilleri geometrik özellikleriyle düşünme seviyelerine yükseldikleri ve matematiksel üstün yetenekli olma olasılıkları ile geometri düşünme düzeyleri arasında etkileşim olduğu sonuçlarına varılmıştır. Başka bir çalışmada 8.sınıf üstün yetenekli öğrencilerin geometri soruları üzerinde ispat yapma çalışmalarını akıl yürütme, temsil ve genelleme boyutlarında nitel araştırma yöntemleri ile incelenmiştir (Ramírez-Uclés & Ruiz-Hidalgo, 2022). Akıl yürütme ve temsil boyutlarının genelleme düzeyine şartlı olmadığı, ancak yüksek düzeyde argümantasyonun harmonik ve analitik akıl yürütme ile desteklendiği sonuçlarına ulaşılmıştır. Öksüz (2010) 7.sınıf üstün yetenekli öğrencilerin nokta, doğru ve uzay kavramları hakkındaki kavram yanılgılarını araştırmış ve öğrencilerin geometri kavramları hakkında birçok yanılgıları olduğunu görmüştür. Koichu ve Berman (2005) üstün yetenekli ortaöğretim öğrencilerinin geometri problemlerini çözerken geometriyi nasıl kullandıklarını araştırmışlar ve kendilerinin etkililik ve zarafet kavramları arasındaki çelişkileri ortaya çıkarmışlardır. Mason (1995) van Hiele geometri düşünme düzeylerinin üstün yetenekli ortaokul öğrencilerinin geometrik anlayışlarını birebir tanımlayıp tanımlamadığını araştırmış ve geometrinin bütün alanlarında aynı düzeyi karşılamadıkları sonucuna ulaşmıştır. Lee (2005) üstün yetenekli öğrencilerin geometrik akıl yürütmelerini desteklemek amacıyla bir öğretim deneyi gerçekleştirmiş ve öğrencilerin ispat yapma yeteneklerini geliştirmeleri için varsayımda bulunma, test etme ve doğrulama üzerinde çalışmalar yapmaları gerektiği sonucuna ulaşmıştır. Kök ve Davaslıgil (2014) üstün yetenekli öğrencilere uygulanan paralel öğretim programına göre farklılaştırılmış geometri öğretiminin uzamsal becerilerine etkisini araştırmışlar ve nicel araştırma yöntemleri kullanarak bu öğretimin uzamsal becerilerini olumlu yönde etkilediğini görmüşlerdir. Yıldız (2016) ise üstün yetenekli öğrencilerin geometrik yapılandırma becerilerini araştırmış ve öğrencilerin bu süreçte var olan bilgilerini etkili bir şekilde kullandıklarını, dinamik geometri yazılımlarının da kullanılması öğrencilerin daha yaratıcı olduklarını ortaya koymuştur.

Buraya kadar yapılan çalışmalar incelendiğinde üstün yetenekli bireylerin akıl yürütme becerilerinin gelişmiş olmasına ne kadar değinilse de, yapılan araştırmalar bu bireylerin öğrenme ortamlarının nasıl olması gerektiğine, motivasyon kaynaklarının neler olduğuna, değerlendirme durumlarının ve iletişim yollarının neler olduğuna dair daha çok bilgi

vermektedir. Matematiksel bir durum hakkında nasıl düşündükleri, düşüncelerini matematiksel dile nasıl aktardıkları ve bunları nasıl açıkladıkları üzerine derinlemesine araştırmalara ihtiyaç vardır. Matematik eğitiminde yapılan çalışmaların da genel olarak nicel verilerle toplandığı ve sadece istatistiksel sonuçlar elde edildiği, nitel olarak toplanan verilerin de literatürde var olan sınıflandırmaları kullanarak değerlendirmeler yapıldığı görülmüştür. Özgün bir sınıflandırma geliştirilerek yapılan üstün yetenekli öğrencilerin zihinlerini yansıtacak derinlemesine çalışmalara ihtiyaç vardır.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölüm; araştırmanın deseni, çalışma grubu, veri toplama araçları, veri analizi ve araştırmanın güvenirliğine ayrılmıştır.

3.1. Araştırmanın Deseni

Bu tez çalışmasında üstün yetenekli ortaokul öğrencilerinin geometri problemleri yoluyla akıl yürütme becerilerini ayrıntılı bir şekilde araştırmak amaçlanmıştır. Bir konunun ya da problemin derinlemesine incelenmesi gerektiğinde kullanılan nitel araştırma, varsayımlarla insanı içeren sosyal sorunlara değinen ve araştırma problemi incelenirken yorumlayıcı çerçeveden bakılan bir araştırma türüdür (Creswell, 2016). Nitel araştırmalar insanlarla doğrudan konuşarak kendi doğal ortamlarındaki davranışları gözlemleme olanağı sağlar. Bu bağlamda bu araştırmanın deseni nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması olarak belirlenmiştir. Çünkü üstün yetenekli öğrencilerin akıl yürütme becerilerini ortaya koymaya çalışırken, bunları nasıl yansıttıklarını betimlemek bu araştırmanının amacı olduğundan, bu öğrencilerin sergiledikleri akıl yürütme becerilerine dair göstergelerin ancak bu desende derinlemesine incelenmesi mümkün olacağı düşünülmüştür.

Bir nitel araştırma yöntemi olan durum çalışması ise bir bağlam içindeki bir durumun araştırılmasını gerektiren, bu durumun neden ele alındığını, nasıl yorumlandığını, hangi sonuçları doğurduğunu ortaya koyan ve derinlemesine analiz gerektiren araştırma desenidir (Creswell, 2017; Yin, 2003). Araştırmacının bir konuyu örneklemek için birden fazla durumu seçtiği çalışmalar çoklu durum çalışması olarak adlandırılır (Creswell, 2016). Bu çalışmada da üstün yetenekli öğrencilerin geometri öğrenme alanında akıl yürütme becerileri

incelenirken literatür ışığında araştırmacı tarafından oluşturulan akıl yürütme bileşenlerine göre analiz edilmesi çoklu durum çalışması olduğunu göstermektedir. Yin (2009) çoklu durum çalışmasında tekrarlama mantığının yani her bir durum için aynı prosedürlerin izlenmesi gerektiğini önerir. Dolayısıyla bu araştırmada üstün yetenekli öğrencilerin her biri ve ortaya koyulan akıl yürütme göstergeleri bir durum olarak belirlenmiştir. Ayrıca durum çalışmasında araştırmacı gerçek yaşam, güncel sınırlı bir durum ya da belli bir zaman içinde çoklu bilgi kaynakları ile detaylı ve derinlemesine veri toplamaktadır (Creswell, 2016). Bu araştırmada da veri toplama araçları ve verilerin toplanması sürecinde yapılan görüşmeler, öğrencilerin çalışmalarından elde edilen dokümanlar ve video kayıtları ile çoklu bilgi kaynakları kullanılmıştır.

3.2. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmaların doğası gereği, araştırmacılar katılımcılarla yoğun bir deneyim ve süreklilik için araştırmalarını yürütürler. Dolayısıyla aynı zamanda sorularına cevap arayan kişi olarak araştırmacı ortamda neler olduğunu anlamaya çalışan bir bireydir (Glesne, 1999). Araştırmacı, araştırma boyunca katılımcıların nasıl akıl yürüttüklerini anlamaya çalışan kişi olarak ortaya çıkan olaylara dahildir. Bu nedenle bir nicel araştırmayla karşılaştırıldığında nitel araştırmalarda araştırmacı da katılımcı gibi rol üstlenir. Araştırmacı veri toplama sürecinde kendi varsayımlarını ve önyargılarını toplanan verilerden ayrı tutmuş ve yorumlama kısmında bunları dahil etmiştir. Araştırma öncesi ortamı tanımak, yönetici, öğretmen ve çalışma grubunu oluşturan öğrencilerin velileriyle tanışmak amacıyla araştırmanın gerçekleştirileceği BİLSEM kurumuna birkaç kez ziyaret edilmiştir. Bu görüşmelerde araştırmada kendini iyi şekilde ifade edebilen, düşüncelerini açıklamaktan çekinmeyen öğrencilere ihtiyaç duyulduğu kurumun müdürüyle görüşülmüştür. Uygulama öncesi öğrencilerle yaşanılacak sürece alışmak ve bu süreçte onları nelerin beklediğini açıklamak amacıyla birer ön görüşme yapılmıştır. Uygulama boyunca öğrencilerin sadece düşüncelerini ifade etmelerini sağlayacak şekilde müdahale edilmiş, onların akıl yürütmelerini yönlendirecek herhangi bir müdahalede bulunulmamıştır.

3.3. Çalışma Grubu

Çalışma grubu amaçsal örnekleme metodu kullanılarak oluşturulmuştur. Amaçsal örnekleme metodu belli koşulları sağlayan özel durumlarda çalışmak amacıyla tercih edilir

(Yıldırım & Şimşek, 2016). Bu araştırmada da izin alırken sorun yaşanmayacak bir kurumun seçilmesi ve üstün yetenekliler gibi özel bir grupla çalışılacağı için çalışmaya gönüllü olarak katılmak isteyen öğrencilerin seçilmesi en elverişli durum olarak düşünülmüştür. Bu nedenle bu tez çalışmasında amaçsal örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir örnekleme metodu kullanılmıştır. Çalışma grubunun belirlenmesi için kurum müdürüyle görüşerek onun da uygun görmesiyle araştırma amacının yer aldığı bir form velilere gönderilmiş ve çalışmaya katılmak isteyenlerin bir listesi oluşturulmuştur. Başvuran 12 öğrenciden yine kurum müdürünün de fikirleri doğrultusunda zaten matematiksel başarı durumları iyi olan bu öğrencilerden kendini en iyi şekilde ifade ederek araştırma için zengin veri sağlayabilecek biri pilot olmak üzere 4 öğrenci seçilmiştir. Bu öğrencilerin okuldan sonra bu kurumlara gelmeleri, uygulamanın yaklaşık iki ders saati sürecek olması ve boş günlerini seçerek uygulamaya katılacak olmalarından dolayı günde ancak bir öğrenciyle çalışılabileceğinden daha fazla öğrenci seçilememiştir. Araştırmaya üstün yetenekli tanısı konulmuş biri pilot olmak üzere dört öğrenci ile başlanmıştır. Ancak uygulama devam ederken pandemi ortaya çıkmış ve uygulama tekrar başladığında öğrencilerden biri katılımcılığa devam etmek istememiştir. Yine kurum müdürüyle görüşerek çalışmaya katılmak isteyen başka bir öğrenci olup olmadığı konusunda araştırma yapılmış ancak öğrencilerden olumlu bir dönüş gelmemiştir. Pandemi öncesi pilot çalışma tamamlanmıştır. Bu nedenle araştırmanın çalışma grubunu 8.sınıfa devam eden iki kız öğrenci oluşturmuştur. Bu öğrenciler çalışmanın amacı doğrultusunda okul dışında Bilim ve Sanat Merkezine düzenli olarak devam eden, matematik dersinde yüksek başarı, bu dersi seven ve düşüncelerini ifade etmekten çekinmeyen öğrencilerdir. Bu öğrenciler burslu olarak özel okulda okuyan ve sınıf öğretmenleri tarafından fark edilip çeşitli sınavlara girerek Bilim ve Sanat Merkezlerine yerleşen öğrencilerdir. Araştırmanın etiği gereği katılımcılara Ayşe ve Demet takma isimleri verilmiş olup ilerleyen bölümlerde (A) ve (D) harfleriyle temsil edilmiştir.

3.4.Veri Toplama Araçları

3.4.1. Tanışma Soruları

Aşağıdaki tanışma soruları, veri toplama oturumlarına başlamadan önce öğrencilerle iletişim kurabilmek, matematik ve geometri dersleriyle ne derece ilgili olduklarını bilmek, onlardan ne beklendiğini açıklamak ve onları rahatlatmak amacıyla yöneltilmiştir. Görüşmenin akışına göre farklı soruların da sorulduğu olmuştur. Verilerin analizi sırasında öğrencilerin

ortaya koydukları akıl yürütme becerilerinin nedenlerini anlamak için zaman zaman bu soruların cevaplarına başvurulmuştur. Araştırmacı ve bir matematik eğitimcisi uzman tarafından son hali verilen sorular aşağıda bulunan Tablo 1'de verilmiştir. Bu görüşmelere göre öğrenciler Bilim ve Sanat Merkezleri sınavlarına sınıf öğretmenlerinin yönlendirmeleri doğrultusunda girmişlerdir. Bu sınavlar belli zekâ testleri ve mülakatlar şeklinde yapılmaktadır. 4.sınıf seviyesinden itibaren bu kurumlara devam ettiklerini belirtmişlerdir. Ayrıca genel yetenek bölümündeki başarılarıyla bu kurumlara girmişlerdir. Bilim ve Sanat Merkezlerinde devam ettikleri Matematik, Kimya, Biyoloji gibi sınıfların kurum tarafından onların adına kura ile belirlendiğini ifade etmişlerdir. İki öğrenci de matematik dersini sevdiklerini ve okullarda yapılan sınavlarda genellikle tam not aldıklarını söylemişlerdir. En çok ilgilendikleri konuları ise verisi çok olan ve onlara göre çözmesi kolay olan sorular olarak betimlemişlerdir.

Tablo 1
Tanışma Soruları

Matematiğin en çok hangi konusuyla ilgileniyorsun?
Matematikte zorluk yaşadığın konular var mı? Varsa neler?
Geometride ilgini çeken kavramlar nelerdir?
Ne tür problemlerle uğraşmaktan zevk alırsın?
Matematik problemleri ile günlük hayatta karşına çıkan problemler ve çözümleri arasında bağ var mı? Varsa bu bağı nasıl kuruyorsun?
Kendince doğru olduğunu düşündüğün bir fikri başkasını ikna etmede zorlanır mısın? Örneklerle açıklayınız.

3.4.2. Veri Toplama Aracı Olarak Geometri Problemleri

Soru çeşitleri alıştırma, problem, araştırma ve uygulama olmak üzere dört ana başlık halinde incelenebilir (Baki & Bell, 1997). Bu araştırmada soru kavramı hepsini kapsadığından gerekli metodun açık olmadığı ve amaca ulaşmak için adımları biraraya getirerek olasılıkların ortaya çıkarılması şeklinde tanımlanan problem kavramının kullanılması daha doğrudur. Araştırmanın verileri Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2018) ve taslak olarak hazırlanan Özel Yetenekliler İçin Matematik Öğretim Programı (MEB, 2019) incelenerek çeşitli kaynaklardan (Ceylan, 2012; Posamentier ve Krulik, 1998; Posamentier

ve Salkind, 1988; Potari vd., 2009; Senk, 1985) faydalanarak hazırlanan geometri problemleri kullanılarak toplanmıştır. Burada yüzü aşkın problem hazırlanarak bir matematik eğitimcisi tarafından çalışmanın amacı doğrultusunda incelenmiş ve dönütler göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılmıştır. Uzman görüşü sonucunda birden fazla çözüm yolu olmayan, veri zenginliği sağlamayacak ve öğrencilerin akıl yürütme becerilerinin tetiklenmesinde kullanışlı olmadığı düşünülen problemler çıkarılmıştır.

Madde havuzundan çıkarılan örnek bir problem: Bir ABC ikizkenar üçgeninde $|AC|= |BC|$ dir. D ve E noktaları sırasıyla $[AC]$ ve $[BC]$ üzerinde olmak üzere, $\widehat{ABD}$=60°, $\widehat{BAE}$=50° ve $\hat{C}$= 20° olsun. EDB açısının ölçüsü kaç derecedir? Bu problemin çıkarılmasının nedeni öğrencilerin akıl yürütme becerilerini ortaya çıkarmaktan ziyade problemin çözümünün zorlayıcı ve zaman kaybına neden olacağının düşünülmesidir.

Madde havuzunda bırakılan örnek bir problem: "$\cos A.\cos B.\cos C$>0 olan bir üçgen nasıl bir üçgendir?" probleminin olduğu şekilde kalmasının nedeni üstün yetenekli öğrencilerin kendi seviyelerinin üstünde olan konular hakkında fikir sahibi olmaları ve buna dayanarak üst seviye problemleri de çözebilmeleri beklentisinden dolayıdır.

Madde havuzundan değişiklik yapılarak alınan örnek bir problem de "uç noktası ortak olan 10 farklı ışın kaç açı oluşturur?" biçimindedir. Bu problemde öğrencilerin sayma eylemini kullanmamaları için "saymadan yapınız" ifadesi eklenmiştir.

Bütün bu inceleme ve düzeltmelerden sonra 27 problemden oluşan bir soru paketinin kullanılması kararlaştırılmıştır. Bu problemlerin 2'si temel geometrik çizimler ve kavramlar, 2'si trigonometri, 2'si eşlik ve benzerlik, 3'ü alan ölçme, 4'ü çokgenler, 4'ü çember ve daire ve 10'u üçgenler alt öğrenme alanlarından oluşmaktadır. Bu problemler kendi içlerinde "nedir?", "nasıldır?", ilişki nedir? ve ispatlayınız (gösteriniz) soru köklü olmak üzere dört ana başlık altında incelenmiştir. Problemlerin çeşitlendirilmesiyle öğrencilerin düşünme süreçlerini en verimli şekilde tetikleyerek daha zengin bir akıl yürütme süreci geçirmelerini sağlamak amaçlanmıştır. Ayrıca, bir öğrenciyle yapılan pilot çalışma sırasında kullanılması kararlaştırılan bu problemlerden bu amaca hizmet etmede işlevsiz olan herhangi bir sorun tespit edilmediğinden bu soru paketi olduğu gibi kullanılmıştır. Buna başka bir sebep de, pilot çalışma sırasında problemlere her öğrencinin farklı şekilde yaklaşacağı ve veri zenginliği açısından farklı akıl yürütme bileşenleri ortaya çıkacağının fark edilmesidir. Okuyucuya fikir vermesi bakımından, öğrencilere sorulan problemlerden iki örnek ve bu

problemler çözülürken ortaya çıkması muhtemel olan akıl yürütme bileşenleri aşağıdaki Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2
Örnek Problemler ve Akıl Yürütme Bileşenleri

Problemler	Akıl yürütme bileşenleri
[CD] nin kenarortay olduğu bir ABC üçgeni verilsin. |CD|=|BD| ise, ACB açısının ölçüsünü bulunuz.	Fikir ileri sürme (1) Çıkarımda bulunma (4)
"Bir üçgenin iki açıortay uzunluğu birbirine eşit ise, o zaman bu üçgen ikizkenar üçgendir." İfadesinin doğru olduğunu gösteriniz.	Doğrulama/yanlışlama (5) Gerekçeyi kontrol etme (7)

Ancak her problem tek çözüm yoluna sahip olmadığından ve her öğrenci farklı düşünüp farklı yollar izlediğinden, bu bileşenler dışında başka bileşenlerin de ortaya çıktığı durumlar olmuştur. Burada belirtilen bileşenler araştırmacı tarafından ortaya çıkması öngörülen bileşenlerdir. Bulgular kısmında diyaloglarda (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (a,b,c)) şeklinde verilen numaralandırmalar her bileşenin madde numarasına göre kullanılması için yapılan kısaltmalardır. Akıl yürütme bileşenleri oluşturulurken literatürde bulunan akıl yürütme tanımları incelenmiş ve bu tanımlardan bir sentez yaparak akıl yürütme becerisinin hangi bileşenlerden oluştuğu tespit edilmeye çalışılmıştır. Öğrencilerden elde edilen bulgular neticesinde akıl yürütme bileşenleri arasında bir hiyerarşinin olabileceğinin işaretleri gözlemlenmiştir.

Bu çalışmada geometri problemleri öğrencilere sunularak yarı yapılandırılmış görüşme soruları aracılığıyla öğrencilerle görüşme ortamı oluşturulmuştur. Bu görüşmeler birebir oturumlar şeklinde gerçekleştirilmiştir. Birebir görüşmeler yaparak öğrencilerin sesli düşünmeleri sağlanmış olup kendi düşüncelerini özgürce ifade etmelerine ortam hazırlanmıştır. Her öğrenci bireysel olarak farklı kişiliğe sahip olduğundan farklı akıl yürütme bileşenlerinin izlerine rastlanması daha muhtemel görülmüştür. Bu da çalışmanın özgünlüğüne katkı sağlayan bir durumdur. Öğrencilere verilen geometri problemleri hakkında tartışılırken "Bu problemi gördüğünde ilk düşündüğün nedir? Nasıl karar verdin? Nasıl düşündün? Nasıl yaptın?" (Çiftci, 2015; Yazgan Sağ, 2012) "Niçin böyle yaptın?, Niçin doğru olduğunu düşünüyorsun?" gibi sorular sormak öğrencilerin fikirlerini

desteklemesine veya çürütmesine yardımcı olduğu için (Lithner, 2005) öğrencilerin akıl yürütme becerilerini, matematiksel gerekçelerini ya da gösterimlerini nasıl ortaya koydukları araştırmacı tarafından anlaşılmasına yardımcı olur. Dolayısıyla bu tür soruların yanı sıra, süreç sırasında oluşabilecek farklı durumlar için de yeni soruların sorulabileceği esnek bir veri toplama aracının akıl yürütme becerilerini ortaya çıkarmakta daha uygun olacağına kanaat getirilmiştir.

3.5.Verilerin Toplanması

İlk olarak geometri problemleri kullanılarak bir öğrenciyle pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışma yapılan öğrenciyle haftada iki saat bir araya gelinmiştir. Bu oturumlarda amaç problemlerin doğru şekilde çözülmesinden ziyade öğrencilerin bu süreçte gösterdikleri akıl yürütme becerileri önemli olduğundan problemlerde herhangi bir yanlış ya da anlaşılmayan ifadelerin olup olmadığını gözlemlemektir. Böyle bir duruma rastlanmadığından çıkarılan ya da değiştirilen bir problem olmamıştır. Pilot uygulamanın yapılırken eş zamanlı olarak asıl uygulamaya başlanmıştır. Bu süreçte öğrenci geometri problemleri üzerinde çalışırken sınıfa giren, müdahale eden veya çalışmayı bir şekilde bölen bir durum olmamıştır. Araştırmaya başladıktan 4 hafta sonra pandemi ortaya çıkmış ve Bilim ve Sanat Merkezleri geçici (2 yıl boyunca) olarak faaliyetlerine ara vermiştir. Sürecin nasıl ilerleyeceği hakkında bilgi sahibi olunmadığından bekleme kararı alınmıştır. 7 ay sonra uzaktan eğitimin de yaygınlaşmasıyla 6 hafta boyunca öğrencilerle uzaktan çalışılmıştır. Araştırmaya iki öğrenciyle devam edilmiştir. Bu süre zarfında öğrencilere verilecek geometri problemi ekrana yansıtılmış, öğrenciler kendi evlerinde ve ders çalışma ortamlarında bu problemlerle uğraşmışlardır. Uygulama boyunca odalarına giren biri olmamış ve müdahale edilmemiştir. Oturum sonlarında çalışma kâğıtlarının fotoğraflarını çekerek araştırmacıya göndermişlerdir. Geçen bu sürede öğrencilerden birisi katılımcı olmaktan vazgeçmiştir. Böylece öğrencilerle geometri çalışma kâğıdı kullanılarak yüz yüze ve uzaktan olmak üzere toplam 10 hafta boyunca yaklaşık iki ders saati süren yarı yapılandırılmış birebir görüşmeler yapılmıştır. Yapılan oturumlarda problem öğrenciye verildikten sonra problemi anlamaları için süre verilmiş ve çözme süreçlerinde gerekli görülmedikçe müdahale edilmemiştir. Bu görüşmelerde öğrencilerin verdikleri cevabın doğru olmasından daha ziyade süreçte nasıl fikir yürüttüklerine odaklanıldığı için öğrencinin düşüncesini anlamak ve açığa çıkarmak amacıyla gerekli görülen yerlerde “Neden böyle yaptın?”, “Nasıl düşündün?” vs. şeklinde sorular öğrencilere yöneltilmiştir. Bu görüşmeler kamera ile kayıt altına alınmıştır. Böylece

çalışmanın verileri oturumlar sırasında yapılan kamera kayıtları ve öğrencilerin çalışma kâğıtlarından oluşmaktadır. Aşağıdaki Tablo 3'te veri toplama süreci verilmiştir. Bu tabloda oturumların yapıldığı tarihler ve oturumlarda öğrencilerin hangi problemlerle karşılaştıkları verilmiştir.

Tablo 3
Veri Toplama Süreci

Tanışma Görüşmeleri	10.02.2020-14.02.2020
Pilot Görüşme	19.02.2020-11.03.2020
1.oturum	21.02.2020 (Ayşe) (P1, P2, P3, P4)
	25.02.2020 (Demet) (P1, P2)
2.oturum	28.02.2020 (Ayşe) (P5, P6, P7, P8)
	03.03.2020 (Demet) (P3, P4, P5, P6)
3.oturum	06.03.2020 (Ayşe) (P9, P10)
	10.03.2020 (Demet) (P7, P8)
4.oturum	13.03.2020 (Ayşe) (P11, P12)
	18.10.2020 (Demet) (P9, P10, P11)
5.oturum	17.10.2020 (Ayşe) (P13, P14, P15, P16)
	25.10.2020 (Demet) (P12, P13)
6.oturum	24.10.2020 (Ayşe) (P17)
	01.11.2020 (Demet) (P14, P15, P16)
7.oturum	31.10.2020 (Ayşe) (P18, P19)
	08.11.2020 (Demet) (P17, P18)
8.oturum	07.11.2020 (Ayşe) (P20, P21, P22)
	15.11.2020 (Demet) (P19, P20, P21, P22)
9.oturum	14.11.2020 (Ayşe) (P23, P24)
	22.11.2020 (Demet) (P23, P24, P25)
10.oturum	21.11.2020 (Ayşe) (P25, P26, P27)
	29.11.2020 (Demet) (P26, P27)

3.6.Verilerin Analizi

Nitel veri analizinde verilerin kavramsallaştırılması ve temalar aracılığıyla kavramlar arasındaki ilişkilerden örüntüler oluşturulması içerik analizinin temelini oluşturur. Yıldırım ve Şimşek (2021) daha önceden oluşturulmuş kavramsal bir çerçevenin içerik analizini yönlendirdiği tümdengelimci analiz ve verinin içinden çıkan temaların ön planda olduğu tümevarımcı analiz olmak üzere iki içerik analizi yöntemine değinmiştir. Strauss ve Corbin (1990) de tümdengelimci yaklaşıma benzeyen betimsel analiz ve tümevarımcı yaklaşıma benzeyen içerik analizi yöntemlerine değinmişlerdir. Betimsel analizde veriler daha önce belirlenen kodlara göre betimlenir ve yorumlanır. İçerik analizinde ise betimsel analizde özetlenen veriler daha ayrıntılı şekilde ve derinlemesine irdelenir (Strauss & Corbin, 1990). Betimsel analiz daha yüzeyseldir ve araştırmanın kavramsal yapısının önceden belirli olduğu zamanlarda kullanılır. İçerik analizi ise önceden belirli olmayan temaların ortaya çıkmasını sağlar. Toplanan verilerin açıklayıcı kavramlara ulaştırılması içerik analizinde temel amaçtır (Yıldırım & Şimşek, 2016). Wolcott (1994) veri analizi sürecinde gerektiği yerlerde verilerden doğrudan alıntılar yapılarak araştırma raporunun zenginleşmesini sağlayacağını belirtmiştir. Bu araştırmada veriler, gerekli yerlerde doğrudan alıntılar verilerek öğrencilerin problem çözme oturumlarında ortaya koydukları akıl yürütme bileşenlerinin hangi sıklıkla görüldüğünü tespit etmek amacıyla betimsel analiz, öğrencilerin düşünmelerini ve bunları yansıtma biçimlerini açığa çıkarmak amacıyla içerik analizi kullanılmıştır. Veriler anlamlı birimlere indirgenir ve bu birimlere isimler verilir. Burada verilerin kodlanması işlemi yapılır. Kodlar geniş kategoriler veya temalar altında birleştirilir, kodlar ve temalar düzenlenir ve hakkında yorumlar yapılır (Creswell, 2016). Kodların oluşturulması kısmında ayrıntılı tanımlamalar yapılır ve temalar geliştirilir. Bu aşamada detaylı bir betimleme yapılırken literatürdeki bakış açılarının ışığında yorumlamalar getirilir. Strauss ve Corbin (1990) daha önceden belirlenmiş kavramlara, verilerden çıkarılan kavramlara ve genel bir çerçeveye göre olmak üzere üç tür kodlamadan bahsetmiştir. Bu tez çalışmasında elde edilecek verilere göre yeni kavramlar ve literatür bilgisinin kullanılacağı düşüncesiyle genel bir çerçevede yapılan kodlama ile kodlama yapılması kararlaştırılmıştır. Genel bir çerçevede yapılan kodlamada önceden belirlenen kodlar değiştirilebilir, çıkarılabilir ya da yeni kodlar eklenebilir. Verilerin toplanmasından önce literatür ışığında akıl yürütme tanımlarından yola çıkarak oluşturulan akıl yürütme bileşenleri Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4
Verilerin Toplanmasından Önce Oluşturulan Akıl Yürütme Bileşenleri

Verilerin toplanmasından önce oluşturulan akıl yürütme bileşenleri	Verilerin toplanmasından sonra yapılan değişiklik durumu
1) Etkenleri, değişkenleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak fikir ileri sürme	Değişiklik yapılmadı.
2) Etkenleri, değişkenleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak iddia etme	Değişiklik yapılmadı.
3) Seçim yapma ve yapılan seçime gerekçe sunma	Iki ayrı kod içerdiğinden yapılan seçime gerekçe sunma ifadesi kaldırıldı. Gerekçelendirme maddesine dahil edildi.
4) Etkenleri, değişkenleri, var olan veya açığa çıkarılan ögeleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak çıkarımda bulunma	Değişiklik yapılmadı.
5) Doğrulama	Öğrencilerin kendi düşüncelerini çürüttükleri durumlar da söz konusu olduğundan doğrulama/yanlışlama olarak değiştirildi.
6) Geçerli olduğunu onaylama	Doğrulama maddesiyle aynı sonuca vardığından kaldırıldı.
7) Çözümleri, cevapları ve ulaşılan sonuçları gerekçelendirme	Değişiklik yapılmadı.
8) Açıklamalara veya çözümlere verilen bir gerekçeyi kontrol etme	Değişiklik yapılmadı.
9) Matematiksel ifadeleri (teoremler, önermeler, iddialar, problem kurmalar, çözümler, ispatlar ve bunlarda kullanılan semboller ile matematiksel kavramların temsiller) birbirlerine bağlayan (mantığa dayalı) düşünme süreci boyunca argüman zincirleri oluşturma; a) adımlar atma, b) atılan adımları izleme, c) Atılan adımları değerlendirme,	Değişiklik yapılmadı.

Verilerin toplanmasından sonra ihtiyaç duyulan değişikliklerin yapılmasıyla oluşturulan akıl yürütme bileşenlerinin tablosu da Tablo 5'te verilmiştir. Bu tabloda örnek olması amacıyla her bileşen için örnek diyaloglara da yer verilmiştir.

Tablo 5
Son Hali Verilen Akıl Yürütme Bileşenleri

Akıl yürütme bileşenleri	Örnek diyalog
1) Etkenleri, değişkenleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak fikir ileri sürme, fikir oluşturma, fikir üretme (Ball & Bass, 2003; Lithner vd., 2010).	… D: Haa. Uç noktası ortak olursa kaç açı oluşur. Zaten 10 tane şey var. Böyle diyerek yapsak, her iki tanesi ortasında bir boşluk bırakacak. O zaman 9 tane falan olur saymadan yapınız dediğine göre. Zaten böyle düşünürsek, buraya 5 tane çizsem 5 tane boşluk (dıştaki açıyı da saymış) oluyorsa, o zaman 10 tanede 10 tane olur. ….
2) Etkenleri, değişkenleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak iddia etme (Ball & Bass, 2003; Johansson, 2015; Niss, 2015).	… D: Ama şöyle de düşünüyorum. Belki öbür tarafından da sayılabilir çünkü buradan geçerse o zaman iki tane sayılır. … D: neden iki tane olduğunu şöyle söyleyeyim. Kenarortay nasıl üçgeni tam olarak ikiye bölüyorsa, üçgeni ikiye bölüp sonra da devam edebiliyorsa yoluna, o zaman buradaki dik doğru da bu BC doğrusunu böldükten sonra devam eder. İki taraftan da devam ettiği için tek noktadan gidiyor. Bir bu taraftaki olur yani üstündeki olur, bir de alt taraftaki olur. Tamamen bu yüzden iki tane olduğunu düşündüm. …
3) Seçim yapma (Boesen vd., 2018; Lithner vd., 2010).	… D: Aslında bunun bir sürü farklı yolu olur. Böyle düşünürsek o yüzden bunun kaç tane açı oluşturacağını bulmamız çok zor olur çünkü bir sürü seçenek var. Birini böyle yerleştirir, öbürünü gider şöyle yerleştirir. … D: Tamam, 3 taneyle denesek. … D: 5 ışınla yapayım. 5 tane zaten var, 6, 7, 8, 9, 10, 11 desek. 17 falan olur sanırım. …
4) Etkenleri, değişkenleri, var olan veya açığa çıkarılan ögeleri ve olası bütün durumları göz önüne alarak çıkarımda bulunma (Battista, 2017; Lithner, 2008; OECD, 2019).	… D: Yani böyle düşündüm. Eğer eşitse bunlar o zaman ABCD eşittir EFGD. …
5) Doğrulama/yanlışlama (Niss, 2015; Rohana, 2015).	D: Yani öyle düşünüyorum. Gerekçelendiriniz derken? (Düşünüyor) neden iki tane olduğunu şöyle söyleyeyim. Kenarortay nasıl üçgeni tam olarak ikiye bölüyorsa, üçgeni ikiye bölüp sonra da devam edebiliyorsa yoluna, o zaman buradaki dik doğru da bu BC doğrusunu böldükten sonra devam eder. İki taraftan da devam ettiği için tek noktadan gidiyor. Bi bu taraftaki olur yani üstündeki olur, bi de alt taraftaki olur. Tamamen bu yüzden iki tane olduğunu düşündüm. … D: Yani eğer bizim tabanımız buradaki AE olursa bunda ama iki ayrı parça olarak sayarsak o zaman zaten birbirinden bağımsız olurlar. O yüzden bunu tam olarak bir dik doğru olarak saymamız gerekir. Çünkü böyle yatay olarak düşünürsek AD ile ED yi ayrı parçalar olarak saydığımız için birbirinden ayırmış oluyoruz. Yani şu durum ortaya çıkıyor. Yani bir tane olur. …
6) Çözümleri, cevapları ve ulaşılan sonuçları gerekçelendirme (Lithner vd., 2010; Niss, 2015; OECD, 2019)	… D: Yani öyle düşünüyorum. Gerekçelendiriniz derken? (Düşünüyor) neden iki tane olduğunu şöyle söyleyeyim. Kenarortay nasıl üçgeni tam olarak ikiye bölüyorsa, üçgeni ikiye bölüp sonra da devam edebiliyorsa yoluna, o zaman buradaki dik doğru da bu BC doğrusunu böldükten sonra devam eder. İki taraftan da devam ettiği için tek noktadan gidiyor. Bi bu taraftaki

	olur yani üstündeki olur, bi de alt taraftaki olur. Tamamen bu yüzden iki tane olduğunu düşündüm. …
7) Açıklamalara veya çözümlere verilen bir gerekçeyi kontrol etme (OECD, 2019; Turner, 2010)	… D: Yani eğer bizim tabanımız buradaki AE olursa bunda ama iki ayrı parça olarak sayarsak o zaman zaten birbirinden bağımsız olurlar. O yüzden bunu tam olarak bir dik doğru olarak saymamız gerekir. Çünkü böyle yatay olarak düşünürsek AD ile ED yi ayrı parçalar olarak saydığımız için birbirinden ayırmış oluyoruz. Yani şu durum ortaya çıkıyor. Yani bir tane olur. … D: Şöyle yan döndürdüğümüz zaman bunu 1, 2 diye sayarsak birbirinden bağımsız olurlar. Aynı burda saydığımız gibi. Yani sonuçta şöyle bir şey çıkar. Bu şekil ortaya çıkar. Bu da zaten bizden istenen şey değil ki. Bize bir doğru üzerine kaç tane dik doğru çizilir diyor bir noktadan. Böyle bir tane dik doğru çizersek olur. Ama bunu böyle iki ayrı parça olarak sayarsak zaten biz konudan tamamen sapmış oluruz. Yani ben daha demin yanlış düşünüyormuşum. Kendi fikrimin yanlış olduğunu düşünüyorum. Bağımsız olduğu zaman bir doğru olmaktan çıkarlar. O yüzden tek bir noktadan bir tane doğru çizilir. Ama mesela arkalı önlü düşünürsek burası bir nokta burası bir nokta olarak düşünürsek, buradan da geleceği için iki tane sayılır. … D: Hıhı iki tane sayılır yani sayılması gerekir. Çünkü bir noktadan dik doğru çizilir diyor ne de olsa. Burda bir nokta seçtiğimiz zaman buradan da başka bir doğrudan gitmesi gerekir. Yani her türlü bir noktadan bi tane doğru geçer. Ama biz bunu ortasına nokta koyarsak bunu bölmüş mü oluruz ki (burda sesli düşündü kafası karıştı ortasından nokta seçince). Sayı doğrusu olur ya, onun iki tarafı da her zaman şöyle olur. Biz bunu her zaman böyle böleriz ve arlarındaki parçaları da sayarız. Bu mantıkla gidersek aslında bunlar sonsuza kadar gideceği için kaç dik doğru çizileceği sayılamaz. Çünkü sonsuza kadar gidiyorlar. Ama yok evet sayılamaz. ...
8) Matematiksel ifadeleri (teoremler, önermeler, iddialar, problem kurmalar, çözümler, ispatlar ve bunlarda kullanılan semboller ile matematiksel kavramların temsiller) birbirlerine bağlayan (mantığa dayalı) düşünme süreci boyunca argüman zincirleri oluşturma (Niss, 2015; Zeidmane, 2013); a) adımlar atma, b) atılan adımları izleme, c) atılan adımları değerlendirme	… D: İkinci adımda 2 ile 4 ü çarptım 8. Bunun gibi 4 le toplarsam 12 olur fakat bence birer birer arttığımız için ışınları 1 fazlasını daha ekliyorum. 5 artırdım bu da 13 ediyor. 3 le 5 i çarptım 15. Diğerinde 5 arttırmıştım. Yine 1 ışın fazla eklediğim için bunda 6 arttırdım. 21. Böyle böyle gidiyor bu. Bilmem kaçıncı basamakta 10 la n.basamakta, 3 ten başladığımıza göre 7 olabilir. 7. Basamakta 7 ile 10 u çarpacağım 70, 81 çıkıyor cevap. …

Son hali verilen bu akıl yürütme bileşenlerine göre öğrencilerle gerçekleştirilen görüşmeler analiz edilip frekans tabloları oluşturulmuştur. Bu frekans tabloları aracılığıyla betimsel ve içerik analizi gerçekleştirilmiştir. Aşağıda bu analizlerin nasıl yapıldığına dair örnekler verilmiştir. Her bir bileşen kendi madde numaralandırmasıyla (1), (2), …şeklinde kısaltılmıştır. Aşağıdaki Tablo 6'da öğrencinin iki probleme ait frekans verileri yer almaktadır.

Tablo 6

Betimsel Analiz Örneği

Bileşenler	1	2	3	4	5	6	7	8(a)	8(b)	8(c)
Problem1	25	2	17	21	6	4	2	7	7	0
Problem2	13	6	4	18	1	5	1	1	0	0

Bu tabloda öğrencinin iki probleme ait frekans verileri yer almaktadır. Öğrencinin hangi akıl yürütme bileşenini hangi sıklıkta gösterdiği ya da gösteremediği görülmektedir. Buradaki verilere göre içerik analizi yapılmıştır. Buna ait bir örnek Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7

İçerik Analizi Örneği

Problem	Görüşmelerden Alıntılar
Bir üçgende iç teğet çemberin nasıl çizildiğini gösteriniz.	…
	D: Eşkenar olursa kolay. (1,3)
	A: Eşkenar olursa nasıl kolay?
	D: Yani bi defa ben bu üçgeni bu ABC üçgeni içine çizmeye çalışırken her kenara değecek şekilde bir eşit üçgen çizmeye çalışacağım ama eşit…
	A: Çember.
	D: Yok ilk önce üçgen sonra ona göre çember yani nereye çizeceğim belli olsun diye. (1,3,6)
	A: Hmm tamam.
	D: Ama mesela eşkenar üçgende her taraf eşit zaten burda belirli bir kalıpla çizilmiş bile olsa etrafına çizgi çek yani doğru parçası çizmeye çalıştığında bize eşkenar çıkarıyor. (1,4,5,7)
	…
Uç noktası ortak olan 10 farklı ışın kaç açı oluşturur? (Saymadan yapınız.)	…
	D: 360 derece. O açıyı çizdik. Sonra bu 1.ışın desek buna. Her biri teker teker kendiyle kaç açı oluşturduğunu düşündüm. E bu da 360 derecelik açı olarak düşünürsek her biriyle yaparsa 10 tane açı oluşturmuş olacak. Diğerleri 360 derecelik açı oluşturamayacak çünkü yine aynı şeye denk gelecek. O yüzden diğerleri de teker teker 9 tane oluştursa 46 olmuyor aslında. Ben farklı düşündüm. Eee 9 tane açı oluştursa 9 kere 9 81. O zaman buradaki yanlış sonucu silersek 91 açı oluşturur. Çünkü tam 100 olmaz. 360 dereceyi bir kere oluşturduk. (1,4,6,8(a,b,c))
	…

Bu içerik analizi tablosuna bakıldığında, ilk problem için; öğrenci “eşkenar üçgen olursa kolay” diyerek hem fikir ileri sürme (1) hem de üçgen çeşidi belirterek seçim yapma (2) bileşenine ait göstergeler ortaya koymuştur. Sonraki açıklamalarında ise çemberi nasıl çizeceğinin nedenlerini açıklayarak gerekçelendirme (6) bileşenine ait izler sergilemiştir. İkinci problemde ise öğrencinin her ışının kaç açı oluşturacağını düşünmesi fikir ileri sürme (1), 10 açı oluşturacağı sonucuna varması çıkarım yapma (4), bir tane tam açı oluşacağının nedenini açıklaması gerekçelendirme (6), bütün bu adımları atması (8(a)), bunlardan yola çıkıp yeni adımlar izlemesi (8(b)) ve en son bir sonuca varması atılan adımların değerlendirilmesi (8(c)) bileşenlerinin varlığını göstermektedir.

3.7.Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırmalarda geçerlik, bir durumun olduğu gibi ve olabildiğince yansız bir şekilde okuyucuyla paylaşılması anlamına gelir. Katılımcı ve araştırmacı açısından bulguların verilerin orijinal yapısına uygun olup olmadığının belirlenmesine dayanır (Creswell, 2017). Bu araştırmada yapılan birebir görüşmeler ve katılımcılarla doğrudan iletişim halinde olunması geçerliğe katkı sağlayan etkenlerdendir. Veri toplama süreci bittiğinde öğrencilerden yeteri kadar veri alındığı görüldüğünden, araştırmanın doygunluğa eriştiği de söylenebilir. Verilerin analizi sırasında araştırmacının eleştirel bir gözle öğrencilerle yapılan görüşmelerin kodlanmasına zaman zaman tekrar kontrol ettiği olmuştur. Bu da iç geçerliği sağlayan bir diğer faktördür. Ayrıca veri toplama araçları ve akıl yürütme bileşenleri de yine bir matematik eğitimcisi uzman tarafından değerlendirilmiş ve son halini almıştır. En temel haliyle dış geçerlilik, gözlemlenen veya araştırmayla elde edilen bir nedensel ilişkinin farklı ölçülere, kişilere, ortamlara ve zamanlara genelleştirilip genelleştirilmeyeceğini inceler. Başka bir ifade ile belirli bir çalışmanın bulgularından elde edilen sonuçların kişilerde, ortamlarda ve zamanlarda ne ölçüde geçerli olduğunun bir göstergesidir (Calder, Phillips & Tybout, 1982; Findley, Kikuta & Denly, 2020). Ancak nitel araştırmalarda, nicel araştırmalarda olduğu gibi istatistiksel olarak evrene genellenebilmeden bahsedilmez. Nitel araştırmalarda dış geçerlik analitik genelleme şeklinde olur ve amaçlı örnekleme ve ayrıntılı betimleme ile sağlanır (Yıldırım & Şimşek, 2016). Bu tez çalışmasında da katılımcılar amaçsal örnekleme ile seçilmiş ve elde edilen verilen ayrıntılı şekilde betimlenmeye çalışılmıştır.

Nitel araştırmalarda güvenirlik verilerin analizinde çoklu kodlayıcıların kullanılması, kodlayıcılar arasındaki görüş birliğinin esas alınması ve kodlayıcıların cevaplarındaki kararlılık anlamına gelmektedir (Creswell, 2016; Stake, 2005). Nitel araştırmalarda dış güvenirlik araştırmacının yansız ve yorumları kendine göre yapmadığını ifade eder (Yıldırım & Şimşek, 2016). Bu araştırmada kodlamaların %20'lik kısmı matematik eğitimcisi uzman tarafından kodlanmış ve görüş ayrılıkları birlikte tartışarak görüş birliğine varılmıştır. İç güvenirlik ise sonuçların verilere uygun olup olmadığıyla ilgilidir. Yapılan kodlamalar araştırmacı tarafından birkaç kez yeniden kodlanmış ve sonuçlarla uyumlu olup olmadığı konusunda incelemelerde bulunulmuştur.

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde alt problemlerin sırası gözetilerek üstün yetenekli ortaokul öğrencilerinin geometri problemleri yoluyla incelenen akıl yürütme becerilerine ait bulgulara yer verilmiştir. Öğrencilerle gerçekleştirilen birebir oturumlardan elde edilen çözümlemelere dayanan (alıntılar da verilerek) ayrıntılı bir betimsel ve içerik analizi yapılmıştır. Öncelikle öğrencilerin akıl yürütme becerilerinin akıl yürütme bileşenleri açısından nasıl olduğuna, ikinci olarak ise öğrencilerin akıl yürütmeleri arasında benzerlikler ve farklılıklara dair bulgulara değinilmiştir. Bulgular betimsel analize dayanarak genel hatlarıyla önce iki öğrenci için ayrı ayrı verilecek daha sonra akıl yürütme bileşenleri boyutunda detaylı olarak incelenecektir. Bunun için frekans tablolarından yola çıkarak öğrencilerin problemlerde ortaya koyduğu akıl yürütme göstergelerinin sıklığı anlaşılması ve göze çarpan problemlerle ilgili oturumlardan birebir alıntı örnekleri üzerinde içerik analizi yolu ile ayrıntılı şekilde tartışılması sağlanmaya çalışılacaktır. Ayrıca, problemlerin soru köklerinin ve alt öğrenme alanlarının öğrencilerin akıl yürütme becerilerinde ne gibi etkileri olduğu incelenecek ve ikinci alt probleme ait bulgularda ise katılımcılar onlara verilen problemler üzerinde tartışırken ortaya koydukları akıl yürütme bileşenleri arasındaki benzerlikler veya farklılıklardan bahsedilecektir.

4.1.Geometri Problemleri Bağlamında Üstün Yetenekli Ortaokul Öğrencilerinin Akıl Yürütme Becerilerine İlişkin Bulgular

Bu kesimde iki katılımcı öğrenciden elde edilen bulgular ayrı başlıklar altında verilecektir. İlk aşamada öğrencinin problemlerin çözümleri esnasında ortaya çıkan akıl yürütme bileşenlerine ait frekans tabloları verilecek ve genel durum hakkında ortaya çıkan sonuçlara

değinilecektir. Daha sonra bu bileşenler ayrı başlıklar altında verilecek, bu bileşenlere ait frekans tabloları ayrıntılı olarak incelenecek ve özellikle frekans tablolarında göze çarpan bileşenlere ait problemler ile ilgili öğrenciler ile gerçekleşmiş olan diyaloglar analiz edilecektir.

4.1.1. Ayşe'nin Geometri Problemleri Bağlamında Akıl Yürütme Becerisinin İncelenmesine İlişkin Bulgular

Ayşe ile yapılan oturumlarda 27 problem tartışılmıştır. Bu problemlerin 2'si temel geometrik çizimler ve kavramlar, 2'si trigonometri, 2'si eşlik ve benzerlik, 3'ü alan ölçme, 4'ü çokgenler, 4'ü çember ve daire ve 10'u üçgenler alt öğrenme alanlarından oluşmaktadır. Toplanan verilerden 1148 adet akıl yürütme bileşeni ortaya çıkmıştır. Bunlardan 400'ü fikir ileri sürme (1), 40'ı iddia etme (2), 97'si seçim yapma (3), 271'i çıkarım yapma (4), 37'si doğrulama/yanlışlama (5), 151'i gerekçelendirme (6), 38'i gerekçeyi kontrol etme (7) ve 114'ü matematiksel ifadeleri birbirine bağlayan düşünme süreci boyunca argüman zincirleri oluşturma (8(a,b,c)) bileşenlerine ait olduğu tespit edilmiştir. Bu sayılardan da anlaşıldığı gibi Ayşe'nin oturumlarında en sık rastlanan bileşenler fikir ileri sürme, çıkarım yapma ve gerekçelendirme, en az rastlanan bileşenler ise doğrulama/yanlışlama, gerekçeyi kontrol etme ve iddia etmedir. Bunları da seçim yapma ve matematiksel ifadeleri birbirine bağlayan düşünme süreci boyunca argüman zincirleri oluşturma bileşenleri takip etmiştir. Öğrencinin fikir ileri sürebildiği sorularda çıkarım yapma bileşenini de gösterdiği açıkça görülmektedir. Diğer bileşenler daha zayıftır.

Aşağıda öğrencinin her soruda ortaya koyduğu akıl yürütme bileşenlerinin sıklık tablosu yer almaktadır.

Tablo 8

Ayşe'ye Ait Akıl Yürütme Bileşenlerinin Sıklık Tablosu

Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 1	25	2	17	21	6	4	2	7	7	0
Problem 2	13	6	4	18	1	5	1	1	0	0
Problem 3	18	1	7	13	4	7	3	3	3	1
Problem 4	7	0	3	6	1	3	2	0	0	0
Problem 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Problem 6	19	7	2	12	3	8	3	2	2	1
Problem 7	25	0	6	15	2	10	3	1	1	1
Problem 8	12	4	4	21	2	12	5	1	1	1
Problem 9	14	0	2	24	1	16	3	9	9	4
Problem 10	18	3	1	10	2	4	0	0	0	0
Problem 11	22	3	2	15	3	9	2	2	2	1
Problem 12	4	0	0	10	1	4	1	3	3	0
Problem 13	6	0	3	3	2	4	0	1	1	0
Problem 14	15	0	4	9	0	9	3	1	1	0
Problem 15	6	0	2	3	0	2	0	0	0	0
Problem 16	15	3	6	8	0	8	1	0	0	0
Problem 17	25	2	10	16	3	9	2	5	5	3
Problem 18	35	0	5	9	2	9	3	1	1	0
Problem 19	12	4	7	4	0	1	0	0	0	0
Problem 20	16	0	2	7	0	5	2	0	0	0
Problem 21	14	0	1	4	0	2	0	1	1	0
Problem 22	4	0	1	2	0	1	0	0	0	0
Problem 23	18	0	1	7	0	1	0	3	2	1
Problem 24	18	2	2	12	1	5	0	1	1	1
Problem 25	4	1	0	3	2	3	0	2	2	2
Problem 26	20	2	3	8	1	6	2	1	1	1
Problem 27	15	0	2	11	0	4	0	4	4	1
Toplam	400	40	97	271	37	151	38	49	47	18

Yukarıdaki Tablo 8'e göre Problem 5'te hiçbir akıl yürütme bileşenine rastlanmamıştır. Trigonometri sorusu olan bu problemde öğrenci problemin içeriğinde bulunan terimleri ve kavramları daha önce öğretmenlerinden ya da aile üyelerinden duyduğunu belirtmiş ve

oturumdan sonra kendi araştırmasıyla bir takım bilgiler edindiğini açıklamıştır. Ancak bu tür problemlerle hiç karşılaşmadığı için

A: Bu ne demek öğretmenim? cosA.cosB.cosC > 0.(c, o, s diye tek tek harfleri söylüyor).

Ar: Hiç duymadın?

A: Duydum, bilmiyorum.

Ar: Nasıl duydun?

A: İşte evde babam konuşuyordu. Sonra matematik öğretmenimiz liselilerle konuşuyordu.

Ar: Hmm neler duydun peki?

A: İşte sonra bunun üçgenler için çok önemli olduğunu söylemişlerdi bunlara işte çalışmazsanız sınavda pertsiniz siz demişlerdi umudum yok sizlerden demişlerdi hocalar yapamazsınız.

Ar: Hmm.

A: Bu kadar şey dediler başka duymadım.

Ar: Hmm. Babandan neler duydun?

A: Babam da şey bi tane programda üçgen falan hesaplarken kendi kendine söyleniyordu o zaman duydum.

...

A: Böyle babama sordum terimler kullandı bir şeyler kullandı ben hiçbir şey anlamadım. Anladığım kadarıyla üçgenin kenarlarıyla ya da açılarıyla ilgili bir şey onu anladım.

Ar: Hmm yani kısaca ne anladın kosinüsten?

A: Sadece üçgenin kenarlarıyla ilgili bir şey olduğunu anlayabildim.

…

Diyaloğunda da görüldüğü gibi herhangi bir akıl yürütme bileşeninin izleri bulunmamaktadır. Bunun nedeni olarak öğrencinin de belirttiği gibi trigonometri ile ilgili terimleri ilk kez görmesi öne sürülebilir.

Bunun dışında Problem 4, Problem 13, Problem 15, Problem 22 ve Problem 25'te öğrencinin akıl yürütme bileşenleri zayıftır. Alan ölçme konusunda ilişki kurmayı gerektiren bir soru olan Problem 4'te öğrenci alanları birbirini kapsayacak şekilde eşitlemeye çalışmış ve farklı yollar bulma konusunda da pek ilerleme kaydedememiştir. Sonucu bulduğunu düşündükten sonra farklı bakış açılarıyla yaklaşmak için çabalamamıştır. Verilen diyalogda öğrencinin alanları karşılaştırması fikir ileri sürme (1), hangi alanları seçeceğine karar vermesi seçim yapma (3), bu alanların karşılaştırılmasından bir sonuca varması çıkarım yapma (4) ve sunduğu gerekçelere yeni açıklamalar ve benzetmeler yapması gerekçeyi kontrol etme (7) becerilerini göstermektedir. Ancak bir şekilde soruyu çözdüğünü düşündüğü zaman yeni fikirler üzerinde daha fazla kendini zorlamak istemediği

…

A: Ben şöyle düşündüm. DCG üçgeninin alanından şu BEY üçgeninin alanını çıkarttığımızda çıkan yaklaşık şu kadarlık bölüme yani şurayı kapatınca oluşan şu kadarlık bölüme de x desek. (1,4)

Ar: Oradaki dörtgenin alanı mı yani x?

A: Evet şu dörtgenin alanı x.

Ar: Tamam.

A: bu dörtgenle şu daha demin yaptığımız A(YFC) üçgeni artı x, toplayınca A(AED) üçgeninin alanı çıkıyor. Yani kısaca DCG, BEY ve AED toplayınca şuradaki iki şeyi buluruz. Bi tek orta kalır. Ben bunu bir kâğıt oyunu gibi düşündüm. Parçaları sırayla kesiyoruz. Sonra üstüne yapıştırıp bir dikdörtgen çıkıyor. Bu eşitlikler o yüzden. Yani bundan kesilen parça buraya yapıştırılınca şuraya eşit bir şey çıkıyor. O yüzden dedim. (1,4,7)

Ar: Hmm, güzel.

…

A: Ben şöyle düşündüm. Şuradan verdim. Bunu koyunca burası da eşitlenecek demiştik ya AED ile hani eşit olacaktı. Mesela şöyle bir şekil çizsek, şu karalı taraflar birbirine eşit olsa, o zaman bu karalı iki tarafın toplamı şunun toplamına eşit olmaz mı yani şu çizgilediydim tarafın toplamı şu karalı taraflara eşit olmaz mı? (1,3,7)

Ar: Bilmem olabilir, olmaya Da bilir. Bilemeyiz onu. Burda böyle mi yaklaştın?

A: Evet.

Ar: Tamam anladım. Güzel bir yaklaşım. Başka nasıl yaklaşabilirsin?

A: Bence ben en çok böyle yaklaşıyor gibiyim. Daha fazla yaklaşamıyorum.

Ar: Hmm. Başka eklemek istediğin düşüncelerin var mı bunun hakkında?

A: Cık. Başka çıkmıyor benden. Ya çünkü ben şey kaydırma yaptım aslında kesmesek de sadece kaydırsak da yine o şekilde olduğu İçin öyle yaptım. Benden başka çıkmıyor. Başka soru var mı?

Ar: Geçmek mi istiyorsun?

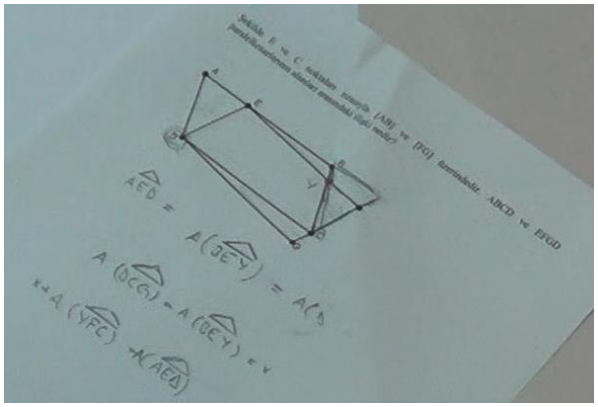
A: Olabilir.

Ar: Başka türlü bir şey yapılabilir mi? Sen kaydırma yaptın mesela öyle yaptığını söyledin.

A: Böyle bakınca da hiç gelmiyor nedense. Mesela şurada kocaman bir maket olsaydı bunun her tarafını evirip çevirseydim ben daha iyi bulurdum ama bence elimden gelenin en iyisi bu daha ilerisi çıkmıyor.

…

Diyaloğunda görülmektedir.



Şekil 3. Öğrencinin Problem 4'e ait çalışması

Öğrenci ile yapılan ön görüşmeden alan ölçme ile ilgili soruları kolay bulduğu ve bu sorulardan zevk aldığı anlaşılmaktadır. Buna rağmen bu soruda yeni fikirler üretme çabasına girmek istemeyerek akıl yürütme bileşenlerini verimli şekilde ortaya koyamamasının nedeni soruda sayısal veri olmamasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Çünkü yine ön

görüşmede ve daha sonraki görüşmelerde de öğrenci sayısal veri bulunan soruların ona daha mantıksal geldiğini ifade etmiştir.

Problem 13, Problem 15, Problem 22 ve Problem 25'in ortak özellikleri ise ispat yapmayı gerektiren sorular olmasıdır. Örneğin Problem 13'te önermede verilen ifadeye göre birkaç üçgen üzerinde sayısal olarak değer vererek ispat ettiğini düşünmüştür. Araştırmacının bunun yeterli olmadığını ve önermedeki ifadenin doğru olduğunu göstermesi gerektiğini açıklamasına rağmen öğrenci yine buna benzer yollara başvurmuştur. Öğrencide bu süreçte gözüken akıl yürütme bileşenlerinin nasıl ilerleyeceği ile ilgili yola çıkması fikir ileri sürme (1), seçtiği kenarlar ve sayısal değerler seçim yapma (3), verdiği kararların nedenlerini açıklaması (6) ve daha önce bulduğu sonuca başka bir şekilde tekrar ulaşması doğrulama/yanlışlama (5) olarak belirlenmiştir. Bununla ilgili diyalog ve öğrencinin çalışma kağıdı Şekil 4'te verilmiştir.

…

A: İlk çizdiğim noktanın AB kenarına olan uzaklığına X desek, (1,3)

Ar: Evet

A: BC kenarına olan uzaklığı da 3X olacak, çünkü ortadan çizdiğimizde, her ikisinin de 2X olması gerekiyor. Yani ortadaki noktadan 2 kenara olan uzaklığı da 2X olsun. (1,3,6)

Ar: Bir dakika tekrar söyle

A: Bir tane ortada çizdim.

Ar: BC nin ortasından mı seçtin noktayı?

A: Evet, bunun iki kenara uzaklığı eşit olduğu için, ben bir kenara olan uzaklığına 2x demek istiyorum.

Ar: Tamam

A: Çünkü cebirsel daha kolay olacak, sonra diğer kenara olan uzaklığı da 2x olacağı için, toplamı 4x olacak. (6)

Ar: Evet

A: bir tane de AB kenarına daha yakın nokta belirliyorum.

Ar: Tamam

A: Bunun da AB'ye olan uzaklığı x olacak, o zaman BC ye olan uzaklığı da 3x olmalı.

Ar: Neden

A: Çünkü toplamının 4x olması gerekiyordu, AB'ye olan uzaklığını x bulduysam, diğer kenara olan uzaklığı da 4x-x=3x olur. (6)

Ar: Tamam

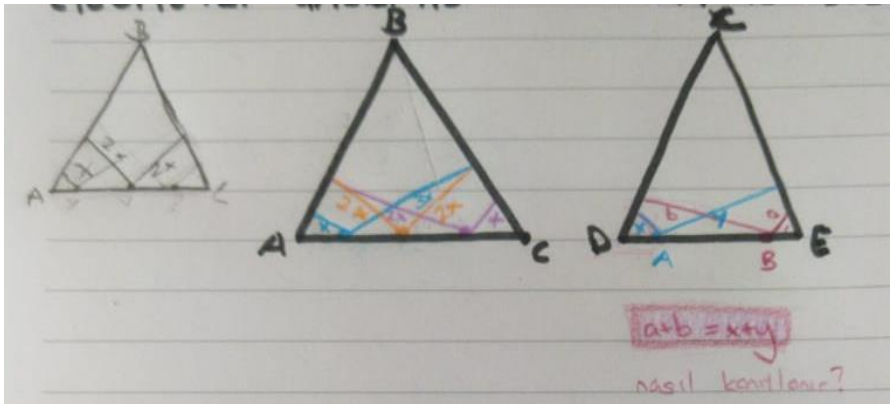
A: Sonra, bir tane daha üçüncü nokta çiziyorum, bu da BC ye daha yakın olacak, ona da x dersem, AB kenarına 3x uzaklıkta olacak.

Ar: Anladım.

A: Ben böyle düşünüyorum. (5)

Ar: Peki ama zaten bunu göstermemiz lazım değil mi? Bunun öyle olduğunu bilmiyoruz yani biz daha. Soru bize diyor ki bunun böyle olduğunu göster. Anlatabildim mi?

…



Şekil 4. Öğrencinin Problem 13'e ait çalışması

Böyle bir ispat yapmayı gerektiren soruda öğrencinin değer vererek çözüme ulaşmaya çalışması öğrencinin yine değer vermeye alışık olmasından ve bu yolu kendine göre kolay görmesindendir. Bunu yeterli görmesi, bu soru ve Problem 15, Problem 22 ve Problem 25 gibi ispat yapmayı gerektiren sorularda zorlanmasına neden olduğu ve akıl yürütme bileşenlerinin diğer sorulara göre daha az ortaya çıkmasının nedeni ise öğrencilerin bu tip açık uçlu sorularla her zaman karşılaşmaması ve aşina olmamasına dayandığı düşünülmektedir.

Bu soruların yanında ortaya koyulan becerilerin alt öğrenme alanına ve soru köküne bağlı olarak değişkenlik gösterdiği tespit edilmiştir. Ayşe "…nedir?" ile biten açık uçlu olmayan sorularda akıl yürütme becerilerine dair göstergeleri daha iyi sergilemekle birlikte ispat yapmayı, ilişki kurmayı gerektiren ve "…nasıldır?" soru kökü olan sorularda da akıl yürütebildiği sorular olmasına rağmen nispeten biraz daha zorlanmıştır. Bunun nedeni ise öğrencinin onlara okullardaki sınavlara ya da liselere giriş sınavına yönelik sorular sorulduğunu ve bu tip sorular çözmemeleri olarak düşünülebilir. Öğrenci trigonometri ve eşlik ve benzerlik konularında diğer öğrenme alanlarına göre daha zayıf kalmıştır. Çember ve daire alt öğrenme alanı da öğrencinin zorlandığı alan olarak gözükmektedir. Geometrik yüzey parçalarının alanını belirleme, temel geometrik çizimler ve çokgenlerde yer alan kavramlara biraz daha aşinadır. Ancak üçgenlere ait kavramlar ve ilişkiler hakkında fikir ileri sürme bileşeninin sıklığının fazla olması öğrencinin tek bir düşünceyle sınırlı kalmadığını ve fikirlerini çeşitlendirebildiğini göstermektedir. Dolayısıyla düşüncelerini iyi bir şekilde ifade edemediği sorular olsa da üçgenler konusu akıl yürütme becerilerinin en iyi ortaya çıktığı alt öğrenme alanı olmuştur.

Bundan sonraki paragraflarda akıl yürütme bileşenleri daha ayrıntılı incelenecektir.

4.1.1.1.Fikir İleri Sürme

Tablo 9

Fikir İleri Sürme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
25	13	18	7	0	19	25	12	14	18	22	4	6	15	6	15	25	35	12	16	14	4	18	18	4	20	15	400

Problem 5'te hiç fikir yürütememiştir. Problem 4, Problem 12, Problem 13, Problem 15, Problem 22 ve Problem 25'te ise fikir ileri sürme bileşeni çok az ortaya çıkmıştır. Üçgenler alt öğrenme alanına ait ve "nasıldır?" soru köklü Problem 18 öğrencinin fikir ileri sürme bileşenini en iyi ortaya koyduğu soru olmuştur. Bu soru incelendiğinde görülmektedir ki; öğrenci teğet kavramı hakkında matematiksel bir açıklama yapamamasına rağmen akıl yürütme yoluyla kendince mantıklı açıklamalar yapması fikir ileri sürme (1) için güzel bir örnek olduğu gözükmektedir.

…

A: Yani teğet geçmekse genellikle bu tam sıyırmak oluyor. (1)

Ar: Hmm peki başka ne olabilir teğet? Nasıl tanımlayabilirsin yani teğeti?

A: Kenarlardan geçen yani üç kenara da temas eden çember. (1)

…

A: Hocam peki sadece bir tane çember çizilebiliyor değil mi?

Ar: Teğet şekilde mi?

A: Evet.

Ar: Yani kaç çember çizilebilir üç kenara da teğet olacak şekilde?

A: Bir tane çizilebilir çünkü üç kenara da değecek. (1,6)

Ar: Evet. Doğru.

…

A: hocam kenarların hepsine temas ettirdim. Yani nasıl desem çember tam üçgenin kenarları kullanılarak çizilmiş gibi oldu. (1)

Ar: tamam anlat. Yani ilk başta nasıl bir adım attın mesela?

A: İlk başta hocam her çemberden küçük bir yay çizdim her kenardan geçen. Bir çember çizdim. (1)

Ar: Hmm yayları çizdin yani.

A: Evet sırayla yayları çizdim sonra onları birleştirdim. (1,8(a,b))

Ar: Hmm peki başka nasıl düşünebiliriz daha doğrusu soruyu ilk gördüğünde nasıl bir adım atarak başlamayı düşündün yaylar mı geldi aklına çemberin yayları?

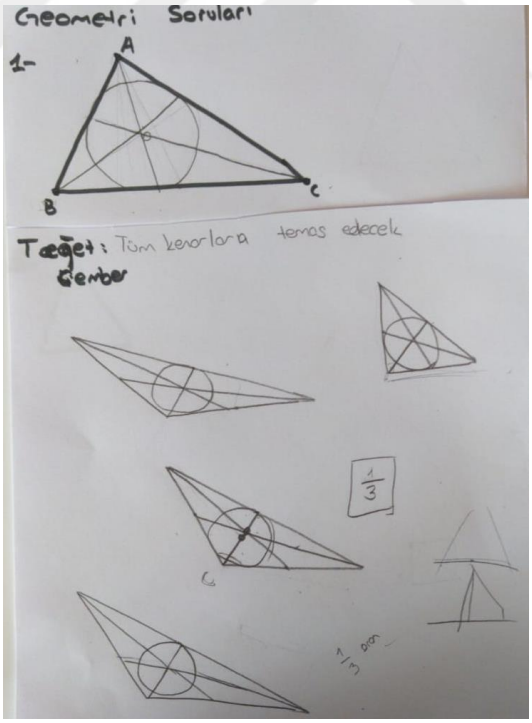
A: Hıhı. Çünkü üçe bölebiliriz. Çemberin çevresini üç tane yay oluşturacak şekilde bölebiliriz. (1,6)

Ar: Tamam.

A: O yüzden öyle denedim. Bir de hocam biraz daha büyütmeyi denediğimizde mesela olmuyor çünkü ya iki kenar ya da bir kenar daha temas etmiyor. (1,6)

…

alıntısında da görüldüğü gibi öğrencinin "sıyırmak", "üç kenara da temas eden/değecek" gibi tanımlamaları ona göre teğet kavramının sezgisel tanımını oluşturmaktadır.



Şekil 5. Öğrencinin Problem 18'e ait çalışması

Burada öğrencinin çalışmasından da görüleceği gibi iç teğet çemberi nasıl çizeceğini görmek için birçok üçgen çizmiş ve denemiştir. Bu denemeleri yapması ona yeni fikirler ileri sürmesi konusunda aracı olmuştur. Öğrenci iç teğet çemberi hakkında bir bilgisi olmasa bile teğet

kavramının onda çağrıştırdığı anlamı ile yola çıkmış ve ilerleme kaydetmiştir. Ayrıca bunu sadece soruda verilen üçgen üzerinde değil farklı üçgenler üzerinde de göstermeye çalışması genelleme yapmaya çalıştığının da bir göstergesidir.

Ayşe'nin fikir ileri sürme bileşenini en iyi gösterdiği soru tipi cevabı kesin olan, açık uçlu olmayan sorulardır. Bu tür soruların kökü "… nedir?", "… kaçtır?" ya da "… kaç derecedir?" şeklindedir. Bunun nedeni öğrencilerin çoğunlukla bu tür sorularla karşılaşıyor olmalarıdır. Öğrenciler aşina oldukları soru türlerinde akıl yürütme bileşenlerinin göstergelerini daha güçlü sergileyebilmişlerdir. Bu kategoride temel geometrik kavramlar ve çizimler, üçgenler, çokgenler, geometrik düzlem parçalarının alanını ölçme ve çember ve daire alt öğrenme alanları ile ilgili sorularla karşılaşmıştır. Aşağıda Problem 1'den alınan kesitte öğrencinin her cümlesinin bir fikir ileri sürme (1) olduğu görülmektedir.

…

A: 9 direk. Hiç saymadan da olur. (1,2)

Ar: Hmm.

A: Çizebilirim değil mi?

Ar: Çizebilirsin tabi ki.

Ar: hmm. Ne düşündün ilk problemi gördüğünde?

A: İlk önce böyle 9 tane 10 tane (şaşırıp 9 diyor) farklı ışının geldiğini düşündüm. Sonra belki bunların dışında da bazen dış açıyı bulduğumuz için bir açı vardır diye tekrardan çizdim emin olmak için. 9 tane iç 1 tane dış açı çıktı. (1,4,6)

Ar: Peki. Işının tanımını da düşünürsen eğer…

A: Sonsuz, sonsuza kadar gidiyor. (1)

Ar: Ne gidiyor sonsuza kadar?

A: Yani şu taraflara gidiyor. Yönü her zaman uzunluğu bilinmiyor kısaca. (1)

…

İlişkilendirme becerisi gerektiren sorularda ise soru kökü "nedir?", "nasıldır?" ile biten ve ispat yapmayı gerektiren sorularla karşılaştırıldığında güçlü bir şekilde fikir ileri sürememiştir. İlişki kurmayı gerektiren sorularda çokgenler, çember ve daire ve alan ölçme alt öğrenme alanlarının yanında trigonometri ile ilgili de sorular yer almaktadır. Bununla ilgili olan Problem 21'de öğrencinin trigonometri konusunda pek bilgisi olmamasına rağmen üçgen üzerinde doğru parçaları çizme ve ortaya çıkan açılardan yay ölçüsünü merak etme adımları fikir ileri sürme (1) bileşeninin izlerini gösterdiği

…

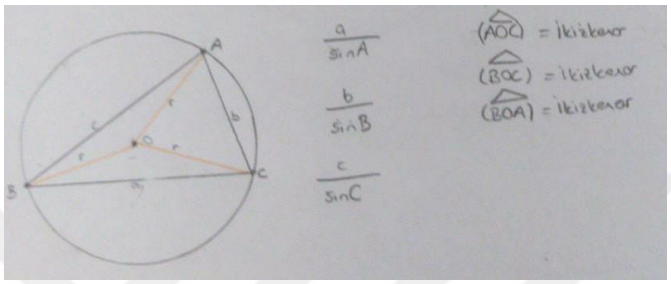
A: Hocam nedense aklıma şöyle bir şey geliyor. Bu çemberin orta noktasından her noktaya yani A noktasına B noktasına ve C noktasına sırayla doğru parçası çizmek geliyor. (1)

Ar: Çiz. Çizebilirsin kâğıtta.

A: Hocam şimdi şöyle diyeceğim ben. Bu nasıl desem bu çizdiğim çizgilerden sonra oluşan değişik açılar var yani ek olarak 3 tane hayır 6 tane daha açı oluştu. Hocam şu an acayip bi şekilde nedense BC yayının açısını öğrenmek istiyorum. (1)

…

Diyaloğunda görülmektedir.



Şekil 6. Öğrencinin Problem 21'e ait çalışması

Şekil 6'da görüldüğü gibi öğrenci soru üzerinde bir takım ek çizimler yapmıştır. Ancak bu adım öğrencinin bir sonraki adımı atmasını ya da bir sonuca ulaşmasını sağlamamıştır. Burada öğrenci trigonometri konusunda bir bilgisi olmadığı için temeli olmayan, rasgele fikirler öne sürmüştür.

İspat sorularında nispeten daha iyi olan Ayşe'nin yine de fikir ileri sürme bileşenini göstermekte zayıf olduğu yerler olmuştur. Diğer alt öğrenme alanları ile karşılaştırıldığında üçgenler konusunda genel olarak fikir ileri sürme bileşenine dair göstergelere daha sık rastlanmasına rağmen söz konusu ispat soruları olduğunda akıl yürütme bileşenlerini ortaya koymakta zorluk yaşamıştır. Aynı şekilde eşlik ve benzerlik ile çember ve daire alt öğrenme alanları da ispatta fikir ileri sürme bileşeninin izlerinin zayıf olduğu bölümlerdir. Buna örnek olarak çember ve daire alt öğrenme alanından Problem 22'nin tartışıldığı oturumdan bir kesit verilmiştir. Öğrenci bu soruda DOA üçgeninin nasıl bir üçgen olduğunu bulabilirse soruyu da çözebileceği fikrinden yola çıkmış ancak sadece görüntüden eşkenar üçgen olabileceği kanısına varmıştır. Bu düşünceler fikir ileri sürme (1) bileşeninin izlerini göstermektedir. Ancak bu noktadan sonra düşündüklerini unuttuğunu, soruda verilenleri kullanamadığını ve kendi tabiriyle "beyninin durduğunu" söylemesi bu sorunun çözümünde ilerlemesini engelleyen durumlar olmuştur.

…

A: Hocam aslında DOA üçgeni hocam belki onun nasıl bir üçgen olduğunu bulursak yapabiliriz. (1)

Ar: Az önce bulmuştun hani.

A: Ama hocam unuttum yazmayınca unutuluyor hocam.

Ar: Tamam hadi dinliyorum.

A: Hocam ben direk şekilden baktım ve DOA üçgenine eşkenar üçgen dedim. (1,4)

Ar: Niye?

A: Çünkü çok eşkenar üçgene benziyor şekilde. Ama şekiller her zaman doğru olmak zorunda değil. Yine değil. (1,6)

Ar: Evet.

A: O zaman…

Ar: Şimdi sen ben orda kaldım soruyu okurken yaptım dedin, neyi düşünmüştün orda?

A: Sonra size anlatırken unuttum. Orda hocam ben bunu şimdi eşkenar olarak aldım o zaman AD, DO ya eşittir dedim. Sonra bu DO ve EB paraleldi birbirine. BC ve AB de nasıl desem eşit, BC, AB diyormuş ben BC, CA olarak yaptım. (1,3)

Ar: Yok hayır AB ve BC.

A: Hocam işte ben BC ve CA eşittir şeklinde düşündüm. Kendimi alkışlayacağım hocam birazdan. O kadar her şey boşuna gitti hocam ya o kadar şey düşünmüştüm sonra hepsini unuttum gerçi o ayrı mesele.

Ar: Hiçbir şey boşuna gitmedi merak etme.

A: Hocam uzun bir süre boşa gidecek çünkü ben onu hatırlayana kadar bir hafta geçecek hatta ben onun varlığını bile unutacağım gibi gözüküyor.

Ar: Tamam zaten BC ile AB nin eşit olduğunu göstermemiz gerekiyor nasıl gösterirsin?

A: Şimdi eşit yani çok güzel bir bilgi eşit olduğu kesin güzel. Amaaa (düşünüyor) hocam ben hala bu DO doğru parçasının ne işe yarayacağını anlamadım.

Ar: DO, EB ye paralelmiş.

A: İşte paralellikte ne işime yarayacağını anlamadım hala.

Ar: Bir işine yarayacak mutlaka, bir dikkat et. Kullanabileceğin bir yer çıkabilir.

A: Hocam her seferinde önceki soru kolaydı diyorum sonra önüme kat ve kat daha zor bir soru çıkıyor. Hocam yani şu an gerçekten mesela daha demin sinüslü soruda en azından aklıma bir fikir geldi şimdi beynim durdu gerçekten yani tam anlamıyla durdu.

…

Diyaloğundan anlaşılacağı üzere öğrenci fikir ileri sürmeye çalışsa da düşündüklerini unutması ve verileri nasıl kullanacağını bilememesi etkili bir akıl yürütme süreci gerçekleştiremediğini göstermektedir. Bu soru da yine ispat yapmayı gerektiren bir soru olduğundan öğrenci ile gerçekleşen diyalogda öğrencinin ispat yapmayı gerektiren sorulara aşina olmadığı görülmektedir. Soruyu ilk gördüğünde zihinden ispatladığını ifade etmiş ancak bunu matematiksel olarak gösterememiştir. Düşüncelerini sıralarken sadece görüntüden yola çıkarak ilerlemesi ve bir sonuca varamaması da bu tür sorularla karşılaşmadığından zihnindekileri düzgün bir sıraya koyup ifade edememesine ve düşünme sürecinin olumsuz etkilenmesine neden olmuştur.

4.1.1.2.İddia Etme

Tablo 10
İddia Etme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
2	6	1	0	0	7	0	4	0	3	3	0	0	0	0	3	2	0	4	0	0	0	0	2	1	2	0	40

Öğrencinin göstermekte zayıf olduğu bileşenlerden birisi iddia etmedir. İddia etme bileşeninin izleri en sık "nedir?" soru köklü sorularda ortaya çıkmıştır. Problem 6 bu bileşeni en iyi gösterebildiği soru olmuştur.

…

A: O zaman ama yani bu böyle gider o zaman bir tane dik olur ama sonra Biraz daha ileri gider bu olur. (1,4)

Ar: biraz daha ileri gidince iki tane mi oluyor yani?

A: Evet yani buradan başlıyor biraz ileri gitti ilk önce burada kaldı sonra biraz daha ileri gitti buraya geldi. İki oldu. Ya hem şöyle bakınca bir tane dik hem de şöyle bakınca. (kâğıdı çeviriyor) (1,2)

Ar: Hmm anladım peki başka fikrin var mı? Başka ne şekilde düşünebiliriz?

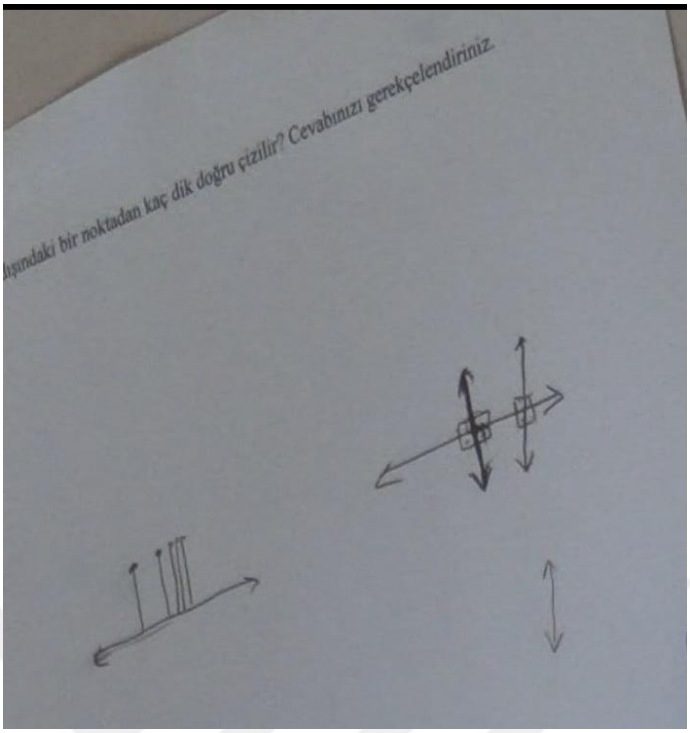
A: Imm… ama hep iki olmayacak mı oluyor.

Ar: ben cevabını hakkında bir şey demedim Başka ne şekilde düşünebiliriz nasıl yaklaşabiliriz soruya?

A: Ben şey iki taraf olduğu için yani bi tek üst tarafı kapsamıyor mesela burada bir doğruya dışındaki bir noktadan üstüne bir dik Deseydi mesela sadece bunun üst tarafı şu tarafları dik olacaktı ve altına deseydi şu tarafları dik olacaktı ama altına dese kâğıt çevirir öğrenci üstünde oldu ay altında oldu üsttü aslında. İşte o da olmuyor o zaman iki oluyor kesinlikle. Çünkü mesela biz buraya üst deriz, çevirdik alt oldu ya da buraya bu konumda üst deriz buraya çevirince alt oldu. Hiçbir zaman tek olmuyor ki. (2,4,5,6)

…

Diyaloğunda fikirlerinde ısrarcı olması ve hemen vazgeçmemesi, iddia etme bileşeninin göstergelerini yansıtmıştır.



Şekil 7. Öğrencinin Problem 6'ya dair çalışması

Şekil 7'ye göre öğrenci bir doğruya dışındaki bir noktadan kaç dik doğru çizilebileceğini görmek için birkaç deneme yapmıştır. Çeşitli doğrular çizerek sonuca ulaşmaya çalışmış ancak bu karışıklığa sebep olmuş bir dik doğru ya da iki dik doğru arasında kalmıştır. Yine de iki doğru olması gerektiğinde karar kılmış ve bunda ısrarcı olmuştur.

Diğer alt öğrenme alanlarında bu bileşeni gösterebildiği ve gösteremediği yerler olmuştur. İspat gerektiren soruların çoğunda iddia etme bileşeni görülmemesine rağmen üçgenler alt öğrenme alanı ile ilgili olan Problem 2'de iyi bir performans göstermiştir. Bu soruda öğrencinin bir dik üçgende kenarortay doğrusunun dik açıyı ikiye bölmesi gerektiği üzerindeki iddiası

…

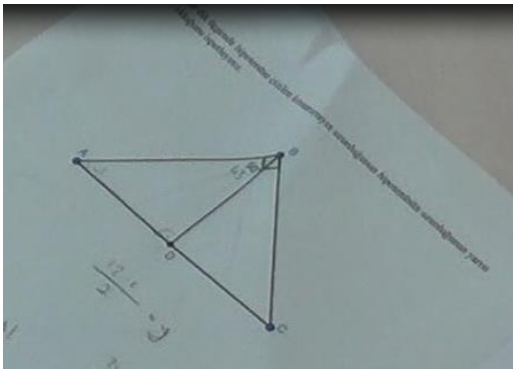
A: Bu 90 dereceydi (Tepe açısından bahsediyor). Biz kenarortayı çizdik. Bu açı 45 derece olacak, burası da 45 derece olacak. (Kenarortayın açıyı ikiye böldüğünü düşünüyor) (1,4)

Ar: Hmm.

A: Burası 90 olacak çünkü dik olduğu için. (kenarortayın dik indiğini düşünüyor). Burası da 45 olmak zorunda. (Geriye kalan A açısından bahsediyor) (2,4,6)

…

Diyaloğunda yer almaktadır.



Şekil 8. Öğrencinin Problem 2'ye ait çalışması

Şekil 8'de görüldüğü gibi öğrenci B noktasından [AC] kenarı üzerine [BD] doğru parçasını çizmiş ve oluşan BDA açısının 90° olduğunu düşünmesi ve bundan ısrarcı bir şekilde emin olması iddia etme (2) bileşeninin izi olduğunu göstermektedir. Öğrencinin böyle düşünmesinin nedeni kenarortay doğrusunun kenar uzunlukları eşit olacak şekilde iki parçaya ayırdığı gibi açıyı da iki eşit parçaya böleceğinden emin olmasındandır.

Soru kökü "nasıldır?" şeklinde ve bir çokgen sorusu olan Problem 19 ise iddia etme bileşeninin izlerinin görüldüğü başka bir sorudur.

…

A: Kare kesin olur. Paralelkenarda açıortay yaparsak yani aynı noktada kesişiyor ama açıortayları birleşmiyor karedeki gibi. (2,3)

Ar: Anladım aynı noktada kesişmiyorlar diyorsun.

A: Kesişince açıortaylar birleşmiyor.

Ar: Hıhı anladım.

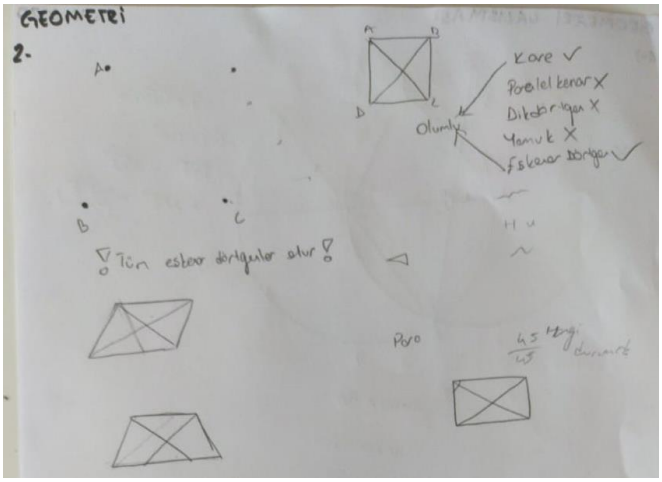
A: Kenara denk geliyor o zaman da işte olmaz. Dikdörtgende yaparsak dikdörtgende de yine 45 e 45 olmayacak yani 45 e 45 oran dışında her bir şekilde açıları alabilir. Çünkü dikdörtgen hani kare değil. O zaman hangi durumda demiş. Bence karede olacak. (1,2,6)

Ar: Sadece karemi olmalı yani bu şekil?

A: Evet. (2)

…

Diyaloğunda öğrencinin soruda sorulan geometrik şeklin kare olduğunun üzerinde ısrarla durması ve "kesin" gibi net ifadelerle bu durumu gerekçelendirmesi iddia etme bileşeninin göstergeleri olmaktadır.



Şekil 9. Öğrencinin Problem 19'a ait çalışması

Ayrıca Şekil 9'da öğrencinin çalışmasından da anlaşılacağı gibi öğrenci bu iddialarını deneme yanılma yoluyla ortaya atmıştır. Öğrenci bildiği dörtgenleri ve bunların iç açıortaylarını çizerek soruda belirtilen durumun hangisinde sağlandığını belirlemeye çalışmıştır.

Örneğin; ilk düşündüğü haliyle dikdörtgen, paralelkenarda ve yamukta da durumun sağlandığını ifade etmiş ancak çizim aracılığıyla ayrıntılı incelediğinde bu dörtgenlerin köşegenlerinin iç açıortay oluşturmadığını görmüştür. Dolayısıyla bu dörtgenin kare olduğuna emin olmuştur.

4.1.1.3.Seçim Yapma

Tablo 11
Seçim Yapma Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
17	4	7	3	0	2	6	4	2	1	2	0	3	4	2	6	10	5	7	2	1	1	1	2	0	3	2	97

Öğrencinin iddia etme bileşeninden sonraki gösterdiği en zayıf bileşen seçim yapma bileşenidir. İlişki kurmayı gerektiren ve açık uçlu olmayan "…nedir?" sorularında seçim yapma bileşeninin izlerine rastlanmışken ispat yapmayı gerektiren ve "…nasıldır?" şeklinde sonlanan sorularda bu bileşenin izlerinin görülmediği durumlar olmuştur. Soru kökü "…nedir?" olan Problem 1'in tartışıldığı oturumdan alınan aşağıdaki

…

A: Mesela işte bunlar benim yaptığım gibi dağınık olmazlarsa mesela böyle olsa iki tane açı sonra üç dört beş burada olsa diğeri de bu şekilde olsa işte burada da bir böyle beş tane olsa acaba dik açıları da falan katar mı ama o zaman aynı sonuç olur. (1,3,5,8(a,b))

Ar: Belki ışın sayısını azaltarak falan bir şeyler bulabilirsin, mümkün mü öyle bir şey? İşini kolaylaştırmak için yani 10 ışınla uğraşmazsın da atıyorum 5 ışınla uğraşırsın gibi.

A: Ben 6 tane diye düşündüm. 6 tane olsa bu şey örüntüyü bir deneyeceğim (daha önce yazdığı 8e 2 7 ye 3 örüntüsünden bahsediyor). 6 ya 1 gelecek 5 e 2 gelecek 3 e 3 gelecek, 2 ye 4 gelecek 1 e 5 gelecek. 4 ü yazmayı unuttum sanki. 6 ya 1, 5e 2. Orda biz 10 a 1 yapmadık böyle yaptık böyle yaptık yani 10a 1 olsaydı ama burada yine 4 e 3, 2 ye 5, 1e 6. Ama sayı mesela bir milyon olsa bir milyondan geriye teker teker teker teker yazacağım. O zaman olmaz. Böyle hesaplamak da çok mantıksız oldu. Uç noktası ortak sonuç olarak aynı noktadan (soruyu tekrar düşünüyor) (1,3,4,8(a,b))

…

Diyaloğunda öğrencinin seçimlerini nasıl yaptığının bir örneği verilmiştir. Burada iki açıyla başlaması ve sırayla arttırması bir seçim yapmadır (3). Daha sonra altı ışınla başlamak istemesi ve buradan devam etmesi yine seçim yapma (3) bileşeninin bir göstergesidir. Burada öğrenci

tamamen rastgele hareket etmiştir. Soruyu okuduktan sonra sorudaki saymadan yapınız ifadesine dikkat etmeksizin on ışını da çizerek ilerlemeyi düşünmüş ve çözüm sürecinin nasıl olacağı yönünde bir kanısı olmadığından araştırmacı daha az ışınla başlaması için tavsiyede bulunduktan sonra ilerleme kaydetmiştir.

Eşlik ve benzerlik alt öğrenme alanına ait soruların birinde seçim yapma bileşeni görülmüştür. Trigonometri konusuna ait olan Problem 21'de seçim yapma bileşenine rastlanmışken Problem 5'te bu bileşen görülmemiştir. Problem 21'de seçim yapma bileşeninin görüldüğü tek yer aşağıdaki diyalogda verilmiştir. Soruya açılardan yaklaşması, açılara ve yay ölçülerine rasgele değer vererek ilerlemesi seçim yapma (3) bileşeninin izlerini göstermektedir.

…

Ar: Soru açıyla mı ilişkili? Öyle mi olduğunu düşünüyorsun yani?

A: Belki açılardan yola çıkarım yani mesela atıyorum bu merkezden çektiğimiz noktayla A, merkeze O desek AOB açısı atıyorum kaç derece olsun 160 derece olsa, yay açısı 160 derece olacak. Mesela yaya da rasgele bir değer versek 4x olsa, x 40 olur. O zamana diğer açılarla da bağlantı kurarız. 2pir de çevresiydi. Buradan pi yi direk 3 alırsak, sonra yarıçapı da o şekilde bulabiliriz çevreyi bölerek. Yani çevreyi 6 ya böleriz sonra r yarıçapını buluruz. O şekilde olabilir gibi geliyor aklıma. (1,3,4,8(a,b))

…

Bu diyalogda yine görülmektedir ki; soruda sayısal bir değer istenmemesine rağmen öğrenci sayısal değerler vererek yarıçap uzunluğunu bulma yoluna gitmiştir. Öğrencinin her fırsatta ifade ettiği gibi onlara verilen sorularda sayısal değer görmeye alışkın olduklarından aynı zamanda kendilerini sorunun cevabı olarak bir sayı bulmaya koşullandıklarından dolayı böyle bir seçimde bulunduğu söylenebilir.

Ayrıca üçgenler alt öğrenme alanından ise sadece Problem 12'de bu bileşene sahip olduğuna dair bir iz gözükmemektedir. Burada öğrenci mantıklı bir düşünme sürecinde bulunmamış rastgele tahminler ortaya atmaya çalışmıştır. Bununla ilgili diyalog aşağıda verilmiştir.

…

Ar: Nasıl vardın? Yani son adımdan ADE üçgeninin ikizkenar olduğunu anlayabiliyor muyuz?

A: Son adımdan değil de öncekilerden de anlarız.

Ar: Ama sonunda da varmış olmamız lazım değil mi sonuca?

A: O zaman AE=AD. Sallarken doğru çıkarıyorum şanslıyım. (1,4)

Ar: Salladın mı?

A: Evet.

Ar: Niye?

A: Dürüstüm ben. Çünkü aklımdan bir tek bu geçiyordu. Gerçekten.

Ar: Şimdi amacımız ADE üçgeninin ikizkenar olduğunu bulmak ya.

A: Evet.

Ar: Son adım olarak dolayısıyla onunla alakalı bir şey yazmamız gerekir değil mi?

A: Evet. Hocam bugün o kadar çok şey yaşadım ki, bence bunları düşünmek bana biraz zor geliyor şu an.

…

Çok az gözlemlendiği durumlar olsa da diğer soruların tamamında seçim yapma bileşeninin gözüktüğü aşikardır.

4.1.1.4.Çıkarım Yapma

Tablo 12
Çıkarım Yapma Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
21	18	13	6	0	12	15	21	24	10	15	10	3	9	3	8	16	9	4	7	4	2	7	12	3	8	11	271

Ayşe'nin fikir ileri sürmeden sonra en çok ortaya koyduğu bileşen çıkarım yapma bileşenidir. Öğrencinin akıl yürütmesinde sadece Problem 5'te çıkarım yapma bileşenine dair bulguya rastlanmamıştır. Bu soru daha önce de değinilen bir trigonometri sorusudur. Bunun yanında ilişki kurmayı gerektiren ve yine bir trigonometri sorusu olan Problem 21'de bu bileşeni gösterebildiği durumlar mevcuttur. Bu soruda yaptığı çıkarımla ilgili olarak

…

A: Belki açılardan yola çıkarım yani mesela atıyorum bu merkezden çektiğimiz noktayla A, merkeze O desek AOB açısı atıyorum kaç derece olsun 160 derece olsa, yay açısı 160 derece olacak. Mesela yaya da rasgele bir değer versek 4x olsa, x 40 olur. O zamana diğer açılarla da bağlantı kurarız. 2pir de çevresiydi. Buradan pi yi direk 3 alırsak, sonra yarıçapı da o şekilde bulabiliriz çevreyi bölerek. Yani çevreyi 6 ya böleriz sonra r yarıçapını buluruz. O şekilde olabilir gibi geliyor aklıma. (1,3,4,8(a,b))

…

Diyaloğunda öğrencinin açılardan yola çıkıp neden-sonuç ilişkisi kurarak açılara değer verip yay ölçülerine ve oradan çemberin çevresiyle ilişki kurup yarıçap uzunluğuna ulaşması çıkarım yapma (4) bileşeninin göstergesi olarak değerlendirilmektedir. Yine bir trigonometri sorusu olan Problem 5'te herhangi bir akıl yürütme becerisi gösteremezken, Problem 21'de akıl yürütme bileşenlerinin göstergelerine rastlanmasının nedeni olarak öğrencinin Problem 21'de bulunan şekilden yola çıkması gösterilebilir. Öğrenci üçgen ve yarıçap uzunluklarını kullanıp merkez açılardan fikir yürütmüş ve çıkarım yapma bileşeninin izlerini sergilemiştir.

Soru kökü "…nedir?" biçiminde olan açık uçlu olmayan sorularda çıkarım yapma bileşenini daha iyi gösterebilmiştir. Bu kategoride sadece içeriğinde çokgenlerin yer aldığı Problem 26'da çıkarım yapma bileşeni diğer sorulara göre daha zayıf gözükmektedir. Aşağıda bu sorunun tartışıldığı oturumdan bir kesit verilmiştir. Burada da görüldüğü gibi öğrencinin çıkarımları matematiksel nedenler ile desteklenmemekte ve belli belirsiz görülmektedir.

…

A: Mesela o şekilde bakarsak atıyorum biz bunu 13 gen olarak alsak çünkü böyle resme bakınca hiç on iki gen olabilecek gibi gözükmüyor. Çünkü G den aşağı doğru yani şu yönde bir tane çizgi çekse o zaman o çizgi AB ye paralel olmayacağı buradan basit bir şekilde gözüküyor. Onun için ben buna en yakın 13 gen olarak hesaba alsam mesela. (1,3,4,6)

Ar: Ama bilmiyoruz ki kaç gen olduğunu. Nasıl hesaplayabiliriz alfa bölü betayı belki 25gen?

A: Ama hocam 25gen olabilmesi için birbirinden çook çook çook uzaklaşması gerekmez mi burda birbirine gittikçe yaklaşıyor yani ortada bir tane kenarlar yaklaşmaya başlamış artık öyle diyeyim. (1,2,6)

Ar: Sen neye uzaklaşıyor ya da yakınlaşıyor diyorsun onu anlamadım ben galiba?

A: Hocam bu noktası A olan bir tane ışınımız olsa ve bu aşağı yöne doğru giden nokta nokta çizgili olan şey de kenar doğrultusunda gitse bu çokgenimizi tamamlamak için gidiyor artık yani dönecek falan ne yapacak artık o tarafa kaç gen olduğuna bağlı. Yine aynı şekilde G yi de köşe noktası alarak bir tane ışın çeksek o nokta nokta nokta olan kenarda ve bunu da çokgeni şey yapmaya yönelik olsa mesela bunun kesişmesi birbirine daha olası. Çünkü yaklaşmaya başlamış artık yani bu resimde de mesela yaklaşmaya başlamış birbirine artık. Uzaklaşmıyor. Atıyorum baya büyük bir şey olsa 111gen olsa ya da 121gen falan olsa o zaman bu kadar kenar gösterip yaklaşması olmazdı. Daha da büyücek ve daha da kenara gidecek. (1,4,6)

…

Bu diyalogda öğrenci okulda öğrenmiş olduğu formülü hatırlamaya odaklandığından farklı fikirler öne sürmekte zorlanmıştır. Sadece rasgele tahminler yapmış ve bunlar üzerinden ilerlemeye çalışmıştır.

Üçgenler öğrenme alanında ispat gerektiren ve "…nasıldır?" soru köklü sorularda, "…nedir?" soru köklü ve ilişki içeren sorulara göre bu bileşen nispeten daha zayıf görülmüştür. Örneğin aşağıda bir ispat sorusu olan Problem 13 hakkında bir diyalog verilmiştir. Öğrenci zorlandığı bu soruda akıl yürütmeye çalışırken sadece üç yerde çıkarım yapabilmiştir. Burada öğrencinin x birim uzunluğu [AC] doğru parçasının uzunluğunu temsil etmesi, bulduğu x birim uzunluğun kenarlardan köşelere olan uzaklığa eşit olduğu sonucuna varması ve kendi çizdiği farklı üçgende uzaklıkların değişebileceği ve kesin bir sonuca ulaşamayacağını düşünmesi çıkarım yapma (4) bileşeninin göstergesini ifade etmektedir.

…

A: hocam, bu başta ortadan çizdiğimiz ikinci noktanın B'ye olan uzaklığı, yani ben B'ye olan uzaklığı x yaptım. Yani AC çizgisinin çeyreğini ifade etti. Bunun için aralığın toplamının çeyreği onun en yakın olduğu kenara olan uzaklığı olabilir. (1,4)

Ar: Uzaklığı nasıl ifade ettin?

A: Turuncu çizgiye 2x dedim. Bu turuncuyla A noktasının ortasında, onun için bu çizginin ¼ olacak. Bu ikisinin toplamı da 4x idi. 4x olduğu için şuradaki nokta çeyreği olduğu için 4'e böldüm x çıktı. Yani şuradaki küçük çizginin AB'ye olan uzaklığını x buldum. 4x'e tamamlamak için de 4x'den çıkarmam gerekiyordu. O yüzden bu da 3x oldu. Ama mesela bunu daha yakın yapsaydım. Yarısı değil de 1/3 şeklinde yapsaydım. 1/6 olacaktı. O zaman 4x/6 yapardı. Sonra bulduğum her paydayı 3 ile çarpmam gerekirdi. Çünkü B'ye daha yakın. Sonra bunu bulurdum yine. (1,3,5,8(a,b))

Ar: Anladım, devam ediyor musun?

A: Hocam, en çok bu çıktı benden matematiksel olarak.

…

A: Bulduğumuz x uzunluğu ve en yakın kenarların en yakın köşelere uzunluğu eşit oldu. Ama başka şekilde çizersek eşkenar da olabilir. Onun için bunu kullandım. (1,4)

Ar: Evet, başka bir şekilde çiz. Sen kendi çizdiğin üçgenin üzerinde mi denemiştin.

A: ben farklı bir üçgen çizmiştim ama nasıl desem uzaklığını hesaplıyoruz. Ben belki yüksekten de uzaklık çizerim belki o zaman değişecek, alttan da uzaklık çizeceğim o zaman da değişecek. Tam kesinlikle belirtemeyeceğimden dolayı, normalde kullanırdım ama bu da girince devreye olmuyor. (4)

Ar: Tamam başka türlü düşün o zaman, uzaklıktan kastımız nedir? Nasıl bir uzaklık çiziyorsun. Tabandan alınan nokta için kenarlara. Dik uzaklık çiziyorsun değil mi?

A: evet

Ar: Hah tamam, uzaklığın dik olması lazım çünkü orada üçgende çeşitli bağlantılar belirleyebilir misin acaba?

A: Hocam hiç yapabilecekmişim gibi gelmiyor.

Ar: Niye?

A: Çünkü biraz zorladı, ilk başta zor değildi, bir de bu açıdan düşününce zorladı.

Ar: Anladım. Biraz daha düşünmek ister misin üzerinde?

A: Yok hocam bulamadım.

…

Öğrenci sorunun çözümünü matematiksel olarak açıkladığını ifade etmiş ancak ispat yapması gerekirken değer verme yoluyla soruda verilen önermenin sağlamasını yapmıştır. Bu yüzden de başka bir yol daha bulamamış ve zorlandığını söylemiştir.

İspat yapmayı gerektiren soruların bazılarında iyi performans sergilerken bazılarında çıkarım yapma bileşeninin göstergeleri zayıf kalmıştır. Çember ve daire öğrenme alanından ilişki kurmayı gerektiren ve "…nedir?" soru köküne ait Problem 8 ve Problem 17'de çıkarım yapma bileşeni daha barizken ispat gerektiren soru türlerinde belli belirsiz görülmüştür. Aşağıda ilişkilendirme gerektiren Problem 8'de gerçekleşen

…

Ar: Tamam. Acaba eşit olduğu bir durum yok mudur Peki şimdi sen P yi yukarıya doğru taşıdın, gördün ki büyük kalıyor.

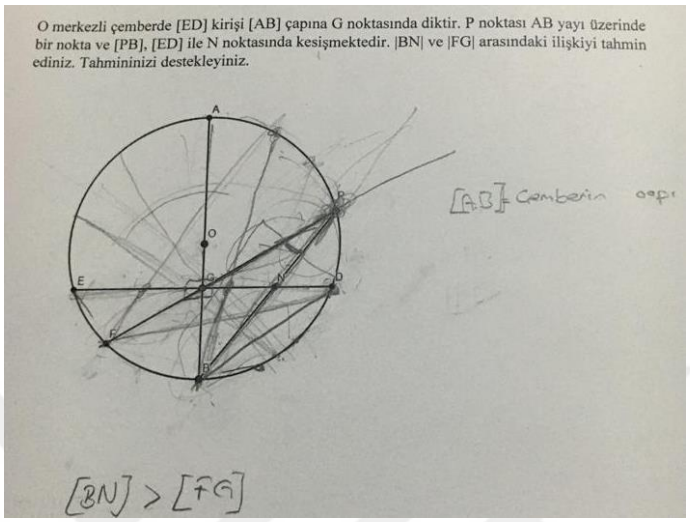
A: Eşit olması için paralel olması gerekir. Aynı noktadan çıkıyorlar. (2,4,6)

Ar: Hmm paralellikte mi eşitlik vardır?

A: Evet. Bir de bu. Bu bunu dik kesiyor. Bu bunu dik kesmeseydi, şöyle kesseydi, belki o zaman boyları bir şekilde aynı olurdu. Ama bu bunu dik kesiyor. Yani şuradaki açı dik, şu açı da dik, şurada dik açılar var. Onun için. Dik kesmeseydi ama olabilirdi. Ama dik kesiyor. (4,7)

…

diyaloğunda öğrencinin eşitliği paralellik şartına dayandırması ve sonrasında diklik du"rumlarına göre sonuçlara varması çıkarım yapma (4) bileşeninin izlerini ortaya koymaktadır.



Şekil 10. Öğrencinin Problem 8'e ait çalışması

Öğrencinin burada $|BN|$ uzunluğunun $|FG|$ uzunluğuna eşit olması için bu iki doğru parçasının birbirine paralel olması gerektiği düşüncesi mevcuttur. Bunu da [AB] çapının [ED] kirişine dik olarak G noktasında kestiğine bağlamaktadır. Dik olmayacak şekilde kesseydi paralellik şartını sağlayabilir ve bu uzunluklar eşit olabilirdi. Öğrencinin bu ifadeleri tamamen doğru olmasa da ona göre mantıklıdır.

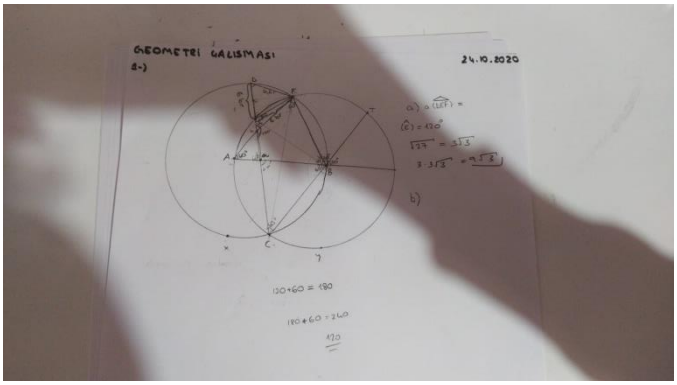
Problem 17'nin tartışıldığı oturumdan alınan

…

A: İlk önce daha demin demiştim bu işte eğer eşkenar olursa ama görünüşe aldanırsak ikizkenar olur diye ama şöyle bir şey düşündüm. C noktasından geçen bir doğru çemberleri D ve E noktasında kesiyor yani D ve E noktasından çıkıp C ye değmiyor. C nin üzerinden D ve E ye gidiyor. Bu demek oluyor ki C sağa doğru hareket ederse bu sefer EF yayı küçülecek. EF yayının uzunluğu küçülecek. E doğal olarak DE uzunluğu da küçülecek. Çünkü gitgide küçülmeye başlıyor. Daralıyor açıları. Sola doğru giderse bu sefer ikisi de büyüyecek. O zaman kesinlikle DE ve EF nin 6 birim olduğunu kanıtlayabilirim. Bi keresinde kullanmıştık geçen hafta şey demiştik bir tane üçgenin herhangi bir noktadan iki kenara uzaklığı her zaman eşitti hangi tarafa giderse gitsin. Yani iki tarafa uzaklığı toplanınca eşit oluyordu. Onun gbi yaparsak o zaman 6 birim oluyor yine bu EF. EF kenarının uzunluğu 6 birim oluyor. Şimdilik ikizkenarı bulduk ama zaten bu iki tane kenarı da eşit ve DF yayının uzunluğu ile EF yayının uzunluğunun da aynı olduğunu düşünmüştüm çünkü bu katlanırsa eğer yani nasıl desem biraz daha yukarı doğru dönerse ve üste çıkarsa o zaman tam katlanır diye düşünmüştüm. O zaman burası da 6 birim oluyor. Bu şekilde bakarsak alanı 18 birim kare oluyor. (1,4,6,7,8(a,b,c))

…

Diyaloğunda da öğrencinin neden-sonuç ilişkisiyle birbirine bağladığı sonuçların çıkarım yapma (4) bileşenine ait olduğu açıkça görülmektedir.



Şekil 11. Öğrencinin Problem 17'ye ait çalışması

4.1.1.5.Doğrulama/yanlışlama

Tablo 13
Doğrulama/yanlışlama Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
6	1	4	1	0	3	2	2	1	2	3	1	2	0	0	0	3	2	0	0	0	0	0	1	2	1	0	37

Öğrencinin çalışmalarında en az görülen bileşen doğrulama/yanlışlama bileşenidir. Trigonometri ile ilgili sorularda hiçbir göstergeye rastlanmamıştır. Bu bileşenin izleri üçgenler sorularında toplam olarak daha çok sayıda ortaya çıksa da soru bazlı bakıldığında temel geometrik kavramlar ve çizimler ile ilgili sorularda daha ileri seviyede olduğuna dair göstergeler mevcuttur. Ayşe diğer bileşenlerle benzer olarak yine Problem 1 gibi açık uçlu olmayan "…nedir?" ile biten sorularda doğrulama/yanlışlama bileşenini daha iyi gösterebilmiştir. Problem 1'de ortaya çıkan

…

Ar: Buldun mu aradaki örüntüyü?

A: Hep önceki gidiyor. Ama 10 a uyarladığımızda mesela burda 6 tane şeyde 16 çıktı 7 tanede şöyle bi yazsam 6 artacak şimdi 22. 29. 37. 46. (sayarak 56 bulduğu için bu adımlarda yanlışlık olduğunu düşünüyor). O zaman bunda bir yanlışlık var tekrar yapacağım. O zaman olmuyor. (Önceki işleme dönüyor) o zaman ya burda bir tane şey var. Ya da burda (örüntü bulduğu). (3,4,5)

…

Ar: Bunlar arasında ilişki kurmayı dene.

A: Tam bir şey olacak işte böyle böyle gidecek diyeceğiz. Burda 2, 3, 4 şeklinde gidiyor, +1, +1, +1 gidiyor. (Düşünüyor baya) (4)

Ar: Ama buldun nasıl yapacağını.

A: Hmm anladım.

Ar: Sadece örüntüyü mü bulamadık.

A: Evet. Bu örüntüyü çıkartamadım. (Düşündükten sonra) Şöyle yapacağım ilk önce aklıma şöyle geldi. 2 katına çıkmış, 4 katına çıkmış diyeceğim ama burda 2 katına çıkıyor, burda 4 katının 1 fazlası yapıyor. Sürekli bir şey bozuyor örüntümü. (1,3,4,5)

…

Diyaloğunda öğrencinin yaptığı işlemlerde bir yanlışlık olduğunu fark ederek dile getirmiş olması yanlışlama (5) bileşeninin göstergesinin varlığını belirtmektedir. Burada öğrencinin yaptıklarının yanlış olduğunu düşünmesinin nedeni örüntü kuralının ne olduğunu bulamamasıdır. İlişki kurduğu nesneler arasında bir önceki bulduğu kural bir sonrakiyle genellikle uyuşmadığından bulduklarını yanlışlama (5) yoluna gitmiştir.

Buna karşılık "…nasıldır?" soru köklü sorularda bu bileşenin göstergeleri daha az görülmüştür ve sadece üçgenlerle ilgili olan Problem 18'de bu bileşenin izlerini yansıtmıştır. Bu soruda doğrulama bileşeninin göstergelerini iki farklı yapıda göstermiştir. Verilen kesitte görüleceği gibi ilk olarak önceki söylediğini teyit edecek şekilde ek açıklamalarla doğrulama yaptığını gösterip, ikinci olarak ise araştırmacının sorusuna binaen sonucun doğruluğunun başka durumlarda da geçerli olduğunu açıklayarak doğrulama (5) bileşeninin varlığını göstermiştir.

…

Ar: Niye dik kesmesi gerekiyor bu kenarları? Niye öyle düşündün? Yani nasıl bilebiliriz onların kesişim noktasının çemberin merkezi olacağını?

A: Hocam aslında şey olabilir tam dik kesmek değil de ortadan ikiye ayırsa. (1)

Ar: Kenarları mı?

A: Evet kenarları ikiye ayırsa o zaman olabilir çünkü dik kesince böyle deneyince olmuyor. (1,6)

Ar: Hmm denedin mi?

A: Evet hocam dik kestiğinde BC de A yani dik kesmeye çalıştığında B ye daha yakın oluyor. C AB yi dik kestiğinde A ya daha yakın oluyor. Sonra B kestiğinde bu sefer de A ya daha yakın oluyor. Yani ortada nasıl desem bir nokta olmuyor ya da o noktadan geçebilecek bir çember olmuyor. (4,5,6,7)

Ar: Peki kenarları ortadan ikiye böldüğünde nasıl oluyor?

A: Kenarları ortadan ikiye böldüğümüzde yine bu ortada kesişen nokta çemberin merkezi olabiliyor. (1,4)

Ar: Hmm peki böyle bir üçgen üzerinde değil de daha farklı bir üçgen çizersek eğer illa bu tipte bir üçgen olmak zorunda değil. Farklı üçgenler üzerinde denersen nasıl oluyor? İstediğin sonucu elde edebiliyor musun? Bir de ona bak bakalım. Bir sürü üçgen modeli olabilir değil mi?

A: Evet. O zaman da olur hocam mesela şimdi ikizkenarda denedim oldu. Eşkenarda da denedim onda da oldu. Yani. (3,5)

…

İlişki kurulması gereken sorularda da çok iyi olmamasına rağmen trigonometri ile ilgili olan Problem 21 dışında diğer sorularda doğrulama/yanlışlama bileşeninin varlığı görülmektedir. İlişki kurmayı gerektiren Problem 4'ün tartışıldığı oturumda öğrencinin yaptıklarının yanlış olmasını düşünmesi yanlışlama (5) bileşenine dair bir kanıt oluşturmuştur.

…

A: O zaman şöyle yapalım A diyelim. Eşittir A parantez içi AED üçgeni. Yani şu şuna eşit. O zaman mesela şu da… Hayır, yanlış yaptım. Kafam karıştı. O yanlış oldu. (5)

…

Bu diyaloğa göre öğrencinin yanlışlama (5) yapmasının nedeni kafasının karışmasından kaynaklanmaktadır. İki paralelkenarın kesişim bölgesinde kalmayan alanlar arasında bir ilişki bulmaya çalışmış ve aslında bu alanlar arasında eşitlik yakalamayı amaçlamıştır. Ancak sağlam bir temele oturtamadığından kafa karışıklığı yaşamıştır.

Yine ilişki kurmayı gerektiren bir soru olan Problem 8'den alınan aşağıdaki diyalogda ise yaptığının yanlış olduğunu gerekçeleriyle birlikte açıklaması yanlışlama (5) bileşeninin izlerini göstermiştir.

…

Ar: Başta neden büyüktür dedin?

A: Başta büyüktür dedim. Çünkü böyle bakınca bu bundan uzundur gibi görünüyor. Ama sonra aa bu böyle dönse dönse aa aynı yere geliyor. Ama şimdi kararımı tekrar değiştiriyorum çünkü yanlış ettim. Aslında bu daha demin dediğim gibi tam ortası yani O noktasından geçseydi olacaktı. Yani mesela şu, şu tarafta olsaydı şu kadarlık bir bölüm, bir de şöyle olsaydı onların boyunu sorsaydı o zaman bulurdum. Ama bu tamamen AB arasındaki yeri bilinmeyen bir noktadan çıkan böyle noktanın üzerinden geçen bir doğru parçasının bir kenarı ve GD arasındaki noktası tamamen bilinmeyen bir N noktasından çıkan ve aynı noktada kesişmeyen iki tane doğru parçasının boyunu soruyor. O zaman kesinlikle eşit olmayacak o kesin. Tabi cetvel olsa daha kolay eşit olabilir ölçerdik. BN büyüktür FG. (1,2,3,4,5,6)

…

İspat gerektiren sorularda diğer soru türleri ile kıyaslandığında doğrulama/yanlışlama bileşeninin nispeten daha sık gözlemlendiği söylenebilir. Buna rağmen Problem 10 gibi bazı üçgen sorularında bu bileşene dair izler mevcutken; Problem 15 gibi bazı üçgen sorularında değildir. Aşağıda doğrulama bileşeninin izlerinin görüldüğü Problem 10'da gerçekleşen diyalogda bulduğu sonucu başka yollarla da teyit etmeye çalışması doğrulama (5) yaptığını göstermektedir.

…

A: Şöyle. Şimdi bu bir açıortay. Bunun uzunluğu mesela 5 cm olsun. Şimdi bu şu kenardan çıktı şuradaki köşeden çıktı. Bizim bunu bölmemiz gerekiyor. O yüzden böyle hop bir doğru parçası çizdik. Hatta biraz daha uzatayım. Sonra diyor ki bi tane daha bizim açıortayımız var, bu açıortayın uzunluğu da 5 cm diyor. O zaman bunu kesen açıortay da 5 cm yani aynı sürede varacaklar aynı uzunlukta varacaklar yine. Bunu da aynı uzunlukta varacaklar o zaman ikizkenardır. (1,4,5)

Ar: Nereye varıyorlar aynı uzunlukta?

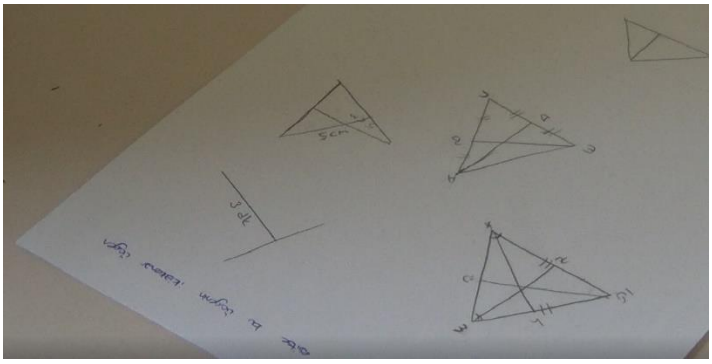
A: Diğer kenara, üçgenin diğer kenarına. Yani bu işte buna varırken işte atıyorum 3 dk harcadıysa ama bu sadece verisel, çünkü hiçbir zaman doğrular birbirine yetişmekte dk kullanmıyorlar galiba. (1)

Ar: Doğrular birbirine mi koşuyorlar?

A: İşte bu nasıl desem canlandırma gibi. Şimdi bu 3 dk önce yetişti buna. Buradan da bir tane şey çıktı, bu da 3 dk da şuradakine anca yetişti. O zaman bununla bunun uzunlukları aynı oldu. o zaman ikizkenar oldu. (1,3,4,5)

…

Burada bahsedilenler ile ilgili öğrencinin çalışması Şekil 12'de verilmiştir.



Şekil 12. Öğrencinin Problem 10'a ait çalışması

Çember ve daire ile ilgili sorulardan ispat yapmayı gerektiren sorularda bu bileşenin göstergeleri mevcut değildir. Eşlik ve benzerlik ile ilgili sorulardan "…nasıldır?" köklü sorularda doğrulama/yanlışlama bileşeni gözükmemesine rağmen ispat yapmayı gerektiren sorularda bu bileşen gözükmektedir. Aşağıda Problem 25'te ortaya çıkan diyalogdan anlaşılacağı üzere öğrencinin yaptığı ispatı başka bir yolla daha göstermesi doğrulama (5) bileşenine ait bir göstergedir.

…

Ar: Olabilir belki neden olmasın ama bunu mesela sen belli bir açıda döndürülmüş şekli diyorsun değil mi?

A: Hıhı.

Ar: Peki başka ne şekilde yapabiliriz bunu işleme dökebilir miyiz mesela? Ya da başka bir yolla düşünebilir miyiz? Az önceki fikrin güzeldi.

A: Hocam aslında şöyle olabilir mi, burda küçük bir kenarda ABD üçgeni var bir tane. Bir de ACE üçgeni var. (1)

Ar: Evet.

A: Burda küçük bir tane nokta var bu AC ile DE nin kesiştiği, hocam mesela oraya Z noktası dersek, AEZ diye bir tane üçgen olacak. Bu üçgenin aslında aynısı bizim ABD üçgenimizin içinde var. Bu daha demin açıyla döndürmeden dolayı var. ZEC üçgeni de oldu küçük yani nasıl desem AEC-ZEA=ZEC oldu. O zaman bu da kesinlikle bunun içinde var çünkü eşkenar bilgisi hala elimizde. İkisi de birbirine eşitse ve yani nasıl desem AE yi alıp AEC yi alıp ABD nin üzerinde koyuyoruz mesela koyduk diyelim. Zaten birbirine eşit olduğu için eş yani nasıl desem aynı kenarları eşit AD ile AE eşitti, oradaki üçgenler eşit olacağı için AC ile AB de eşitti. O zaman DB ile EC de eşit olacak çünkü ikisinin de eş üçgen olduğunu biliyoruz. (1,4,5,6)

…

4.1.1.6.Gerekçelendirme

Tablo 14
Gerekçelendirme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
4	5	7	3	0	8	10	12	16	4	9	4	4	9	2	8	9	9	1	5	2	1	1	5	3	6	4	151

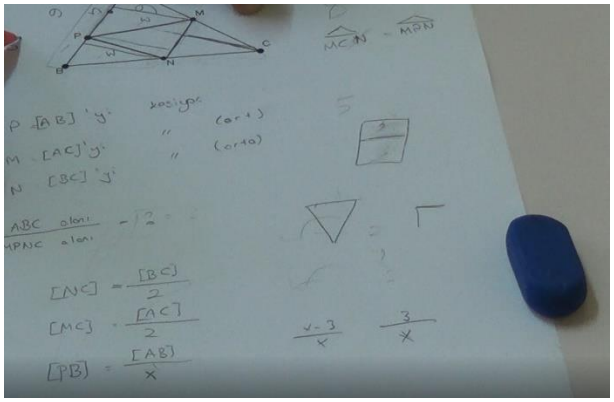
Fikir ileri sürme ve çıkarım yapma bileşenlerinden sonra izlerine daha sık rastlanan bileşen gerekçelendirmedir. "…nasıldır?" soru köklü sorulardan olan Problem 5 dışında bütün sorularda bu bileşen görülmüştür.

Ayşe "…nedir?" soru köklü, ilişki kurmayı ve ispat yapmayı gerektiren soruların tümünde gerekçelendirme bileşeninin göstergelerini ortaya koymuştur. Problem 7'de yükseklik değişmediği için alanın aynı kalacağı ile ilgili gerekçelendirme bileşeninin izleri aşağıdaki örnek diyalogda görülmektedir.

…

A: P nin yer değiştirmesine Gerek yok yani P nin yeri değişse bile MPNC nin alanını değiştirmeyecek. O kesin. Ama şu kalan kısma da etkisi olmayacak. Çünkü bu tarafa giderse buradaki parça şuraya gitmiş olacak. Ya da şu tarafa gitse buradaki parça şuraya gelecek. Hep aynı kalacak yani P orda herhangi bir nokta dedi. Hiç önemi yok. Sadece orda bize bi tane dörtgen tamamlamamızı sağlayacak bir nokta oluyor su an. Değişse bile etkilemiyor. Etkisiz eleman 1 gibi çarpma işleminde. Nereye geçerse geçsin birle çarpıyorsun bitti. Yani PMNC nin alanı 5 olsa, şuraya gitse şuradan şöyle bir şey çizsek o zaman da 5 olacak. Şuraya gitsek şuradan çizsek o zaman da 5 olacak, her bi zaman 5 olacak. (burda noktaların yerini değiştiriyor yükseklik değişmeyecek şekilde) (3,4,6,7)

…



Şekil 13. Öğrencinin Problem 7'ye ait çalışması

Bu soruyla ilgili öğrencinin yaptığı çalışma Şekil 13'te görülmektedir.

Problem 22 ise öğrencinin akıl yürütmekte zorlandığı bir soru olmuştur. Aşağıdaki diyalog göstermektedir ki; öğrenci gerekçelerini matematiksel olarak doğru olmadığını düşünmesine rağmen şeklin görünüşüne dayandırmaktadır. Ancak bu durum yine de öğrenci için bir gerekçelendirme sayılmaktadır.

…

A: Hocam ben direk şekilden baktım ve DOA üçgenine eşkenar üçgen dedim. (1,4)

Ar: Niye?

A: Çünkü çok eşkenar üçgene benziyor şekilde. Ama şekiller her zaman doğru olmak zorunda değil. Yine değil. (1,6)

Ar: Evet.

…

Öğrencinin şekilden bakıp görünüşüne göre eşkenar üçgen olduğunu düşünmesi gerekçelendirme (6) bileşenin bir göstergesini yansıtmaktadır. Aslında öğrenci sadece görüntüden dolayı eşkenar üçgen olması gerekmediğini bilse de başka çıkar bir yol bulamadığı için buradan ilerlemektedir.

İlişki kurmayı gerektiren sorularda öğrencinin en iyi performans sergilediği Problem 8'in tartışıldığı oturumdan alınan

…

A: Belki bu kocaman bir şeydir 3 m uzaklıktadır. Belki 4 cm dir sadece. Aslında şimdi şöyle bükülü cetvel olsaydı gösterirdim. Büke büke ölçerdim. O zaman belki. Bence BN büyüktür FG. (1,4)

Ar: Neden?

A: Çünkü paralel olsaydı aynı boyda olacaktı ama o böyle kaymış. Yani mesela bunu… Eşit eşit. Çünkü burda netice olarak aynı şeyde şunu şöyle kaydırsak (F yi B ye doğru kaydırıyor) hop paralel. Ve boyu da tutacak. Çünkü mesela şeylerdeki pergellerdeki gibi koyuyoruz ortaya sonra şurada da olsa şurasında da olsa şurasında da olsa uzaklık aynı. Bu da böyle olsa aynı olacak (F daha ilerde de olsa BF nin aynı olacağını söylüyor). Paralel de olsa o yüzden eşittir dedim. Tahminimi pergel yöntemiyle destekledim ben. Evet, bence oldu. (1,6,7)

…

Diyaloğunda öğrencinin uzunlukları birbiriyle kıyaslarken noktaları kaydırarak ortaya attığı nedenler gerekçelendirme (6) olarak nitelendirilmiştir.

4.1.1.7.Gerekçeyi Kontrol Etme

Tablo 15
Gerekçeyi Kontrol Etme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
2	1	3	2	0	3	3	5	3	0	2	1	0	3	0	1	2	3	0	2	0	0	0	0	0	2	0	38

Doğrulama/yanlışlama bileşeni ile aynı şekilde daha az sıklıkta görülen bir diğer bileşen de gerekçeyi kontrol etme bileşenidir. Ayşe sadece "…nedir?" kategorisindeki soruların tamamında gerekçeyi kontrol etme bileşeninin izlerini gösterebilmiştir. Problem 6'nın tartışıldığı oturumda öğrenci ilk önce açıklamalarını gerekçelendirmiş daha sonra bu gerekçelere ek açıklamalar yaparak gerekçeyi kontrol etme bileşenine dair izler sergilemiştir.

…

A: Ben şey iki taraf olduğu için yani bi tek üst tarafı kapsamıyor mesela burada bir doğruya dışındaki bir noktadan üstüne bir dik Deseydi mesela sadece bunun üst tarafı şu tarafları dik olacaktı ve altına deseydi şu tarafları dik olacaktı ama altına dese kâğıt çevirir öğrenci üstünde oldu ay altında oldu üsttü aslında. İşte o da olmuyor o zaman iki oluyor kesinlikle. Çünkü mesela biz buraya üst deriz, çevirdik alt oldu ya da buraya bu konumda üst deriz buraya çevirince alt oldu. Hiçbir zaman tek olmuyor ki. (2,4,5,6)

Ar: Hmm soruda o zaman üstüne ya da altına demesi.

A: olmazdı zaten Çünkü öğrenci çizerken hocam Burası üstü burası altı der çevirir. O şekilde olur. (1,6)

Ar: Hmm başka?

A: dik dediği için yani şöyle şöyle şöyle bir sürü her yere çizebilir mesela her yere çizsek dik demeseydi kaç doğru çizilir deseydi o zaman sonsuz olacaktı bir noktadan. Çünkü bir milimetre oynaya oynaya oynaya oynaya bir sürü çizilir yani sonsuza her tarafa gidebilir. Bu da uzuyor böyle. Ama dik dediği için dik de sadece bir şekil olur yani mesela böyle bir ortama şunu çizdiğinde şuradaki mesela bu bir doğru şunu şöyle çizdiğinde bu dik olmuyor (rasgele bir doğru çiziyor dik olmayacak şekilde) dik bir tane oluyor. Ama ben burada simetri yaptım yani Bu ayna gibi burada gitti sonra devam etti şu tarafa vardı. (1,3,4,7)

…

Burada öğrenci doğru başka bir doğru ile kesilse bile yine aynı doğru olacağını idrak edememiş ve iki doğru olarak ele almıştır. Böyle bir durum öğrenciye göre mantıklı ve gerekçelerini buna göre sıralamıştır.

İspat gerektiren sorularda zayıf da olsa bu bileşenin izlerine rastlanmıştır. Problem 2'de öğrenci öne sürdüğü gerekçeleri aksini göstererek yeni gerekçeler sunması gerekçeyi kontrol etme (7) bileşeninin varlığını göstermektedir.

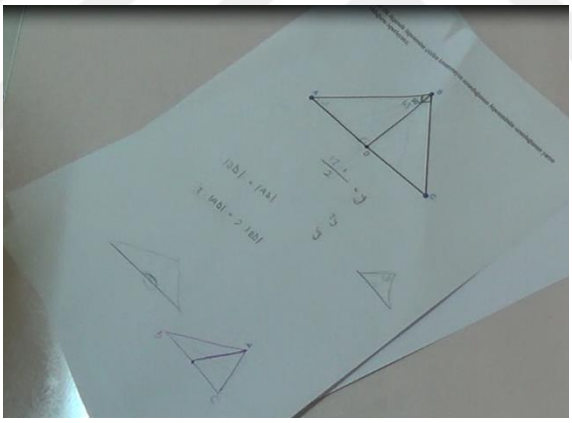
…

Ar: Hmm. Peki, benim bir sorum var sana. Burası 90 derece midir mutlaka?

A: Ama kenarortayı dik çizecek. Yani şöyle çizmiyor ya da şöyle çizmiyor (kenarortayı eğri şekillerde çizip gösteriyor). Çünkü ortalayacak. Ortalaması için de buradan çıkan açısının tam ortalaması gerekiyor. Mesela böyle bir tane geniş açılı üçgende şunun çektiği kenarortayı tam ortası olacak. (2,6,7)

…

Diyaloğunda öğrenci çizdiği kenarortay örnekleriyle nasıl olması gerektiğini göstermesi gerekçeyi kontrol etme (7) becerisini yansıtmaktadır.



Şekil 14. Öğrencinin Problem 2'ye ait çalışması

Şekil 14'te görüldüğü gibi öğrenci birkaç üçgen üzerinde kenarortay çizmiş ve bunların durumlarını tartışmıştır. Bu durumlarda kenarortay doğrusunun doğru parçasını iki eşit parçaya bölmesi için dik bir şekilde olması gerektiğini göstermeye çalışmıştır. Dik olmayan açılarla çizilen kenarortay doğrularının doğru parçasını iki eşit parçaya bölemeyeceğini düşünmektedir.

İspat yapmayı gerektiren Problem 12'de ise;

…

Ar: Tamam başka nasıl çözebilirsin.

A: Yazmam gerekiyor mu sözel anlatsam.

Ar: Sözel anlatabilirsin.

A: AC eşit diyordu AB ye. O zaman bu ikizkenar kesin. Bu a açısı ve y açısı eşit. O zaman aynı büyüklükte parçalar kesilmiş. Çünkü ikisi aynı, mesela biraz daha uzun olsaydı, bu küçülürdü, daha kısa olsaydı bu büyürdü bu sefer. Eşit ikisi. O zaman AE nin AD ye eşit olması gerekiyor. O zaman iki tane kenarın birbirine eşit olduğu üçgenlere de ikizkenar diyoruz. (1,4,5,7)

…

Diyaloğunda görüldüğü gibi öğrencinin sunduğu gerekçeleri ek düşünceler ile açıklamaya çalışmış olması gerekçeyi kontrol etme (7) becerisini göstermektedir.

Bu göstergenin en sık görüldüğü soru ise ilişki kurmayı gerektiren Problem 8 olmuştur.

…

A: Belki bu kocaman bir şeydir 3 m uzaklıktadır. Belki 4 cm dir sadece. Aslında şimdi şöyle bükülü cetvel olsaydı gösterirdim. Büke büke ölçerdim. O zaman belki. Bence BN büyüktür FG. (1,4)

Ar: Neden?

A: Çünkü paralel olsaydı aynı boyda olacaktı ama o böyle kaymış. Yani mesela bunu… Eşit eşit. Çünkü burda netice olarak aynı şeyde şunu şöyle kaydırsak (F yi B ye doğru kaydırıyor) hop paralel. Ve boyu da tutacak. Çünkü mesela şeylerdeki pergellerdeki gibi koyuyoruz ortaya sonra şurada da olsa şurasında da olsa şurasında da olsa uzaklık aynı. Bu da böyle olsa aynı olacak (F daha ilerde de olsa BF nin aynı olacağını söylüyor). Paralel de olsa o yüzden eşittir dedim. Tahminimi pergel yöntemiyle destekledim ben. Evet, bence oldu. (1,6,7)

Ar: Peki başka?

A: Hep başka diyorsunuz ben başka bulamıyorum.

Ar: Başta neden büyüktür dedin?

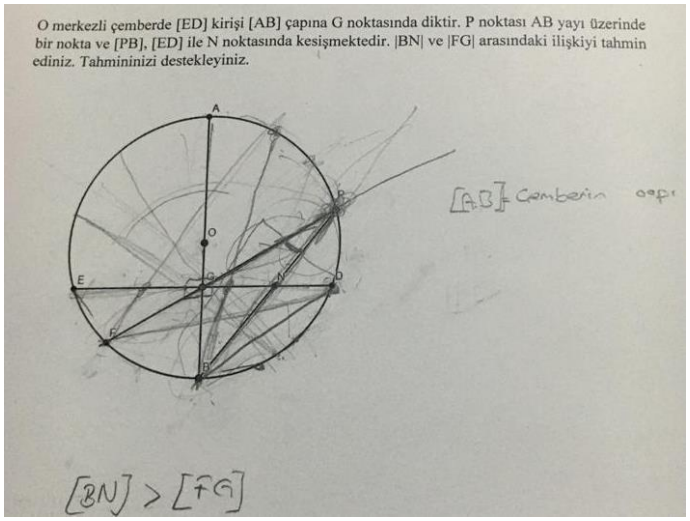
A: Başta büyüktür dedim. Çünkü böyle bakınca bu bundan uzundur gibi görünüyor. Ama sonra aa bu böyle dönse dönse aa aynı yere geliyor. Ama şimdi kararımı tekrar değiştiriyorum çünkü yanlış ettim. Aslında bu daha demin dediğim gibi tam ortası yani O noktasından geçseydi olacaktı. Yani mesela şu, şu tarafta olsaydı şu kadarlık bir bölüm, bir de şöyle olsaydı onların boyunu sorsaydı o zaman bulurdum. Ama bu tamamen AB arasındaki yeri bilinmeyen bir noktadan çıkan böyle noktanın üzerinden geçen bir doğru parçasının bir kenarı ve GD arasındaki noktası tamamen bilinmeyen bir N noktasından çıkan ve aynı noktada kesişmeyen iki tane doğru parçasının boyunu soruyor. O zaman kesinlikle eşit olmayacak o kesin. Tabi cetvel olsa daha kolay eşit olabilir ölçerdik. BN büyüktür FG. (1,2,3,4,5,6)

Ar: Neden?

A: Ama daha demin söyledim tekrar mı söyleyeceğim. Çünkü şöyle bir şey düşündüm. AB nin ortası O, yani çemberin ortası O. Ben daha demin pergel yöntemini çemberin tam ortasındaki noktadan etrafa doğru yaptım. Ama burada çemberin orta noktası O. F, G den O ile uzaklığı belli olmayan bir noktadan oluyor. Aynı şekilde GD arasında konumu bilinmeyen bir N noktasından da BN çıkıyor. E biz bunu bilmiyoruz. belki yarısıdır belki işte başka bir orandır onu bilmiyoruz. Onun için bunlar eşit olamaz. Çünkü hiçbir zaman aynı noktadan çıkmamışlar. Bu mesela N noktasından değil de buradan çıksaydı şöyle gitseydi o zaman aynıydı. Ama bunlar hiçbir zaman aynı noktadan çıkmayacaklar hep farklı yerlerden çıkacaklar. Yani demek istediğim aynı noktalardan çıksalar olur pergel yöntemi gibi ama hem bir de zaten şöyle bir şey var bunun merkezi olduğu çember bundan daha küçük. (3,4,6,7)

…

Diyaloğunda öğrencinin gerekçelerini kendince pergel yöntemiyle tekrar desteklemesi gerekçeyi kontrol etme (7) göstergesinin varlığına işarettir.



Şekil 15. Öğrencinin Problem 8'e ait çalışması

Temel geometrik çizimler ve kavramlar ile alan ölçme alt öğrenme alanları ile ilgili soruların tamamında gerekçeyi kontrol etme bileşenine rastlanmıştır. Buna karşın trigonometri alt öğrenme alanında bu bileşenin izleri görülmemiştir. Diğer sorularda bu bileşenin sergilendiği ve sergilenmediği durumlar olmuştur.

4.1.1.8.Matematiksel İfadeleri Birbirine Bağlayan Düşünme Süreci Boyunca Argüman Zincirleri Oluşturma

Tablo 16
Argüman Zincirleri Oluşturma Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
8(a)	7	1	3	0	0	2	1	1	9	0	2	3	1	1	0	0	5	1	0	0	1	0	3	1	2	1	4	49
8(b)	7	0	3	0	0	2	1	1	9	0	2	3	1	1	0	0	5	1	0	0	1	0	2	1	2	1	4	47
8(c)	0	0	1	0	0	1	1	1	4	0	1	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1	18

Öğrencilerden akıl yürütürken beklenen bir diğer bileşen ise matematiksel ifadeleri birbirine bağlayan düşünme süreci boyunca argüman zincirleri oluşturma bileşenidir. Bu bileşen kendi içinde adımlar atma (8(a)), atılan adımları izleme (8(b)) ve atılan adımların değerlendirilmesi (8(c)) şeklinde üç alt bileşenden oluşmaktadır. Bu bileşenin görülme sıklığına toplam olarak bakıldığında seçim yapma (3), doğrulama/yanlışlama (5) ve gerekçeyi kontrol etme (7) bileşenlerine göre daha çok ortaya çıkmasına rağmen; alt bileşenlere tek tek bakıldığında bu üç bileşen (3, 5, 7) kadar zayıf görülmektedir. Özellikle adımlar atma ve atılan adımları izleme alt bileşenlerine dair göstergeler gözükse bile atılan adımların değerlendirilmesi aşamasına geçildiğine çok az rastlanmıştır. Ayşe bu bileşeni de yine en iyi açık uçlu olmayan "…nedir?" soru köklü sorularda ortaya koymuştur.

Bu sorularda biri olan Problem 17 üzerinde yapılan tartışma incelendiğinde bu bileşenin izlerinin en bariz görüldüğü sorulardan biri olduğu açıktır. Aşağıda bununla ilgili verilen kesitte öğrenci adımlar atmış (8(a)), bu adımlar birbirini izlemiş (8(b)) ve en son bir karara da bağlamış olması değerlendirme (8(c)) yapmış olduğunu göstermektedir.

…

A: İlk önce daha demin demiştim bu işte eğer eşkenar olursa ama görünüşe aldanırsak ikizkenar olur diye ama şöyle bir şey düşündüm. C noktasından geçen bir doğru çemberleri D ve E noktasında kesiyor yani D ve E noktasından çıkıp C ye değmiyor. C nin üzerinden D ve E ye gidiyor. Bu demek oluyor ki C sağa doğru hareket ederse bu sefer EF yayı küçülecek. EF yayının uzunluğu küçülecek. E doğal olarak DE uzunluğu da küçülecek. Çünkü gitgide küçülmeye başlıyor. Daralıyor açıları. Sola doğru giderse bu sefer ikisi de büyüyecek. O zaman kesinlikle DE ve EF nin 6 birim olduğunu kanıtlayabilirim. Bi keresinde kullanmıştık geçen hafta şey demiştik bir tane üçgenin herhangi bir noktadan iki kenara uzaklığı her zaman eşitti hangi tarafa giderse gitsin. Yani iki tarafa uzaklığı toplanınca eşit oluyordu. Onun gbi yaparsak o zaman 6 birim oluyor yine bu EF. EF kenarının uzunluğu 6 birim oluyor. Şimdilik ikizkenarı bulduk ama zaten bu iki tane kenarı da eşit ve DF yayının uzunluğu ile EF yayının uzunluğunun da aynı olduğunu düşünmüştüm çünkü bu katlanırsa eğer yani nasıl desem biraz daha yukarı doğru dönerse ve üste çıkarsa o zaman tam katlanır diye düşünmüştüm. O zaman burası da 6 birim oluyor. Bu şekilde bakarsak alanı 18 birim kare oluyor. (1,4,6,7,8(a,b,c))

…

Burada öğrencinin ilk olarak C noktasından geçen bir doğrunun iki çemberi sırasıyla D ve E noktalarında kesmesiyle başlaması adım atma (8(a)), C noktasının sağa ve sola hareketiyle oluşan değişimler ve akabinde yaptığı açıklamalar atılan adımların takip edilmesi (8(b)) ve belli işlemlerle birlikte neticeye varması ise atılan adımların değerlendirilmesi (8(c)) şeklinde yorumlanmıştır.

Sadece temel geometrik çizimler ve kavramlar konusundan bir soruda atılan adımların değerlendirilmesi aşamasına geçememiştir. Problem 1'in incelendiği oturumdan alınan

…

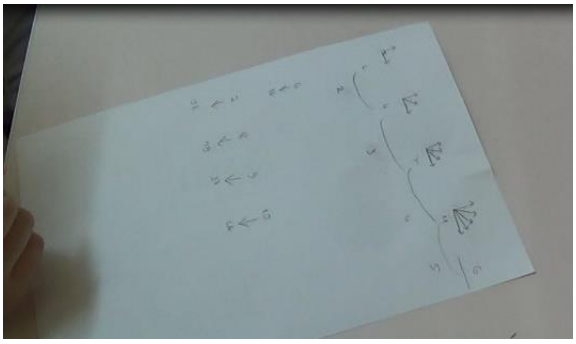
Ar: Belki ışın sayısını azaltarak falan bir şeyler bulabilirsin, mümkün mü öyle bir şey? İşini kolaylaştırmak için yani 10 ışınla uğraşmazsın da atıyorum 5 ışınla uğraşırsın gibi.

A: Ben 6 tane diye düşündüm. 6 tane olsa bu şey örüntüyü bir deneyeceğim (daha önce yazdığı 8e 2 7 ye 3 örüntüsünden bahsediyor) (1,3)

A: 6 ya 1 gelecek 5 e 2 gelecek 3 e 3 gelecek, 2 ye 4 gelecek 1 e 5 gelecek. 4 ü yazmayı unuttum sanki. 6 ya 1, 5e 2. Orda biz 10 a 1 yapmadık böyle yaptık böyle yaptık yani 10a 1 olsaydı ama burada yine 4 e 3, 2 ye 5, 1e 6. Ama sayı mesela bir milyon olsa bir milyondan geriye teker teker teker teker yazacağım. O zaman olmaz. Böyle hesaplamak da çok mantıksız oldu. Uç noktası ortak sonuç olarak aynı noktadan (soruyu tekrar düşünüyor) (1,3,4,8(a,b))

…

Diyaloğunda öğrenci adımlar atmış ve bunları takip edecek şekilde ilerlemiş ancak bir sonuca varıp değerlendirme aşamasına geçememiştir.



Şekil 16. Öğrencinin Problem 1'e ait çalışması

Şekil 16'dan da anlaşılacağı gibi öğrenci birkaç deneme yapmış ancak bir sonuç ortaya çıkmamıştır. Öğrencinin burada bir sonuca varamamasının nedeni attığı adımlarda oluşan örüntü kuralını tahmin edememesindendir.

"…nasıldır?" soru köklü kategoriden üçgenlerle ilgili sadece iki soruda adımlar atma ve atılan adımları izleme aşamaları görülmüş, bu kategorideki diğer sorularda bu bileşene ait hiçbir alt bileşene ait bir ize rastlanmamıştır. Aşağıda Problem 14'ten alınan bir diyalog örneği verilmiştir.

…

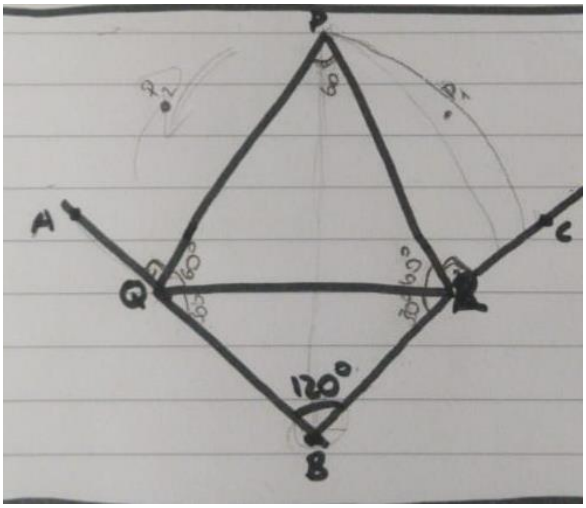
A: Hocam, o zaman QRB açısı 30 derece olur. RQB açısı da 30 derece oluyor ve PRC açısın 90 derece oluyor, yani dik bir açı. AQP de 90 derece oluyor. (4)

Ar: Nasıl düşündün bunu?

A: Açıortay çizdiğimde ikisin de bölüyor. B açısı 60 dereceye düşüyor. P açısı 30da düşüyor. Bu her iki açının toplamı 90 oldu. QRP açısı da eşkenar üçgenden dolayı 60 dereceydi. 90 dereceden 60 çıkarınca 30 kalıyor. QRB 30 oldu. 120 ile 30 toplayınca 150 derece. 180'e tamamlamak için bir tane daha 30 gerekiyor. O yüzden RQB açısı da 30 derece oluyor. Doğrusal yüzeyle 180 dereceydi. 60 ile 30'u topladığımızda 90. AQP açısı dik açı oluyor 90 derece. Aynı şekilde PRC açısı da dik açı oluyor. (4,8(a,b))

…

Burada öğrenci açılarla başlaması adımlar atma (8(a)) ve bunlardan yola çıkarak açıların birbirini takip etmesi atılan adımların izlenmesi (8(b)) aşamalarının izlerini temsil etmektedir. Ancak bir yere varamadığı için atılan adımların değerlendirilmesi (8(c)) alt bileşeninin izleri mevcut değildir.



Şekil 17. Öğrencinin Problem 14'e ait çalışması

Ayşe ilişkilendirme becerisi gerektiren sorulardan alan ölçme ile ilgili Problem 4'te bu bileşenin hiçbir adımını sergileyememiştir. Trigonometri konusuna ait olan Problem 5'te hiçbir alt bileşene rastlanmamış, Problem 21'de adım atma (8(a)) ve atılan adımların izlenmesi (8(b)) aşamaları gözükmüş ancak değerlendirme aşamasına geçtiğine dair bir belirti ortaya çıkmamıştır. Bununla ilgili aşağıdaki diyalog örnek olacaktır.

…

Ar: Soru açıyla mı ilişkili? Öyle mi olduğunu düşünüyorsun yani?

A: Belki açılardan yola çıkarım yani mesela atıyorum bu merkezden çektiğimiz noktayla A, merkeze O desek AOB açısı atıyorum kaç derece olsun 160 derece olsa, yay açısı 160 derece olacak. Mesela yaya da rasgele bir değer versek 4x olsa, x 40 olur. O zamana diğer açılarla da bağlantı kurarız. 2pir de çevresiydi. Buradan pi yi direk 3 alırsak, sonra yarıçapı da o şekilde bulabiliriz çevreyi bölerek. Yani çevreyi 6 ya böleriz sonra r yarıçapını buluruz. O şekilde olabilir gibi geliyor aklıma. (1,3,4,8(a,b))

…

Bu soruda öğrencinin atılan adımların değerlendirilmesi (8(c)) alt bileşenini gösterememesinin nedeni olarak konuyu bilmemesinden dolayı rastgele akıl yürüterek çıkarımlar yapmaya çalışması olarak açıklanabilir.

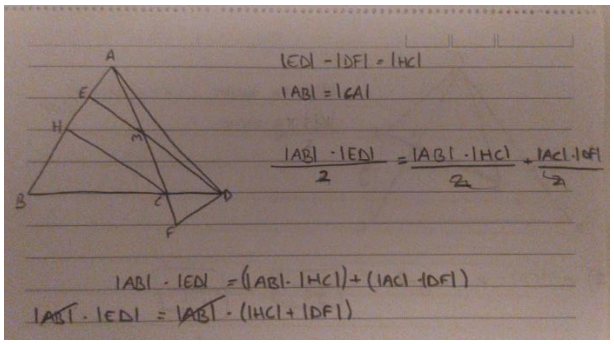
Çokgenler ve çember ve daire öğrenme alanları ile ilgili sorularda ise bu bileşen birer kez ortaya çıkmıştır. İspat gerektiren sorulardan olan Problem 27'de öğrencinin attığı adımlar ve bunları izleyerek bir sonuca varması bu bileşenin izlerini göstermektedir.

…

A: Hocam böyle düşününce benim düşündüğüm de düşünülmüyor yani böyle düşününce benim düşündüğüm puff yok oldu. Hocam şöyle olabilir tamam bu AB ve AC yi eş alacağız birbirine. O zaman şöyle bir şey yapsak. Bunlar zaten bu şekilde duruyor ve bizim böyle bir tane üçgenimiz geldi aa ACD üçgeni. Bunları topluyor ve BDA diye bir üçgen buluyoruz. Biz şöyle yapsak peki bu ikisinin kenarı eşitti demek oluyor ki BC yi burda taban alacağız. Direk hocam şey ben genellikle ikizkenarda bu farklı olanı taban alıyorum. Diğerlerini yani nasıl desem diğerlerini üste koyuyorum. BC yi taban olarak alsak. Ne diyecektim ben. Hıh şöyle diyecektim hocam. Bizim bu yeni çıkan üçgende ek bir tane alanımız olmuştu zaten. Bir üçgen. Onu da direk ne üçgeni ACD üçgeni. Yani klasik bir toplama çıkarma gibi düşündüm hocam. Yani şöyle düşünelim. BDA üçgeninin alanına f desek, ABC üçgeninin

alanına ne desek ne desek k desek, sonra ACD ye l desek. f-k bizim burda bir tane boşluğumuz var bu boşluk aslında l olacak. Hocam diğer türlü de l+k=f den bulunur direk. Yani öyle çok bir formüle gerek yok. Ben hocam onun için dedim daha kolay diye. Yani ilk yaptığımda dolandırdım falan. Ama bunda direk yapılabilir diye. (1,4,8(a,b,c))

…



Şekil 18. Öğrencinin Problem 27'ye ait çalışması

Problem 2'de ise sadece adımlar atma (8(a)) aşaması gözükmüştür. Aşağıdaki öğrenci cümlesinde adım atma çabasına dair izler mevcutken bunları takip edip bir değerlendirmeye ulaşamadığı açıktır.

…

A: böyle çizdik, böyle oldu. Ya da bunu böyle çizdik böyle oldu. (Kâğıttaki diğer üçgenleri dörtgene tamamlıyor olduğunu göstermek için) O zaman bu böyle 90 derece olur. Bu da dik çizdiğimiz için 90 derece olacak. O zaman geriye kalan şu ve şu açının toplamı da 180 derece olacak ki 360 a tamamlayalım. Aslında o zaman kenarortayın çizdiği açı önemsiz kalacak. (1,4,8(a))

…

Üçgenler alt öğrenme alanından kalan üç soruda ise bu bileşenin ortaya çıktığı bir durum mevcut değildir. Bu durumda Problem 4, Problem 19, Problem 20 ve Problem 22'de bu bileşene dair herhangi bir ize rastlanmamıştır.

4.1.2. Demet'in Geometri Problemleri Bağlamında Akıl Yürütme Becerisinin İncelenmesine İlişkin Bulgular

Demet ile yapılan oturumlarda 27 soru tartışılmıştır. Bu soruların 2'si temel geometrik çizimler ve kavramlar, 2'si trigonometri, 2'si eşlik ve benzerlik, 3'ü alan ölçme, 4'ü çokgenler, 4'ü çember ve daire ve 10'u üçgenler alt öğrenme alanlarından oluşmaktadır. Toplanan verilerden 1286 adet akıl yürütme bileşenine dair göstergeler bulunmaktadır. Bunlardan 456'sı fikir ileri sürme (1), 39'u iddia etme (2), 100'ü seçim yapma (3), 284'ü çıkarım yapma (4), 61'i doğrulama/yanlışlama (5), 176'sı gerekçelendirme (6), 57'si gerekçeyi kontrol etme (7) ve 113'ü matematiksel ifadeleri birbirine bağlayan düşünme süreci boyunca argüman zincirleri

oluşturma bileşenlerine (8(a), (b), (c)) ait olduğu tespit edilmiştir. Bu sayılardan anlaşılacağı gibi öğrenci fikir ileri sürme, çıkarım yapma ve gerekçelendirme bileşenlerini diğer bileşenlere göre daha çok ortaya çıkarmıştır. Özellikle iddia etme, doğrulama /yanlışlama ve gerekçeyi kontrol etme bileşenlerinin zayıf olduğu aşikardır. Fikir ileri sürebildiği sorularda çoğunlukla çıkarım yapma bileşeninin de izleri görülmektedir. Diğer bileşenlerin göstergeleri daha az görülmüştür.

Aşağıda öğrencinin karşılaştığı her soruda ortaya koyduğu akıl yürütme bileşenleri sıklık tablosu yer almaktadır.

Tablo 17

Demet'e Ait Akıl Yürütme Bileşenlerinin Sıklık Tablosu

Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 1	56	5	5	41	2	16	3	7	5	3
Problem 2	34	1	1	31	6	14	10	4	4	2
Problem 3	21	0	2	9	1	3	1	1	0	0
Problem 4	16	3	7	17	9	6	4	2	2	3
Problem 5	6	0	1	3	0	3	0	2	2	2
Problem 6	10	1	1	11	6	9	3	0	0	0
Problem 7	20	1	3	19	5	13	4	5	5	4
Problem 8	18	2	6	13	4	9	2	1	1	1
Problem 9	36	1	4	12	2	7	1	2	2	2
Problem 10	19	3	2	8	4	3	2	1	1	1
Problem 11	17	4	6	4	2	5	1	0	0	0
Problem 12	21	0	2	11	0	9	1	1	1	1
Problem 13	18	3	5	5	0	10	3	0	0	0
Problem 14	13	0	0	12	0	5	1	1	1	0
Problem 15	11	0	6	6	2	2	1	1	0	0
Problem 16	19	4	5	12	0	9	1	1	1	1
Problem 17	22	2	8	17	1	10	3	3	3	2
Problem 18	16	1	5	6	1	5	1	1	1	1
Problem 19	22	2	14	4	8	6	4	6	5	4
Problem 20	7	0	1	3	0	3	1	0	0	0
Problem 21	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Problem 22	9	1	4	11	1	4	1	0	0	0
Problem 23	9	0	3	5	1	5	0	2	2	0
Problem 24	6	1	4	9	2	5	3	0	0	0
Problem 25	8	2	0	3	2	6	3	2	2	1
Problem 26	10	2	4	7	0	7	2	1	1	0
Problem 27	6	0	1	5	2	2	1	1	1	0
Toplam	456	39	100	284	61	176	57	45	40	28

Tablo 17'ye bakıldığında Demet'in hiç akıl yürütemediği soru olmamıştır. Ancak Problem 5, Problem 20, Problem 21, Problem 23 ve Problem 27'de akıl yürütme bileşenlerinin göstergeleri zayıftır. Problem 5 ve Problem 21 trigonometri sorularıdır. Öğrenci bu konuya hakim olmasa da kendince akıl yürütmeye çalışmıştır. Örneğin Problem 5'te gerçekleşen

…

D: Bir yerde kullanıldıysa da anlamını bilmiyorum. Kosinüs nedir? Kosinüsse denklem gibi kurmuşlar. A demişler. Bununla kosinüs B yi çarpmışlar. Ya büyük ihtimalle bu şeydir. Üçgenlerin 3 kenarı olur ya, bu üçgenin şeyine kosinüs A demişler öbürüne kosinüs B.

A: Neyine?

D: Kenarına, öle olabilir mi? Ya da açısına da demiş olabilirler. Açısına derlerse nasıl bir üçgen olduğu belli oldu çünkü 180 derecelik bi üçgen olur. Belki dik açılı üçgen olarak da söylemiş olabilir. Sıfırdan büyük demiş, her şey sıfırdan büyük olabilir. Eğer bir kenarına, şöyle bir üçgen çiziyorum şu an şekli bu demiyorum. Buraya A deseler buraya B deseler buraya C deseler (kenarlara dedi). Bunların çarpımına x desek atıyorum. x>0. O zaman… Kosinüs kenar uzunluğu mu olur yoksa sadece bi kenar adı falan mı? (1,3,4)

…

Diyaloğunda öğrenci kosinüs kavramının üçgenin kenarlarıyla ya da açılarıyla ilişkili olabileceğini ifade ederek fikir ileri sürme (1), kenar uzunluklarından yola çıkmayı seçmesi seçim yapma (3) ve bunlardan bir sonuca varmaya çalışması ise çıkarım yapma (4) bileşenlerinin birer göstergesi olmuştur. Yine bir trigonometri sorusu olan Problem 21'de ise ancak birkaç fikir ileri sürme becerisi ortaya koymuş ve diğer bileşenlerin izlerine rastlanmamıştır.

…

D: Aa şey olabilir herhangi bir çemberin herhangi bir noktasında karşı taraf çizilen uzunluğa sinüs denilebilir belki. (1)

A: Hmm.

D: Olabilir mi?

A: Bilmiyorum. Olabilir belki. Başka ne çıkabilir acaba buradan?

D: Yani belli bir uzunluğu olmaz o yüzden büyük ihtimalle sinüsA falan demişlerdir. Bu da acaba belli bir noktadan herhangi bir noktadan belli değil herhangi bir noktadan karşıya çekilen doğru parçasının dokunduğu nokta mı denir oraya sinüs denilebilir çünkü sinüs A demiş. (1)

A: Hmm.

D: Hmm şey de olabilir. Bizden istediği şey, yarıçapı ne bilmiyoruz şimdi bunun.

A: Evet herhangi bir değer r diyelim ona.

D: r. herhangi üç noktadan oluşturulmuş daire içerisinde üçgenin köşesinden yani bir köşesinden karşıdaki doğru parçasına veya Tabana. (1)

A: kenara mı yani? Açının gördüğü kenar mı?

D: Evet kenara yok bu kenar noktalara kenarlara noktalara sinüs bizden istediği şey de buradaki uzunlukla sinüs Ayı bölmek. Yani biraz. (1)

A: tamam bunun Çemberin yarıçapı ile ne gibi bir ilişkisi olabilir?

D: Imm Belki çemberin yarıçapını bilmiyoruz ki.

A: Herhangi bir değer bir ilişki olabilir mi aralarında?

D: Elbet vardır sorduysa.

A: Nasıl bir ilişki vardır peki?

D: belki bize çemberin yarıçapını verip buradaki a, b, c kenarlarını tahmin etmemizi istemiş olabilir. Veya çemberin orta noktasından a'ya bir yükseklik çizip ortalama alanını falan bulmamızı istemiş bulmamıza yardım edebilir. Ama yani bu terimin ne olduğunu bilmiyorum. a bölü sinA falan. (1)

…

Diyaloğunda öğrencinin trigonometri kavramlarıyla ilgili bir bilgisi olmasa da çeşitli fikirler ortaya atması fikir ileri sürme (1) becerisini ortaya koymaktadır. Ancak matematiksel olarak da fikirlerini çeşitlendirip bunları kullanarak çıkarım yapamamış ve daha ileri akıl yürütme becerisi gösterememiştir.

4.1.2.1.Fikir İleri Sürme

Tablo 18
Fikir İleri Sürme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
56	34	21	16	6	10	20	18	36	19	17	21	18	13	11	19	22	16	22	7	6	9	9	6	8	10	6	456

Öğrencinin fikir ileri süremediği herhangi bir soru olmamıştır. Fikir ileri sürme bileşeninin izlerine en fazla soru kökü "nedir?" olan sorularda rastlanmıştır. Bu kategoride temel geometrik kavramlar ve çizimler, üçgenler, çokgenler, alan ölçme ve çember ve daire alt öğrenme alanları ile ilgili sorularla karşılaşmıştır.

Problem 1 fikir ileri sürme becerisinin en sık ortaya çıktığı soru olmuştur. Bu sorunun tartışıldığı oturumdan alınan diyalog örneğinde öğrencinin;

…

D: Aslında bunun bir sürü farklı yolu olur. Böyle düşünürsek o yüzden bunun kaç tane açı oluşturacağını bulmamız çok zor olur çünkü bir sürü seçenek var. Birini böyle yerleştirir, öbürünü gider şöyle yerleştirir. (uç noktalarını farklı yerlerden çiziyor) (1,3)

A: Ama zaten uç noktası ortak olan diyor ya.

D: Evet.

A: Uç noktaları ortak olacak şekilde yani ilk baştaki gibi çizmen gerekmez mi? Tamam açıların yönleri farklı olabilir.

D: Evet öyle olursa. İlk baştaki gibi düşünürsek yani her iki tarafını böyle farklı bir şey olarak düşünürsek, o zaman değişir sayısı. Öyle düşünüyorum. Yani her böyle böyle iki değil de burası bir burası bir diye düşünürsek o zaman bu tam bir yuvarlak şeklini oluşturmayacağı için bence açı şekli de değişir. (1)

…

A: Tamam. Peki, onu düşündüğünde tekrar şu ilk çizdiğin şekle bakarsan mesela başka açılar da var mıdır orda?

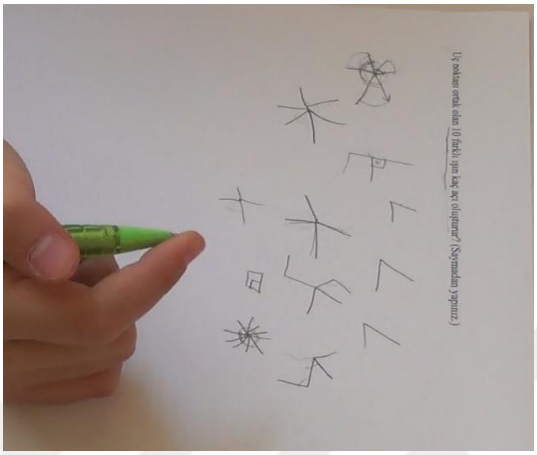
D: Böyle var. Buradan şöyle olabilir. Böyle olur. Böyle iki açı arasından bir olur. Geniş açı oluşturur. Böyle tam açı oluşturur. (1)

A: Hıhı, tamam

D: Sonra buradan belki 90 derece çıkabilir. O da gittikçe değişir, artar. Böyle düşünürsek. Buradan tam bir sayı çıkarabilir miyim açıkçası bilmiyorum. (1)

…

Sorunun çözümünde birden fazla yolun olduğunu düşünmesi ve açı şekillerinden yola çıkması fikir ileri sürme (1) bileşeninin izleridir. Ancak nasıl çözeceğiyle ilgili birkaç fikir öne sürse de herhangi bir sonuca varacağından öğrencinin şüpheleri vardır. Şekil 19'da görüleceği gibi öğrenci düşüncelerini resmetmeye çalışmıştır.



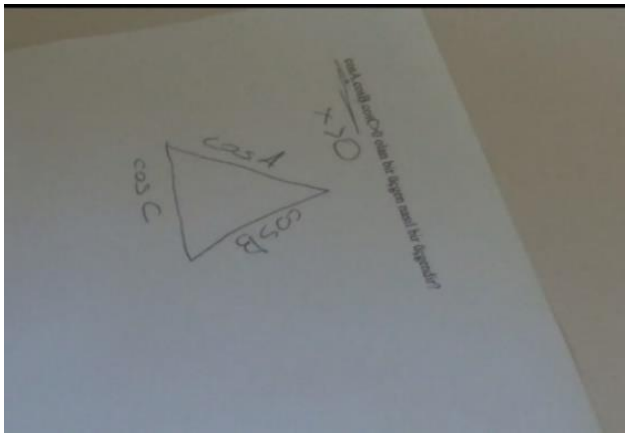
Şekil 19. Öğrencinin Problem 1'e ait çalışması

İspat yapmayı gerektiren ve alt öğrenme alanı üçgenler olan sorularda da fikir ileri sürme bileşeninin göstergeleri sıklıkla mevcuttur. "nasıldır?" soru köklü ve ilişki kurmayı gerektiren sorularda ise diğer soru türlerine göre fikir ileri sürme bileşeninin izlerine daha az rastlanmıştır. Bu kategoride en dikkat çeken durum trigonometri sorusunda öğrencinin herhangi bir bilgisi olmamasına rağmen fikir ileri sürme bileşeninin izlerine rastlanmış ve akla uygun fikirler ortaya çıkmıştır. Aşağıda bununla ilgili Problem 5'ten bir kesit verilmiştir.

…

D: Şöyle düşündüm. Nasıl bir üçgendir diyor. Burda bize kosinüsle ilgili üç ayrı veri verilmiş. Zaten bunun bir şekil olabilmesi için ne olur, üçgen olur, üç kenarlı. Ya üçgen olur kapalı bir şekilde, ya da açık u şekli gibi bir şey olabilir. Burda çarpımı ile ilgili olduğunu düşünmüyorum ama üç ayrı şey vermiş bize veri vermiş, bilinmeyen vermiş. Ben bunu zaten ilk başta kenar sandım, kenar uzunluğudur falan dedim. Sonra belki iç açıları olabilir dedim. Ama şöyle söyleyeyim kosinüsü 4 tane verse kare olduğunu düşünürdüm. (1,6)

…



Şekil 20. Öğrencinin Problem 5'e ait çalışması

Şekilden de görüleceği gibi öğrencinin kosinüs değerlerini kenar uzunluklarıyla ilişkilendirmesi fikir ileri sürme (1) bileşeninin izleri olarak kabul edilebilir. Soruda nasıl bir üçgendir şeklinde sorulmasına rağmen öğrencinin dört adet kosinüs değeri olsaydı dörtgen olacağını düşünmesi de dikkat çekicidir. Üç adet kosinüs değeri olduğundan üçgen olduğunu düşünerek akıl yürütmüştür.

Bunun yanında ispat yapmayı gerektiren çember ve daire ile çokgenler soruları da fikir ileri sürme bileşeninin çok az görüldüğü konulardandır. Öğrencinin fikir ileri sürme bileşenini en az gösterdiği konu trigonometri ve ardından eşlik ve benzerlik alt öğrenme alanları iken üçgenler konusu en iyi fikir ileri sürebildiği alt öğrenme alanı olmuştur. Üçgenler alt öğrenme alanında sadece ispat yapmayı gerektiren Problem 27'de fikir ileri sürme bileşenini göstermekte zorlandığı açıktır. Aşağıda bununla ilgili verilen örnekte öğrencinin;

…

D: zaten ABC ile ACD nin alanını toplayınca BDA üçgenin alanının oluşması gayet normal bişey bence. (1)

A: Evet haklısın.

D: çünkü zaten BDA üçgenin kenarlarını ABC ve ACD üçgenleri oluşturuyor. Yani normal bu üçgeni A'dan C'ye doğru bir kenarla bölmüş yani. (6)

A: Anladım.

…

D: ben olsaydım ilk önce deneyeceğim şey En azından Normal bir doğru parçası gibi değil de yani dik bir şekil gibi değil de bu E den H ye oluşan eğiklik şeklinde C den ED doğru parçasına doğru bir çizgi çizerdim. (1,3)

A: tamam.

D: Daha sonrasında bu oluşan artık o yere de ne diyelim G diyelim bu GCFD dörtgeni eğer orantılı bir dörtgense yani iki kenarı olurdu eşit olurdu.(1,4,8(a,b))

A: bu ED-DF = HC yi göstermek için miydi?

D: Evet çünkü bizden ED den FD yi çıkarınca HC oluştuğunu söylemiş ben de ED den direk HC yi çıkardım Eğer oluşan iki kenardan biri FD ye eşitse eşit olurdu. (4,6,7)

A: Hmm anladım Peki şu bağıntıya Gelecek olursak bana o bağıntının doğru olduğunu gösterir misin yani alanları nasıl hesaplayacağız alanların hesaplamalarından giderek BDA üçgeninin alanını nasıl hesaplarsın mesela? Yani üçgen alan formülünden bahsediyorum.

D: Evet? Yani buradan nasıl?

A: Yani BDA Üçgeninin BDA üçgenine bak. Alanını nasıl hesaplarsın?

D: Alanını mı? İşte bu ABD ile ACD nin alanını toplayarak Demiş zaten. (5)

…

Diyaloğunda öğrenci ilk önce $|ED|$-$|DF|$=$|HC|$ eşitliğini göstermek için akıl yürütmüştür. Daha sonra soruda verilen bağıntıyı ispatlaması gerekirken zaten doğal olarak soruda belirtilen ifadeler kullanması fikir ileri sürme bileşeninin izlerinin zayıf olduğunu göstermektedir.

Ayrıca ispat yapmayı gerektiren çember ve daire sorularında da diğer sorulara göre aksaklıklar yaşandığı barizdir. Problem 23'ün tartışıldığı oturumdan verilen aşağıdaki örnekte öğrencinin fikir ileri sürme çabalarının olduğu ancak düşüncelerinden yola çıkıp adımları ilerletememiş ve çıkarımlar yapamamıştır.

…

D: Şu an o 90 derecelik açıdan gitmeye çalıştım. Burası 90, yani FG deki FH 90 derece. O zaman HG de 90 derece olacak. HD ile DG 45, 45 olsa dedim orası HD 45 olduğu zaman FC de 45 olacak. Öyle olunca 180 derece eee ondan sonra… (1,3,4,8(a,b))

…

D: Bu FEH 90 derece olduğuna göre HEG de 90 derece olmalı, şöyle tahmin ettim ya da şöyle yaptım. HEG deki E noktasından bir açıortay çizilmiş D noktasına. (1,6)

…

D: Hmm. Ben şimdi C den H ye bi doğru parçası çizip HEC üçgeni yaptım çizdim. (1,3)

A: Peki.

D: Şimdi bunun bir geniş açılı üçgen olduğunu biliyoruz. O ne olduğu belli değil artık nedir ne değildir. Bu bir ikizkenar üçgense şimdi öyleyse olmaya da bilir. Bi defa mantıken CE, HE ye eşit olduğu için ED ye de eşit olur. Çünkü FG kirişi eşit bölmüştü. Daha sonra bu yarı çemberin tüm hali CD doğru parçasından daha uzun olur Çünkü H şu an çapta yani çap değil yarıçap da değil bu yüzden bu çizilen dairenin az çok nereye geleceğini bilebiliriz. (1,4,6)

…

Diyaloğundan anlaşılmaktadır ki; öğrenci fikir yürütmek için adımlar atmış ve çaba göstermiş ancak temeli olmayan tahminler yürüttüğünden zayıf bir akıl yürütme süreci yaşamıştır.

Fikir ileri sürme bileşeninin izlerine ispat yapmayı gerektiren sorularda en çok rastlanan Problem 2'nin tartışıldığı oturumdan bir diyalog örneği aşağıda verilmiştir.

…

D: Eee şöyle diyor benim anladığım kadarıyla. Bu hipotenüsün ortasına çizilen kenarortay bu hipotenüsün yarısı kadarmış. Bu kenarortay zaten hipotenüsün ortasına çizilmesi gerekiyor. O zaman aslında bunu bu tarafa doğru yatırsak eşit olur. (1,4,6)

A: Ne tarafa yatırıyorsun?

D: Buradaki BD çizgisini sola veya sağa yatırırsak hipotenüsle eşit olur çünkü bölerken ortadan bölmesi gerekiyor. (4,6)

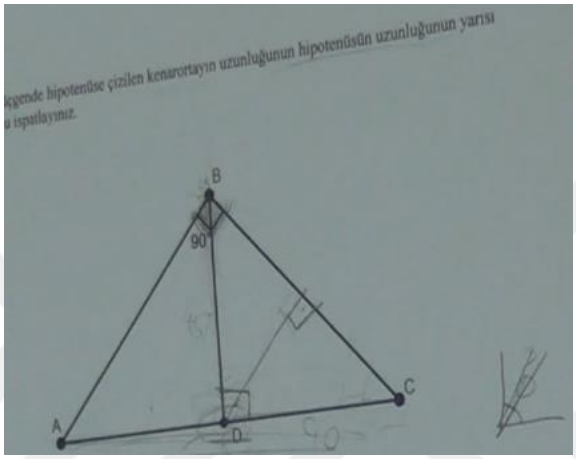
A: Nasıl gösterirsin peki bu sorunun dediğini?

D: Aslında buradaki çizgi (BD yi kastediyor) her an değişebilir bir şey. Üçgenden üçgene değişebilir. (1,4)

A: Evet doğru söylüyorsun.

D: Burda 90 derecelik açıyı oluşturmuşlar. Bu 90 dereceyi ikiye böler yani açıyı 45, 45 bölmüş. Bölünce de bu hipotenüsü ikiye tam ortaya bölmüş olmuş ve eşitlenmiş. Bu da denk geliyormuş. Nasıl ispatlayabilirim. (düşünüyor) burası da aslında farklı bir şey oluyor, dik açı oluşturur. (BD nin AC ile yaptığı açıdan bahsediyor) (1,4)

…



Şekil 21. Öğrencinin Problem 2'ye ait çalışması

Şekil 21'den de görüleceği gibi öğrenci B açısının kenarortay doğrusu ile bölünmesinden dolayı iki eşit parçaya bölüneceğini ve 45° lik açılar oluşturacağını ve aynı zamanda kenarortay doğrusunun [AC]'yi dik keseceğini düşünmektedir. Bunlar öğrencinin fikir ileri sürme (1) bileşeninin izlerini yansıtmaktadır.

4.1.2.2.İddia Etme

Tablo 19
İddia Etme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
5	1	0	3	0	1	1	2	1	3	4	0	3	0	0	4	2	1	2	0	0	1	0	1	2	2	0	39

Öğrencinin ortaya koymakta en çok zorlandığı akıl yürütme göstergesi iddia etme bileşenidir. Trigonometri sorularının hiçbirinde bu bileşenin izleri bulunmamaktadır. Çokgenler sorularının tümünde iddia etme bileşeninin göstergeleri mevcuttur. Diğer alt öğrenme alanlarında bu bileşenin izlerinin olduğu ve olmadığı durumları gözlemlemek mümkündür. İspat yapmayı gerektiren ve soru kökü "nedir?" olan sorularda, ilişki kurmayı gerektiren ve soru kökü "nasıldır?" olan sorulara göre daha iyi akıl yürütmüş ve iddia etme bileşeninin göstergelerini nispeten daha çok gösterebilmiştir. "nedir?" soru köklü sorulardan sadece alan ölçme ile ilgili soruda bu bileşene ait izler görülmemiştir. İlişki kurmayı gerektiren sorularda ise sadece trigonometri sorusunda iddia etme bileşeninin herhangi bir izi ortaya çıkmamıştır. Aşağıdaki diyalogda iddia etme bileşeninin en çok karşılaşıldığı Problem 1'den bir örnek verilmiştir. Öğrencinin

…

D: Çünkü şöyle bir açı olabilir mi? (tam açı çiziyor). Şöyle bir şey var, bi açı buradan başlayıp aynı noktada bitebilir mi? Bitemez (1,2)

A: Düşün bakalım. Yok mu öyle bir açı?

D: Açıkçası yok.

A: Neye benziyor sence öyle bir şey?

D: Açı olarak düşünürsek 360 derece dönüyor. (1,4)

A: Tamam.

…

D: Açıölçerler bile 180 derece. O zaman olmayabilir. Ama bize okulda 180 derece öğretiyorlar. Orası da farklı bir şey. Ben yine aynı mantıkla gitsem? (1)

…

D: Şimdi açı dediğimiz aslında iki ışından oluşur. Bunun olma ihtimali için bir tane daha ışın gerekir. Ama ışın gerekirse de o zaman böyle bir şey olur. O yüzden olmama ihtimali bana daha mantıklı geliyor. (1,2,6,8(a, b))

A: Hmm.

…

Diyaloğunda tam açı hakkında ısrarcı yaklaşımlarının olması iddia etme (2) bileşeninin izleridir. Öğrenci aslında 360°'nin olduğunu görmüş ve ifade etmiştir. Ancak açıölçer örneğinden ve kendini okulda öğrendikleriyle sınırlı hissetmesinden kaynaklı böyle bir açı olamayacağını kesin bir şekilde düşünmektedir.

"nasıldır?" soru köklü ve üçgenler konusunda iddia etme bileşeninin izlerinin en çok görüldüğü Problem 16'dan alınan bir diyalog örneği aşağıda verilmiştir.

…

D: B dik açı olduğunda AH, A nın açıortayı olursa zaten her türlü üçgende AH, A nın açıortayı olur. (2,4)

A: Neden?

D: Çünkü bi defa A H ye tam olarak üzerinde ya da karşısında bi şekilde olmuyor. Ben eşkenarda ve ikizkenarda hep öyle düşündüm. Zaten tam olarak dik bi şekilde durmayacaksa bu şekilde bile açıortay oluyor. (1,6)

A: Hmm. Diğer üçgenlerde direk karşısında düşündün, bunda değil diyorsun?

D: Yani eğer bunda olursa diyorum hepsinde olur diyorum ama olmazsa ikizkenar ve eşkenarda olur. (4)

A: Hmm, anladım. Peki dik üçgende olursa diyorsun, olur mu?

D: Dik üçgen olmaz, eğer olursa hepsinde olur diyorum işte. (2,4)

…

D: Iıı karşısındaki açı olarak o var yani. İlla tam üstünde olması gerekiyor mu?

A: Tam üstünde derken? Karşısında mı diyorsun? Yoo, gerekmiyor, mesela şekilde karşısında mı tam?

D: Değil.

A: Değil. Gerekiyor mu illa?

D: Gerekmiyor, o zaman bütün şekillerde her türlü AH, A nın açıortayı olur. (2)

A: Fark etmiyor diyorsun üçgen şekli?

D: Evet.

…

Burada öğrencinin her türlü üçgen durumunda [AH]'nin A açısının açıortayı olacağı hakkında ısrarda bulunması iddia etme (2) bileşeninin göstergesi olduğu açıkça görülmektedir.

Problem 13'te ise;

…

D: İki tarafı eşit olacak bu iki kenarın değil mi?

A: Evet.

D: Bunun bu öyle olduğu zaman da taban demiş. Taban altta. Bana göre aynı değil bence Çünkü bir defa bütün Uzunlukları aynı değil yani siz bir dikdörtgeni çizip bir aşağıdan yukarıya Bir de böyle sağdan sola çektiğinizde eşit olmaz değil mi? (1,2,6,7)

A: Tamam.

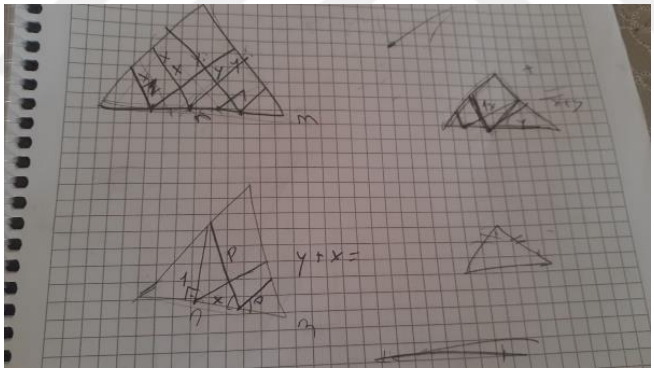
D: kenardan köşeye Doğru getirdiğimizde biri daha uzun olur biri daha kısa olur Bunun da bütün kenarları eşit olmadığı için bence o da olmaz eşit olmaz yani.(2,4,6,7)

A: Ama öyle olduğunu söylemiş bunu ispatlaman gerekiyormuş Üstelik. O zaman farklı bir bakış açısıyla gidersek. Bi kere sen niye aynı olmadığını düşündün?

D: ben onun üç kenarı da eşit değil iki kenarı eşit. Mesela biz tabanı Buradan direkt karşıya geçirirsek farklı olur hatta dibine geçirsek farklı olur yani. (1)

…

Diyaloğunda görülmektedir ki; "Bir ikizkenar üçgenin tabanındaki bir noktadan diğer kenarlara olan uzaklıkların toplamı, tabandan alınan bütün noktalar için aynıdır." Önermesinin doğruluğunun belirtilmesine rağmen öğrenci bunun aksinin doğru olması gerektiğini düşünmüş ve bunun üzerine iddialarını ortaya atmıştır. Böyle düşünmesinin nedeni tabandaki bir noktadan kenarlara çizilen doğru parçalarının uzunluklarının birbirine eşit olamayacağı, birinin uzun ve diğerinin kısa olacağını ifade etmesindendir. Fakat aynı zamanda ikizkenar üçgen olduğu için de kenarlara çizilen doğru parçalarının uzunluklarının eşit olması gerektiğini düşünmüştür. Dolayısıyla verilen önermenin doğru olmadığını iddia etmiştir.



Şekil 22. Öğrencinin Problem 13'e ait çalışması

Diğer sorularda iddia etme becerisinin izleri çok az görülmüş ya da hiç görülmemiştir.

4.1.2.3.Seçim Yapma

Tablo 20
Seçim Yapma Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
5	1	2	7	1	1	3	6	4	2	6	2	5	0	6	5	8	5	14	1	0	4	3	4	0	4	1	100

Öğrenci seçim yapma bileşeninin göstergelerini en iyi "nedir?" ve "nasıldır?" soru köklü sorularda ortaya çıkarmıştır. İlişki kurmayı gerektiren sorularda ise seçim yapma bileşeninin izlerinin çok az olduğu görülmektedir. Soru kökü "nedir?" olan sorularda alan ölçme, soru kökü "nasıldır?" olan sorularda üçgenler, ilişki kurmayı gerektiren sorularda trigonometri ve ispat yapmayı gerektiren sorularda eşlik ve benzerlik alt öğrenme alanları dışında bütün sorularda seçim yapma bileşeninin izlerine rastlanmıştır. Aşağıdaki diyalogda öğrencinin seçim yapma bileşeninin en sık gözüktüğü Problem 19'dan bir alıntı verilmiştir.

…

A: D noktasını peki neye göre konumlandırdın? Bu noktaları birleştirince hepsinin iç açıortayı tek bir noktada kesişecek.

D: Iıı şöyle yaptım. Normal bir dikdörtgen çizdim. Hepsinin köşegenini koydum. O da oldu. (1,3,5,8(a,b,c))

…

D: mesela Bence paralelkenar veya dikdörtgende kesişir ama dikdörtgeninde dikdörtgeni var yani biri upuzun biri kısa. (1,3)

A: yani açıortay değil köşegenler. Köşegenler açıortay değil.

D: Değil.

A: Hıhı. Yani Bu köşegenler açıortay olmalı.

D: Mesela bize dörtgen demiş karede olur bence.(1,3)

A: Olabilir tabi. Kare olacak şekilde yerleştireceksen.

D: Şöyle çizdim. Karede oldu çünkü karenin her kenarı eşit bir defa o yüzden de açıortayları elbet bir yerde kesişti. Yani kesişir her türlü karede. (4,6)

A: köşegenler açıortay oluşturuyor çünkü.

D: Evet.

A: peki başka ne tür bir dörtgen Olabilir?

D: Iıı eşkenar dörtgen vardı sanırım bide. (1,3)…

D: belirli bir şekil olması lazım, o şekilde çıkarsa zaten hareket etmesine gerek kalmaz. (1,2,4)

A: Belirli bir şekil olmak zorunda değil ama.

D: O zaman mesela bir karede kare şekli üzerinde olabilir eşkenar üçgen üzerinde olabilir ay eşkenar dörtgen üzerinde olabilir. Başka…(1,2,3)

A: bu bildiğimiz dörtgenler değilse ne olacak peki?

D: Nasıl bir bildiğimiz dörtgen olmayabilir?

A: Yani rasgele düzgün olmayan bir dörtgen. Yani dikdörtgen değil kare değil eşkenar dörtgen değil.

D: Hmm şöyle yamuk yumuk bişey. (düzgün olmayan dörtgeni canlandırabildiğini düşünmüyorum en azından kolay değil)

…

A: ya da ABC nin ne tür bir özelliği vardır?

D: Öyle bir şekil olmalı ki A ve B altlı üstlü Dursun A ve B nin denk geldikleri noktalarda C ve D olsun.(1,3)

A: Tamam.

D: madem C hareketli durmuyor.

A: Evet bu üç nokta sabit.

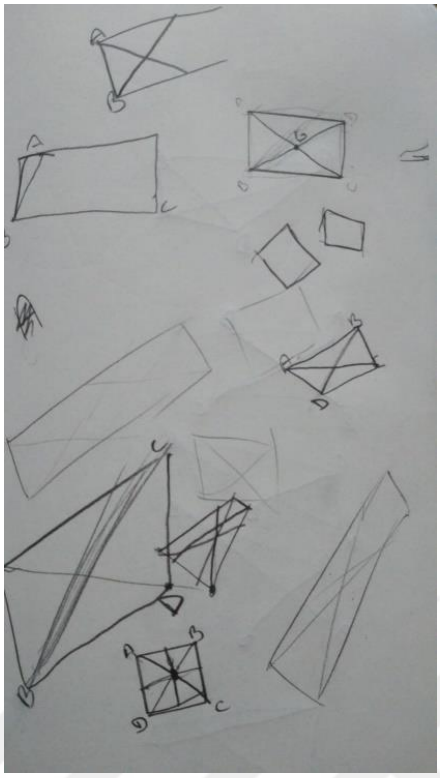
D: normal bir şekilde kenar çizeriz. AB ve de C. Sonra hepsinin karşılığına bakarız. Şöyle. D de Anın konumuna göre yani A nın konumuna göre bir yerde durur. Olmaz mı? (1,3)

A: niye A nın konumuna göre?

D: Ya A da olur B de olur C de olur. Artık hangisinin açıortayına denk gelmesi gerekirse. Ben şimdi A olarak yaptım da. (1,3)

…

Bu örnekte öğrencinin dörtgenler arasında kendi düşüncesine göre tercihler yapıp dörtgen şekline göre soruyu değerlendirmek istemesi seçim yapma (3) bileşeninin izlerini yansıtmaktadır. Öğrenci burada deneme yanılma yoluyla akıl yürütmüştür. Bildiği dörtgenler üzerinde köşegen uzunluklarını çizmiş ve soruda isteneni sağlayıp sağlamadığını kontrol ederek cevaba ulaşmaya çalışmıştır.



Şekil 23. Öğrencinin Problem 19'a ait çalışması

Şekil 23'ten de görülmektedir ki; öğrenci seçtiği dörtgenler üzerinde köşegen uzunluklarını çizmiş ve buna göre seçimler yapmıştır.

Eşlik ve benzerlik alt öğrenme alanına ait soruların birinde seçim yapma bileşenine ait göstergeler mevcuttur. Trigonometri alt öğrenme alanına ait olan Problem 5'te seçim yapma bileşeninin izlerine rastlanmışken Problem 21'de rastlanmamıştır. Problem 5'ten alınan;

…

D: Kenarına, öle olabilir mi? Ya da açısına da demiş olabilirler. Açısına derlerse nasıl bir üçgen olduğu belli oldu çünkü 180 derecelik bi üçgen olur. Belki dik açılı üçgen olarak da söylemiş olabilir. Sıfırdan büyük demiş, her şey sıfırdan büyük olabilir. Eğer bir kenarına, şöyle bir üçgen çiziyorum şu an şekli bu demiyorum. Buraya A deseler buraya B deseler buraya C deseler (kenarlara dedi). Bunların çarpımına x desek atıyorum. x>0. O zaman… Kosinüs kenar uzunluğu mu olur yoksa sadece bi kenar adı falan mı? (1,3,4)

…

Diyaloğunda öğrenci kenarlar ve açılar arasında bir seçim yapmış ve açı ölçülerinden ilerlemeyi seçerek buna göre yorum yapmıştır.

Üçgenler alt öğrenme alanında ise sadece Problem 14'te seçim yapma bileşenine ait herhangi bir gösterge mevcut değildir.

Problem 11 için aşağıdaki diyalog incelendiğinde;

…

A: Eşitlikleri iyi kullan.

D: Onu kullanmaya çalışıyorum. (düşünüyor) eşkenar değil, eşkenar değil gibi, dik üçgen denesem mesela. Büyük ihtimalle bu dik üçgen dik açılı üçgen olur. (1,3)

A: Nasıl?

D: C 90 derece. (1,2)

A: Nasıl buldun peki?

D: Şöyle ilk önce eşkenar üçgeni eledim çünkü bütün açıları eşit olacak ve C den D ye çizilen bir kenarortay kesinlikle eşit olmaz. (1,3,6)

…

D: Ben sayı verdim de şuan. Yani şöyle ikizkenarın 2 ikiz olan kenarlarına 2 santim alt tarafını 3 desek ya da üste 4 desek alta 3 desek, her neyse, yarıya böldüğümde 1, 1 böler ve bu kenarortayın da uzunluğu ortalama böyle bir iki buçuk gibi bir şey olur. Yine olmaz yani eşit olmaz. Ama dik kenarda direkt karşıya doğru geçecek yani dik kenarı ikiye böldüğümüzde de yine dik açılı bir üçgen olur. Yine böldüğümüzde kenarortay yine dik açılı olur demi? (1,2,3,4)

…

Öğrencinin ilk önce üçgen çeşitleri arasında seçim yaptığını göstermesi ve daha sonra ise çözüm aşamasında değer verme yoluna gitmesi seçim yapma (3) bileşeninin izleri olduğunu göstermiştir.

4.1.2.4.Çıkarım Yapma

Tablo 21
Çıkarım Yapma Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
41	31	9	17	3	11	19	13	12	8	4	11	5	12	6	12	17	6	4	3	0	11	5	9	3	7	5	284

Öğrencinin en iyi ortaya koyduğu göstergelerden birisi de çıkarım yapma bileşenine aittir. İlişki kurmayı gerektiren ve trigonometri alt öğrenme alanına ait olan Problem 21 haricinde bütün sorularda çıkarım yapma bileşeninin izlerini gözlemlemek mümkündür. Bunun yanında "nasıldır?" soru köklü Problem 5 trigonometri sorusunda bariz şekilde olmasa da çıkarım yapma bileşenine dair izler görülmüştür. Bununla ilgili

…

D: Kenarına, öle olabilir mi? Ya da açısına da demiş olabilirler. Açısına derlerse nasıl bir üçgen olduğu belli oldu çünkü 180 derecelik bi üçgen olur. Belki dik açılı üçgen olarak da söylemiş olabilir. Sıfırdan büyük demiş, her şey sıfırdan büyük olabilir. Eğer bir kenarına, şöyle bir üçgen çiziyorum şu an şekli bu demiyorum. Buraya A deseler buraya B deseler buraya C deseler (kenarlara dedi). Bunların çarpımına x desek atıyorum. x>0. O zaman… Kosinüs kenar uzunluğu mu olur yoksa sadece bi kenar adı falan mı? (1,3,4)

…

Diyaloğunda öğrenci rastgele herhangi bir temeli olmayan tahminler yapmıştır. Bu tahminlere göre bir takım sonuçlara varması zayıf da olsa çıkarım yapma (4) bileşenine işaret etmektedir.

Bu bileşenin izlerine en sık soru kökü "nedir?" olan sorularda rastlanmıştır. Bu kategoride üçgenler alt öğrenme alanına ait olan soruda çıkarım yapma bileşeni diğer sorulara göre daha az görülmüştür. Temel geometrik kavramlar ve çizimler ile üçgenler alt öğrenme alanları öğrencinin bu bileşeni en iyi ortaya çıkardığı sorular olmuştur. Trigonometri ile eşlik ve benzerlik alt öğrenme alanları çıkarım yapma bileşeninin izlerinin en az görüldüğü sorulardır. İspat yapmayı gerektiren sorularda bu bileşeni gösterebildiği ve gösteremediği durumlar olmuştur.

Öğrencinin bir diğer zorlandığı sorular arasında ise üçgenler alt öğrenme alanında ispat yapmayı gerektiren sorular yer almaktadır. Bununla ilgili Problem 13'ün tartışıldığı oturumdan bir örnek verilmiştir.

…

D: kenardan köşeye Doğru getirdiğimizde biri daha uzun olur biri daha kısa olur Bunun da bütün kenarları eşit olmadığı için bence o da olmaz eşit olmaz yani.(2,4,6,7)

A: Ama öyle olduğunu söylemiş bunu ispatlaman gerekiyormuş Üstelik. O zaman farklı bir bakış açısıyla gidersek. Bi kere sen niye aynı olmadığını düşündün?

…

D: Biz ortalama bu m nin uzunluğunu tahmin edebileceğimiz için bunların uzunluğunu da az çok biliriz değil mi? (1,4)

A: Evet.

D: O yüzden de o doğru parçalarına x ve y dedim ben.

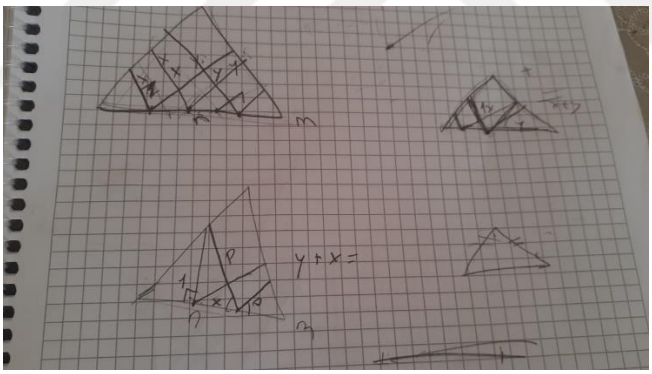
A: Tamam.

D: işte bu yüzden burda ne kadar rastgele seçsek de biz bu m nin uzunluğunu bildiğimiz için hesaplayıp bulabiliriz yani illa ortada olması falan gerek yok. (6)

A: Hmm. Tamam, yani o N oranından mı biliyorsun?

D: M nin uzunluğunu bildiğimiz için N yi de bulabiliriz yani. (4)

…



Şekil 24. Öğrencinin Problem 13'e ait çalışması

Şekil 24'te görüldüğü gibi öğrenci bir takım tahminler ortaya atmasına rağmen pek akla uygun sonuçlara varamadığından çıkarım yapma bileşeninin göstergelerinin zayıf olduğu görülmüştür. Öğrenci Problem 1'de çıkarım yapma bileşeninin izlerini en net şekilde ortaya koymuştur. Aşağıda bu sorudan bir kesit verilmiştir.

…

D: Zaten 10 tane şey var. Böyle diyerek yapsak, her iki tanesi ortasında bir boşluk bırakacak. O zaman 9 tane falan olur saymadan yapınız dediğine göre. Zaten böyle düşünürsek, buraya 5 tane çizsem 5 tane boşluk oluyorsa, o zaman 10 tanede 10 tane olur.(1, 4)

A: Hmm.

D: Farklı ışın dediğine göre ama hepsi aynı boyutta olursa, bütün açılar aynı olur. Bence bir tane farklı ışın, bir açı. Bir tane açı (burda açı ölçüsünden) oluşur, 10 tane bölüm(burda açıdan bahsediyor, açıya bölüm demiş) olur. Öyle. (farklı ışınları boyları farklı olarak düşünüyor, ışının boyu olduğunu düşünüyor) (4)

A: Ne demek istedin, biraz daha açıklar mısın?

D: Hepsinin açısı aynı olur hepsi atıyorum 90 derece olur fakat 10 tane bölme (açıdan bahsediyor yine) olur aralarında. Öyle düşünüyorum. (4)

…

D: Ve her biriyle teker teker yapacağını varsayarsak kendi yuvarlak olarak da 5 olur. Yine 100 e gelir. Fakat her birini dıştan sayarsak. (4,6)

A: Ama ben diyorum ki bak, dışardaki kareyi bir kere sayarız dedin ya, burda dışardaki bir tane 360 dedin. Bir kere saysak yeterli değil mi?

D: Yeterli. Birine 5 olur diğerlerine 4 olur. (4)

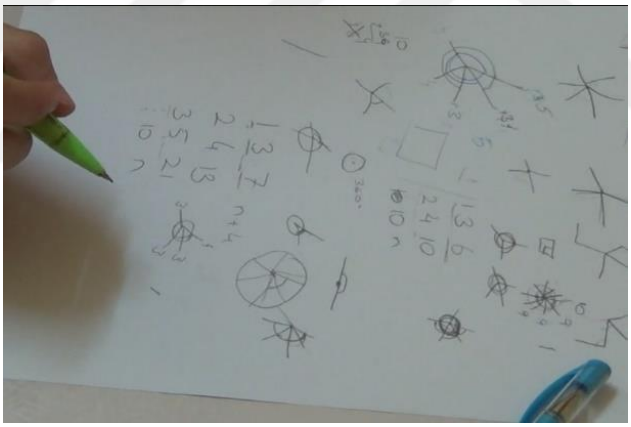
A: Niye işte diğerlerine de ekliyorsun?

D: Çünkü bi kere biz bu yuvarlağı oluşturduk. Sonra hangi ışından başlarsak başlayalım yine aynı yuvarlak ortaya çıkacak. Yani yine aynı şey olacak. (4,6)

A: Tamam bir kere sayarsan yeter yani.

D: Evet dediğiniz gibi. O zaman biz bir ışına 5 desek, diğerlerine de yuvarlak oluşmayacağı için 4 diyeceğiz. O zaman bu 10 da, 10 tane ışın var. Bi tanesine 10 desek, diğerlerin hepsine 4 desek. Bu da 46 açı falan oluşturur. (1, 4)

…



Şekil 25. Öğrencinin Problem 1'e ait çalışması

Şekil 25'te de görüldüğü gibi öğrenci ilk önce ilk bakışta görünen açılarla yetinmiştir. Daha sonra başka açıların da olabileceğini düşünmüş ve hepsini saymaya çalışmıştır. Sayarak olamayacağını fark edince örüntü kuralı bulma yoluna gitmiştir.

Soru kökü "nasıldır?" kategorisinde çıkarım yapma bileşenini en iyi gösterdiği sorulardan biri Problem 16 olmuştur. Aşağıdaki diyalog bu sorunun tartışıldığı oturumdan alıntıdır.

…

D: Çünkü sanki yamulttukça daha çok kötü olmaz mı? Eğer ıı F yi B ye yaklaştırırsak, G yi de C den uzaklaştırırsak, yeterli oranda o zaman tam açıortay olur. (1,4,6)

…

D: Yine dediğim gibi, F yi B ye yaklaştıracağız, C yi de G ye yaklaştıracağız. Hepsini aynı oranda yaklaştırırsak hem H A nın açıortay olur tam bi şekilde hem de aralarındaki mesafe aynı kalır. (1,4,6)

…
Öğrenci [AH]’nin A açısının açıortayı olabileceği durumları açıklarken “eğer… ise…” şeklinde çıkarımlarda bulunmuştur.

4.1.2.5.Doğrulama/yanlışlama

Tablo 22
Doğrulama/yanlışlama Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
2	6	1	9	0	6	5	4	2	4	2	0	0	0	2	0	1	1	8	0	0	1	1	2	2	0	2	61

İzlerine en az rastlanan bileşenlerden biri doğrulama/yanlışlama bileşenidir. Öğrenci soru kökü "nedir?" olan sorularda diğer soru türleriyle karşılaştırıldığında bu bileşenin göstergelerini daha iyi sergileyebilmiş ve sadece bir çokgenler alt öğrenme alanına ait olan Problem 26'da bu bileşen hiç gözlemlenmemiştir. İspat yapmayı gerektiren sorularda ise sadece iki üçgen sorusunda bu bileşenin izlerini yansıtabildiği bir durum olmamıştır. Doğrulama/yanlışlama bileşeninin en sık görüldüğü soru ise ilişki kurmayı gerektiren bir alan ölçme sorusu olmuştur. Problem 4'ten verilen alıntıda görüldüğü gibi öğrencinin bulduğu sonucu başka yollarla desteklemeye çalışması doğrulama bileşeninin varlığının bir göstergesidir.

…

D: Cetvel gibi kullansak o zaman eşit olduğu kanıtlanır. Bunu kâğıt veya bir şey üzerinde gösterebiliriz ama o da buna orantılı olur mu bilemeyiz. (Düşünüyor)belki şey olabilir. Burda bu kenar zaten bu kenara eşitse buradaki F noktası şuraya gelir. Bu kenar da böyle katlanırsa yani burası buraya eşitse (bir şekli diğer şekil üzerine denk gelecek şekilde döndürüyor.) (1,3,4,5,8(a,b))

A: Eee yani doğru mu anladım, şöyle sorayım. EDFG paralelkenarına ABCD paralelkenarı üzerine mi getirmeye çalıştın?

D: Gibi.

A: Kaydırdın mı noktaları?

D: Evet kaydırdım. Eşit olursa.

A: Hmm. O yüzden nedir diyorsun aralarındaki ilişki?

D: ABCD ve EFGD birbirine eş dikdörtgenlerdir diyorum. (2,5)

A: Dikdörtgen mi bunlar?

D: Eee paralelkenarlardır. Yani alanları aynıdır diye düşünüyorum. (1)

A: Anladım.

D: Belki eee buranın şöyle ayrı bir şeyler olarak düşünürsek yüksekliğini bularak da yapabilirdik. (1,3,5)

D: Eee mesela ABCD böyle bir elim olsa, EFGD de böyle duruyor diye varsaysak bu buranın buraya oranını bularaktan da eşit olduğunu gösterebilirdik. (1,5)

A: Hmm.

…

D: Hıhı böyle düşündüm. (Bir süre düşünüyor) Eğer AD kenarı ED kenarına eşitse, burayı birleştirirsek bu FC de kesişim noktalarıyla C ye eşit olursa, mantıken B ile bu kesişim noktasının CG ye eşit olması gerekir diye düşünüyorum. Görüntü olarak öyle gözükmüyor ama belki de görüntüye bağlı değildir. Eğer zaten böyle olursa B ile kesişim noktası. (1,3,4)

A: Bir isim ver istersen.

D: K diyeyim. BK kenarı CG ye eşit olursa zaten yine bu sonuç çıkar. O zaman yine arasındaki ilişki aynı olur. Bunun başka bi yolunu düşüneyim olur mu? (3,5,7)

A: Olur.

D: Belki şey olabilir, eşit olduğunu kanıtlamak için AB doğru parçası E noktasının herhangi bir yerine konulmuş ya, bu mesela 4 bölü değil 6 bölü 3 desek atıyorum şu an bu daha kısa o zaman FG doğru parçası C noktasına eğer eşit olduğunu kanıtlamak için bu da 4 bölü 2 gibi bir şey olur. Yani bunlar da zaten birbiriyle aynı. (1,4,6,7,8(a,b,c))

A: Orantılıdır mı diyorsun yani?

D: Hıhı evet. Eşit olduğunu kanıtlamak istiyorsak zaten buranın uzunluğu yani bu noktayı koymuş ya C noktasını onu koyduğu bölümle bu E noktasının AB doğru parçasına koyulduğu bölümün eşit olması gerekir, orantılı olması gerekir. O zaman öyle olduğu zaman zaten yine buna varırız. Çünkü burda kaydırılmış cisim. Öyle düşünüyorum. (Düşünüyor) Eğer şekillere benzediği için düşünüyorum. Olur, mu bilmiyorum ama CGD üçgeninin iç açıları mesela 45, 45, 90 ya, bu BKE üçgeninin şey desek 85, 50, 50 olur mu işte öle desek atıyorum. Aralarında 5 derece fark olur, 50 olmaz. Onu fark ettim. 5 farkı da buraya iki tarafına farklı farklı yaydığı için, bu üçgenle yani EBK üçgeniyle DCG üçgeni de birbirine eş olur. Buralar eşit olursa zaten bu çizgiyle de bu çizgiyi eş kılmıştım. O zaman yine aralarındaki ilişki eşit olduğu ortaya çıkar. (2,3,4,5,6,7)

…

Bu diyaloğa göre öğrenci ilk önce bir paralelkenarın belli bir açı ile döndürülmesiyle diğer paralelkenarın elde edilmesinden dolayı alanlarının eşit olacağı sonucuna varmıştır. Bunu kağıt katlama veya birini diğer paralelkenarın üzerine getirmek şeklinde açıklamıştır. İkinci olarak ise görünüşten bakarak kenar uzunlukları arasında eşitlik yakalamaya çalışarak önceki bulduğu sonucu doğrulamıştır.

Bunun yanında trigonometri sorularında doğrulama/yanlışlama bileşeninin izlerine hiç rastlanmamıştır. Eşlik ve benzerlik ile çokgenler alt öğrenme alanlarından birer soruda da yine bu bileşen ortaya çıkmamıştır. Soru kökü "nasıldır?" olan sorular öğrencinin en zorlandığı sorular olmuş ve bu bileşenin izlerini gösteren sadece iki soru mevcuttur. Özellikle Problem 19'un tartışıldığı oturumda doğrulama/yanlışlama bileşeninin izlerine sık rastlanmıştır. Aşağıda verilen diyalogda öğrenci farklı şekillerde sonucunu desteklemeye çalışmıştır.

…

A: D noktasını peki neye göre konumlandırdın? Bu noktaları birleştirince hepsinin iç açıortayı tek bir noktada kesişecek.

D: Iıı şöyle yaptım. Normal bir dikdörtgen çizdim. Hepsinin köşegenini koydum. O da oldu. (1,3,5,8(a,b,c))

…

A: bu bildiğimiz dörtgenler değilse ne olacak peki?

D: Nasıl bir bildiğimiz dörtgen olmayabilir?

A: Yani rasgele düzgün olmayan bir dörtgen. Yani dikdörtgen değil kare değil eşkenar dörtgen değil.

D: Hmm şöyle yamuk yumuk bişey. (düzgün olmayan dörtgeni canlandırabildiğini düşünmüyorum en azından kolay değil)

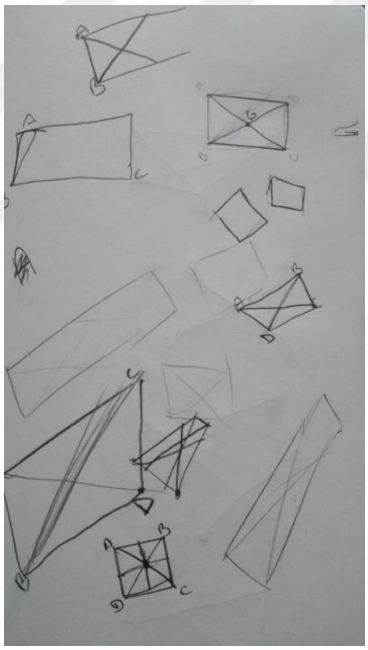
A: Evet senin deyiminle yamuk yumuk bir şey. Yani kenar uzunlukları rastgele mesela ABC yi öyle bir yerleştiriyorsun ki birbirinden mesela Aile B yakın birbirine ama C uzak. Rasgele bişey çiz yani.

D: Çizdim rasgele bişey. Yine buluştu ki. (1,5,7)

…

D: Evet. Bi köşe seçiyoruz öyle olabilecek artık kaç tane vardır bilemiyorum. O ikisine A,B veya C den ikisini yerleştireceğiz. Biri kalacak. O birinden de o kalan birini de yine kalan köşelerden birine yerleştirip bunun açıortayı nereye denk geliyorsa oraya D yi koyacağız. Ve tabi açıortayı artık farklı bi şekilde bölebilirse farklı yerlere de hareket edebilecek D noktası. (1,3,5,8(a,b,c))

…



Şekil 26. Öğrencinin Problem 19'a ait çalışması

Şekil 26'dan anlaşılacağı üzere öğrenci farklı şekiller üzerinde bulduğu sonucu denemiş ve bu da doğrulama (5) bileşeninin varlığını göstermiştir.

Ayrıca bu bileşene ait göstergelerin en çok var olduğu alanlardan olan üçgenler alt öğrenme alanında ispat yapmayı gerektiren Problem 2'de yanlışlama bileşeninin izlerinin nasıl ortaya çıktığı da aşağıdaki kesitte verilmiştir.

…

D: Çünkü hipotenüse çizilen kenarortay bölmediğini düşünürsek yani ikiye ayırmadığını şey yaparsak, burda da aslında kendi içinde bir dik açı oluşturmuş olur. Ve bu kenarortay hipotenüse yarısına geliyorsa o zaman buradan çizilen bir kenarortay da buranın hipotenüsüne eşit olması gerekir. (D noktasından BC ye çizilen kenarortaydan bahsediyor, BDC açısının dik olduğunu düşünüyor). Sonra buradan çizilen herhangi başka bir dik açı oluşur. Buranın hipotenüsü burası olur. Tabi göz kararımı bilmiyorum ama burasıyla burası eşit olduğu için (BC yi ikiye bölen parçalardan bahsediyor). Aslında şöyle bu hipotenüs nasıl eş geliyor, o kanıtlanabilir. Bir tane daha dik açı oluşturuyor burda. Bunun da hipotenüse karşı kenarortayı çizdiğimiz zaman üçgeni ikiye bölmüş oluyoruz ve bu durumda katladığımız zaman aslında tam olarak kenarortaya denk geliyor. Zaten bizim katladığımız bölüm de hipotenüsün yarısı. Katladığımız zaman kenarortay çizgisine tamamen oturduğu için bunu kanıtlamış oluruz. (1,4,5)

…

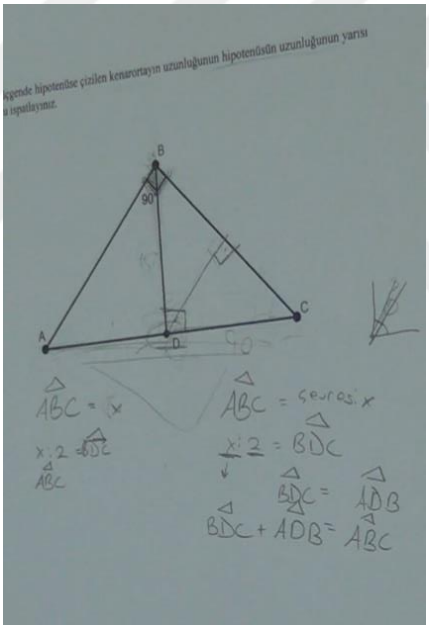
A: Biraz düşün. Aklına başka bir şey gelirse…

D: Daha demin dediğimi formüle dökebilir miyim diye düşünüyorum da. Şöyle olsa. ABC üçgeninin çevresi x, hipotenüs ona da y desek, kenarortay v olsa. Hmm olmuyor böyle. (1,4,5)

…

D: Öyle bir şey ki çevre uzunluğunu şu anda iç açıların toplamı… Yok olmuyor. Çünkü açıların toplamı 180 derece, ışınların uzunluğu 180 derece değil ki (kenar uzunluklarından bahsediyor) (5)

…



Şekil 27. Öğrencinin Problem 2'ye ait çalışması

Öğrenci önce değer vermek isteyerek üçgen çevresinden, hipotenüs ve kenarortay uzunluğundan yola çıkmak istemiş, daha sonra üçgenin iç açılarından bir sonuca varmak istemiştir ancak bu şekilde olmayacağına karar vermiştir. Bu durum öğrencinin yanlışlama bileşeninin bir göstergesini yansıttığını göstermektedir.

4.1.2.6.Gerekçelendirme

Tablo 23
Gerekçelendirme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
16	14	3	6	3	9	13	9	7	3	5	9	10	5	2	9	10	5	6	3	0	4	5	5	6	7	2	176

Öğrencinin akıl yürütürken fikir ileri sürme ve çıkarım yapma bileşenlerinden sonra en iyi ortaya koyduğu bileşen gerekçelendirme bileşenidir. Bu bileşenin bir trigonometri sorusu olan ve ilişki kurmayı gerektiren Problem 21 haricinde bütün sorularda izleri bulunmaktadır.

Gerekçelendirme bileşeninin izlerine en çok "nedir?" soru köklü sorularda rastlanmıştır. Bunu ispat yapmayı gerektiren sorular takip etmiş ve bu kategoride ise üçgenler alt öğrenme alanlarında daha çok ortaya çıkmıştır. Gerekçelendirme bileşeninin izleri "nasıldır?" soru köklü ve ilişki kurmayı gerektiren sorularda ise diğer kategorilere göre daha az gözlemlenmiştir. Öğrencinin bu bileşenin göstergelerini en iyi yansıttığı sorular ise bir temel geometrik kavramlar ve çizimler ile iki üçgen sorusu olmuştur. Aşağıda Problem 7'nin tartışıldığı oturumda öğrencinin bulduğu sonucu nasıl gerekçelendirdiğine dair örnek bir kesit verilmiştir.

…

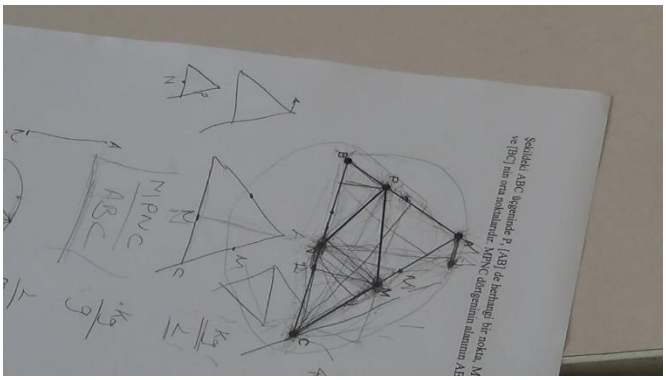
D: Öyle düşündüm. O zaman buna eşit olduğu zaman bi nevi N nin A ya uzunluğu olarak gösterdiğim çizgi ABC üçgenini tam ortadan ikiye bölmüş olur. Yani bi kere alt tabanın yarısı N. Yani bu dörtgenin bir kenarı BC kenarının ortasından geçiyor. M de öyle. M de tam burda zaten ortasında. C zaten şurada. Bu P, A yı N ye orantıladığım zaman bu P nin de ortaya gelmesini bekliyorum. Çünkü tamamen her tarafı eş olacak birbirine. O zaman her tarafına eş olduğu için bu ikisinin oranı yani MPNC dörtgeninin oranı ABC nin yarısı olur diye düşünüyorum. (1,4,6,8(a,b,c))

…

A: Anladım, tamam. Peki, başka nasıl yaklaşabiliriz?

D: Ne de olsa bu üçgenin her kenarı birbirine eşit değil. O zaman M tam ortasından kesse de, belki de AB yi o kadar uzattığımızda P noktası M gibi tam ortadan kesecek. O zaman yani şu AB noktasını şöyle uzatıp bunu yine aynı uzunlukta M ye verirsek, yani yine M yi tam orta noktada düşünürsek olursa, N zaten hep orta noktada P yi de orta noktaya alacağız. Çünkü uzatacağız M kadar. O zaman yine birbirine eşit bir dörtgen oluşur. O da yarısı olur zaten. (4,5,6,8(a,b,c))

…



Şekil 28. Öğrencinin Problem 7'ye ait çalışması

Burada öğrencinin "çünkü…" ile başlayan cümleleri önceki açıklamalarını destekleyen nedenler olduğundan gerekçelendirme (6) bileşeninin göstergelerini yansıtmaktadır. Öğrenci üçgeni A noktasından çizdiği ok yönünde bir miktar sağ tarafa doğru hareket ettirmiş ve böylece tabandaki N noktasıyla hizalamıştır. Bu durumda yukarıdaki diyalogda da açıkladığı gibi üçgenin kenarları üzerindeki noktalar tam ortada olacağından dörtgeninin alanını üçgenin alanının yarısı kadardır şeklinde cevaplandırmıştır.

İlişki kurmayı gerektiren Problem 8 gerekçelendirme bileşeninin izlerine az rastlanan bir soru olmuştur. Aşağıda verilen;

…

D: Şimdi bu AB çapına G noktasında kesişiyorlar ED çizgisiyle kirişiyle. Noktasında dik olarak kesişiyorlar. O zaman burda bu yaya gelecek her türlü şey zaten bir nevi birbirine eş olur diye tahmin ediyorum. (1,4)

A: Neden eş olur birbirine?

D: Ya mesela buradan buraya çizilen bir uzunluk tabi ki buradan buraya çizilen bi çizgiye eşit olmaz ama belki bu FG çizgisine bu NB gibi bir şekilde onun gibi bir açıda mı denir artık o durumda aşağı indirirsek eğer eşit olursa yani inerse o zaman bu birbirine eş olurlar. Çünkü zaten burası dik olarak kesiştiği için eş olmak zorundalar. (2,4,6)

A: Dik olarak kestiği için mi öyle?

D: Hıhı. Ama burda şöyle kesseydi bu PE den kesseydi, böyle olacaktı. Olmazdı o zaman. (1,3,4)

A: Niye?

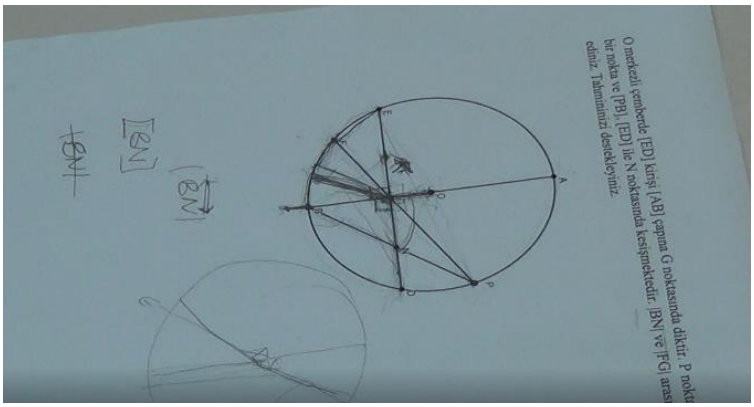
D: Çünkü böyle bir yuvarlak çember. Bunu orta noktası O yine. Bunu bu sefer şuradan şöyle kesmiş. (6)

A: Hmm bu senin DE kirişin galiba.

D: Hıhı. Böyle kesmiş. O zaman burda veya bu tarafta herhangi bir dik açı oluşmaz. O yüzden de zaten buranın bu bölümün uzunluğu buradaki çizginin uzunluğu ile şuradaki çizginin uzunluğu birbirine eş olamaz eşit olamaz. Ama buradaki ED kirişi AB ye dik olarak indiği için dik olarak birleştiği için G noktasında o zaman eğer bu NB nin açısına göre GF yi ayarlarsak ve sığıyorsa bu aralığa o zaman ikisinin eş olması gerekir. Ama eğer sığmıyorsa zaten olmaz. (1,3,4,6,7)

…

Diyaloğunda öğrenci [AB]'nin [DE]'yi dik kestiği gibi temeli olmayan bir gerekçeyle |BN| ve |FG| arasındaki ilişkinin eşit uzunlukta olacağını ifade etmesi zayıf da olsa öğrenciye göre mantıklı olduğu için gerekçelendirme (6) bileşeninin izlerini taşımaktadır.



Şekil 29. Öğrencinin Problem 8'e ait çalışması

4.1.2.7.Gerekçeyi Kontrol Etme

Tablo 24
Gerekçeyi Kontrol Etme Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10	P 11	P 12	P 13	P 14	P 15	P 16	P 17	P 18	P 19	P 20	P 21	P 22	P 23	P 24	P 25	P 26	P 27	Toplam
3	10	1	4	0	3	4	2	1	2	1	1	3	1	1	1	3	1	4	1	0	1	0	3	3	2	1	57

Öğrencinin akıl yürütürken gösterdiği iddia etme bileşeninden sonra zayıf olan bir diğer bileşen ise gerekçeyi kontrol etme bileşenidir. Öğrenci soru kökü "nedir?" olan soruların tamamında gerekçeyi kontrol etme bileşenine ait göstergeleri sergilemiştir. "nasıldır?" soru köklü kategoride Problem 5, ispat yapmayı gerektiren Problem 23 ve ilişki kurmayı gerektiren Problem 21'de gerekçeyi kontrol etme bileşeninin izlerine rastlanmamıştır. Öğrencinin bileşeni en iyi şekilde ortaya koyduğu soru ise ispat yapmayı gerektiren Problem 2 olmuştur. Bu sorunun tartışıldığı oturumdan bir kesit aşağıda verilmiştir.

…

D: Burda 90 derecelik açıyı oluşturmuşlar. Bu 90 dereceyi ikiye böler yani açıyı 45, 45 bölmüş. Bölünce de bu hipotenüsü ikiye tam ortaya bölmüş olmuş ve eşitlenmiş. Bu da denk geliyormuş. Nasıl ispatlayabilirim. (düşünüyor) burası da aslında farklı bir şey oluyor, dik açı oluşturur. (BD nin AC ile yaptığı açıdan bahsediyor) (1,4)

A: Neden öyle düşündün?

D: Çünkü hipotenüse çizilen kenarortay bölmediğini düşünürsek yani ikiye ayırmadığını şey yaparsak, burda da aslında kendi içinde bir dik açı oluşturmuş olur. Ve bu kenarortay hipotenüse yarısına geliyorsa o zaman buradan çizilen bir kenarortay da buranın hipotenüsüne eşit olması gerekir. (D noktasından BC ye çizilen kenarortaydan bahsediyor, BDC açısının dik olduğunu düşünüyor). Sonra buradan çizilen herhangi başka bir dik açı oluşur. Buranın hipotenüsü burası olur. Tabi göz kararımı bilmiyorum ama burasıyla burası eşit olduğu için (BC yi ikiye bölen parçalardan bahsediyor). Aslında şöyle bu hipotenüs nasıl eş geliyor, o kanıtlanabilir. Bir tane daha dik açı oluşturuyor burda. Bunun da hipotenüse karşı kenarortayı çizdiğimiz zaman üçgeni ikiye bölmüş oluyoruz ve bu durumda katladığımız zaman aslında tam olarak kenarortaya denk geliyor. Zaten bizim katladığımız bölüm de hipotenüsün yarısı. Katladığımız zaman kenarortay çizgisine tamamen oturduğu için bunu kanıtlamış oluruz. (1,4,5,6)

A: Hmm.

D: Fakat bunu kâğıt üzerinde nasıl ispatlarım bilmiyorum.

A: Fikir olarak böyle ispatladın.

D: Fikir olarak böyle.

A: Peki başka ne açılardan yaklaşabiliriz?

D: Imm. Bu üçgen için geçerli olan bir şey bu. Bu ikiye böldüğümüz zaman zaten göz kararı da eşit olduğu görünüyor. Bunun dik açılarını sürekli bölersek her zaman yarısı olacak. Yine katlamaya dönüyor benim kafam. Sürekli yeni bir 90 derece oluşturacağım. Burası 45 derece olacak. Üçgenin iç açıları 180 dereceydi. (1,4,7)

…

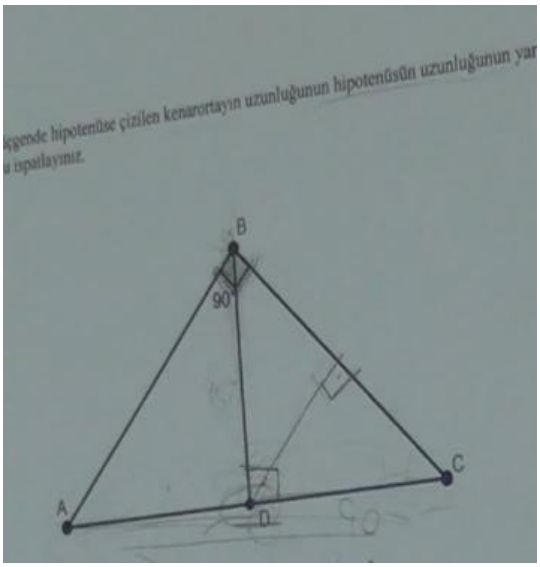
Burada ilk kısımda öğrenci daha önce sunduğu gerekçeyi başka bir gerekçeyle destekleyerek gerekçeyi kontrol etme (7) bileşeninin varlığını ispatlamıştır. Bundan sonra diyaloğun devam eden kısmında ise;

A: Kenar uzunluklarını neden açı ölçüsüyle adlandırdın?

D: Çünkü bana burda işlem yapabilecek olarak verilen tek şey buradaki 90 derece ve üçgenin iç açılarının toplamının 180 olması. Burası 90 olduğu zaman buralar 45, 45 olur. (Kenarortayın açıları da ikiye böleceği kanısında). Ve zaten bunu ikiye böldüğümüz zaman burası 45 olur burası 90 olur bu sefer. Yani sürekli buradaki 45 dereceye, ikiye böldüğü zaman buraya 45 dedim (BD doğru parçasına yazıyor). Bunun yarısı olduğunu ispatlamak için de bunun tamamının, bu karenin (kare dediği 90 derece sembolü) tamamının 90 derece olduğunu düşündüm ve buraya da (AD kenarından bahsediyor) 90 derece dedim. Burası da 90 derece zaten 90, 45 in yarısıdır. Bunu da formül olarak göstermeye çalıştım. ABC üçgeninin çevresi x. Bunun yarısının hipotenüsün yarısı olduğunu hesaplamak istiyorsam, x bölü 2 bu BCD üçgenini oluşturuyor. Ve ABC üçgeni (düzeltiyor) BDC üçgeni ABC nin yarısı. Yarısı olduğu zaman zaten bu kenarortayın hipotenüsün yarısı olmadığını iddia etmez biraz şey olur. Fakat tabi burda yazdığım şeyle bunu anlaması biraz şey. (yazdığıyla anlattığının anlamakta zorlanılacağını düşünüyor) (1,4,6,7,8(a,b,c))

…

formülleştirmeye çalışması yine gerekçelerinin sağlamasını yaparak gerekçeyi kontrol etme (7) bileşeninin varlığını göstermiştir.



Şekil 30. Öğrencinin Problem 2'ye ait çalışması

Öğrenci soru üzerinde yukarıdaki açıklamalarını göstermiş ve D noktasından BC kenarına dik uzunluk çizmiş ve bunun devam edeceğini kağıt katlama olarak da canlandırdığını ifade etmiştir. Öğrencinin düşüncesine göre bir dik üçgende hipotenüse çizilen kenarortay hipotenüsü

dik keser. Aynı düşünceyi BDC üçgeninde ve sonraki oluşan üçgenlerde de uygulamaya devam etmiştir. Bunu da gerçekte birebir uygulamasa da görünüşte ve zihinde kağıt katlama fikrine dayandırmıştır.

Problem 24 için aşağıda verilen;

…

D: Iıı yani ortak bir noktaları olur bi defa ııı… Yamuğun yan kenarlarına ait üçgenlerin alanları arasında şöyle bir ilişki vardır. Bi defa bu yamuğun kenarları ne kadar uzun olacak bilmiyoruz. Burda eşit vermiş bu durumda eşit olur. Eşit olduğu için tabanları ve daha orantılı bir şekilde çizildiği için yamuk, bunun bütün kenarları eşit olur ve eşkenar üçgen aynı olurlar. (4,6)

A: Tamam.

D: Ama mesela AD yi daha uzun tuttuk, BC yi daha kısa tuttuk. Bu durumda AD nin alanıyla BC nin alanı arasında bir alan farkı olur birbirleriyle eş üçgen olmazlar. Yani bu kenarlarda çizilen üçgenlerin alanları arasındaki ilişki tamamen AB nin DC nin uzunluğu veya o yan kenarların uzunluğuna bağlı olarak değişir. (3,4,7)

…

Diyaloğunda görülmektedir ki, öğrenci ilk olarak üçgen alanları arasındaki ilişkinin neden eşit olacağı ile ilgili gerekçesini açıklamış, daha sonra verdiği gerekçeye yeni bir örnek vererek ortaya çıkacak durum ile ilgili düşüncelerini belirterek gerekçeyi kontrol etme (7) bileşeninin izlerini ortaya koymuştur.

Yukarıda bahsedilen sorular dışında bütün sorularda gerekçeyi kontrol etme bileşeninin izleri az da olsa mevcuttur.

4.1.2.8.Matematiksel İfadeleri Birbirine Bağlayan Düşünme Süreci Boyunca Argüman Zincirleri Oluşturma

Tablo 25
Argüman Zincirleri Oluşturma Bileşenine Ait Sıklık Tablosu

	P 1	P 2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	P25	P26	P27	Toplam
8(a)	7	4	1	2	2	0	5	1	2	1	0	1	0	1	1	1	3	1	6	0	0	0	2	0	2	1	1	45
8(b)	5	4	0	2	2	0	5	1	2	1	0	1	0	1	0	1	3	1	5	0	0	0	2	0	2	1	1	40
8(c)	3	2	0	3	2	0	4	1	2	1	0	1	0	0	0	1	2	1	4	0	0	0	0	0	1	0	0	28

Öğrencilerden akıl yürütürken göstermeleri beklenen bir diğer bileşen ise matematiksel ifadeleri birbirine bağlayan düşünme süreci boyunca argüman zincirleri oluşturma becerisidir. Bu bileşen kendi içinde adımlar atma, atılan adımları izleme ve atılan adımların değerlendirilmesi şeklinde üç alt bileşenden oluşmaktadır. Bu bileşene toplam olarak bakıldığında seçim yapma, doğrulama/yanlışlama ve gerekçeyi kontrol etme bileşenlerine göre daha iyi sergilendiği görülürken, alt bileşenlere ayrı ayrı bakıldığında en az bu bileşenler kadar öğrencinin ortaya çıkarmakta zorlandığı görülmüş ve izlerine az rastlanmıştır. Yine bu bileşen de en çok "nedir?" soru köklü sorularda ortaya çıkmıştır. Bu kategoride bulunan temel geometrik çizimler ve kavramlar ile üçgenler sorularında bu bileşenin izleri bulunmamıştır. Bir alan ölçme sorusunda ise sadece adımlar atma alt bileşeninin göstergeleri mevcutken, bir çokgenler sorusunda adımlar atma ve atılan adımları izleme alt bileşenlerinin izleri var olup atılan adımların değerlendirilmesi alt bileşeninin herhangi bir izi görülmemiştir. Bununla ilgili Problem 26'dan alınan aşağıdaki diyalog bir örnek teşkil etmektedir. Verilen kesitte öğrenci bazı adımlar atmış (8(a)) ve bunları izleyen adımlarla (8(b)) ilerlemiş ancak bunlardan bir sonuca varan değerlendirmede bulunmamıştır.

…

D: Ha tamam o zaman. Şimdi bu düzgün bir çokgen olduğu için bütün kenar uzunlukları eşit olacak. Yani A ile B, B ile C eşit falan. Bu yüzden DAB yani a, b den (alfa ve betayı kastediyor) küçük bir değere sahip olur. Sebebi de şu. Şimdi A dan B ye baktığımızda arada 3 tane kenar var ama C den G ye baktığımızda 4 tane kenar var. Ve bu da AD uzunluğunun CG uzunluğundan kısa olacağını gösteriyor. İkisinin de AB ve FG kenarları eş. (1,4,6,8(a,b))

…

Öğrenciyle gerçekleşen diyaloğun bu kısmında soruyu anlama aşamasında olduğu ve bunu sesli şekilde açıkladığı görülmektedir. Öğrenci alfa açısının gördüğü kenar sayısına ve beta açısının gördüğü kenar sayısına bakarak adımlar atma (8(a)) ve bu kenar sayılarını karşılaştırarak da atılan adımların izlenmesi (8(b)) bileşeninin göstergesini yansıtmıştır.

Eşlik ve benzerlik alt öğrenme alanında "nasıldır?" kategorisinde, ilişki kurmayı gerektiren trigonometri ve çokgenler alt öğrenme alanlarına ait sorularda ve ispat yapmayı gerektiren üçgenler ve çember ve daire alt öğrenme alanlarında argüman zincirleri oluşturma bileşeninin hiçbir göstergesine rastlanmamıştır.

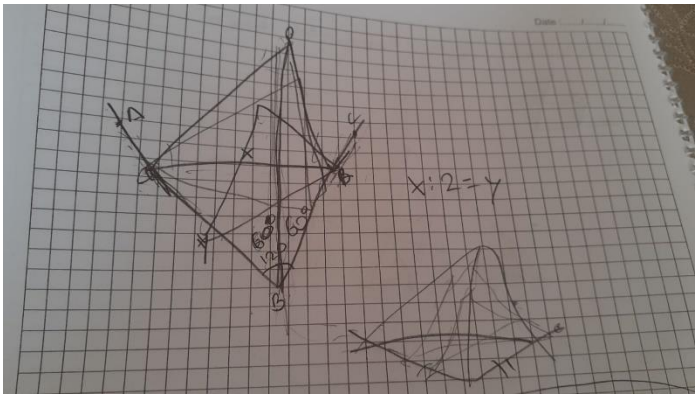
Soru kökü "nasıldır?" kategorisinde olan ve üçgenler alt öğrenme alanında yer alan Problem 14'te argüman zincirleri oluşturma bileşenine sadece bir yerde iki alt bileşene rastlanmıştır. Bununla ilgili gerçekleşen diyalog aşağıda verilmiştir.

…

D: İkizkenar üçgen olur. Bu yüzden R yi yukarı çıkarttığımızda P aşağı iner P Q tarafına doğru aşağı yaklaşır ama Q yu yukarı çıkartırsak P R tarafına göre aşağı iner. (1,4,8(a,b))

…

Diyaloğunda R ve Q noktalarının hareket ettirilme düşüncesi adımlar atma (8(a)) ve bu noktaların hareketine göre nelerin değişeceğinin açıklanması atılan adımların izlenmesi (8(b)) bileşenlerine işaret etmektedir.



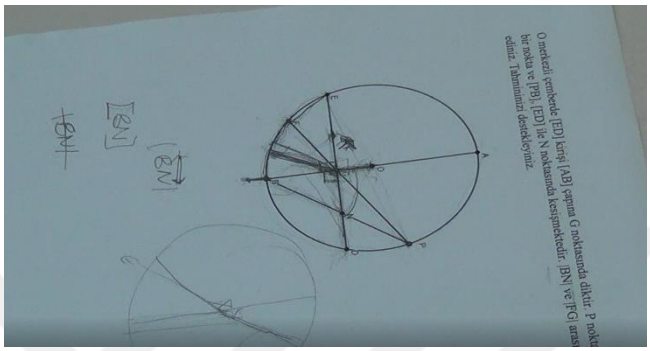
Şekil 31. Öğrencinin Problem 14'e ait çalışması

İlişki kurmayı gerektiren Problem 8'in tartışıldığı oturumda ise öğrencinin bu bileşeni gösterebildiği bir yer olmuştur. Bununla ilgili aşağıda verilen diyalogda görüldüğü gibi öğrenci adımlar atmış (8(a)), birbirini izleyen adımlar (8(b)) ortaya koymuş ve en son bu adımlardan yola çıkarak bir sonuca yani değerlendirmeye (8(c)) gitmiştir.

…

D: (düşünüyor) Şimdi bunu böyle bir yay değil de dik doğru parçası olarak düşünürsek, GN EF ye eşit olursa, biz bu GF nin yerini değiştirdiğimizde (durup düşünüyor, emin değil gibi) mesela bu F yi buraya getirdim ya, ND arasındaki uzunluğun buradaki (F ve F nin yeni yeri) uzunluk olması gerektiğini düşünüyorum. Burda geriye kalan uzunluk da bunların yay olmasından dolayı olabilir. Ama zaten şöyle bişey var. Bu ED G noktasında kesildiği zaman yarı yarıya oluyorlar. Burası GD ile EG birbirine eşit oluyor, uzunlukları. O yüzden birinde buradaki bir noktadan bu GN nin uzunluğundan yine buradan başlatırsak burayı yine buraya G demeyelim öyle. (GN kadar G den bi uzunluk çizmeye çalışıyor) K olsun. Burası kadar buradaki arasındaki uzunluk kadar burada da uzunluk mesafesi eklesek buraya K noktası desek bu K noktasından da B noktasına bi uzunluk çizsek, o zaman Zaten burası bir dik açılı dik açıda üçgen oluşturduğu için burası da oluşturur. O zaman da burasıyla burası (KB ve NB den bahsediyor) birbirine eşit olur. (1,3,4,8(a,b,c))

…



Şekil 32. Öğrencinin Problem 8'e ait çalışması

Öğrenci Şekil 32'de görüldüğü gibi soru üzerinde çok değişiklik yapmasa da düşüncelerini sesli şekilde ifade etmiştir.

İspat yapmayı gerektiren Problem 15'te ise sadece adımlar atma (8(a)) bileşenin izine rastlanmıştır. Bununla ilgili gerçekleşen diyalog aşağıda verilmiştir. Burada öğrenci bir adım atmış ancak devamını getirmemiştir.

…

A: BC de PC ye eşit mi?

D: BC PC ye zaten her zaman eşit olacak şekilde yerleştirdim. (3,8(a))

…

Diyaloğunda görülmektedir ki, öğrencinin ifadesinin herhangi bir açıklaması ya da devam eden bir süreci gerçekleşmemiştir. Dolayısıyla attığı bu adımı takip eden başka bir adım ve ulaşılan bir sonuç da mevcut değildir.

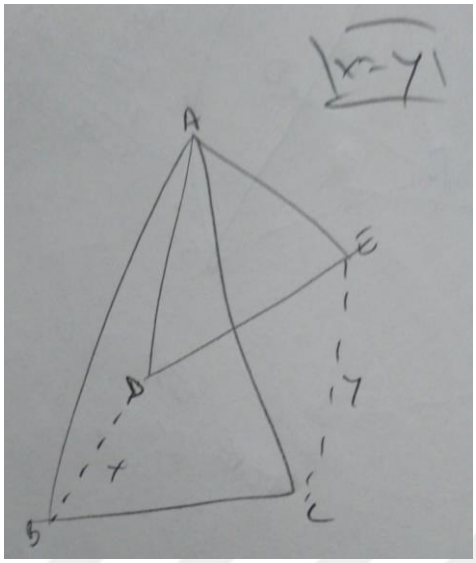
İspat yapmayı gerektiren Problem 25'te ise argüman zincirleri oluşturma bileşeninin bütün alt bileşenlerine ait izlere rastlanmıştır. Aşağıdaki diyalog buna örnek teşkil etmektedir.

…

D: Eee bi defa ADE ve ABC bir eşkenar üçgen. O zaman ikisinin de A açıları eşit. Bu A açılarının eşit olabilmesi için B doğrusu ile C doğrusu yani AB ile AC nin oluşturduğu diklik mi artık ne olur açı oluşturabildiği açının AD ile AE nin de oluşturması gerekiyor. Çünkü A açıları eşit. Şekle bakıldığında madem A açıları eşit o zaman bu A açısının yani DAE nin BAC ye eşit tam olarak denk gelmesi gerekiyor. Çünkü tam yarısından bölmemiş ama bölmüş ne de olsa A açısını ve o A açısının A açısı x derece olsa mesela bu böldüğü şekilde ıı ne olur bi taraf y

bi taraf m olsa bu m nin olduğu taraf eşit olması için iki tane olması gerekir. Yani tam olarak denk gelir. (1,2,4,5,6,8(a,b,c))

…



Şekil 33. Öğrencinin Problem 25'e ait çalışması

Öğrenci bu iki üçgenin eşkenar olması bilgisini kullanarak iki üçgenin de A açısının eşit olduğu adımını atmıştır (8(a)). Bunu [AB] ile [AC] ve [AD] ile [AE]'nin birbirlerine denk gelmesi gerektiği adımı izlemektedir (8(b)). Aslında öğrenci burada bir üçgenin belli bir açıda döndürülerek diğerinin elde edilmesini kastetmektedir. Son olarak da x ve y uzunluklarının birbirine "tam olarak denk gelir" ifadesiyle bir değerlendirme (8(c)) yapmaktadır.

4.2.Öğrencilerin Akıl Yürütmelerinin Arasındaki Benzerlikler ve Farklılıklara İlişkin Bulgular

Öğrencilere sorulan 27 soruda akıl yürütme bileşenlerine ait Ayşe'nin 1148, Demet'in 1286 göstergesi mevcuttur. İki öğrencinin de izlerini en iyi şekilde yansıttığı bileşen fikir ileri sürme bileşenidir. Bunu çıkarım yapma ve gerekçelendirme bileşenlerini gösteren izler takip etmektedir. Argüman zincirleri oluşturma bileşeninin alt bileşeni olan atılan adımların değerlendirilmesi bileşeni iki öğrencinin de en az gösterebildiği bileşen olmuştur. Adımlar atma ve atılan adımların izlenmesi alt bileşenlerine ait göstergelere nispeten daha sık rastlanmıştır. Akıl yürütme becerisini gösteren bileşenler arasında sergilenen en zayıf bileşen Ayşe için doğrulama/yanlışlama, Demet için ise iddia etme bileşeni olmuştur. Yine de sıklık dereceler birbirine yakındır. Öğrencilerin ikisi için de gerekçeyi kontrol etme ve seçim yapma bileşenleri de izlerini yansıtmakta zorlandıkları bileşenler olmuştur.

Demet bütün sorularda fikir ileri sürme bileşeninin göstergelerini ortaya koyabilmişken Ayşe sadece Problem 5'te herhangi bir fikir ileri sürememiştir. İki öğrenci de bu bileşenin izlerini en çok soru kökü "nedir?" olan açık uçlu olmayan sorularda göstermiştir. Bunu takip eden kategori Ayşe için soru kökü "nasıldır?" olan sorular iken, Demet için ispat yapmayı gerektiren sorular olmuştur. Soru kökü "nedir?", "nasıldır?" olan ve ilişki kurmayı gerektiren sorularda hemen hemen yakın sıklıkta fikir ileri sürme bileşeninin izlerine rastlanmışken, ispat yapmayı gerektiren sorularda Demet'in oturumlarında bu bileşene gözle görülür bir farkla daha çok rastlanmıştır.

"nasıldır?" kategorisinde yer alan Problem 20'de Ayşe akıl yürütme süreci boyunca fikir ileri sürme bileşeninin göstergelerini Demet'e göre daha belirgin şekilde yansıtmıştır. Bu kategoride yukarıda da bahsedildiği gibi Ayşe bir trigonometri sorusu hakkında hiç fikir ileri sürememişken Demet az da olsa bir takım fikirler öne sürmüştür.

İlişki kurmayı gerektiren Problem 4'te Ayşe verimli şekilde fikir ileri sürme bileşenini gösteremezken Demet'in bu soruda Ayşe'ye göre fikir ileri sürme bileşeninin izlerini daha bariz şekilde sergilediği söylenebilir.

Problem 21 ve Problem 24'te ise Demet'in fikir ileri sürme bileşeninin göstergeleri Ayşe'ye göre daha az kalmıştır.

İspat yapmayı gerektiren sorularda Demet daha çok fikir ileri sürme bileşenine ait izler ortaya çıkarsa da iki öğrencinin de zorlandığı durumlar söz konusudur.

Problem 12, Problem 13 ve Problem 15'te Ayşe'nin oturumlarında fikir ileri sürme bileşeninin izlerine az rastlanırken, Demet'in oturumlarında bu bileşenin izleri daha bariz ve daha çok görülmüştür.

Problem 23 ve Problem 27'de ise Ayşe'nin fikir ileri sürme bileşenini Demet'e göre daha sık sergilediği açıkça görülmektedir.

Göstermekte en zorlanılan bileşenlerden biri iddia etme bileşenidir. Demet'in izlerini en az gösterdiği bileşendir. İki öğrencinin de çalışmalarında bu bileşeni işaret eden durumların görüldüğü ve görülmediği yerler mevcuttur. Trigonometri alt öğrenme alanında iki öğrenci de bu bileşene ait herhangi bir belirti göstememiştir. Eşlik ve benzerlik alt öğrenme alanında ise bir soruda bu bileşenin izleri görülürken diğerinde görülmemiştir. Temel geometrik çizimler ve kavramlarda iki öğrenci de bütün sorularda iddia etme bileşenin izlerini taşıyan akıl yürütme

süreçleri geçirmişlerdir. Çokgenlerde Demet bütün sorularda bu bileşenin varlığını göstermişken Ayşe bir soruda gösterememiştir.

Yine en iyi "nedir?" soru köklü açık uçlu olmayan sorularda ortaya çıkmıştır. Bu kategoride Demet Problem 3'te, Ayşe ise Problem 7 ve Problem 9'da iddia etme bileşenine işaret eden bir akıl yürütme becerisi gösterememişlerdir. Diğer sorularda hemen hemen birbirleri ile benzer şekilde iddia etme bileşenine ait göstergeler yansıtmışlardır.

İspat yapmayı gerektiren sorularda iki öğrenci de iddia etme bileşenini Problem 12, Problem 15, Problem 23 ve Problem 27'de gösterememişlerdir. Problem 2'de ise Ayşe, Demet'e göre daha çok iddia etme bileşenine ait izler yansıtmıştır. Diğer sorularda çok bariz şekilde olmasa da kendilerince iddia etme bileşenini gösteren izlere rastlanmıştır.

Soru kökü "nasıldır?" olan sorularda Ayşe dört, Demet ise üç soruda bu bileşeni hiç sergilememişlerdir.

Problem 18'de Demet iddia etme bileşenini ortaya koymuşken Ayşe'nin çalışmasında böyle bir ize rastlanmamıştır. Kalan sorularda benzer şekilde iddia etme bileşenleri gözükmektedir.

İlişki kurmayı gerektiren sorularda iki öğrenci de Problem 21'de iddia etme bileşenini gösteren herhangi bir akıl yürütme süreci yaşamamıştır.

Problem 4'te ise Demet iddia etme bileşeninin varlığını gösteren yorumlar yapmışken, Ayşe'nin problemle ilgili çalışmasında böyle bir iz bulunmamaktadır.

İki öğrencinin de çalışmalarında temel geometrik çizimler ve kavramlar, alan ölçme, çokgenler ve çember ve daire alt öğrenme alanlarında seçim yapma bileşeninin izleri görülmektedir. Eşlik ve benzerlik, trigonometri ve üçgenler alt öğrenme alanlarında bu bileşenin varlığına rastlanmayan sorular olmuştur. Bu bileşenin göstergelerine en çok rastlanan sorular "nedir?" soru köklü olan sorulardır ve bu kategorideki bütün sorularda seçim yapma bileşeninin izlerini görmek mümkündür. Ancak Ayşe Problem 1 ve Problem 17'de Demet'e göre daha iyi şekilde seçim yapma bileşeninin izlerini gösterdiğinden bu kategoride Demet'ten daha fazla bu bileşene rastlanmıştır. Diğer sorularda seçim yapma bileşenine ait göstergelerin sıklıkları birbirine yakındır. Soru kökü "nasıldır?" olan sorularda Demet Problem 14'te ve Ayşe Problem 5'te bu bileşene ait herhangi bir göstergeyi ortaya koydukları bir durum olmamıştır. Ayrıca Demet Problem 19'da gösterdiği seçim yapma bileşenine işaret eden durumlar ile Ayşe'den farklıdır. İspat yapmayı gerektiren sorularda Demet'in Ayşe'den daha fazla seçim yapma bileşenine ait göstergesi mevcuttur. İki öğrenci de Problem 25 sorusunda bu bileşenin izlerini hiç

gösterememişlerdir. Bunun dışında Ayşe'nin Problem 12'deki çalışmasında seçim yapma bileşeninin izlerine rastlanmamıştır. İlişki kurmayı gerektiren sorularda Demet seçim yapma bileşeninin izlerini daha fazla gösterirken Ayşe'nin seçim yapma bileşenini ortaya koyamadığı herhangi bir soru olmamıştır ve Demet'in Problem 21'de bu bileşeninin izlerinin görüldüğü bir yer olmamıştır.

İki öğrenci için de fikir ileri sürme bileşeninden sonra göstergelerinin en iyi ortaya koyulan bileşen çıkarım yapma bileşenidir. Bu bileşene rastlanmayan tek alt öğrenme alanı trigonometri olmuştur. Ayşe Problem 5'te, Demet ise Problem 21'de bu bileşenin varlığına işaret edecek herhangi bir gösterge ortaya koyamamışlardır. Bunun dışında kalan sorularda çıkarım yapma bileşeninin izleri gözlemlenmiştir. İki öğrencinin de bu bileşenine ait göstergelerin en çok görüldüğü yer soru kökü "nedir?" olan sorulardır ve birbirine yakın sıklıkta çıkarım yapma bileşenine ait izler mevcuttur. Problem 3 ve Problem 11'de Ayşe Demet'ten daha verimli bir akıl yürütme süreci yaşadığından çıkarım yapma bileşeninin izlerine daha çok rastlanmıştır. Problem 26'da ise çıkarım yapma bileşenine ait izler birbirine yakın sıklıkta görülmüştür.

Soru kökü "nedir?" olan sorulardan sonra çıkarım yapma bileşeni en iyi ispat yapmayı gerektiren sorularda ortaya çıkmıştır. Bu kategoride Demet Ayşe'den daha fazla çıkarım yapma bileşenine işaret eden göstergeler kullanmıştır. Problem 2 ve Problem 22'de çıkarım yapma bileşeninin izleri Demet'in çalışmalarında Ayşe'ye göre daha belirgin şekilde görülmektedir. Diğer sorularda benzer şekilde çıkarım yapma bileşeninin göstergeleri olduğu görülmüştür. İlişki kurmayı gerektiren ve soru kökü "nasıldır?" olan sorularda birbirine yakın sıklıkta göstergeler elde edilmiştir. İlişki kurmayı gerektiren Problem 4'te Demet'in ortaya koyduğu çıkarım yapma bileşenine ait izler Ayşe'den daha fazladır. Soru kökü "nasıldır?" olan sorularda bu bileşenin göstergeleri yine birbirlerine yakın sıklıkta gözlemlenmiştir.

Doğrulama/yanlışlama bileşeni Ayşe'nin izlerini en az ortaya koyduğu bileşendir. İki öğrenci için de trigonometri konusunda bu bileşenin göstergelerini yansıtabildikleri bir durum söz konusu olmamıştır. Diğer alt öğrenme alanlarında bu bileşenin izlerinin görüldüğü ve görülmediği yerler olmuştur. "nedir?" soru köklü sorularda daha sık ortaya çıkan doğrulama/yanlışlama bileşenini Ayşe bütün sorularda gösterme becerisinde bulunmuşken Demet Problem 26'da bu bileşene ait bir iz ortaya koyamamıştır. İlişki kurmayı gerektiren sorularda iki öğrencinin de bu bileşenin varlığını gösteren bir düşünce üretemedikleri tek soru trigonometri sorusu olan Problem 21'dir. İlişki kurmayı gerektiren sorularda doğrulama/yanlışlama bileşeninin izlerini yansıtma konusunda Ayşe Demet'e göre çok daha

zayıf bir akıl yürütme süreci yaşamıştır. İspat yapmayı gerektiren sorularda da aynı durum söz konusudur. İspat yapmayı gerektiren bazı üçgen sorularında Demet bu bileşenin varlığını gösterecek düşünceler öne süremezken Ayşe bu bileşene dair izler sergilemiştir. Doğrulama/yanlışlama bileşeninin izleri iki öğrenci için de soru kökü "nasıldır?" olan sorularda en az sıklıkta görülmüştür. İki öğrenci de Problem 18'de yaptıkları çalışmalarında bu bileşenin izlerini sergilemişlerdir. Bunun dışında Demet Problem 19'da da doğrulama/yanlışlama bileşenine ait göstergeleri ortaya koymuştur.

Gerekçelendirme bileşeni iki öğrencinin de izlerini en iyi yansıttığı üçüncü bileşendir. Sadece trigonometri konusu dışında öğrenciler bütün öğrenme alanlarında gerekçelendirme yapabilmişlerdir. Ayşe Problem 5'te, Demet Problem 21'de gerekçelendirme bileşeninin izlerini yansıtamamışlardır. İki öğrenci de "nedir?" soru köklü sorularda zorlandıkları sorular olsa da bu bileşene ait izleri daha belirgin şekilde ortaya çıkarmışlardır. Ayrıca soru kökü "nedir?", "nasıldır?" olan ve ilişki kurmayı gerektiren sorularda iki öğrencinin de akıl yürütme becerileri birbirine yakın olmasına rağmen ispat yapmayı gerektiren sorularda Demet Ayşe'ye göre bu bileşenin göstergelerini daha sık göstermiştir. Özellikle iki soruda bu fark açıkça görülmektedir. Bu sorular Problem 2 ve Problem 13 sorularıdır.

Öğrencilerin göstermekte zorlandığı bir diğer bileşen de gerekçeyi kontrol etme bileşeni olmuştur. İki öğrenci de trigonometri sorularında bu bileşene ait sergileyebildikleri herhangi bir iz olmamıştır. Ancak soru kökü "nedir?" olan soruların tamamında bu bileşenin izlerine rastlanmıştır. İspat yapmayı gerektiren sorularda Demet Ayşe'ye göre gerekçeyi kontrol etme bileşeninin göstergelerini daha iyi göstermiş ve sadece Problem 23'te bu bileşeni yansıtabilecek bir akıl yürütme sürecinden geçememiştir. Problem 2'de ise gerekçeyi kontrol etme bileşeni en fazla ortaya çıkmıştır. Soru kökü "nasıldır?" olan sorularda iki öğrenci de trigonometri sorusunda bu bileşenin izlerini ortaya koyamamıştır. Bunun dışında Ayşe Problem 19'da da bu bileşeni gösterememiştir. İlişki kurmayı gerektiren sorularda yine trigonometri sorusunda iki öğrenci için de gerekçeyi kontrol etme bileşeninin izlerine rastlanmamıştır. Bunun yanında Problem 24'de Ayşe bu bileşenin izlerini yansıtacak düşünceler üretememiştir.

Son olarak matematiksel ifadeleri birbirine bağlayan düşünme süreci boyunca argüman zincirleri oluşturma bileşenine bakıldığında iki öğrenci de birbirine çok yakın sonuçlar elde etmiştir. Ancak atılan adımların değerlendirilmesi alt bileşeni tek başına incelendiğinde Demet, Ayşe'ye göre bu bileşene ait izleri daha sık ortaya koymuştur. Bu bileşen iki öğrenci için de en çok soru kökü "nedir?" olan sorularda görülmekle birlikte Ayşe Demet'e göre daha bu bileşeni

göstermekte daha iyidir. Sadece Problem 1'de Ayşe argüman zincirleri oluşturma bileşeninin üçüncü alt bileşeni olan atılan adımların değerlendirilmesi adımı gerçekleştirememiştir. Soru kökü "nasıldır?" olan sorularda ise Demet, Ayşe'ye göre bu bileşenin izlerini daha sık yansıtacak şekilde akıl yürütme süreci yaşamıştır. Sadece Problem 20 sorusunda bu bileşenin hiçbir alt bileşenine rastlanmamıştır. İlişki kurmayı ve ispat yapmayı gerektiren sorularda ise iki öğrenci de argüman zincirleri oluşturma bileşenine işaret eden yakın sıklıkta gösterge ortaya koymuşlardır. Ayşe ilişki kurmayı gerektiren Problem 4'te argüman zincirleri oluşturma bileşeninin hiçbir adımını sergileyememiştir. Demet ise bu kategoride Problem 21 ve Problem 24'te bu bileşene ait herhangi bir iz ortaya koyamamıştır.

Yukarıda anlatılanlar hakkında öğrencilerin karşılaştırmalı akıl yürütme bileşenlerini içeren tablo hali aşağıda verilmiştir.

Tablo 26
İspat Yapmayı Gerektiren Problemler

Ayşe										
Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 2	13	6	4	18	1	5	1	1	0	0
Problem 10	18	3	1	10	2	4	0	0	0	0
Problem 12	4	0	0	10	1	4	1	3	3	0
Problem 13	6	0	3	3	2	4	0	1	1	0
Problem 15	6	0	2	3	0	2	0	0	0	0
Problem 22	4	0	1	2	0	1	0	0	0	0
Problem 23	18	0	1	7	0	1	0	3	2	1
Problem 25	4	1	0	3	2	3	0	2	2	2
Problem 27	15	0	2	11	0	4	0	4	4	1
Toplam	88	10	14	67	8	28	2	14	12	4
Demet										
Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 2	34	1	1	31	6	14	10	4	4	2
Problem 10	19	3	2	8	4	3	2	1	1	1
Problem 12	21	0	2	11	0	9	1	1	1	1
Problem 13	18	3	5	5	0	10	3	0	0	0
Problem 15	11	0	6	6	2	2	1	1	0	0
Problem 22	9	1	4	11	1	4	1	0	0	0
Problem 23	9	0	3	5	1	5	0	2	2	0
Problem 25	8	2	0	3	2	6	3	2	2	1
Problem 27	6	0	1	5	2	2	1	1	1	0
Toplam	135	10	24	85	18	55	22	12	11	5

Tablo 27
İlişki Kurmayı Gerektiren Problemler

Ayşe										
Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 4	7	0	3	6	1	3	2	0	0	0
Problem 8	12	4	4	21	2	12	5	1	1	1
Problem 21	14	0	1	4	0	2	0	1	1	0
Problem 24	18	2	2	12	1	5	0	1	1	1
Toplam	51	6	10	43	4	22	7	3	3	2
Demet										
Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 4	16	3	7	17	9	6	4	2	2	3
Problem 8	18	2	6	13	4	9	2	1	1	1
Problem 21	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Problem 24	6	1	4	9	2	5	3	0	0	0
Toplam	46	6	17	39	15	20	9	3	3	4

Tablo 28
Soru Kökü "nasıldır?" Olan Problemler

Ayşe										
Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Problem 14	15	0	4	9	0	9	3	1	1	0
Problem 16	15	3	6	8	0	8	1	0	0	0
Problem 18	35	0	5	9	2	9	3	1	1	0
Problem 19	12	4	7	4	0	1	0	0	0	0
Problem 20	16	0	2	7	0	5	2	0	0	0
Toplam	93	7	24	37	2	32	9	2	2	0
Demet										
Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 5	6	0	1	3	0	3	0	2	2	2
Problem 14	13	0	0	12	0	5	1	1	1	0
Problem 16	19	4	5	12	0	9	1	1	1	1
Problem 18	16	1	5	6	1	5	1	1	1	1
Problem 19	22	2	14	4	8	6	4	6	5	4
Problem 20	7	0	1	3	0	3	1	0	0	0
Toplam	83	7	26	40	9	31	8	11	10	8

Tablo 29
Soru Kökü "nedir?" Olan Problemler

Ayşe										
Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 1	25	2	17	21	6	4	2	7	7	0
Problem 3	18	1	7	13	4	7	3	3	3	1
Problem 6	19	7	2	12	3	8	3	2	2	1
Problem 7	25	0	6	15	2	10	3	1	1	1
Problem 9	14	0	2	24	1	16	3	9	9	4
Problem 11	22	3	2	15	3	9	2	2	2	1
Problem 17	25	2	10	16	3	9	2	5	5	3
Problem 26	20	2	3	8	1	6	2	1	1	1
Toplam	168	17	49	124	23	69	20	30	30	12
Demet										
Göstergeler	1	2	3	4	5	6	7	8-a	8-b	8-c
Problem 1	56	5	5	41	2	16	3	7	5	3
Problem 3	21	0	2	9	1	3	1	1	0	0
Problem 6	10	1	1	11	6	9	3	0	0	0
Problem 7	20	1	3	19	5	13	4	5	5	4
Problem 9	36	1	4	12	2	7	1	2	2	2
Problem 11	17	4	6	4	2	5	1	0	0	0
Problem 17	22	2	8	17	1	10	3	3	3	2
Problem 26	10	2	4	7	0	7	2	1	1	0
Toplam	192	16	33	120	19	70	18	19	16	11

BÖLÜM V

SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde verilerin analizi ile elde edilen bulgulardan yola çıkarak ulaşılan sonuçlara ve akıl yürütme becerilerini nelerin etkilediğine yer verilmiştir.

Bu tez çalışmasında üstün yetenekli öğrencilerin geometri öğrenme alanında akıl yürütme becerilerinin nasıl olduğu incelenmiştir. Öğrencilerin akıl yürütme süreçlerini problemlerin yapısı da etkilediğinden onların en çok fikir üretebileceği sorular seçilmeye çalışılmıştır. Dolayısıyla öğrencilerin akıl yürütme süreçlerinde fikir ileri sürme (1) ve çıkarım yapma (4) en sık rastlanan bileşenler olmuştur. Bunu gerekçelendirme (6) becerisi takip etmiştir. İddia etme (2), doğrulama/yanlışlama (5) ve gerekçeyi kontrol etme (7) bileşenleri ise daha az gözlemlenen akıl yürütme bileşenleri olmuştur. İki öğrencinin de problem çözme oturumlarında sergiledikleri akıl yürütme bileşenlerinin birbirine benzer olduğu sonucuna varılmıştır. Bu öğrencilerin üstün yetenekli öğrenciler olmasından kaynaklı daha üst düzey düşünme becerileri olduğu beklentisi mevcuttur. Dolayısıyla elde edilen sonuçlarla hem sonraki çalışmalara ışık tutmak amacıyla hem de üstün yetenekli öğrencilerin var olan kapasitelerini daha verimli kullanmak ve onların gelişimlerine katkıda bulunmak amacıyla bazı bileşenler açısından beklenen durum söz konusu iken bazı bileşenler açısından beklentinin altında kalmalarının nedenlerini tartışmak gerekmektedir.

Öğrencilerin en iyi ortaya koydukları akıl yürütme bileşeninin fikir ileri sürme bileşeni olduğunu göz önüne alırsak, çeşitli fikirler üretmeleri onların yaratıcılıklarının yüksek olduğunu göstermektedir. Marland (1972) tarafından tanımlanan üstün yeteneklilik kavramında yaratıcı ve üretici düşünmenin vurgulanması güncel sonuçlarla desteklenmiştir. Üstün yetenekli öğrencilerin yaratıcılık, üretkenliklerine ve orijinal fikirler üretmelerine değinen geçmişte ve günümüzde çalışmaların olması bu bulguyu destekler niteliktedir (Gagne, 2004; Gardner, 2011;

Livne & Milgram, 2006; Renzulli, 1999; Sternberg, 2003). Ayrıca üstün yetenekli tanısı konmayan öğrencilere göre bu becerilerde öne çıktıklarını gösteren çalışmaların mevcut olması (Haavold, 2013; Taşkın, 2010) bu tez çalışmasında üstün yetenekli öğrencilerin akıl yürütme bileşenlerinden olan fikir ileri sürme konusunda farklılaştıklarını açıklamaktadır.

Öğrenciler ikinci olarak en çok çıkarımda bulunma akıl yürütme bileşenini sergilemişlerdir. Üstün yetenekli öğrencilerin çıkarımda bulunma becerisinin doğal olduğunu savunan araştırmalar mevcuttur (Abdurrahman, Saregar & Umam, 2018; Bulut, Yıldız & Baltacı, 2020; Sriraman, 2005). Ayrıca Bulut vd. (2020) üstün yetenekli öğrencilerin üstün yetenekli tanısı konmayan öğrencilere göre derinlemesine öğrenme konusunda daha iyi oldukları sonucuna ulaşmışlar ve derinlemesine öğrenen kişilerin bilgiler arasında daha iyi ilişki kurarak çıkarım yapma becerilerinin gelişmiş olduğunu belirtmişlerdir.

Öğrencilerin çalışmaları incelendiğinde izlerine en sık rastlanan bir diğer bileşen ise gerekçelendirmedir. Yazgan Sağ (2012) üstün yetenekli öğrencilerin problem çözme süreçlerinde gerekçelendirme becerilerini sık sık ortaya koyduklarını çalışmasında göstermiştir. Yeşildere ve Türnüklü (2007) tarafından 8.sınıftan mezun olan öğrencilerle yapılan çalışmada matematiksel akıl yürütmede ve düşüncelerini gerekçelendirmede sorunlar yaşadıklarını tespit etmişlerdir. Dolayısıyla bu tez çalışmasında üstün yetenekli öğrencilerin normal başarılı öğrencilerden düşüncelerine gerekçe sunma açısından farklı oldukları tespit edilmiştir. Çınargil (2022) üstün yetenekli öğrencilerin problem çözerken öne sürdükleri düşüncelerini gerekçelendirme becerilerinin iyi olduğunu vurgulaması bu çalışmanın sonucunu destekler niteliktedir.

Öğrenciler özellikle iddia etme ve doğrulama/yanlışlama bileşenlerinin göstergelerini diğer bileşenlere göre daha az sergilemişlerdir. Doğrulama becerisini ortaya koymakta üstün yetenekli tanısı konmayan öğrencilerin de zorlandığı görülmektedir (Albayrak, 2010; Çalışkan, 2012; Öz, 2017). Öğrencilerin güçlü argümanlarla desteklenen matematiksel açıklamalardan ziyade birkaç örnekle doğrulama yapmaları ve bunun yeterli olduğunu düşünmeleri ise yaygın şekilde görülmüştür (Arslan, 2007; Knuth, Choppın & Bieda, 2009). Bunların aksine Lee (2005) ise üstün yetenekli öğrencilerin geometrik akıl yürütme becerilerini incelediğinde doğrulama yapma becerilerini gösterebildikleri sonucuna ulaşmıştır. Bunun nedeni olarak yapılan çalışmada öğrencilerin gruplar halinde çalışarak birbirleriyle tartışma ortamının akıl yürütme becerilerini daha iyi yansıtmaları öne sürülebilir. Sonraki çalışmalara örnek olması

amacıyla üstün yetenekli öğrencilerin düşünme yapıları sadece bireysel olarak değil odak grup görüşmeleri şeklinde de araştırılması iyi olacaktır.

Bu bileşenlere göre nispeten daha sık ortaya çıkan argüman zincirleri oluşturma bileşeni de üstün yetenekli öğrencilerden beklenenin altında kalmıştır. Üstün yetenekli öğrencilerin daha önceki bilgileri hatırlamaya çalıştıklarından veya kavram yanılgılarından dolayı argüman oluşturmada zorluk yaşadıkları araştırmacılar tarafından vurgulanmıştır (Çınargil, 2022).

Bulgulardan elde edilen sonuçlardan biri de bu çalışmaya özgü olarak literatür ışığında oluşturulan "Akıl Yürütme Bileşenleri" nin hiyerarşik bir yapıda olduğunun belirlenmesidir. Bu yapı zayıftan güçlülüğe doğru

1- Fikir ileri sürme
2- Çıkarım yapma
3- Gerekçelendirme
4- Argüman zincirleri oluşturma
5- Seçim yapma
6- İddia etme
7- Gerekçeyi kontrol etme
8- Doğrulama/yanlışlama

şeklinde sıralanması gerektiği görülmektedir. Ancak bazı durumlarda (çok az da olsa) bu bileşenlerin düzey sıralanmasında yerleri değişebilmektedir. Yani bu hiyerarşik yapıdaki düzeylerin birbirinden net ve kesin olarak ayrıldığını idda etmek için henüz hem yeterli çalışma ve hem de yeterli veri yoktur. Bu hiyerarşik sıraya göre bileşenlerin görülme sıklığı "fikir ileri sürme, çıkarım yapma ve gerekçelendirme", "argüman zincirleri oluşturma ve seçim yapma" ve "iddia etme, gerekçeyi kontrol etme ve doğrulama/yanlışlama" şeklinde üç ana grupta incelenebilir. Akıl yürütme bileşenleri bu çalışmaya özgü kullanıldığından ve yeterli çalışma olmadığından başka çalışmalar yapılarak teyit edilmesi gerektiği önerilmektedir.

Ortaya çıkan diğer sonuçlar ise öğrencilerin yanlış olduğunun bazı zamanlar bilincinde olsalar bile genel olarak verilen geometrik şekillerin görünüşünden yola çıkarak akıl yürütmeye meyilli oldukları görülmüştür. Bu durum Duval'in (1998) görselleştirme ve van Hiele'in 1.düzey geometrik akıl yürütme yaklaşımlarıyla örtüşmektedir. Ayrıca Mason (1989) üstün yetenekli öğrencilerin en azından 3.düzey akıl yürütme becerilerine sahip olmalarının gerekliliğine değinmiş ancak yaptığı çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin 1.düzey ve 2.düzeyde

uzmanlaşmadıkları sonucuna ulaşmıştır. Bu öğrencilerin aksiyomların ve tanımların anlamları ile gerekli ve yeterli koşulların ne olduğunu bilmediklerini vurgulamıştır.

Ayrıca karşılaştıkları sorularda sayısal veri aramaları akıl yürütürken onları yönlendiren bir diğer etken olmuştur. Sayısal veri olmayan sorularda genellikle baştan çözemeyeceklerini düşünmüşler ve akıl yürütmek için daha çekingen davranmışlardır. Bununla ilişkili olarak ispat yapmaları gereken sorularda da sayısal değer vererek çözme yoluna gitmişlerdir. Verdikleri sayısal değerler soruda istenen durumla uyuşuyorsa, soruyu ispatladıklarını düşünmektedirler. Öğrencilerin ifadelerinden öğrenciler ispat sorularıyla veya kendi deyimleriyle onları zorlayan sorularla her zaman karşılaşma durumları olmadığı anlaşılmıştır. Yeşildere ve Akkoç (2011) tarafından yapılan araştırmada öğrencilerin zorlandıkları sorularda deneme yanılma ile sonuca ulaşmaya çalışmaları bulgusu bu sonucu desteklemiştir.

Yapılan araştırmalar üstün yetenekli tanısı konmayan öğrencilerin ispat yapmayı gerektiren sorularda zorluk yaşadıklarını gösterse de (Albayrak, 2010; Aylar, 2014; Çalışkan, 2012) üstün yetenekli öğrencilerden beklenen daha üst düzey düşünme becerileri sergilemeleridir. Ancak öğrenciler bu tür sorularda değer vererek deneme yanılma yolunu tercih etmişler üstelik genellikle tek bir örneklemeyi de yeterli görme eğilimindedirler. Aydın Güç vd. (2021) ispat yapmayı gerektiren sorularda üstün yetenekli olan ve üstün yetenekli tanısı konmayan öğrencilerin benzer davranışlar sergilediklerini ifade etmişlerdir. Ayrıca Rizqi ve Surya (2017) de bir ispatı düzenleme, bir tartışma ortaya koyma ve bir argümanın ya da önermenin doğruluğunu kontrol etme gibi durumlarda 8.sınıf öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme becerilerinin zayıf olduğunu vurgulamıştır. Üstün yetenekli öğrencilerin ispat yapmayı gerektiren problemlerde zorlanmalarının nedeni Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2018) kazanımlarından ispat yapma becerisinin kaldırılmış olmasından kaynaklı olabilir.

Üstün yetenekli öğrencilerin normal başarılı öğrencilere göre soyutlama ve genelleme yapma becerilerinin daha iyi olduğu araştırmacılar (Aydın Güç vd., 2021; Greenes, 1981; Kanevsky, 1990; Krutetskii, 1976; Shapiro, 1965; Sriraman, 2002, 2003) tarafından vurgulansa da, bu tez çalışmasında öğrenciler genelleme yapmayı gerektiren sorularda ulaşmaları gereken örüntüye sonuç olarak ulaşsalar da bu süreçte zorlanmışlar ve ilk bakışta örüntüyü ortaya koyamamışlardır. Bunun yerine belli olan ilk terimlerden yararlanarak bir sonraki terimi bulmak için işlemler yapmışlar ve istenen terimi bu şekilde bulmaya çalışmışlardır. Ancak sayısal olarak daha yüksek sayıda (100.terim, 1000.terim gibi) istenen terimlerde hesaplamanın

neredeyse imkansız olabileceği durumları fark etmeleri zaman almıştır. Bu nedenle matematiksel hesaplamalarla hep bir sonraki terimi bulmaya çalışmışlardır.

Bu çalışmada üstün yetenekli öğrencilerin bahsedilen durumlarda onlardan bekleneni gösterememelerinin nedeni olarak Lithner'in (2008) ezbere dayalı akıl yürütme açıklaması öne sürülebilir. Bu öğrenciler genellikle bildikleri bir formülü ya da zihinlerindeki herhangi bir ezbere bilgiyi hatırlamaya çalışmışlardır. Belli bir matematiksel alt yapıya sahip olsalar bile zihinlerindekini hatırlamaya çalışmaları onları yaratıcı düşünme ve etkili bir akıl yürütme sürecinden alıkoymuştur. Yapılan araştırmalarda da yaratıcı olmayan var olan bilgiyi hatırlamaya çalışarak yapılan akıl yürütmelerin etkili olmadığı, kavramsal bilgilerin verimli kullanılmadığı ve bunun kavram yanılgılarına sebep olabileceği bulgularına yer verilmiştir (Çiftci, 2015; Steen, 1999; Umay & Kaf, 2005).

Onlara göre kolay görünen sorularda daha özgüvenli oldukları ve bu özgüvenle soruları çözerken daha üretken yani sorunun çözümüne yarayacak daha çeşitli yollar denedikleri aşikardır. Bununla ilişkili olarak soru kökü "…nedir?" şeklinde biten açık uçlu olmayan sorularda öğrencilerin soru çözümlerinde akıl yürütme bileşenlerinin göstergelerine daha sık rastlanmıştır. Soru kökü "…nasıldır?" şeklinde biten ya da ilişki kurmayı ve ispat yapmayı gerektiren sorularda akıl yürütürken daha sık zorlanmışlar ve akıl yürütme bileşenlerinin izleri ile açık uçlu olmayan sorulara göre daha az karşılaşılmıştır.

Bu noktada bu çalışmanın literatüre yaptığı bir diğer katkı da üstün yetenekli öğrencilerin karşılaştıkları soru tipleri açısından akıl yürütme becerilerinin incelenmesi yönündedir. Bu çalışmadan çıkan sonuç doğrultusunda öğrenciler genelde liselere giriş sınavları ya da okullardaki yazılılara yönelik sorular çözdüklerini ifade ettiklerinden onların akıl yürütme becerilerini geliştirecek açık uçlu ve düşünmelerini sağlayacak sorularla pek karşılaşmamaktadırlar. Lerch (2004) tarafından yapılan araştırmada da öğrencilerin ders kitaplarında karşılaştıkları rutin sorulara benzer olan problemleri sonuca doğru şekilde ulaştırdıkları, rutin olmayan sorularda ilerleme kaydedemediklerine dair sonuçlar bu tez çalışmasında elde edilen sonuçla uyuşmaktadır. Çınargil (2022) de üstün yetenekli öğrencilerin her zaman rutin problemlerle karşılaştıklarını ve onların aşina olmadıkları sorularda yaratıcı akıl yürütme yapamadıkları, ezbere bildikleri yolları kullandıkları ancak başarılı olamadıklarını ifade etmiştir. Öğrenciler aşina oldukları sorular üzerinde daha esnek bir şekilde çalışırlarken daha önce karşılaşmadıkları sorularda geri adım atmaktadırlar. Bununla birlikte üstün yetenekli öğrencilerin kendilerini zorlayan sorularla da uğraşmaktan zevk aldıkları ve onları motive

ettikleri bilinen bir durumdur (Özçelik, 2017). Buna ek olarak, üstün yetenekli öğrencilerin rutin olmayan, karmaşık ve uzun işlemler gerektiren soruları çözmekte istekli oldukları ve problem çözme süreçlerinde akıl yürütme, soyutlama ve genelleme becerilerini kullandıkları araştırmacılar tarafından ifade edilmiştir (Garofalo, 1993; Montague, 1991; Sriraman, 2003). Dolayısıyla üstün yetenekli olan bu öğrencilerin açık uçlu veya rutin olmayan soru kökü "…nasıldır?" şeklinde biten ya da ispat yapmayı ve ilişki kurmayı gerektiren sorularda zorlanmayarak akıl yürütme becerilerini sergileyecekleri düşüncesine rağmen güncel sonuçlar bu araştırmaların aksini göstermiştir. Öğrencilerin rutin olmayan, açık uçlu veya tek bir cevabı olmayan sorularda yaratıcı akıl yürütme becerilerini geliştirmek için öğrenme ortamlarında sürekli aktif şekilde düşünmelerini sağlanmalıdır. Böylece akıl yürütürken her zaman bildikleri bir formülü kullanmaya veya ezberledikleri bilgileri hatırlamaya çalışmaları engellenebilir.

Bir diğer dikkat çeken sonuç ise öğrencilerin problem çözme oturumlarında sonuç odaklı oldukları gözlemlenmiş ve sorunun doğru cevaba ulaştıklarını düşündüklerinde farklı yollar için herhangi bir çaba göstermek istemedikleri zamanlar olmuştur. Bu durumu kendilerini daha fazla yormanın, çözmeye çalışmanın gereksiz olacağını ifade ederek açıklamışlardır. Araştırmanın ilerleyen haftalarında, sürece alışmalarının da etkisiyle kendi istekleriyle farklı çözüm yolları düşünmeye başlamaları gelişme kaydettiklerini göstermektedir.

Geometri öğrenme alanına ait birçok alt öğrenme alanına ait sorularla karşılaşan öğrencilerin üçgenler alt öğrenme alanından olan sorularda akıl yürütme bileşenlerinin izlerine daha sık rastlanması üçgenler ile ilgili sorularda daha iyi akıl yürüttüklerini göstermiştir. Ancak bu tez çalışmasının odak noktası olmasa da süreç boyunca öğrencilerin düşüncelerini ifade ederlerken matematiksel kavramların isimlerini olması gerektiği gibi söyleyemedikleri veya kavramlar hakkında kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmüştür. Üstün yetenekli öğrencilerin geometri kavramları hakkında sahip oldukları kavram yanılgıları hakkında çalışmalar mevcuttur (Bozan & Savaş, 2019; Mason, 1989; Öksüz, 2010). Ancak bunun nedenleri ve çözüm yolları üzerine de çalışmalar yapmak daha güncel sonuçlar çıkarmak adına araştırmacılar için yararlı olabilir.

Buraya kadar ortaya konan sonuçların nedenlerini tartışmak gerekirse; çalışmaya katılan öğrencilere onlara göre zor olan (genelde karşılarına çıkmayan) sorular verildiğinde, onlardan beklenen düzeyde düşünme becerilerini sergileyememektedirler. Bunun bir nedeni üstün yetenekli öğrencilerin, üstün yetenekli tanısı koyulmamış diğer öğrenciler ile aynı eğitim ortamında merkezi sınavlara yönelik rutin sorularla karşılaşmaları olabilir. Üstün yetenekli

öğrencilerin birçok konuda normal başarılı öğrencilerden matematiksel yeteneklerinin daha iyi olduğu bilindiğinden öğretmenler onların kendi başlarına da öğrenebilecekleri yanılgısına sahip olabilirler (Jaime, Gutierrez, & Benedicto'dan aktaran Sua, Gutierrez & Jaime, 2020). Ancak diğer birçok yetenek gibi matematiksel yetenek de özel bir eğitimle yeni tecrübelere, zorluklarla karşılaşılmasına ve uygun bir öğretimle desteklenmeye ihtiyaç duyar (Sua vd., 2020). Ayrıca bu öğrencilerin potansiyellerini daha çok ortaya çıkarması beklenen Bilim ve Sanat Merkezlerinde verilen matematik eğitimi genellikle okulu destekleyecek düzeyde kaldığından onların mevcut potansiyellerini daha ileri düzeye taşıyacak nitelikte olmaması da burada bir sorun teşkil edebilir. Bu merkezlere giriş sınavları yapılırken alana özgü olmak yerine zekâ testleri ile yapılarak üstün yeteneklilik belirlenmektedir. Bununla ilgili olarak da Çitil (2018), Türkiye'de üstün yetenekli öğrenciler hakkında sistemli ve planlı bir politika olmadığı, eğitim programları, ölçme araçlarının yetersizliği ve Bilim ve Sanat Merkezlerinde verilen eğitimin verimliliği hakkındaki sorunlara değinmiştir. Yurtdışında yapılan çalışmalar incelendiğinde üstün yeteneklilik kavramına ve üstün yetenekli öğrencilere verilen önemin 1960'lı yıllarda başladığı görülmektedir (Krutetskii, 1976; Renzulli, 1978; Rosenbloom, 1960; Sriraman, 2004). Ancak ülkemizde üstün yetenekli öğrencilere verilen önem ve bu konudaki çalışmalar son yıllarda yapılmaya başlanmıştır.

Bu çalışmada öğrencilerin aşina olmadıkları sorularla karşılaştıklarında zorlanmalarına ve kolay gördükleri sorularda daha iyi akıl yürütme becerileri sergilemelerine rağmen farklı sorular gördüklerinde hevesleri kırılmamış, onları zorlayan sorularla sıkılmadan uğraşmaya devam ettikleri gözlemlenmiştir. Bu çalışmaya dâhil oldukları için mutlu olduklarını, okul hayatlarında karşılaşmadıkları farklı sorularla yüz yüze geldikleri için kendilerini geliştirme fırsatı bulduklarını her fırsatta dile getirmişlerdir. Dolayısıyla, üstün yetenekli öğrencileri zorlayacak matematiksel görevlerin verildiği ortamlar sağlayarak onların potansiyellerini ortaya çıkarmak elzemdir. Üstün yetenekli öğrencilerin potansiyellerini tam anlamıyla gösterebilmelerini sağlamak ve akıl yürütme becerilerini daha da geliştirmek için öğretim programlarında rutin olmayan, zorlayıcı ve ufuk açıcı problem durumlarının yer almasında fayda vardır. Öğrencilere rehberlik ederken onlara her zaman doğru cevaba ulaşmanın öneminden ziyade onların gelişimine katkı sağlayacak bir sürecin daha faydalı ve değerli olduğu bilincine sahip olmalarını da sağlamak gerekmektedir. Bu öğrencilere rehber olacak kişilerin öğretmenler olduğunu düşünürsek, lisans programlarında öğretmen adaylarına akıl yürütme süreçlerinde aktif bir şekilde rol alabilecekleri eğitim ortamları hazırlanmalıdır.

Diğer çalışmalara ışık tutması adına, burada sunulan sorunlara çözüm getirecek şekilde öğretim programları/ders içerikleri hazırlanabilir. Üstün yetenekli öğrencilerin öğrenme hızlarına göre, öğretmen ile etkileşimli iletişim kurmada ihtiyaçlarının ve tercihlerinin farklılaştığını ortaya koyacak nitelikte ve işbirliği ile öğrenmeyi temel alan şekilde hazırlanan öğretim programları/ders içerikleri bir çözüm getirebilir (Zedan & Bitar, 2017). Üstün yetenekli öğrencilerin tanılanmasında ve onların eğitim süreçlerinde gelişimine yönelik daha farklı öğrenme ortamları inşa edilebilir. Ayrıca üstün yetenekli öğrencilere eğitim verecek öğretmenlerin de bu öğrencilerin özelliklerine ve ihtiyaçlarına cevap verecek şekilde eğitim almaları etkili olabilir. Araştırmalarda üstün yetenekli öğrencilere yönelik sınıf içi farklılaştırılmış etkinliklerin oranının düşük olduğu belirlenmiştir. Bu nedenle sınıf mevcutları çok olduğundan okul yönetimlerinin öğretmenlere yardımcı ek olarak üstün yetenekli eğitim uzmanları sağlanması, okul yönetimi, veli, öğretmen ve eğitim programı uzmanlarının birlikte hareket etmesi ve öğretmen adaylarına üstün yetenekli öğrencilerin eğitimine yönelik dersler aldırılması gerektiği önerilerinde bulunulmuştur (Westberg, Archambault, Dobyns & Salvin, 1993).

Üstün yetenekli öğrencilerin gerekçelendirme ve argümantasyon becerilerinin gelişmesi için onları eğiten öğretmenlerin uzmanlığı büyük önem taşımaktadır (Singer, 2018). Onlara verilen matematiksel görevlerin düşünmeye zorlayacak, yeni matematiksel kavramlar öğrenebilmelerine ve yöntemler kullanabilmelerine hizmet eden durumlar olmasına özen gösterilmelidir. Özellikle sonuç odaklı öğrenciler için onların var olan potansiyellerini ortaya çıkarmak ve akıl yürütme becerilerini geliştirmek amacıyla tek bir doğru cevabı olmayan açık uçlu matematiksel problemlerle uğraşmaları sağlanmalıdır. Genelleme yapmalarını sağlayan ve yorumlamaya açık sorularla karşılaşmaları yeteneklerini ortaya çıkarmalarını destekleyecektir. Onların akıl yürütme becerilerini geliştirmek ancak onlara uygun öğretim hedefleri belirlemek, uygun sorularla uğraştırmak, sınıf tartışmalarına rehberlik etmek ve öğrenme zorluklarını belirlemekle gerçekleşir. Ayrıca bu tez çalışması sürecinde elimizde olmayan salgın hastalık gibi bir sınırlılığın olması ve bunun sonucu olarak verilerin ancak iki kişiden toplanması elde edilen sonuçları zayıflatabileceğinden, daha fazla kişiyle ve grup çalışmalarıyla fazla sayıda problem çözme oturumları gerçekleştirilmesi bu zayıflığı ortadan kaldırabileceği düşünülmektedir. Ayrıca, üstün yetenekli tanısı konmayan öğrenciler ve bu grup öğrencilerin birlikte katılımcı olarak yer alacağı karşılaştırmalı bir çalışma yürütülebilir. Bu araştırmalardan elde edilen bulgular program geliştiriciler tarafından kullanılabilir.

KAYNAKÇA

Abdurrahman, Saregar, A., & Umam, R. (2018). Assessment toward the quantum physics concept mastery of the prospective physics teachers. *Jurnal Pendidikan IPA Indonesia, 7*(1), 34–40.

Abidin, Z. Sutama, Herman, T., Jupri, A. Farokhah, L., Apuanor, & Sonedi (2021). Gifted children's mathematical reasoning abilities on problem-based learning and project-based learning literacy. *Journal of Physics: Conference Series, 1720.*

Adıyaman, D. (2019). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin cebirsel akıl yürütme becerilerini destekleyen öğrenme ortamından yansımalar.* Yüksek Lisans Tezi, Trabzon Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Trabzon.

Afifah, A. H., Susanto & Lestari, N. D. S. (2022). Geometric reasoning of analysis level students in classifying quadrilateral. *AIP Conference Proceedings 2633*(1).

Akkurt, R. (2020). *Günlük yaşam problemleri uygulanarak altıncı sınıf öğrencilerinin matematiksel yetkinliklerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Akkuş Çıkla, O. ve Duatepe, A. (2002). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme becerileri üzerine niteliksel bir araştırma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 23,* 32-40.

Albaladejo, I. M. R., García, M. D. M., & Codina, A. (2015). Developing mathematical competencies in secondary students by introducing dynamic geometry systems in the classroom. *Egitim ve Bilim, 40*(177).

Albayrak B. Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı.* Yüksek lisans tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Arıcı, S. (2012). *The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement and geometric reasoning of tenth-grade students.* Master Thesis, Boğaziçi University Secondary School Science and Mathematics Education, İstanbul.

Armah, R.B., Cofie, P.O., & Okpoti, C.A. (2018). Investigating the effect of van Hiele Phasebased instruction on pre-service teachers' geometric thinking. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 4*(1), 314-330.

Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi.* Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

Atiyah, M. (2001), Mathematics in the 20th century: Geometry versus Algebra, *Mathematics Today*, *37*(2), 46-53.

Aufmann, R. N., Lockwood, J., Nation, R. D., & Clegg, D. K. (2007). *Mathematical thinking and quantitative reasoning*. Nelson Education.

Aydın Güç, F., Aygün, Y. İ. & Orbay, K. (2021). Üstün yetenekli tanısı konulmuş ve konulmamış öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin karşılaştırılması. *Milli Eğitim, 50*(229), 337-362.

Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi.* Doktora tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aziz, J. A., Juniati, D. & Wijayanti, P. (2020). Students' reasoning with logical mathematical and visual spatial intelligence in geometry problem solving. *International Joint Conference on Science and Engineering*, *196*, 203-207.

Ball, D., and Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. J. Kilpatrick, G. Martin, and D. Schifter (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (s. 27–44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Battista, M. (2001). A research-based perspective on teaching school geometry. *Advances in Research on Teaching, 8*, 145-186.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age.

Battista, M. T. (2017). Mathematical reasoning and sense making. *Reasoning and Sense Making in the Mathematics Classroom: Grades 3–5.* (s. 1-22). National Council of Teachers of Mathematics.

Baykoç, N. (2014). *Üstün yetenek gelişimleri ve eğitimleri.* Ankara: Vize.

Berenger, A. R. A. (2017). *The development of geometric reasoning: middle years students' understanding of 2-dimensional shapes.* Master Thesis, RMIT University, Melbourne.

Berg, D. H. & McDonald, P. A. (2018). Differences in mathematical reasoning between typically achieving and gifted children. *Journal of Cognitive Psychology*, *30*(3), 281-291.

Bernard, M. & Chotimah, S. (September, 2018). *Improve student mathematical reasoning ability with open-ended approach using VBA for powerpoint.* Paper presented at the AIP Conference Proceedings 2014. https://doi.org/10.1063/1.5054417.

Bilim ve Sanat Merkezleri Yönergesi (2022). *Milli Eğitim Bakanlığı Tebliğler Dergisi.* https://orgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2022_06/13131619_BYLYM_VE_SANAT_MERKEZLERY_YONERGESY.pdf sayfasından erişilmiştir.

Bishop, J. W, Otto, A. D & Lubinski C. A. (2001). Promoting algebraic reasoning: Using students' thinking. *Mathematics Teaching In The Middle School*, *6*(9), 508-514.

Boesen, J., Helenius, O., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Lithner, J., Palm, T. & Palmberg, B. (2014). Developing mathematical competence: From the intended to the enacted curriculum. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 72-87.

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies İn Mathematics*, *75*, 89–105.

Boesen, J., Lithner, J. & Palm, T. (2018). Assessing mathematical competencies: An analysis of Swedish national mathematics tests. *Scandinavian Journal of Educational Research, 62*(1), 109-124.

Bostancı, Ü. Y. (2019). S*ekizinci sınıf öğrencilerinin geometriye yönelik öz-yeterlik algıları ile geometrik akıl yürütme becerileri arasındaki ilişkin*in incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Kırşehir.

Bozan, İ. (2022). *Kodlama ve dijital oyun tasarımı destekli 5e modelinin üstün yetenekli öğrencilerin akademik başarı ve problem çözme becerilerine etkisi*. Doktora Tezi, Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Burdur.

Bozan, İ. & Savaş, B. (2019). Üstün yetenekli öğrencilerde sık görülen kavram yanılgılarının öğretmen görüşlerine göre incelenmesi. *Disiplinlerarası Eğitim Araştırmaları Dergisi, 3*(6) , 87-98.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms.* London: Springer Science and Business Media.

Brody, L. E., & Stanley, J. C. (2005). Youths who reason exceptionally well mathematically and/or verbally: Using the MVT:D4 model to develop their talents. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (2nd ed., pp. 20-37). New York, NY: Cambridge University.

Broome, J. (2013). *Rationality through reasoning.* Malden, MA: Wiley-Blackwell.

Bulut, A. S., Yıldız, A., & Baltacı, S. (2020). A comparison of mathematics learning approaches of gifted and nongifted students. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 11*(2), 461-491.

Calder, B. J., Phillips, L. W. & Tybout, A. M. (1982). The concept of external validity. *Journal of Consumer Research 9*(3), 240-244.

Cantürk Günhan, B. (2014). A case study on the investigation of reasoning skills in geometry. *South African Journal Of Education, 34*(2), 1-19.

Ceylan, T. (2012). *Geogebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi.* Yüksek lisans tezi, Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Couto, A., & Vale, I. (2014). Pre-service teachers' knowledge on elementary geometry concepts. *Journal of the European Teacher Education Network, 9*, 57-73.

Creswell, J. W. (2014). *Nitel araştırma yöntemleri* (M. Bütün & S. B. Demir Çev.) Ankara: Siyasal.

Creswell, J. W. (2017). *Araştırma deseni* (S. B. Demir Çev.) Ankara: Eğiten Kitap.

Cutts, N. E. and Moseley, N. (2001) *Üstün zekâlı ve yetenekli çocukların eğitimi* (İ. Ersevim, Çev.). İstanbul: Özgür.

Çağlar, Ç. (2022). *Ortaokul 6 ve 7. sınıfa devam eden üstün yetenekli öğrencilerin üst bilişsel farkındalıkları, problem çözme becerileri ile öz yeterlik algı düzeylerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul.

Çalışkan, Ç. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi.* Yüksek lisans tezi, Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Çelikel, F. (2022). *Ortaokul matematik dersi öğretim programının matematiksel yetkinlik bağlamında aydınlatıcı program değerlendirme modeli ile değerlendirilmesi*. Doktora Tezi, Mersin Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Mersin.

Çınargil, T. (2022). *Üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel muhakeme becerilerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.

Çiftci, Z. (2015). *Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi.* Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Çitil, M. (2018). Türkiye'de üstün yeteneklilerin eğitimi politikalarının değerlendirilmesi. *Milli Eğitim, 1*, 143-172.

Çitil, M. & Ataman, A. (2018). İlköğretim çağındaki üstün yetenekli öğrencilerin davranışsal özelliklerinin eğitim ortamlarına yansıması ve ortaya çıkabilecek sorunlar. *Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 38*(1), 185-231.

Çoban, H. (2010). *Öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme becerileri ile bilişötesi öğrenme stratejilerini kullanma düzeyleri arasındaki ilişki*. Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Tokat.

Çoban, H. (2019). *Farklılaştırılmış öğretim tasarımının öğrencilerin matematiksel muhakeme becerilerine, bilişötesi öğrenme stratejilerini kullanma düzeylerine ve problem çözme becerilerine etkisi.* Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Balıkesir.

Dark, V. J., & Benbow, C. P. (1990). Enhanced problem translation and short-term memory: Components of mathematical talent. *Journal of Educational Psychology, 82*(3), 420–429.

Dayan, M. (2021). *Matematik dersi öğretim programlarının veri işleme alanının istatiksel akıl yürütme açısından incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.

Demir, G., & Vural, R. A. (2017). Ortaöğretim matematik programının hedeflediği matematiksel yeterlilik ve becerilerinin kazandırılma sürecinin öğretmen görüşleri temelinde incelenmesi. *Adnan Menderes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 4*(1), 118-139.

Diezmann, C. M., & Watters, J. (2001). The collaboration of mathematically gifted students on challenging tasks. *Journal for the Education of the Gifted, 25*, 7-31.

Dinamit, D. (2020). *Üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçlerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Aydın Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Aydın.

Dinçer, B. (2019). *Eğitsel robotik uygulamalarıyla 7. sınıf öğrencilerinin doğrusal denklemlerde cebirsel akıl yürütmenin gelişimi: Bir öğretim deneyi.* Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, (pp. 37-52).

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – the registers of semiotic representation.* Cham, Switzerland: Springer Nature.

Erdem, E. (2011). *İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin matematiksel ve olasılıksal muhakeme becerilerinin incelenmesi*. Yüksek Lisans Tezi, Adıyaman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Adıyaman.

Erkek, Ö. (2017). *An analysis of prospective middle school mathematics teachers' argumentation structures in technology and paper-pencil environments.* Doctoral Dissertation, Middle East Technical University Graduate School of Social Sciences, Ankara.

Findley, M. G. & Kikuta, K. & Denly, M. (2020). *External validity*. https://www.datascienceassn.org/sites/default/files/External%20Validity.pdf sayfasından erişilmiştir.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *EducationaI Studies in Mathematics, 24,* 139-162.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 51–75.

Gagne, F. (2000) A differentiated model of giftedness and talent. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED448544.pdf sayfasından erişilmiştir.

Gagné, F. (2003). Transforming Gifts into Talents: The DMGT as a Developmental Theory. In N. Colangelo and G. A. Davis (Eds.) *Handbook of Gifted Education* (pp. 60-74). Boston MA: Allyn and Bacon.

Gagne, F. (2004). Transforming gifts into talents: DMGT as a developmental theory. *High Ability Studies, 15*(2), 119-147.

Gardner, H. (2011). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences.* Basic boks: USA.

Garfield, J. (1991). Evaluating students' understanding od statistics: Development of the statistical reasoning assessment. *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 1-7, Blacksburg, VA,.

Garofalo, J. (1993). Mathematical problem preferences of meaning-oriented and number-oriented problem solvers. *Journal for the Education of the Gifted, 17,* 26-40.

Geary, D. C., & Brown, S. C. (1991). Cognitive addition: Strategy choice and speed-of-processing differences in gifted, normal, and mathematically disabled children. *Developmental Psychology, 27*(3), 398–406.

Gergin, G. (2022). *8. sınıf öğrencilerinin cebirde stratejik akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Glesne, C. (1999). *Becoming qualitative researchers: An introduction*. New York: Longman.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*, 14-18.

Gutierrez, A., Benedicto, C., Jaime, A. & Arbona, E. (2018). The Cognitive Demand of a Gifted Student's Answers to Geometric Pattern Problems. In F. M. Singer (Ed.), *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness*, (pp. 169-198), Cham, Switzerland.

Gündoğdu, N. S. (2021). *7. sınıf öğrencilerinin orantısal akıl yürütme becerilerinin fetemm etkinlikleriyle gelişiminin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Zonguldak.

Günhan, B. (2014). A case study on the investigation of reasoning skills in geometry. *South African Journal of Education, 34*, 1-19.

Güray, U. Ş., Gök, M. & Bilgin, E. A. (2019). İlköğretim 8. sınıf öğrencilerinin istatistiksel akıl yürütme becerilerinin incelenmesi. *3. Uluslararası Sosyal Ve Beşeri Bilimler Kongresi Tam Metin Kitabı,* 776-786.

Gürbüz, R. & Erdem, E. (2016) Relationship between mental computation and mathematical reasoning, *Cogent Education, 3*(1), 1-18.

Haavold, P. O. (2013). *What are the characteristics of mathematical creativity? An emprical and theorical investigation of mathematical creativity?* Doctoral Dissertation, University of Tromso, Norway.

Hasanah, S. I., Tafrilyanto, C. F. & Aini, Y. (2018). Mathematical reasoning: The characteristics of students' mathematical abilities in problem solving. *Journal of Physics: Conference Series, 1188*, 1-8.

İlhan A. & Aslaner R. (2018). Matematik öğretmeni adaylarının geometrik şekiller üzerine akıl yürütme becerilerinin üniversite ve sınıf düzeyi değişkenleri açısından incelenmesi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19*(2), 82-97.

Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16.

Johannson, H. (2015). *Mathematical reasoning in physics and real-life context.* Doctoral Dissertation, Chalmers University of Technology and University of Gothenburg Department of Mathematical Sciences, Sweden.

Johnson, D. T. (2000). *Teaching mathematics to gifted students in a mixed-ability classroom.* Eric Clearinghouse.

Jones, K., (1998). Theoretical frameworks for the learning of geometrical reasoning, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 18* (1-2), 29-34.

Jones, G.A., Langrall, C.W., Mooney, E.S. & Thornton, C.A. (2004). Models of development in statistical reasoning. In D. Ben-Zvi and J. Garfield (Eds). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking*, pp. 97–117, Dordrecht: Kluwer Academic.

Kanevsky, L. S. (1990). Pursuing qualitative differences in the flexible use of a problem solving strategy by young children. *Journal for the Education of the Gifted, 13,* 115–140.

Karamikabir, N. (2012). Gardner's multiple intelligence and mathematics education, *Procedia-Social and Behavioral Sciences 31*, 778 – 781.

Karataş Aydın, F. İ. (2022). *An investigation of elementary gifted students' modeling competencies through engineering-based model eliciting activities.* Doctoral Dissertation, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Karpuz, Y. & Atasoy, E. (2019). Investigation of 9th grade students' geometrical figure apprehension. *European Journal of Educational Research, 8*(1), 285-300.

Kaufman, S. B., & Sternberg, R. J. (2008). Conception of giftedness. In S. I. Pfeiffer (Ed.), *Handbook of giftedness in children: Psychoeducational theory, research and best practices* (pp. 71-93). USA: Springer.

Kırnap Dönmez, S. M. (2021). *7. sınıf öğrencilerinin cebir öğrenme alanı bağlamında matematiksel yeterliklerinin incelenmesi.* Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Kızıltoprak, A. (2020). *Ortaokul öğrencilerinin dörtgenlere ilişkin geometrik muhakemelerinin gelişimi.* Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Kilpatrick, J. & Swafford, J. (2002). *Helping Children Learn Mathematics.* Washington, DC: National Academy.

Knuth, E. J., Choppın, J. M., & Bieda, K. N. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. In D. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (Eds.),

Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective (pp. 153-170). New York: Routledge.

Koç Koca, A. & Gürbüz, R. (2019). Üstün yetenekli ve diğer 4. sınıf öğrencilerinin matematik problemlerini çözme stratejileri üzerine bir araştırma. *YYÜ Eğitim Fakültesi Dergisi, 16*(1), 1638-1667.

Koichu, B. & Berman, A. (2005). When do gifted high school students use geometry to solve geometry problems? *The Journal of Secondary Gifted Education, 16*(4), 168-179.

Kök, B. & Davaslıgil, Ü. (2014). The effect of teaching geometry which is differentiated based on the parallel curriculum for gifted/talented students on spatial ability. *Journal for the Education of the Young Scientist and Giftedness, 2*(1), 40-52.

Kramarski, B., & Mevarech, Z. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: The effects of cooperative learning and metacognitive training. *American Educational Research Journal, 40*(1), 281-310.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R., & Lieberman, A. (2001). Effects of multilevel versus unilevel metacognitive training on mathematical reasoning. *Journal of Educational Research, 94*, 292–300.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago: University of Chicago Press.

Kulm, G. (2010). Geometry enrichment for mathematically gifted students. *Roeper Review, 6*(3), 150-151.

Kurnaz, A. (2018). Examining effects of mathematical problem-solving, mathematical reasoning and spatial abilities on gifted students' mathematics achievement. *World Scientific Research, 5*(1), 37-43.

Lee, K. H. (2005). Mathematically gifted students' geometrical reasoning and informal proof. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 241-248. Melbourne: PME.

Lerch, C. M. (2004). Control decisions and personal beliefs: Their effect on solving mathematical problems. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 21–36.

Levav-Waynberg, A. & Leikin, R. (2009). *Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry*. Paper presented Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, January 28th - February 1st 2009, Lyon (France).

Lithner, J. (2005). *A framework for analysing qualities of mathematical reasoning.* http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:umu:diva-37668 sayfasından erişilmiştir.

Lithner, J. (2006). *A framework for analysing creative and imitative mathematical reasoning.* https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=1190a2dc1bacd94fb92ba51c67365d158f8ded5a sayfasından erişilmiştir.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255–276.

Lithner, J., Bergqvist, E., Bergqvist, T., Boesen, J., Palm, T. & Palmberg, B. (2010, January). *Mathematical competencies-A research framework*. Paper presented at the MADIF7 Mathematics and mathematics education: Cultural and social dimensions, Stockholm.

Livne, N. L., and Milgram, R. M. (2006). Academic versus creative abilities in mathematics: Two components of the same construct? *Creativity Research Journal, 18*, 199–212.

Mafada, A. A., Kusmayadi, T. A. & Fitriana, L. (February, 2020). Identification of Mathematical Reasoning Ability in Solving Higher Order Thinking Skills Problems. *In 3rd International Conference on Learning Innovation and Quality Education (ICLIQE 2019)* (pp. 916-924). Atlantis.

Malloy, C. E. (1999). Developing mathematical reasoning in the middle grades recognizing diversity. In Lee V. Stiff (Ed.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12 / 1999 yearbook*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Marchis, I. (2012). Preservice primary school teachers' elementary geometry knowledge. *Acta Didactica Napocensia, 5*(2), 33-41.

Marland, S. P. (1972). *Education of gifted and talented.* Report to the congress of US Comissione of Education. Washington DC.

Masfingatin, T. & Murtafiah W. (2020). Explorıng the creative mathematical reasoning of mathematics education student through discovery learning. *Jurnal Program Studi Pendidikan Matematika*, *9*(2), 296-305.

Mason, M. M. (1989). *Geometric understanding and misconceptions among gifted fourth-eighth graders.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, SanFrancisco, CA.

Mason, M. M. (October, 1995). *Geometric understanding in gifted students prior a formal course in geometry*. Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Columbus, Ohio.

Mason, J. (2001). Questions about mathematical reasoning and proof in schools. In J. Abramsky (Ed.), *Reasoning, explanation and proof in school mathematics and their place in the intended curriculum: Proceedings of the QCA International Seminar*. London: QCA.

Metin, N. (1999). *Üstün Yetenekli Çocuklar*. Özaşama Matbaacılık, Ankara.

Miller, R. C. (1990). *Discovering mathematical talent.* Washington, DC: ERIC. http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=934 sayfasından erişilmiştir.

Milli Eğitim Bakanlığı (1991). *I. Özel Eğitim Konseyi*, Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB, 2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar)*.Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB, 2019). *Özel yetenekliler için matematik öğretim programı.* Ankara.

Montague, M. (1991). Gifted and learning disabled gifted students' knowledge and use of mathematical problem-solving strategies. *Journal for the Education of the Gifted, 14,* 393-411.

Morelock, M. (1992). Giftedness: The wiew of from within. *Understanding Our Gifted, 4*(3), 11-15.

National Association for Gifted Children (2019). *What is gifted?*. Retrieved from http://www.nagc.org/index.aspx?id=574&an.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2010). *Program for the research presession*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Research Council (NRC). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy.

National Research Council (NRC). (2002). *Helping Children Learn Mathematics*. Mathematics Learning Study Committee, J. Kilpatrick and J. Swafford, (Eds.) Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy.

Nemutlu İnanır, Ş. (2019). *Üstün yetenekli öğrencilerin orantısal akıl yürütme becerilerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. *Third Mediterranean conference on mathematics education* (pp. 115–124).

Niss, M. (2015). Mathematical competencies and PISA. K. Stacey, R. Turner (Eds.), *Assessing Mathematical Literacy* (s. 35-55). Switzerland: Springer.

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework, PISA.* OECD, Paris, https://doi.org/10.1787/b25efab8-en.

Öksüz, C. (2010). İlköğretim yedinci sınıf üstün yetenekli öğrencilerin "nokta, doğru ve düzlem" konularındaki kavram yanılgıları. *İlköğretim Online, 9*(2), 508-525.

Öz, T. (2017). *7. sınıf öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi.* Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Özaydın, Z. (2022). *Matematiksel muhakeme etme yeterliğinin uzaktan eğitim yoluyla verilen matematik okuryazarlığı hizmet içi öğretmen eğitimi ve uygulamaları sürecinde*

değerlendirilmesi. Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Özçakır, B., Özdemir, D., & Kıymaz, Y. (2020). Effects of dynamic geometry software on students' geometric thinking regarding probability of giftedness in mathematics. *International Journal of Contemporary Educational Research, 7*(2), 48-61.

Özçelik, T. (2017). *Üstün yetenekli öğrencilere yönelik geliştirilen farklılaştırılmış matematik dersi öğretim programının etkililiği*. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Özdemir, D. & Işıksal Bostan, M. (2021). A design based study: Characteristics of differentiated tasks for mathematically gifted students. *European Journal of Science and Mathematics Education, 9*(3), 125-144.

Öztürk, M., Akkan, Y., & Kaplan, A. (2014). Üstün yetenekli öğrencilerin matematik kavramına yönelik algılarının incelenmesi. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists, 2*(2), 49-57.

Öztürk, M., Akkan, Y., Kaplan, A. (2017). Üstün yetenekli lise öğrencilerinin ispatla ilgili kavramlara yönelik bilgi ve farkındalıklarının incelenmesi. *Üstün Zekalılar Eğitimi ve Yaratıcılık Dergisi, 4*(2), 19-35.

Panaoura, G. & Gagatsis, A. (2009). *The geometrical reasoning of primary and secondary school students.* Paper presented Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, January 28th - February 1st 2009, Lyon (France).

Pavlovičová, G., & Bočková, V. (2021). Geometric thinking of future teachers for primary education—an exploratory study in Slovakia. *Mathematics*, *9*(23). http://dx.doi.org/10.3390/math9232992.

Pilten, P. (2008). *Üstbiliş stratejileri öğretiminin ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin matematiksel muhakeme becerilerine etkisi*. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Poon, K. K. & Leung, C. K. (2016). A study of geometric understanding via logical reasoning in Hong Kong. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning (IJMT), 17*(3).

Posamentier, A. & Krulik, S. (1998). *Problem solving strategies for efficient and elegant solutions.* California: Corwin. A Sage Publications.

Posamentier, A. & Salkind, C. T. (1988). *Challenging problems in geometry.* New York: Dover.

Potari, D., Zachariades, T. & Zaslavsky, O. (2009). *Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims.* Paper presented at the Congress of the European Society for Research in Mathematics Education 6, Lyon, France.

Rachmaningtyas, N. A., Jailani, J. & Fitriyani, H. (2020). Classification of mathematical reasoning competencies based on mathematical problem solving in elementary school. *AIP Conference Proceedings*, 2268(1).

Ramírez-Uclés, R., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2022). Reasoning, representing, and generalizing in geometric proof problems among 8th grade talented students. *Mathematics, 10*(5), 789. http://dx.doi.org/10.3390/math10050789.

Reilly, D., Neumann, D.L. & Andrews, G (2017). Gender differences in spatial ability: Implications for STEM education and approaches to reducing the gender gap for parents and educators. In M. S. Kheine, (Eds.), *Visual-Spatial Ability in STEM Education*, Springer: Cham, Switzerland, pp. 195–224.

Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Re-examining a definition. *Phi Delta Kappan, 60,* 180–184.

Renzulli, J.S. (1999). What is thing called giftedness, and how do we develop it? A twenty-five year perspective. *Journal for the Education of Gifted, 23*(1), 3-54.

Renzulli, J. S. (2003). Conception of Giftedness and Its Relationship to the Development of Social Capital. In: N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.) *Handbook of Gifted Education* (pp. 75-87). Boston MA: Allyn and Bacon.

Research and Development Corporation (RAND) Mathematics Study Panel. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and development program in mathematics education.* Santa Monica, CA: RAND.

Rizqi, N. R. & Surya, E. (2017). An analysis of students' mathematical reasoning ability in VIII grade of Sabilina Tembung junior high school. *International Journal Of Advance Research And Innovative Ideas In Education 3*(2), 3527-3533

Rohana (2015). The enhancement of student's teacher mathematical reasoning ability through reflective learning, *Journal of Education and Practice, 6*(20), 108-114.

Rosenbloom, P.C. (1960). Teaching gifted children mathematics. In. E. Torrance (Ed.) *Talent and Education: present status and future directions.* Papers presented at the 1958 Institute on Gifted Children (s. 351-370). Minneapolis: University of Minnesota.

Ross, K. A. (1997). *Second Report from the MAA Task Force on the NCTM Standards.* Mathematical Association of America Web Site.

Russell, S.J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff and F. R. Curcio (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 1-13). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sak, U. (2010). *Üstün zekâlılar: Özellikleri, tanılanmaları, eğitimleri.* Maya Akademi, Ankara.

Sak, U. (2013). *Üstün zekâlılar.* Ankara: Vize.

Seah, R. & Horne, M. (2019). The construction and validation of a geometric reasoning test item to support the development of learning progression, *Mathematics Education Research Journal, 32*(3), 607-628.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs?, *The Mathematics Teacher, 78*(6), 448-456.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University.

Shapiro, S. I. (1965). A study of pupils' individual characteristics in processing mathematical information. *Voprosy Psikhologii, 2*, 1-113.

Sırtmaç, G. (2018). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin geometrik akıl yürütme becerilerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Simon, M. A. (1996). Beyond inductive and deductive reasoning: The search for a sense of knowing. *Educational Studies in Mathematics, 30*(2), 197-210.

Singer, F. M. (2018). Enhancing creative capacities in mathematically-promising students. challenges and limits. In F. M. Singer (Ed.), *Mathematical Creativity and Mathematical Giftedness* (pp. 1-23), Hamburg, Germany.

Singer, F. M., Sheffield, L. J., Freiman, V., & Brandl, M. (2016). *Research on and activities for mathematically gifted students.* New York: Springer Open.

Smith, R. C., (2010). *A Comparison of Middle School Students' Mathematical Arguments in Technological and Non-technological Environments.* Doctoral Dissertation, North Carolina State University.

Sriraman, B. (2002). How do mathematically gifted students abstract and generalize mathematical concepts? *NAGC 2002 Research Briefs, 16,* 83–87.

Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving, and the ability to formulate generalizations. *The Journal of Secondary Gifted Education, 14,* 151-165.

Sriraman, B. (2004). Gifted ninth graders' notions of proof: Investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted, 27*(4), 267-292.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 20-36.

Stake, R. E. (2005). Qualitative case studies. In N. K. Denzin, & Y.S. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research (3rd ed.)* (pp. 443-466). Thousand Oaks, CA: Sage.

Steen, L. A. (1999). Twenty question about mathematical reasoning. In L. V. Stiff, F. R. Curcio. (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 yearbook* (pp. 270-285). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455–488.

Sternberg, R. J. (1999). The nature of mathematical reasoning. In L. V. Stiff, F. R. Curcio. (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 yearbook* (pp. 37-44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sternberg, R. J. (2003). *G*iftedness According to Theory of Successful Intelligence. In N. Colangelo and G. A. Davis (Eds.) *Handbook of Gifted Education* (pp. 88-99). Boston MA: Allyn and Bacon.

Strauss, A. & Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques.* Newbury Park, CA: Sage.

Sua, C., Gutierrez, A. & Jaime, A. (2020). Design criteria of proof problems for mathematically gifted students. *Proceedings of the Tenth Erme Topic Conference (ETC 10) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA)*. 16-18 September 2020 in Linz, Austria.

Suydam, M. N. (1985). The Shape of Instruction in Geometry. *Some Highlights from Research, Mathematics Teacher*, *7*, 481-486.

Syazali, M., Listiani, B., & Farid, F. (2019). Problem based learning (pbl) and guided discovery learning (gdl) effects of mathematical reasoning capability analysis for gifted students. *Journal of Gifted Education and Creativity, 6*(3), 209-216.

Şahin, Y. (2012). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik akıl yürütmelerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Talsma, H. & Hersberger, J. (1990). STAR experimental geometry: Working with mathematically gifted middle school students. *The Mathematics Teacher*, *83*(5), 351-357.

Taşkın, D. (2010). *Üstün yetenekli tanısı konulmuş ve konulmamış öğrencilerin matematikte yaratıcılıklarının incelenmesi: bir özel durum çalışması.* Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Tjoe, H. (2015). Giftedness and aesthetics: Perspectives of expert mathematicians and mathematically gifted students. *Gifted Child Quarterly, 59*(3), 165-176.

Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). (2023). V. S. Mullis, M. O. Martin & M. V. Davier (Eds.). *TIMSS 2023 Assessment Framework.* Boston College: TIMSS and PIRLS International Study Lynch School of Education.

Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). (2011). *Assessment Frameworks.* https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/downloads/TIMSS2011_Frameworks-Chapter1.pdf sayfasından erişilmiştir.

Tucker, B., & Hafenstein, N. (1997). Psychological intensities in young gifted children. *Gifted Child Quarterly, 41* (3), 66-75.

Turner, R. (2010). Exploring mathematical competencies. *Research Developments, 24*(24).

Tutan, S. (2019). *Geometrik muhakeme süreçleri bağlamında ortaokul matematik öğretmenlerinin geometri içerikli derslerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Gaziantep Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Gaziantep.

Türkiye Büyük Millet Meclisi (TBMM). (2013). *Üstün Yetenekli Çocukların Keşfi, Eğitimleriyle İlgili Sorunların Tespiti ve Ülkemizin Gelişimine Katkı Sağlayacak Etkin İstihdamlarının Sağlanması Amacıyla Kurulan Meclis Araştırması Komisyonu Raporu Taslağı*. H. İncekara (Ed.).

Uçar, F.M., Uçar, M.B., & Çalışkan, M. (2017). Investigation of gifted students' problem-solving skills. *Journal for the Education of Gifted Young Scientists, 5*(3), 15-28.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi 24*, 234-243.

Umay, A. & Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Egitim Fakültesi Dergisi, 28*(1), 188-195.

Vatandaş, B. (2022). *Üstün yetenekli 8. sınıf öğrencilerinin ispat yapma süreçlerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Aydın.

Wagner, H. & Zimmermann, B. (1986). Identification and fostering of mathematically gifted students. In A. Cropley, K. Urban, H. Wagner, and W. Wieczerkowski (Eds.) *Giftedness: A continuing world-wide challenge* (pp.273-287). New York: Trillium.

Webb, J. T. (1993). Nurturing social-emotional development of gifted children. In K. A. Heller, F. J. Monks, and A. H. Passow (Eds.), *International Handbook for Research on Giftedness and Talent*, pp. 525-538. Oxford: Pergamon.

Westberg, K. L., Archambault F. X., Dobyns S. M., Salvin T. J. (1993). *An observational study of instructional and curricular practices used with gifted and talented students in regular classrooms.* The National Research Center on The Gifted and Talented: The University of Connecticut.

Wieczerkowski, W., Cropley, A. J., and Prado, T. M. (2000). Nurturing talents/gifts in mathematics. In K. A. Heller, F. J. Monks, R. J. Sternberg, and R. F. Subotnik (Eds.), *International handbook of giftedness and talent education* (pp. 413- 425). Oxford, United Kingdom: Pergamon.

Wilkins, M. M., Wilkins, J. L. M., & Oliver, T. (2006). Differentiating the curriculum for elementary gifted mathematics students. *Teaching Children Mathematics, 13*(1), 6-13.

Winebrenner, S. (2000). Gifted students need an education, too. *Educational Leadership,* 52-56.

Wong, K. C. (2017, February). *Reasoning-and-proving in geometry in school mathematics textbooks in Hong Kong.* Congress of the European Society for Research in Mathematics Education 10, Dublin, Ireland.

Yanbıyık, S. (2022). *Öğretmen adaylarının matematiksel yetkinlik algılarının ve matematiksel yetkinliğin geliştirilmesine ilişkin görüşlerin belirlenmesi.* Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Yaşar Er, F. (2008). *2004, 2005 ve 2006 yıllarına ait oks matematik soru takımlarının matematiksel yeterlikler açısından analizi.* Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Yazgan Sağ, G. (2012). *Üstün yetenekli ortaöğretim öğrencilerinin matematiksel problem çözme durumlarındaki öz düzenleme davranışları.* Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Yeşildere, S., & Akkoç, H. (2011). Matematik öğretmen adaylarının şekil örüntülerini genelleme süreçleri. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30*(30), 141-153.

Yeşildere, S. & Türnüklü, E. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40,* 181-213.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Seçkin.

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2021). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Seçkin.

Yıldız, A. (2016). The geometric construction abilities of gifted students in solving real – world problems: A case from Turkey. *Malaysian Online Journal of Educational Technology, 4*(4), 53-67.

Yıldız, A. (2022). Examining gifted primary school students' logical reasoning ability. *Turkish Journal of Educational Studies, 9* (1), 84-99.

Yılmaz, K. (2015). *Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine, ispatla ilgili görüşlerine ve akademik başarılarına etkisi.* Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Yılmaz, K. (2019). *Üstün yetenekli öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerine göre problem kurma süreçlerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Kırşehir.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods.* Sage.

Zedan, R., & Bitar, J. (2017). Mathematically gifted students: Their characteristics and unique needs. *European Journal of Education Studies, 3*(4), 236-259.

Zeidmane, A. (2013). Development of Mathematics Competences in Higher Education Institutions. *International Journal of Engineering Pedagogy, 3*(2), 11-17.

Zora, L. Ö. (2019). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin istatistiksel akıl yürütme düzeylerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

EKLER

Ek 1. Araştırma İzin Belgesi

Evrak Tarih ve Sayısı: 06.02.2020-E.19384

T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Ölçme Değerlendirme Etik Alt Çalışma Grubu

BENDNJKN7

Sayı : 91610558-302.08.01-
Konu : Bilimsel ve Eğitim Amaçlı

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 31.12.2020 tarihli ve E.166906 sayılı yazı

İlgi yazınız ile göndermiş olduğunuz, Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, İlköğretim Matematik Eğitimi Bilim Dalı **Doktora Öğrencisi Birnaz KANBUR TEKEREK'in, Prof.Dr.Ziya ARGÜN'ün** danışmanlığında yürüttüğü ***"7. Sınıf Özel Yetenekli Öğrencilerin Akıl Yürütme Becerilerinin İncelenmesi: Geometri Öğrenme Alanı"*** adlı tez çalışması ile ilgili konu Kurulumuzun **04.02.2020** tarih ve **02** sayılı toplantısında görüşülmüş olup,

İlgilinin çalışmasının, yapılması planlanan yerlerden izin alınması koşuluyla yapılmasında etik açıdan bir sakınca bulunmadığına oybirliği ile karar verilmiş ve karara ilişkin imza listesi ekte gönderilmiştir.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

e-imzalıdır
Prof. Dr. İsmail KARAKAYA
Kurul Başkanı

Araştırma Kod No: 2020-068

Ek: 1 liste

06.02.2020 Birim Evrak Sorumlusu Esengül BOŞNAK

Ankara
Tel:0 (312) 202 20 57 - 0 (312) 2... Faks:0 (312) 202 38 76
İnternet Adresi :http://etikkomisyon.gazi.edu.tr/

Bilgi için :Esengül BOŞNAK
Birim Evrak Sorumlusu
Telefon No:03122022666

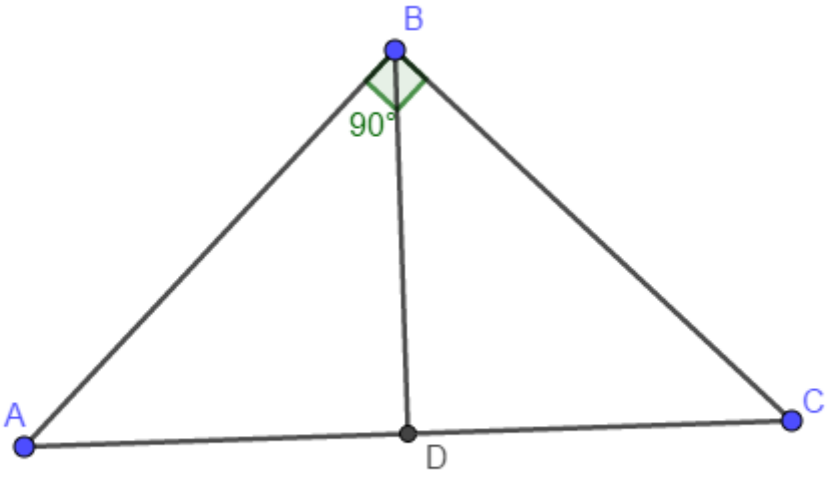
Bu belge,güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Ek 2. Geometri Problemleri

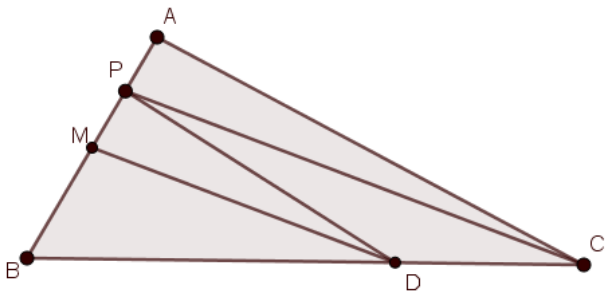
"Lütfen problemler hakkında fikir yürütürken düşüncelerinizi sesli olarak ifade ediniz. Problemi gördüğünüz ilk andan çözümü tamamlayıncaya kadar geçen sürede düşündüğünüz her şeyi seslendirmeyi unutmayınız."

1- Uç noktası ortak olan 10 farklı ışın kaç açı oluşturur? (Saymadan yapınız.) (Posamentier & Krulik, 1998).

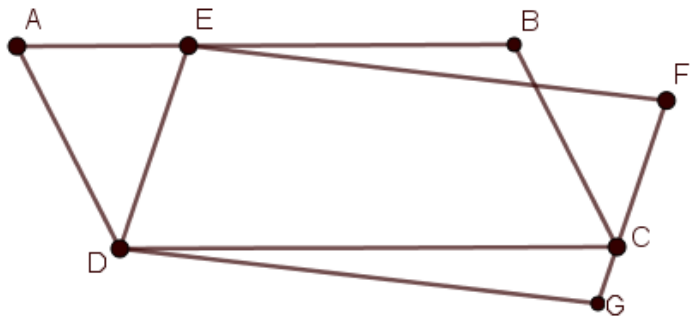
2- Bir dik üçgende hipotenüse çizilen kenarortayın uzunluğunun hipotenüsün uzunluğunun yarısı olduğunu ispatlayınız. (Posamentier & Krulik, 1998).



3- Şekildeki ABC üçgeninde M, [AB] nin orta noktası, P, [MA] üzerinde herhangi bir noktadır. M noktasından [PC] ye paralel olan bir doğru [BC] yi D noktasında kesmektedir. BDP üçgeninin alanı ABC üçgeninin alanının kaçta kaçıdır? (Posamentier & Krulik, 1998).



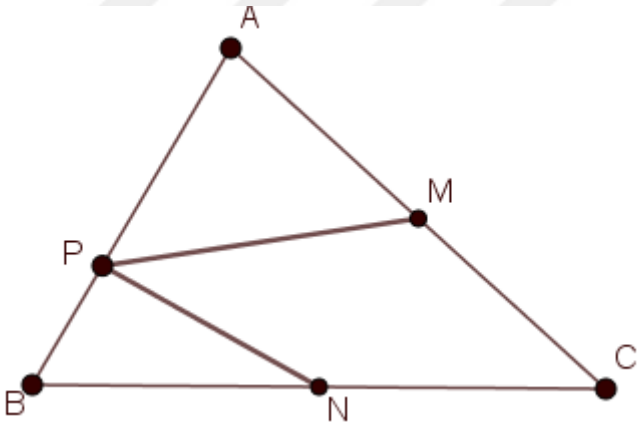
4- Şekilde E ve C noktaları sırasıyla [AB] ve [FG] üzerindedir. ABCD ve EFGD paralelkenarlarının alanları arasındaki ilişki nedir?



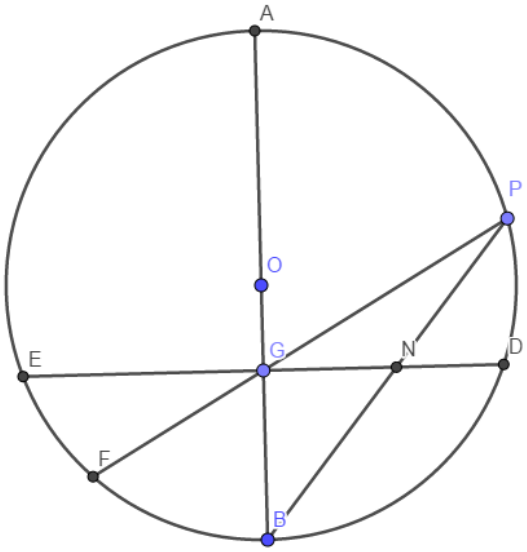
5- cosA.cosB.cosC>0 olan bir üçgen nasıl bir üçgendir? (Posamentier & Krulik, 1998).

6- Bir doğruya dışındaki bir noktadan kaç dik doğru çizilir? Cevabınızı gerekçelendiriniz.

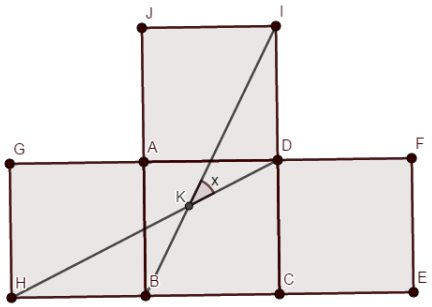
7- Şekildeki ABC üçgeninde P, [AB] de herhangi bir nokta, M ve N noktaları ise sırasıyla [AC] ve [BC] nin orta noktalarıdır. MPNC dörtgeninin alanının ABC üçgeninin alanına oranı nedir? (Posamentier & Krulik, 1998).



8- O merkezli çemberde [ED] kirişi [AB] çapına G noktasında diktir. P noktası AB yayı üzerinde bir nokta ve [PB], [ED] ile N noktasında kesişmektedir. |BN| ve |FG| arasındaki ilişkiyi tahmin ediniz. Tahmininizi destekleyiniz. (Posamentier & Krulik, 1998).



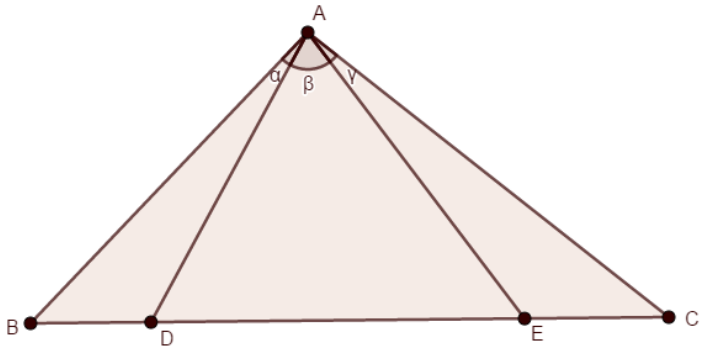
9- Şekilde dört birim kare bulunmaktadır. Buna göre x ile gösterilen açının ölçüsü nedir? (Posamentier & Krulik, 1998).



10- Bir üçgenin iki açıortayı eşitse bu üçgenin ikizkenar üçgen olduğunu gösteriniz. (Koichu & Berman, 2005).

11- Bir ABC üçgeninde [CD] kenarortay ve |CD|=|BD| dir. Buna göre ACB açısının ölçüsünü bulunuz. (Tjoe, 2015).

12-

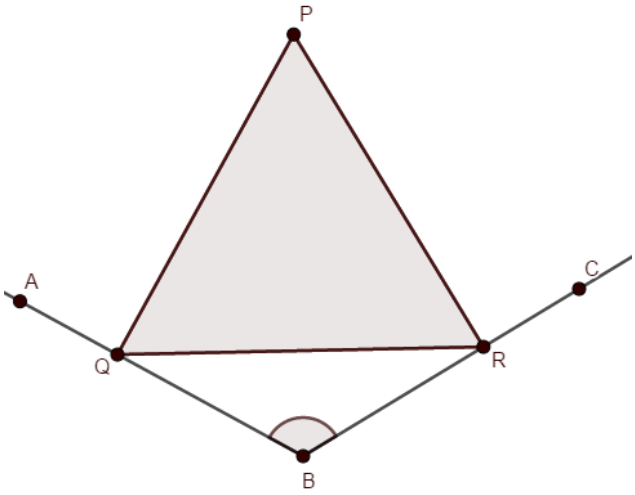


|AB|=|AC| ve $\alpha = \gamma$ ise ADE üçgeninin ikizkenar olduğunu ispatlayınız. Bu probleme göre aşağıdaki tabloda bulunan önermeleri ve sebeplerini yazınız. (Senk, 1985).

Önermeler	Sebepler
|AB|=|AC|	…….
…….	İkizkenar üçgenin taban açıları eştir.
$\alpha = \gamma$	Verilen bilgi
ABD üçgeni ACE üçgenine benzerdir.	…….
……..	Eş şekillerin karşılıklı parçaları eştir.

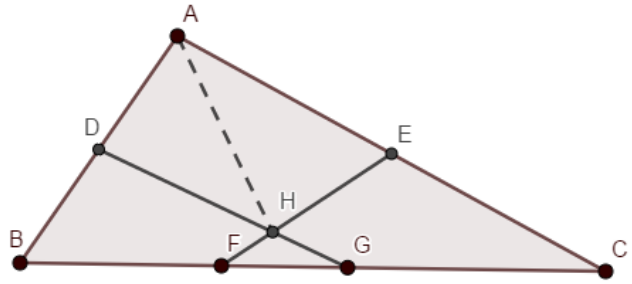
13- "Bir ikizkenar üçgenin tabanındaki bir noktadan diğer kenarlara olan uzaklıkların toplamı, tabandan alınan bütün noktalar için aynıdır." Önermesini ispatlayınız.

14- Şekle göre s($\widehat{ABC}$)= 120° ve PQR eşkenar üçgendir. $\overrightarrow{BA}$ ve $\overrightarrow{BC}$ ışınları üzerindeki Q ve R noktalarından PQR üçgeni hareket ettikçe P noktasının yörüngesi (izlediği yol) nasıl olur? (Posamentier & Krulik, 1998)



15- Hipotenüsü [AC] olan bir ABC dik üçgeni verilsin. [AC]⊥[PC] ve |BC|=|PC| olsun. [BP] nin A açısının açıortayına dik ya da paralel olduğunu gösteriniz. (Posamentier & Salkind, 1988).

16- ABC bir üçgen, [AB] ve [AC] kenarlarının orta noktaları sırasıyla D ve E'dir. F ve G noktaları |BG|=|CF| olacak şekilde [BC] kenarı üzerindedir. [DG] ve [EF] H noktasında kesişmektedir. [AH] hangi durumda A açısının açıortayı olur? (Erkek, 2017).

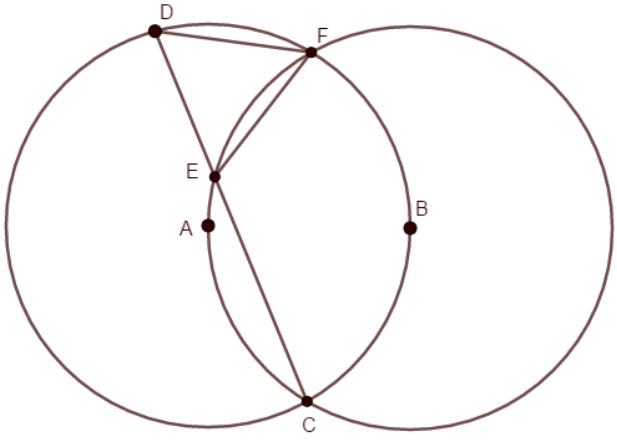


17- Şekildeki iki çember birbirinin merkezinden geçmekte ve C ve F noktalarında kesişmektedir. C noktasından geçen bir doğru çemberleri D ve E noktalarında kesmektedir.

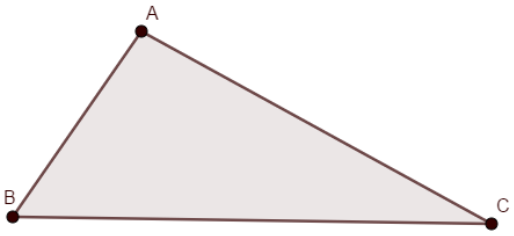
a) |DE|=6 birim ise DEF üçgeninin alanını hesaplayınız.

b) Çemberlerin yarıçapları r ise DEF üçgeninin sahip olabileceği minimum ve maksimum alanı bulunuz.

Not: Şıklar birbirinden bağımsızdır. (Posamentier & Salkind, 1988).

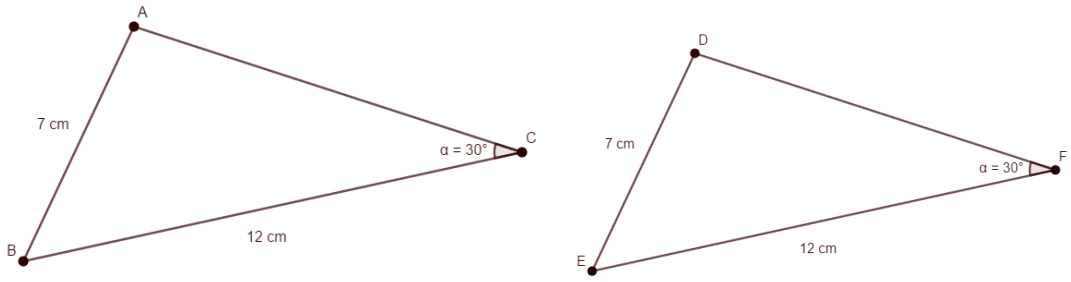


18- Bir üçgende iç teğet çemberin nasıl çizildiğini gösteriniz.



19- A, B ve C üç sabit noktadır. D noktası hareket ettirilerek hangi durumda ABCD dörtgeninin iç açıortaylarının bir noktada kesişeceğini bulunuz. (ABCD dışbükey çokgendir.) (Ceylan, 2012).

20-



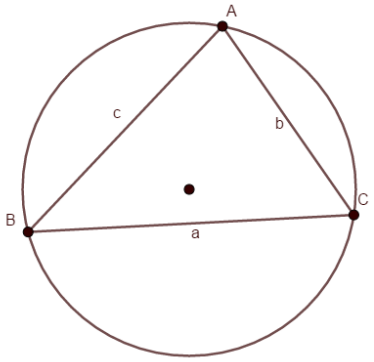
ABC ve DEF üçgenlerinin eş olup olmadığını tartışınız.

Öğrenci A: İki kenarı ve bir açısı eşit olduğu için eş üçgenlerdir.

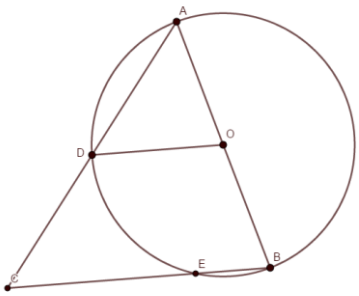
Öğrenci B: İki kenarı ve bu iki kenarı içeren açı eşit olduğunda eş üçgen olabileceği için bu iki üçgen eş değildir.

Bu iki öğrencinin fikirleri hakkında neler söyleyebilirsiniz? (Potari vd., 2009).

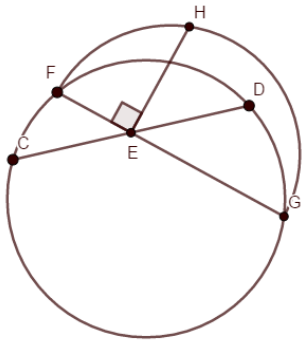
21- ABC üçgeninde çemberin yarıçapı r ile $\frac{a}{sinA}$, $\frac{b}{sinB}$, $\frac{c}{sinC}$ arasındaki ilişki nedir? (Wong, 2017).



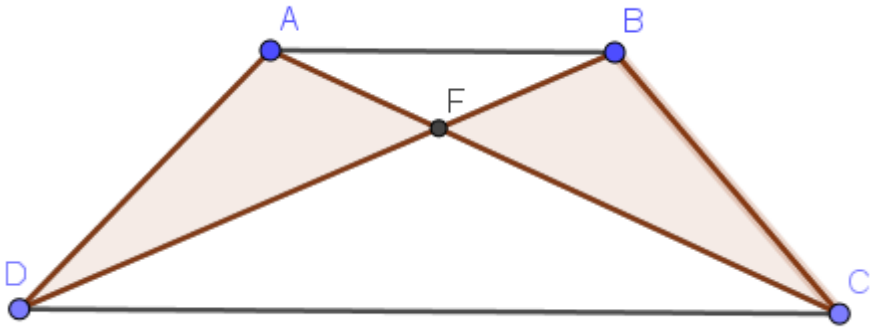
22- [AB] O merkezli çemberin çapı olsun. D ve E noktaları [DO]//[EB] olacak şekilde çemberin üzerindeki noktalar ve C noktası, [AD] ve [BE] nin kesişim noktası olmak üzere, |BC|=|AB| olduğunu mümkün olan en fazla yolla ispatlayınız. (Levav-Waynberg & Leikin, 2009).



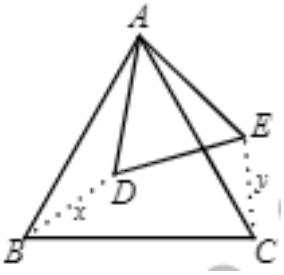
23- [CD] kirişi [FG] kirişini E noktasında iki eşit parçaya bölmüştür. [FG] çaplı bir yarı çember çizilmiştir. [FG] ye dik olan [EH] bu yarı çemberi H noktasında kesmektedir. Buna göre, |EH|=|CE| olduğunu gösteriniz. (Posamentier & Salkind, 1988).



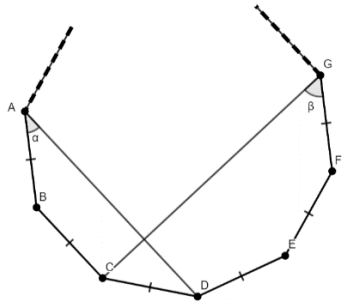
24- Aşağıdaki ABCD yamuğunun köşegenleri çizildiğinde bu yamuğun yan kenarlarına ait üçgenlerin alanları arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.



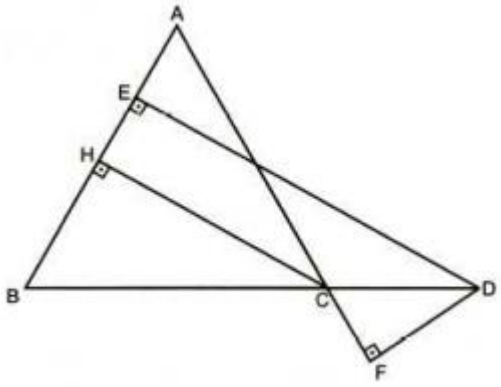
25- ABC ve ADE birer eşkenar üçgendir. |BD|=x br, |CE|=y br olduğuna göre x=y ifadesinin doğruluğunu gerekçeleriyle açıklayınız. (Posamentier & Salkind, 1988).



26- …ABCDEFG… bir düzgün çokgenin köşeleri, m(DAB)=α, m(FGC)=β olduğuna göre $\frac{\alpha}{\beta}$ oranı nedir?



27-



ABC ikizkenar üçgen olmak üzere, |ED|-|DF|=|HC| olduğunu gösteriniz.

Yukarıdaki problem durumunun çözümünde A ile D noktasını birleştiren bir doğru parçasının çizilmesi ile ortaya çıkan A(BDA)= A(ABC)+A(ACD) bağıntının gerekçesini açıklayınız.



GAZİLİ OLMAK AYRICALIKTIR