
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

q–LEONARDO POLİNOMLARI

Sude Sıla EKİNCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2025

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sude Sıla EKİNCİ

18/06/2025

q–LEONARDO POLİNOMLARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Sude Sıla EKİNCİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2025

ÖZET

Bu çalışmada $q-$Leonardo Pisano polinomları, birinci ve ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları tanımlandı ve bu polinomların özel halleri elde edildi. $q-$Leonardo Pisano polinomlarının $q-$Fibonacci polinomları ile birinci ve ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının birinci ve ikinci çeşit $q-$Lucas polinomları ile arasındaki ilişki elde edilip özel durumlarına yer verildi. $q-$Leonardo polinomlarının açık (explicit) formülleri elde edildi. Ayrıca negatif indisli $q-$Leonardo polinomları elde edilip özel durumlarına yer verildi. $q-$Leonardo Pisano polinomlarının Cassini ve Honsberger özdeşlikleri başta olmak üzere birçok özdeşlik ve özellikler elde edilip bu özelliklerin özel durumlarına yer verildi. $q-$Leonardo polinomlarının birbirleri ile arasındaki ilişkiler elde edilip bu ilişkilerin özel durumlarına yer verildi. Ayrıca $q-$Leonardo Pisano polinomları, birinci ve ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının açık üreteç fonksiyonları elde edildi. Son olarak $q-$Leonardo polinomlarının çeşitli toplam özellikleri elde edilip özel durumlarına yer verildi.

Bilim Kodu	:	20401
Anahtar Kelimeler	:	Fibonacci polinomları, Lucas polinomları, Leonardo polinomları, $q-$kalkülüs
Sayfa Adedi	:	63
Danışman	:	Prof. Dr. Naim TUĞLU

q–LEONARDO POLYNOMIALS
(M. Sc. Thesis)

Sude Sıla EKİNCİ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
June 2025

ABSTRACT

In this study, $q-$Leonardo Pisano polynomials and $q-$Leonardo Lucas polynomials of the first and second kind are defined. Their special cases are also presented. Relationships between $q-$Leonardo Pisano and $q-$Fibonacci polynomials are established. Similarly, connections between $q-$Leonardo Lucas and $q-$Lucas polynomials are obtained. Explicit formulas for $q-$Leonardo polynomials are derived. Negative index polynomials are also studied. Their special cases are studied. Various identities and properties of $q-$Leonardo Pisano polynomials are obtained, including the major Cassini and Honsberger identities. The relationships between $q-$Leonardo polynomials were established, and the special cases of these relationships were presented. Generating functions are provided for $q-$Leonardo Pisano and both kinds of $q-$Leonardo Lucas polynomials. Various addition properties are also derived and their special cases are obtained.

Science Code	:	20401
Keywords	:	Fibonacci polynomials, Lucas polynomials, Leonardo polynomials, $q-$calculus
Number of pages	:	63
Supervisor	:	Prof. Dr. Naim TUĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla beni yönlendiren ve çalısmalarımın her safhasında bilgisine başvurduğum Sayın Hocam Prof. Dr. Naim TUĞLU'ya, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, hayatım boyunca bana koşulsuz sevgi veren, hayattaki en büyük şansım olan aileme teşekkür ederim.

Bu tez çalışması boyunca "TÜBİTAK 2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Yüksek lisans öğrenimim boyunca sağladıkları maddi destek için TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ viii

ŞEKİLLERİN LİSTESİ ix

SİMGELER VE KISALTMALAR x

1. GİRİŞ 1

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR 5

2.1. q–Binomiyel Katsayılar 5

2.2. q–Fibonacci ve q–Lucas Polinomları 6

3. q–LEONARDO POLİNOMLARI VE GENELLEŞTİRMELERİ 13

3.1. q–Leonardo Pisano Polinomları ve q–Leonardo Lucas Polinomları 13

4. q–LEONARDO POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ 21

4.1. q–Leonardo Polinomlarının Temel Özellikleri 21

4.2. Negatif İndisli q–Leonardo Polinomları 27

4.3. q–Leonardo Polinomları Arasındaki İlişkiler 36

4.4. q–Leonardo Polinomlarının Üreteç Fonksiyonları 48

4.5. q–Leonardo Polinomlarının Toplam Formülleri 50

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 57

KAYNAKLAR 59

ÖZGEÇMİŞ 63

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 2.1. Bazı Fibonacci sayıları 6

Çizelge 2.2. Bazı Lucas sayıları 6

Çizelge 2.3. Bazı $q-$Fibonacci polinomları 7

Çizelge 2.4. Bazı birinci çeşit $q-$Lucas polinomları 8

Çizelge 2.5. Bazı ikinci çeşit $q-$Lucas polinomları 9

Çizelge 2.6. Bazı Leonardo sayıları 10

Çizelge 3.1. Bazı $q-$Leonardo Pisano polinomları 13

Çizelge 3.2. Bazı Leonardo Pisano polinomları ve $q-$Leonardo sayıları 14

Çizelge 3.3. Bazı birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları 14

Çizelge 3.4. Bazı birinci çeşit Leonardo Lucas polinomları ve $q-$Leonardo Lucas sayıları 15

Çizelge 3.5. Bazı ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları 15

Çizelge 3.6. Bazı ikinci çeşit Leonardo Lucas polinomları ve Leonardo Lucas sayıları 16

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 3.1. $q-$Leonardo Pisano polinomları $\mathcal{L}_{e_n}(x,q)$ 17

Şekil 3.2. Birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları $£_{u_n}(x,q)$ 18

Şekil 3.3. İkinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları $£_{u_n}(x,q)$ 19

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$[n]$	n. $q-$tamsayısı
$[n]!$	n! in $q-$benzeri
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$	$q-$Binomiyel katsayılar
F_n	Fibonacci sayısı
$f_n(x)$	Fibonacci polinomu
$F_n(x,q)$	$q-$Fibonacci polinomu
L_n	Lucas sayısı
$\ell_n(x)$	Lucas polinomu
$L_n(x)$	Birinci çeşit $q-$Lucas polinomu
$\mathbb{L}_n(q)$	İkinci çeşit $q-$Lucas sayısı
$\mathbb{L}_n(x,q)$	İkinci çeşit $q-$Lucas polinomu
Le_n	Leonardo sayısı
$\mathcal{L}e_n(x)$	Leonardo polinomu
$\mathcal{L}e_n(q)$	$q-$Leonardo sayısı
$\mathcal{L}e_n(x,q)$	$q-$Leonardo Pisano polinomu
$\pounds u_n(x)$	Leonardo Lucas polinomu
$\pounds u_n(q)$	Birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas sayısı
$\pounds u_n(x,q)$	Birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomu
$\pounds u_n(q)$	İkinci çeşit $q-$Leonardo Lucas sayısı
$\pounds u_n(x,q)$	İkinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomu

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
o.ü.	Olmak üzere

1. GİRİŞ

Matematikte özel sayı dizileri, doğadaki ve bilimdeki birçok yapının modellenmesine yardımcı olur. Bu diziler arasında en bilinenlerden biri Fibonacci sayılarıdır. Bu dizinin izleri doğada, sanat eserlerinde ve mühendislik hesaplamalarında bulunur. Fibonacci dizisi, özellikle altın oran ile olan ilişkisi nedeniyle büyük ilgi çekmiştir. Fibonacci dizisine benzeyen ancak farklı başlangıç değerlerine sahip olan Lucas dizisi, sayılar teorisi ve kombinatorik problemlerde önemli roller üstlenir. Lucas dizisi de Fibonacci gibi lineer rekürans ilişkisine dayanır, ancak başlangıç koşullarının farklı olması dizinin kendine özgü özellikler kazanmasına neden olur. Lucas sayıları, asal sayı teorisi ve modüler aritmetik gibi alanlarda yaygın olarak kullanılır [1–3]. Lucas dizilerini Fransız matematikçi Edouard Lucas Fibonacci dizisi ve özelliklerinden yararlanarak tanımlamıştır.

İlk iki terimi 0 ve 1 olmak üzere, her terimi kendisinden önce gelen iki terimin toplamı olan sayı dizisine Fibonacci dizisi, ilk iki terimi 2 ve 1 olmak üzere, her terimi kendisinden önce gelen iki terimin toplamı olan sayı dizisine Lucas dizisi denir. Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili pek çok çalışma yapılıp, ilginç özelliklerinin elde edilmesinin yanı sıra farklı genelleştirmeleri üzerine de çalışılmıştır. Bazı araştırmacılar başlangıç şartlarını değiştirerek bazıları ise indirgeme bağıntılarını değiştirerek yeni genelleştirmeler elde etmiştir. [4–10].

1883 yılında Catalan, literatürde Fibonacci polinomları olarak bilinen polinomları tanımlamıştır [11]. Bicknell genelleştirilmiş Finonacci polinomunu tanımlamıştır [12]. Daha sonra benzer pek çok yazar Fibonacci ve Lucas tipi polinomlar ile bu polinomların genelleştirmeleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu polinomların $q-$benzerleri olan $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomları ile ilgili çalışmalar yapılmıştır [13–19]. $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomlarında $q \to 1^{-}$ seçilmesi ile Fibonacci ve Lucas polinomları, $x = 1$ seçilmesi ile $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas sayıları, hem $q \to 1^{-}$ hem de $x = 1$ seçilmesi ile Fibonacci ve Lucas sayıları elde edilmektedir.

Ayrıca H. Belbachir ve A. Benmezai z ve m değişkenlerine bağlı olarak birinci ve ikinci çeşit Lucas polinomlarını [20] ve z, m değişkenlerine bağlı olarak birinci ve ikinci çeşit Lucas polinomlarının açık (explicit) formüllerini elde etmişlerdir.

Leonardo sayıları, matematiksel bir kavram olarak, Fibonacci dizisinin bir genellemesi olarak kabul edilen ve özel bir matematiksel yapıya sahip olan bir sayı dizisidir. Bu dizinin temel özelliği, her terimin önceki iki terimin toplamına bağlı olmasıdır. Ancak, Leonardo sayıları, klasik Fibonacci dizisinin ötesine geçerek, her iki ardışık terimin bir başka ilişkisini de içerir, bu da onları matematiksel analizde daha derin ve ilginç kılar.

Bu sayı dizileri yalnızca sayılarla sınırlı değildir; bu dizileri polinom genellemeleriyle de ele alarak daha geniş matematiksel çerçevelere oturtmuşlardır. Fibonacci, Lucas ve Leonardo polinomları, bu sayıların çok değişkenli uzantılarıdır ve rekürans ilişkileriyle tanımlanırlar. Bu polinomlar, yineleme ilişkileri, üreteç fonksiyonları ve cebirsel özellikler açısından Fibonacci ve Lucas polinomlarıyla benzerlikler gösterir. Polinom biçimleri, bu sayıların farklı değerlerde nasıl davrandığını incelemeye ve soyut cebir, matris teorisi gibi alanlarda yeni keşifler yapmaya olanak tanır.

P. Catarino ve A. Borges [21] Leonardo sayılarını, ilk iki terimi 1 olmak üzere, her terimi kendisinden önce gelen iki terimin toplamına 1 eklenmesiyle oluşan sayı dizisi olarak tanımlamıştır Ayrıca P. Catarino ve A. Borges çalışmalarında Leonardo dizisini ve Leonardo dizisinin Binet formülünü, Leonardo sayıları ile ilgili bazı toplam formüllerini, Cassini, Catalan ve D'Ocagne özdeşliklerini ve üreteç fonksiyonunu da elde etmişlerdir.

Ayrıca P. Catarino ve A. Borges [22] çalışmalarında tamamlanmamış Leonardo sayılarını tanımlamış, bu sayıların sağladığı yineleme denklemlerini ve diğer özellikleri elde etmişlerdir.

A. G. Shannon [23] çalışmasında Alwyn Horadam'ın genelleştirilmiş Fibonacci dizilerini kullanarak genelleştirilmiş Leonardo sayılarını elde etmiştir. Vieira, Alves ve Catarino [24] çalışmalarında Leonardo sayılarına ait tek boyutlu modelden türetilen iki boyutlu yineleme ilişkilerini incelemişlerdir.

Y. Alp ve E. G. Koçer, Leonardo sayıları için matris gösterimi ve negatif indisli Leonardo sayıları olmak üzere bu sayıların bir çok özelliğini elde etmişlerdir [25]. Ayrıca Y. Alp ve E. G. Koçer, [26] çalışmalarında iki değişkenli Leonardo polinomları tanımlamış ve bir

çok özelliklerini elde etmişler. [27] çalışmalarında hibrit Leonardo sayılarına ait yineleme ilişkisi, üreteç fonksiyonu, Binet formülü ve bazı toplam formüllerini elde etmişlerdir.

Y. Soykan [28] çalışmasında genelleştirilmiş Leonardo dizisinin özel durumları olarak değiştirilmiş $p-$Leonardo, $p-$Leonardo Lucas ve $p-$Leonardo dizilerini tanımlayarak, bu diziler için Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları başta olmak üzere bazı özdeşlikler ve toplam formülleri elde etmiştir. E. Tan [29] çalışmasında ise Leonardo dizisinin yeni bir genellemesini ele alarak bazı temel özellikleri incelemiştir. Ç. Çelemoğlu [30] çalışmasında yeni bir sayı dizisi olan Pell-Leonardo sayılarını tanıtmış; bu sayılar için çeşitli cebirsel özdeşlikler, üreteç fonksiyonları ve matris formülü elde edilmiştir.

A. Karataş [31] çalışmasında, Horadam'ın [32] çalışmasındaki kompleks Fibonacci ve Lucas sayıları tanımından yararlanarak kompleks Leonardo sayılarını tanımlamış ve bu sayıların başta Binet formülü ve üreteç fonksiyonu olmak üzere bazı özelliklerini elde etmiştir.

Leonardo sayıları ile tanımlanan bu polinomlar, sayıların belirli bir düzene göre sıralanmasını ve bunlar arasındaki geçişlerin sistematik olarak modellenmesini sağlamaktadır. Araştırmacılar, bu polinomların genel formüllerini ve sayılarla olan ilişkilerini inceleyerek, daha derin matematiksel yapıları anlamaya yönelik önemli bulgular elde etmişlerdir. Leonardo sayılarına dayalı yapılan çalışmalar ayrıca, bu sayıların çeşitli genelleştirilmiş biçimlerinin ortaya çıkmasına ve bu genellemelerle ilişkili yeni polinomların keşfine yol açmıştır [33–37].

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın birinci bölümünde literatür taraması, ikinci bölümünde, çalışma için gerekli olan ön bilgiler ve temel kavramlara yer verilmiştir. Bunlar başlıca $q-$binomiyel katsayılar, $q-$Fibonacci, $q-$Lucas polinomları ve Leonardo sayılarıdır.

Üçüncü bölümde, $q-$Leonardo Pisano, birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas, ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının rekürans bağıntıları, bazı değerleri ve bu polinomların özel durumlarına yer verilmiştir. Ayrıca $q-$Leonardo polinomlarının açık (explicit) formüllerine yer verilmiştir. Bu özelliklere ek olarak negatif indisli $q-$Leonardo

polinomları tanımlanmış ve $q-$Leonardo polinomlarının üreteç fonksiyonlarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, $q-$Leonardo polinomlarının genel özellikleri, $q-$Leonardo polinomlarının birbirleri ile arasındaki ilişkilere yer verilip ispatlanmıştır. Ayrıca, bu özelliklere ek olarak $q-$Leonardo polinomlarının toplam formüllerine yer verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamızda ihtiyaç duyacağımız bazı temel tanım ve kavramlara yer vereceğiz.

2.1. q–Binomiyel Katsayılar

$q \in \mathbb{R}$ ve $0 < q < 1$ olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$[n] = \frac{1-q^n}{1-q}$$

ifadesine n tam sayısının $q-$benzeri denir. $n!$ in $q-$benzeri

$$[n]! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ [n]\,[n-1]\ldots[1], & n = 1,2,\ldots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Binomiyel katsayılara benzer olarak $q-$binomiyel katsayıları, $n < k$ için $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ olmak üzere $n \geq k \geq 0$ için

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]!\,[k]!}$$

ile tanımlanır [38]. $q-$binomiyel katsayıların bazı özellikleri

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

2.2. q–Fibonacci ve q–Lucas Polinomları

Bu bölümde klasik Fibonacci ve Lucas sayıları ile bunların $q-$polinomları tanımlanrarak çeşitli özellikleri verilecektir.

2.2.1. Tanım

Başlangıç şartları $F_0 = 0, F_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı sayılara Fibonacci sayıları denir.

Çizelge 2.1. Bazı Fibonacci sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2.2.2. Tanım

Başlangıç şartları $L_0 = 2, L_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için

$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı sayılara Lucas sayıları denir.

Çizelge 2.2. Bazı Lucas sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123

Fibonacci ve Lucas sayılarının açık (explicit) formülleri sırasıyla

$$F_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-j}{j},$$

$$L_n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j}$$

şeklindedir.

2.2.3. Tanım

Başlangıç şartları $\mathbf{F}_0(x,q) = 0$, $\mathbf{F}_1(x,q) = 1$ ve

$$\mathbf{F}_n(x,q) = x\mathbf{F}_{n-1}(x,q) + q^{n-2}\mathbf{F}_{n-2}(x,q), \qquad n \geq 2 \tag{2.1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı polinomlara $q-$Fibonacci polinomları denir.

Çizelge 2.3. Bazı $q-$Fibonacci polinomları

n	$\mathbf{F}_n(x,q)$
0	0
1	1
2	x
3	x^2+q
4	$x^3+(1+q)qx$
5	$x^4+(1+q+q^2)qx^2+q^4$
6	$x^5+(1+q+q^2+q^3)qx^3+(1+q+q^2)q^4x$

$q-$Fibonacci polinomlarının açık (explicit) formülü

$$\mathbf{F}_n(x,q) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{k^2} x^{n-2k-1}, \qquad n \geq 1 \tag{2.2}$$

şeklindedir [15].

Andrews, $q-$Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonunu $f(z)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$\eta_z(f(z)) = f(qz) \tag{2.3}$$

şeklinde operatör yardımıyla

$$S(z) = \frac{z}{1-xz-z^2\eta_z}\mathbf{1} \tag{2.4}$$

olduğunu göstermiştir [39].

2.2.4. Tanım

Başlangıç şartları $\mathbf{L}_0(x,q) = 2$, $\mathbf{L}_1(x,q) = x$ ve

$$\mathbf{L}_n(x,q) = x\mathbf{L}_{n-1}(x,q) + q^{n-2}\mathbf{L}_{n-2}(x,q), \qquad n \geq 2 \tag{2.5}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı polinomlara birinci çeşit $q-$Lucas polinomları denir [20].

Çizelge 2.4. Bazı birinci çeşit $q-$Lucas polinomları

n	$\mathbf{L}_n(x,q)$
0	2
1	x
2	x^2+2
3	$x^3+(2+q)x$
4	$x^4+(2+q+q^2)x^2+2q^2$
5	$x^5+(2+q+q^2+q^3)x^3+(2+2q+q^2)q^2x$
6	$x^6+\left(2+q+q^2+q^3+q^4\right)x^4+\left(2+2q+3q^2+q^3+q^4\right)q^2x^2+2q^6$

Birinci çeşit $q-$ Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonu η_z Eş. 2.3 ile tanınmlı bir operatör

olmak üzere,

$$H(z) = \frac{2-xz}{1-xz-qz^2\eta_z}\mathbf{1} \tag{2.6}$$

şeklindedir.

Birinci çeşit $q-$Lucas polinomlarınının explicit (açık) formülü ise

$$\mathbf{L}_n(x,q) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \left(1 + \frac{[k]_q}{[n-k]_q}\right) x^{n-2k}, \qquad n \geq 1 \tag{2.7}$$

şeklindedir.

2.2.5. Tanım

$\mathbb{L}_0,(x,q) = 2$ ve $\mathbb{L}_1(x,q) = x$ başlangıç şartları ve

$$\mathbb{L}_n(x,q) = x\mathbb{L}_{n-1}(qx,q) + q\mathbb{L}_{n-2}(q^2x,q) \quad n \geq 2 \tag{2.8}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı polinomlara ikinci çeşit $q-$Lucas polinomları denir.

Çizelge 2.5. Bazı ikinci çeşit $q-$Lucas polinomları

n	$\mathbb{L}_n(x,q)$
0	2
1	x
2	qx^2+2q
3	$x^3q^3+xq^3+2xq$
4	$x^4q^6+x^2q^6+x^2q^4+2x^2q^2+2q^2$
5	$x^5q^{10}+x^3q^{10}+x^3q^8+x^3q^6+2x^3q^4+xq^6+2xq^4+2xq^2$

İkinci çeşit $q-$Lucas polinomlarınının explicit (açık) formülü

$$\mathbb{L}_n(x,q) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \left(1 + q^{n-2k} \frac{[k]_q}{[n-k]_q}\right) x^{n-2k} \quad n \geq 1 \tag{2.9}$$

şeklindedir [20].

Eş. 2.1 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse Fibonacci polinomları, $x = 1$ seçilirse $q-$Fibonacci sayıları, $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse Fibonacci sayıları elde edilir.

Eş. 2.5 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse Lucas polinomları, $x = 1$ seçilirse birinci çeşit $q-$Lucas sayıları, $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse Lucas sayıları elde edilir.

Eş. 2.8 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse Lucas polinomları, $x = 1$ seçilirse ikinci çeşit $q-$ Lucas sayıları, $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse Lucas sayıları elde edilir.

2.2.6. Tanım

Başlangıç şartları $Le_0 = Le_1 = 1$ ve

$$Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, \quad n \geq 2 \tag{2.10}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı sayılara Leonardo sayıları denir [21].

Çizelge 2.6. Bazı Leonardo sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Le_n	1	1	3	5	9	15	25	41	67	109	177

Ayrıca Leonardo sayıları ile Fibonacci sayıları arasında

$$Le_n = 2F_{n+1} - 1 \tag{2.11}$$

şeklinde bir ilişki vardır [21].

Leonardo sayılarının indirgeme bağıntısı

$$Le_{n-2} = Le_n - Le_{n-1} - 1$$

şeklinde düzenlenerek negatif indisli Leonardo sayıları tanımlanmıştır. Böylece Leonardo sayıları ile negatif indisli Leonardo sayıları arasında

$$Le_{-n} = (-1)^n (Le_{n-2} + 1) - 1 \tag{2.12}$$

eşitliği elde edilmiştir [25].

3. q–LEONARDO POLİNOMLARI VE GENELLEŞTİRMELERİ

Bu bölümde $q-$Leonardo Pisano polinomları, birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları, ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının rekürans bağıntıları tanımlanmış, x ve q değerlerinin için özel durumlar incelenmiştir.

3.1. q–Leonardo Pisano Polinomları ve q–Leonardo Lucas Polinomları

3.1.1. Tanım

Başlangıç şartları $\mathcal{L}_{e0}(x,q)=2-q$, $\mathcal{L}_{e1}(x,q)=2x-q$ ve

$$\mathcal{L}_{en}(x,q)=x\mathcal{L}_{en-1}(x,q)+q^{n-1}\mathcal{L}_{en-2}(x,q)+q\left(x+q^{n-1}-1\right), \quad n\geq 2 \tag{3.1}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı polinomlara $q-$Leonardo Pisano polinomları denir.

Çizelge 3.1. Bazı $q-$Leonardo Pisano polinomları

n	$\mathcal{L}_{en}(x,q)$
0	$2-q$
1	$2x-q$
2	$2x^2+q$
3	$2x^3+(1+q)2qx-q$
4	$2x^4+\left(1+q+q^2\right)2qx^2+2q^4-q$
5	$2x^5+\left(1+q+q^2+q^3\right)2qx^3+\left(1+q+q^2\right)2q^4x-q$

Eş. 3.1 ifadesinde

- $q\to 1^-$ seçilirse $\mathcal{L}_{en}(x,q)=Le_n(x)$ Leonardo Pisano polinomları,
- $x=1$ seçilirse $\mathcal{L}_{en}(x,q)=\mathcal{L}_{en}(q)$ $q-$Leonardo Pisano sayıları,
- $q\to 1^-$ ve $x=1$ seçilirse $\mathcal{L}_{en}(x,q)=Le_n$ Leonardo sayıları

elde edilir.

Çizelge 3.2. Bazı Leonardo Pisano polinomları ve $q-$Leonardo sayıları

n	$Le_n(x)$	$\mathcal{L}_{en}(q)$	Le_n
0	1	$2-q$	1
1	$2x-1$	$2-q$	1
2	$2x^2+1$	$2(1+q)-q$	3
3	$2x^3+4x-1$	$2\left(1+q+q^2\right)-q$	5
4	$2x^4+6x^2+1$	$2\left(1+q+q^2+q^3+q^4\right)-q$	9
5	$2x^5+8x^3+6x-1$	$2\left(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6\right)-q$	15

3.1.2. Tanım

Başlangıç şartları $£_{u0}(x,q)=4+q$, $£_{u1}(x,q)=2x+q$ ve

$$£_{un}(x,q)=x£_{un-1}(x,q)+q^{n-2}£_{un-2}(x,q)-q\left(x+q^{n-2}-1\right) \quad n\geq 2 \tag{3.2}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı polinomlara birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları denir.

Çizelge 3.3. Bazı birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları

n	$£_{un}(x,q)$
0	$4+q$
1	$2x+q$
2	$2x^2+q+4$
3	$2x^3+(2+q)2x+q$
4	$2x^4+(2+q+q^2)2x^2+4q^2+q$
5	$2x^5+(2+q+q^2+q^3)2x^3+(2+2q+q^2)2q^2x+q$

Eş. 3.2 ifadesinde

- $q \to 1^-$ seçilirse $\pounds_{u_n}(x,q) = \pounds_{u_n}(x)$ Leonardo Lucas polinomları,
- $x = 1$ seçilirse $\pounds_{u_n}(x,q) = \pounds_{u_n}(q)$ birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas sayıları,
- $q \to 1^-$ve $x = 1$ seçilirse $\pounds_{u_n}(x,q) = \pounds_{u_n}$ Leonardo Lucas sayıları

elde edilir.

Çizelge 3.4. Bazı birinci çeşit Leonardo Lucas polinomları ve $q-$Leonardo Lucas sayıları

n	$\pounds_{u_n}(x)$	$\pounds_{u_n}(q)$	$\pounds_{u_n}$
0	5	$4+q$	5
1	$2x+1$	$2+q$	3
2	$2x^2+5$	$6+q$	7
3	$2x^3+6x+1$	$6+3q$	9
4	$2x^4+8x^2+5$	$6q^2+3q+6$	15
5	$2x^5+10x^3+10x+1$	$2q^4+6q^3+6q^2+3q+6$	23

3.1.3. Tanım

Başlangıç şartları $\pounds_{u_0}(x,q) = 4+q$, $\pounds_{u_1}(x,q) = 2x+q$ ve $n \geq 2$ için

$$\pounds_{u_n}(x,q) = x\sqrt{q}^{n-1}\pounds_{u_{n-1}}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) + q^{n-1}\pounds_{u_{n-2}}\left(\frac{x}{q},q\right) - q\left(x\sqrt{q^{n-1}} + q^{n-1} - 1\right) \tag{3.3}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı polinomlara ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları denir.

Çizelge 3.5. Bazı ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları

n	$\pounds_{u_n}(x,q)$
0	$4+q$
1	$2x+q$
2	$2x^2+5q$
3	$2x^3+4q^2x+2qx+q$
4	$2x^4+\left(4q^3+2q^2+2q\right)x^2+\left(4q^4+q\right)$
5	$2x^5+\left(1+q+q^2+2q^3\right)2qx^3+\left(1+2q+2q^2\right)2q^4x+q$

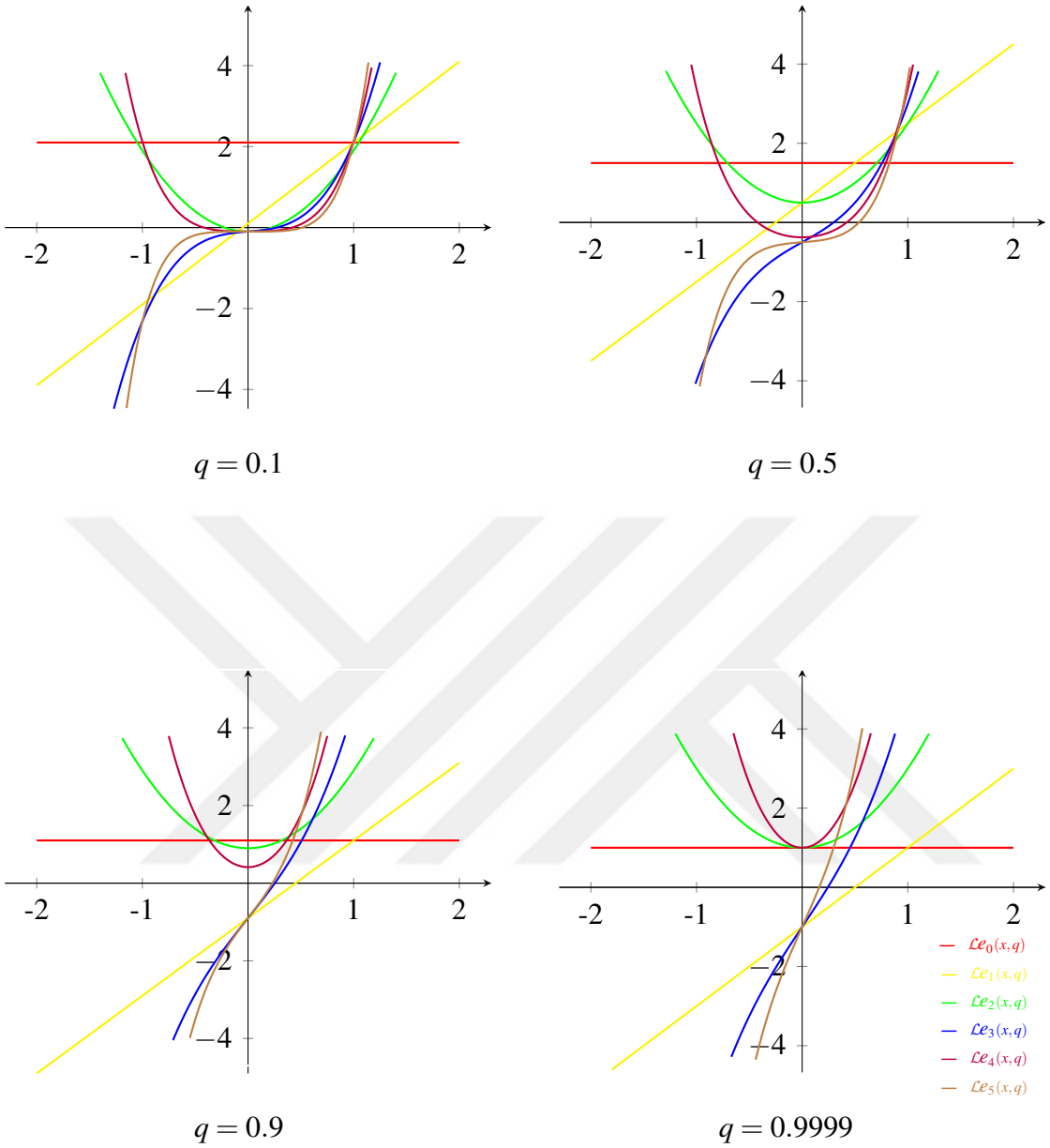
Eş. 3.3 ifadesinde

- $q \to 1^{-}$ seçilirse $\pounds_{u_n}(x,q) = \pounds_{u_n}(x)$ Leonardo Lucas polinomları,
- $x = 1$ seçilirse $\pounds_{u_n}(x,q) = \pounds_{u_n}(q)$ ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas sayıları,
- $q \to 1^{-}$ve $x = 1$ seçilirse $\pounds_{u_n}(x,q) = \pounds_{u_n}$ Leonardo Lucas sayıları

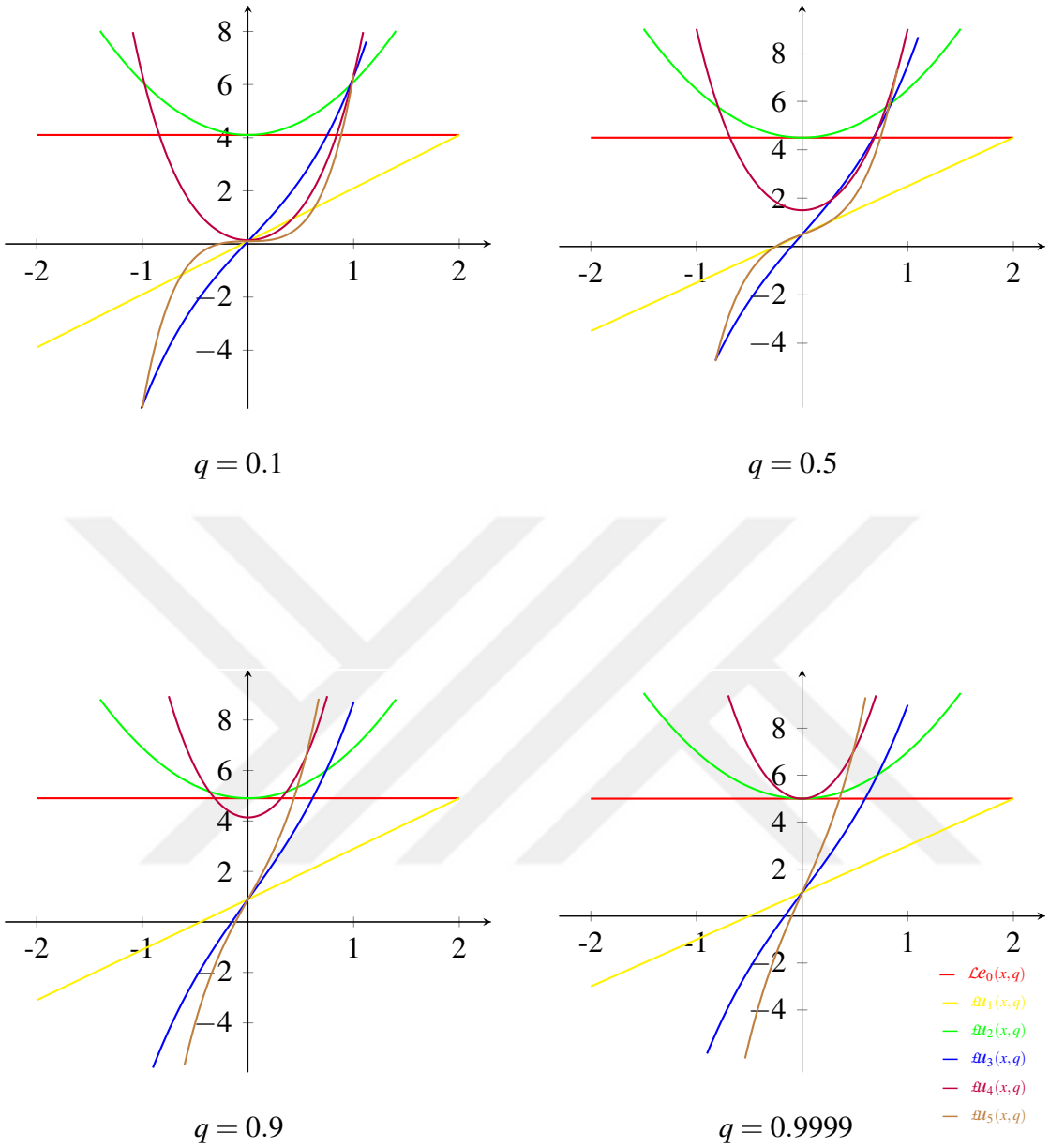
elde edilir.

Çizelge 3.6. Bazı ikinci çeşit Leonardo Lucas polinomları ve Leonardo Lucas sayıları

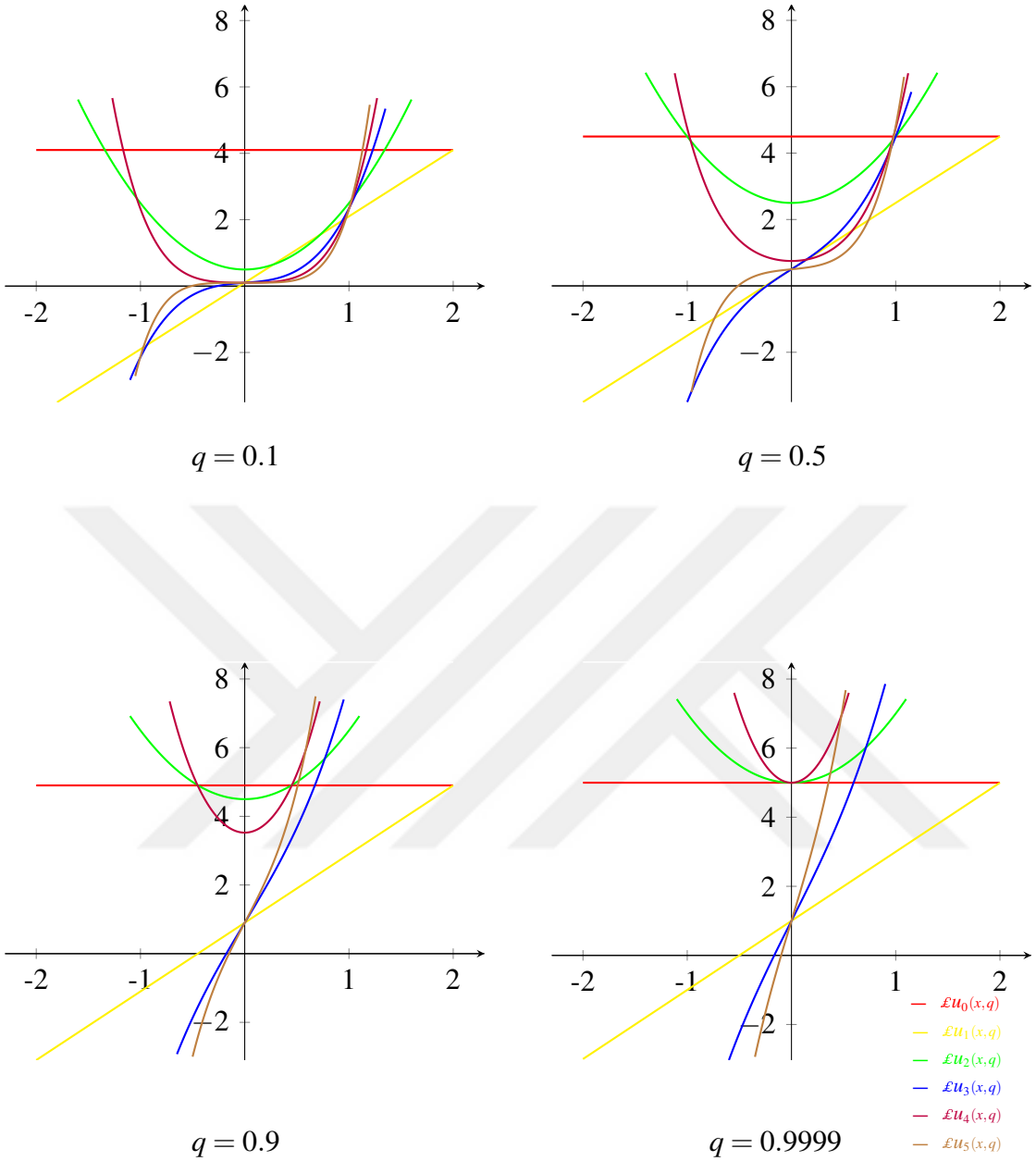
n	$\pounds_{u_n}(x) = \pounds_{u_n}(x)$	$\pounds_{u_n}(q)$	$\pounds_{u_n} = \pounds_{u_n}$
0	5	$4+q$	5
1	$2x+1$	$2+q$	3
2	$2x^2+5$	$2+5q$	7
3	$2x^3+6x+1$	$4q^2+3q+2$	9
4	$2x^4+8x^2+5$	$4q^4+4q^3+2q^2+3q+2$	15
5	$2x^5+10x^3+10x+1$	$2q^6+4q^5+6q^4+2q^3+2q^2+5q+2$	23



Şekil 3.1. $q-$Leonardo Pisano polinomları $\mathcal{L}e_n(x,q)$



Şekil 3.2. Birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları $\pounds_{u_n}(x,q)$



Şekil 3.3. İkinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları $£u_n(x,q)$

4. q–LEONARDO POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, $q-$Leonardo polinomları ile $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomları arasındaki ilişkiler ile bu polinomların açık formülleri, üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. Ayrıca negatif indisli $q-$Leonardo Pisano polinomları, negatif indisli birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları, negatif indisli ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları tanımlanmıştır. Daha sonra $q-$Leonardo Pisano polinomları ile $q-$Leonardo Pisano polinomları, $q-$Leonardo Pisano polinomları ile birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları, $q-$Leonardo Pisano polinomları ile ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları arasındaki bazı ilişkiler ve bu ilişkilerin özel durumları verilmiştir. İkinci kısımda ise $q-$Leonardo polinomlarının toplam formülleri verilmiştir.

4.1. q–Leonardo Polinomlarının Temel Özellikleri

4.1.1. Teorem

$q-$Leonardo Pisano polinomları ile $q-$Fibonacci polinomları arasındaki ilişki, $n > 0$ için

$$\mathcal{L}_{e_n}(x,q) = 2\mathbf{F}_{n+1}(x,q) - q \tag{4.1}$$

şeklindedir.

İspat

İspatı tümevarım yöntemi ile yapalım. $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$\mathcal{L}_{e_0}(x,q) = 2 - q = 2 \cdot 1 - q = 2\mathbf{F}_1(x,q) - q$$

ve

$$\mathcal{L}_{e_1}(x,q) = 2x - q = 2 \cdot x - q = 2\mathbf{F}_2(x,q) - q$$

olup, eşitlikler doğrudur.

$n \geq 2$ olmak üzere, $n = k-1$ ve $n = k$ için Eş. 4.1 doğru olsun. $n = k+1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. $q-$Leonardo Pisano polinomları ile $q-$Fibonacci polinomların indirgeme bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}e_{k+1}(x,q) &= x\mathcal{L}e_k(x,q) + q^k \mathcal{L}e_{k-1}(x,q) + q\left(x + q^k - 1\right) \\
&= x\left(2\mathbf{F}_{k+1}(x,q) - q\right) + q^k\left(2\mathbf{F}_k(x,q) - q\right) + q\left(x + q^k - 1\right) \\
&= 2x\mathbf{F}_{k+1}(x,q) + q^k 2\mathbf{F}_k(x,q) - q \\
&= 2\left(x\mathbf{F}_{k+1}(x,q) + q^k \mathbf{F}_k(x,q)\right) - q \\
&= 2\mathbf{F}_{k+2}(x,q) - q
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{L}e_n(x,q) = 2\mathbf{F}_{n+1}(x,q) - q$$

dir.

- Eş. 4.1 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse,

  $$\mathcal{L}e_n(x) = 2f_{n+1}(x) - 1$$

- Eş. 4.1 ifadesinde $x = 1$ seçilirse,

  $$\mathcal{L}e_n(q) = 2F_{n+1}(q) - q$$

- Eş. 4.1 ifadesinde $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse, Eş. 2.11

  $$Le_n = 2F_{n+1} - 1$$

elde edilir.

4.1.2. Teorem

Birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları ile birinci çeşit $q-$Lucas polinomları arasındaki

ilişki, $n > 0$ için

$$\pounds_{u_n}(x,q) = 2\mathbf{L}_n(x,q) + q \tag{4.2}$$

şeklindir.

İspat

Teoremin ispatı tümevarım yöntemi ile yapalım. $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$\pounds_{u_0}(x,q) = 4 + q = 2 \cdot 2 + q = 2\mathbf{L}_0(x,q) + q$$
$$\pounds_{u_1}(x,q) = 2x + q = 2 \cdot x + q = 2\mathbf{L}_1(x,q) + q$$

olup, eşitlik doğrudur.

$n \geq 2$ olmak üzere, $n = k$ ve $n = k+1$ için eşitlik doğru olsun. $n = k+2$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim. $q-$Leonardo Lucas polinomları ve birinci çeşit $q-$Lucas polinomların indirgeme bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\pounds_{u_{k+2}}(x,q) &= x\pounds_{u_{k+1}}(x,q) + q^k \pounds_{u_k}(x,q) - q\left(x + q^k - 1\right) \\
&= x\left(2\mathbf{L}_{k+1}(x,q) + q\right) + q^k\left(2\mathbf{L}_k(x,q) + q\right) - qx - q^{k+1} + q \\
&= 2x\mathbf{L}_{k+1}(x,q) + 2q^k\mathbf{L}_k(x,q) + qx + q^{k+1} - qx - q^{k+1} + q \\
&= 2\left(x\mathbf{L}_{k+1}(x,q) + q^k\mathbf{L}_k(x,q)\right) + q \\
&= 2\mathbf{L}_{k+2}(x,q) + q
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\pounds_{u_n}(x,q) = 2\mathbf{L}_n(x,q) + q$$

dir.

- Eş. 4.2 ifadesinde $q \to 1^{-}$ seçilirse,

  $\pounds_{u_n}(x) = 2\ell_n(x) + 1$

- Eş. 4.2 ifadesinde $x = 1$ seçilirse,

  $\pounds_{u_n}(q) = 2L_n(q) + q$

- Eş. 4.2 ifadesinde $q \to 1^{-}$ve $x = 1$ seçilirse,

  $\pounds_{u_n} = 2L_n + 1$

elde edilir.

4.1.3. Teorem

İkinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları ile ikinci çeşit $q-$Lucas polinomları arasındaki ilişki

$$\pounds_{u_n}(x,q) = 2\mathbb{L}_n(x,q) + q \tag{4.3}$$

şeklindir.

İspat

Teoremin ispatını tümevarım yöntemi ile yapalım. $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$\pounds_{u_0}(x,q) = 4 + q = 2 \cdot 2 + q = 2\mathbb{L}_0(x,q) + q$$
$$\pounds_{u_1}(x,q) = 2x + q = 2 \cdot x + q = 2\mathbb{L}_1(x,q) + q$$

olup, eşitlik doğrudur.

$n \geq 2$ olmak üzere, $n = k-1$ ve $n = k$ için eşitlik doğru olsun. $n = k+1$ iç in eşitliğin doğru

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\pounds_{u_{k+1}}(x,q) &= x\pounds_{u_k}(x,q)+q^k\pounds_{u_{k-1}}(x,q)-q\left(x+q^k-1\right)\\ &= x\left(2\mathbb{L}_k(x,q)+q\right)+q^k\left(2\mathbb{L}_{k-1}(x,q)+q\right)-q\left(x+q^k-1\right)\\ &= 2\left(x\mathbb{L}_k(x,q)+q^k\mathbb{L}_{k-1}(x,q)\right)+q\\ &= 2\mathbb{L}_{k+1}(x,q)+q\end{aligned}$$

elde edilir. Tümevarım yöntemi gereğince ispat tamamlanır.

- Eş. 4.3 ifadesinde $q\to 1^-$ seçilirse,

  $$\pounds_{u_n}(x)=\pounds_{u_n}(x)=2\ell_n(x)+1$$

- Eş. 4.3 ifadesinde $x=1$ seçilirse,

  $$\pounds_{u_n}(q)=2\mathbb{L}_n(q)+q$$

- Eş. 4.3 ifadesinde $q\to 1^-$ ve $x=1$ seçilirse Leonardo Lucas sayıları ile Lucas sayıları arasındaki

  $$\pounds_{u_n}=\pounds_{u_n}=2L_n+1$$

ilişki elde edilir.

4.1.4. Sonuç

$q-$Leonardo Pisano polinomlarının açık (explicit) formülü

$$\mathcal{L}_{e_n}(x,q)=2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\begin{bmatrix}n-k\\ k\end{bmatrix}q^{k^2}x^{n-2k}-q,\qquad n>0 \tag{4.4}$$

şeklindedir.

İspat

$q-$Fibonacci polinomlarının Eş. 2.2 ile verilen açık (explicit) formülü ve Eş. 4.1 ile verilen $q-$Leonardo Pisano polinomları ile $q-$Fibonacci polinomları arasındaki ilişki kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{e_n}(x,q) &= 2\mathbf{F}_{n+1}(x,q) - q \\ &= 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} q^{k^2} x^{n-2k} - q\end{aligned}$$

elde edilir.

4.1.5. Sonuç

Birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının açık (explicit) formülü

$$\pounds_{u_n}(x,q) = 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[n-k]}\right) x^{n-2k} + q, \qquad n > 0 \tag{4.5}$$

şeklindedir.

İspat

$q-$ Lucas polinomlarının Eş. 2.7 ile verilen açık (explicit) formülü ve Eş. 4.2 ile verilen birinci çeşit $q-$Lucas polinomları ile birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları arasındaki ilişki kullanılırsa

$$\begin{aligned}\pounds_{u_n}(x,q) &= 2\mathbf{L}_n(x,q) + q \\ &= 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]}{[n-k]}\right) x^{n-2k} + q\end{aligned}$$

elde edilir.

4.1.6. Sonuç

İkinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının açık (explicit) formülleri $n > 0$ için

$$\pounds u_n(x,q) = 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + q^{n-2k} \frac{[k]}{[n-k]}\right) x^{n-2k} + q \tag{4.6}$$

şeklindedir.

İspat

İkinci çeşit $q-$ Lucas polinomlarının açık (explicit) formülü Eş. 2.9 ve ikinci çeşit $q-$Lucas polinomları ile ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları arasındaki Eş. 4.3 ile verilen ilişki kullanılırsa

$$\begin{aligned} \pounds u_n(x,q) &= 2\mathbb{L}_n(x,q) + q \\ &= 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + q^{n-2k} \frac{[k]}{[n-k]}\right) x^{n-2k} + q \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. Negatif İndisli *q*–Leonardo Polinomları

$q-$Leonardo Pisano polinomların indirgeme bağıntısı

$$\mathcal{L}e_{n-2}(x,q) = q^{1-n}\mathcal{L}e_n(x,q) - xq^{1-n}\mathcal{L}e_{n-1}(x,q) - q^{2-n}\left(x + q^{n-1} - 1\right) \tag{4.7}$$

şeklinde yeniden düzenlenerek, negatif indisli $q-$Leonardo Pisano polinomları tanımlanabilir.

4.2.1. Teorem

Negatif indisli $q-$Leonardo Pisano polinomlar $\mathcal{L}_{e_{-1}}(x,q) = -q$ ve $n \geq 2$ için

$$\mathcal{L}_{e_{-n}}(x,q) = (-1)^n \left(q^{n-1} \mathcal{L}_{e_{n-2}} \left(x\sqrt{q^{n-1}}, q \right) + q^n \right) - q \tag{4.8}$$

şeklindedir.

İspat

Eş. 4.7 ifadesinde $n = 1$ seçilirse,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e_{-1}}(x,q) &= q^0 \mathcal{L}_{e_1}(x,q) - xq^0 \mathcal{L}_{e_0}(x,q) - q^1 \left(x + q^0 - 1 \right) \\ &= 2x - q - x(2-q) - qx \\ &= -q \end{aligned}$$

bulunur. $n \geq 2$ için doğru olduğunu tümevarım yöntemi ile ispatlayalım. Eş. 4.8 ifadesinde $n = 2$ seçilirse,

$$\begin{aligned} (-1)^2 \left(q^1 \mathcal{L}_{e_0} \left(x\sqrt{q^1}, q \right) + q^2 \right) - q &= q\mathcal{L}_{e_0}(x\sqrt{q}, q) + q^2 - q \\ &= q(2-q) + q^2 - q \\ &= q \\ &= \mathcal{L}_{e_{-2}}(x,q) \end{aligned}$$

olup, Eş. 4.7 ifadesinde $n = 0$ seçilirse,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{e_{-2}}(x,q) &= q^1 \mathcal{L}_{e_0}(x,q) - xq^1 \mathcal{L}_{e_{-1}}(x,q) - q^2 \left(x + q^{-1} - 1 \right) \\ &= q(2-q) - xq(-q) - q^2 \left(x + q^{-1} - 1 \right) \\ &= q \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 4.7 ifadesinde $n=-1$ seçilirse,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{e-3}(x,q) &= q^2\mathcal{L}_{e-1}(x,q) - xq^2\mathcal{L}_{e-2}(x,q) - q^3\left(x+q^{-2}-1\right)\\ &= q^2(-q) - xq^2q - q^3\left(x+q^{-2}-1\right)\\ &= -2xq^3 - q\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan Eş. 4.8 ifadesinde $n=3$ seçilirse,

$$\begin{aligned}(-1)^3\left(q^2\mathcal{L}_{e1}\left(x\sqrt{q^2},q\right)+q^3\right)-q &= -\left(q^2(2xq-q)+q^3\right)-q\\ &= -2xq^3-q\\ &= \mathcal{L}_{e-3}(x,q)\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 4.8 ifadesinde $n=t$ ve $n=t+1$ seçilirse,

$$\mathcal{L}_{e-t}(x,q) = (-1)^t\left(q^{t-1}\mathcal{L}_{et-2}\left(x\sqrt{q^{t-1}},q\right)+q^t\right)-q$$

$$\mathcal{L}_{e-t-1}(x,q) = (-1)^{t+1}\left(q^t\mathcal{L}_{et-1}\left(x\sqrt{q^t},q\right)+q^{t+1}\right)-q$$

elde edilir. Eş. 4.7 ifadesinde $n=-t$ seçilirse,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{e-t-2}(x,q) &= q^{1+t}\mathcal{L}_{e-t}(x,q) - xq^{1+t}\mathcal{L}_{e-t-1}(x,q) - q^{2+t}\left(x+q^{-t-1}-1\right)\\ &= q^{1+t}\left[(-1)^t\left(q^{t-1}\mathcal{L}_{et-2}\left(x\sqrt{q^{t-1}},q\right)+q^t\right)-q\right]\\ &\quad - xq^{1+t}\left[(-1)^{t+1}\left(q^t\mathcal{L}_{et-1}\left(x\sqrt{q^t},q\right)+q^{t+1}\right)-q\right]\\ &\quad - q^{2+t}\left(x+q^{-t-1}-1\right)\\ &= (-1)^t q^{1+t}\left(q^{t-1}\mathcal{L}_{et-2}\left(x\sqrt{q^{t-1}},q\right)+xq^t\mathcal{L}_{et-1}\left(x\sqrt{q^t},q\right)\right)\\ &\quad + (-1)^t q^{1+2t} + (-1)^t xq^{2+2t} - q\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\left(q^{t-1}\mathcal{L}_{et-2}\left(x\sqrt{q^{t-1}},q\right)+xq^t\mathcal{L}_{et-1}\left(x\sqrt{q^t},q\right)\right)=A$$

olsun. A ifadesinde

$$q^{t-1}\mathcal{L}_{e_{t-2}}\left(x\sqrt{q^{t-1}},q\right)=2\left(\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t-2}{2}\rfloor}\begin{bmatrix}t-2-k\\k\end{bmatrix}q^{k^2}x^{t-2k-2}q^{\frac{\left(t-2k-2\right)(t-1)+2t-2}{2}}\right)-q^t$$
$$=2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t-1}{2}\rfloor}\begin{bmatrix}t-1-k\\k-1\end{bmatrix}q^{k^2}x^{t-2k-2}q^{\frac{(t-2k+1)t-2k}{2}}-q^t$$

ve

$$xq^t\mathcal{L}_{e_{t-1}}\left(x\sqrt{q^t},q\right)=2\left(\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t-1}{2}\rfloor}\begin{bmatrix}t-1-k\\k\end{bmatrix}q^{k^2}x^{t-2k}q^{\frac{t(t-1-2k)+2t}{2}}\right)-xq^{t+1}$$
$$=2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t-1}{2}\rfloor}\begin{bmatrix}t-1-k\\k\end{bmatrix}q^{k^2}x^{t-2k}q^{\frac{t(t-2k+1)-2k}{2}}q^k-xq^{t+1}$$

elde edilir. O halde A ifadesi

$$\begin{aligned}A=&\,(-1)^t q^{t+1}\left(2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t-1}{2}\rfloor}\begin{bmatrix}t-1-k\\k-1\end{bmatrix}q^{k^2}x^{t-2k-2}q^{\frac{(t-2k+1)t-2k}{2}}-q^t\right)\\&+(-1)^t q^{t+1}\left(2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t-1}{2}\rfloor}\begin{bmatrix}t-1-k\\k\end{bmatrix}q^{k^2}x^{t-2k}q^{\frac{t(t-2k+1)-2k}{2}}q^k-xq^{t+1}\right)\\=&\,(-1)^t q^{t+1}\left(2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t-1}{2}\rfloor}q^{k^2}x^{t-2k-2}q^{\frac{(t-2k+1)t-2k}{2}}\left(\begin{bmatrix}t-1-k\\k-1\end{bmatrix}+q^k\begin{bmatrix}t-1-k\\k\end{bmatrix}\right)\right)\\&-(-1)^t q^{t+1}\left(q^t+xq^{t+1}\right)\\=&\,(-1)^t q^{t+1}\left(2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t-1}{2}\rfloor}q^{k^2}x^{t-2k-2}q^{\frac{(t-2k+1)t-2k}{2}}\begin{bmatrix}t-k\\k\end{bmatrix}\right)-(-1)^t q^{t+1}\left(q^t+xq^{t+1}\right)\\=&\,(-1)^t q^{t+1}\left(\mathcal{L}_{e_t}\left(x\sqrt{q^{t+1}},q\right)+q-q^t-xq^{t+1}\right)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. A ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{e_{-t-2}}(x,q)=&\,(-1)^t q^{t+1}\left(\mathcal{L}_{e_t}\left(x\sqrt{q^{t+1}},q\right)+q-q^t-xq^{t+1}\right)\\&+(-1)^t q^{1+2t}+(-1)^t xq^{2+2t}-q\\=&\,(-1)^t q^{t+1}\left(\mathcal{L}_{e_t}\left(x\sqrt{q^{t+1}},q\right)\right)+(-1)^t q^{t+1}\left(q-q^t-xq^{t+1}\right)\\&+(-1)^t q^{1+2t}+(-1)^t xq^{2+2t}-q\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{1+t}(-1)^t \mathcal{L}_{et}\left(x\sqrt{q^{t+1}}, q\right) + (-1)^t q q^{t+1} - (-1)^t q^{1+t} q^t \\
&\quad - (-1)^t q^{1+t} x q^{t+1} + (-1)^t q^{1+2t} + (-1)^t x q^{2+2t} - q \\
&= (-1)^{t+2}\left(q^{t+1}\mathcal{L}_{et}\left(x\sqrt{q^{t+1}}, q\right) + q^{t+2}\right) - q
\end{aligned}
$$

elde edilir.

- Eş. 4.8 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse,

  $\mathcal{L}_{e-n}(x) = (-1)^n (\mathcal{L}_{en-2}(x) + 1) - 1$

- Eş. 4.8 ifadesinde $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse, negatif indisli Leonardo sayılarıarasındaki

  $Le_{-n} = (-1)^n (Le_{n-2} + 1) - 1$

eşitlik elde edilir [25].

Birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının indirgeme bağıntısı

$$
£_{un-2}(x,q) = q^{2-n} £_{un}(x,q) - x q^{2-n} £_{un-1}(x,q) + q^{3-n}\left(x + q^{n-2} - 1\right) \tag{4.9}
$$

şeklinde yeniden düzenlenerek, negatif indisli birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlar tanımlanabilir.

4.2.2. Teorem

Negatif indisli birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları

$$
£_{u-n}(x,q) = (-1)^n \sqrt{q^n}\, £_{un}\left(x\sqrt{q^n}, q\right) + (-1)^{n+1}\sqrt{q^{n+2}} + q, \tag{4.10}
$$

şeklindedir.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarım ile yapalım. Eş. 4.9 ifadesinde $n=1$ seçilirse,

$$\begin{aligned}\pounds_{u-1}(x,q) &= q^1\pounds_{u1}(x,q) - xq^1\pounds_{u0}(x,q) + q^2\left(x+q^{-1}-1\right)\\ &= q(2x+q) - xq(4+q) + q^2\left(x+q^{-1}-1\right)\\ &= q-2qx\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(-1)^1\sqrt{q^1}\,\pounds_{u1}\left(x\sqrt{q^1},q\right) + (-1)^{1+1}\sqrt{q^{1+2}} + q &= -\sqrt{q}\,(2x\sqrt{q}+q) + \sqrt{q^3} + q\\ &= -2xq+q\\ &= \pounds_{u-1}(x,q).\end{aligned}$$

olur. Eş. 4.9 ifadesinde $n=0$ seçilirse,

$$\begin{aligned}\pounds_{u-2}(x,q) &= q^2\pounds_{u0}(x,q) - xq^2\pounds_{u-1}(x,q) + q^3\left(x+q^{-2}-1\right)\\ &= q^2(4+q) - xq^2(q-2qx) + q^3\left(x+q^{-2}-1\right)\\ &= 2q^3x^2+4q^2+q\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan Eş. 4.10 ifadesinde $n=2$ seçilirse,

$$\begin{aligned}(-1)^2\sqrt{q^2}\,\pounds_{u2}\left(x\sqrt{q^2},q\right) + (-1)^3\sqrt{q^4} + q &= (-1)^2\sqrt{q^2}\left(2(xq)^2+5q\right) + (-1)^3\sqrt{q^4} + q\\ &= 2x^2q^3+4q^2+q\\ &= \pounds_{u-2}(x,q)\end{aligned}$$

elde edilir. Kabul edelimki Eş. 4.10 ifadesi $n=t$ ve $n=t+1$ için doğru olsun.

$$\pounds_{u-t}(x,q) = (-1)^t\sqrt{q^t}\,\pounds_{ut}\left(x\sqrt{q^t},q\right) + (-1)^{t+1}\sqrt{q^{t+2}} + q$$

ve

$$\pounds_{u_{-t-1}}(x,q) = (-1)^{t+1}\sqrt{q^{t+1}}\,\pounds_{u_{t+1}}\left(x\sqrt{q^{t+1}},q\right) + (-1)^{t+2}\sqrt{q^{t+3}} + q$$

olsun. Eş. 4.9 ifadesinde $n = -t$ seçilirse,

$$\pounds_{u_{-t-2}}(x,q) = q^{2+t}\pounds_{u_{-t}}(x,q) - xq^{2+t}\pounds_{u_{-t-1}}(x,q) + q^{3+t}\left(x + q^{-t-2} - 1\right)$$

elde edilir. Bulunan $\pounds_{u_{-t}}(x,q)$ ve $\pounds_{u_{-t-1}}(x,q)$ ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\pounds_{u_{-t-2}}(x,q) &= q^{2+t}(-1)^t\left\{\sqrt{q^t}\,\pounds_{u_t}\left(x\sqrt{q^{t+1}},q\right) - \sqrt{q^t} + q\right\} + q^{3+t} \\
&\quad + q^{2+t}(-1)^t\left\{x\sqrt{q^t}\sqrt{q}\,\pounds_{u_{t+1}}\left(x\sqrt{q^{t+1}},q\right) - x\sqrt{q^{t+1}}\sqrt{q}\right\} - xq^{t+3} \\
&\quad + xq^{t+3} + q - q^{3-t} \\
&= q^{2+t}(-1)^t\left\{\sqrt{q^t}\,\pounds_{u_t}\left(x\sqrt{q^{t+1}},q\right) + x\sqrt{q^t}\sqrt{q}\,\pounds_{u_{t+1}}\left(x\sqrt{q^{t+1}},q\right)\right\} \\
&\quad - q^{2+t}(-1)^t\left\{-\sqrt{q^t}\sqrt{q} - x\sqrt{q^{t+1}}\sqrt{q}\right\} + q \\
&= q^{2+t}(-1)^t\left\{\sqrt{q^t}\,\pounds_{u_t}\left(x\sqrt{q^{t+1}},q\right) + x\sqrt{q^t}\sqrt{q}\,\pounds_{u_{t+1}}\left(x\sqrt{q^{t+1}},q\right)\right\} \\
&\quad - q^{2+t}(-1)^t\sqrt{q^t}\left\{-\sqrt{q} - xq\right\} + q \\
&= (-1)^{t+2}\sqrt{q^{t+2}}\,\pounds_{u_{t+2}}\left(x\sqrt{q^{t+2}},q\right) + (-1)^{t+3}\sqrt{q^{t+4}} + q
\end{aligned}$$

elde edilir. İspat tümevarım yöntemi gereğince tamamlanır.

- Eş. 4.10 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse,

  $$\pounds_{u_{-n}}(x) = (-1)^n\left(\pounds_{u_n}(x) - 1\right) + 1$$

- Eş. 4.10 ifadesinde $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse

  $$\pounds_{u_{-n}} = (-1)^n\left(\pounds_{u_n} - 1\right) + 1$$

elde edilir.

İkinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının rekürans bağıntısı

$$\pounds u_{n-2}(x,q) = q^{1-n}\pounds u_n(qx,q) - xq^{2-n}\sqrt{q}^{n-1}\pounds u_{n-1}(x\sqrt{q},q) + q^{2-n}\left(x\sqrt{q}^{n+1} + q^{n-1} - 1\right) \tag{4.11}$$

şeklinde yeniden düzenlenerek, negatif indisli ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlar tanımlanabilir.

4.2.3. Teorem

Negatif indisli ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlar

$$\pounds u_{-n}(x,q) = (-1)^n\sqrt{q^n}\pounds u_n\left(x\sqrt{q^n},q\right) + (-1)^{n+1}\sqrt{q^{n+2}} + q \tag{4.12}$$

şeklindedir.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarım ile yapalım. Eş. 4.11 ifadesinde $n=1$ seçilirse,

$$\begin{aligned}\pounds u_{-1}(x,q) &= q^0\pounds u_1(qx,q) - xq^1\sqrt{q}^0\pounds u_0(x\sqrt{q},q) + q^1\left(x\sqrt{q}^2 + q^0 - 1\right)\\ &= (2xq+q) - xq(4+q) + q(xq+1-1)\\ &= q - 2xq\end{aligned}$$

Eş. 4.12 ifadesinin sağ tarafında $n=1$ seçilirse

$$\begin{aligned}(-1)^1\sqrt{q}\pounds u_1(x\sqrt{q},q) + (-1)^2\sqrt{q^3} + q &= (-1)\sqrt{q}(2x\sqrt{q}+q) + \sqrt{q^3} + q\\ &= q - 2qx\\ &= \pounds u_{-1}(x,q)\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan Eş. 4.11 ifadesinde $n=2$ seçilirse,

$$\begin{aligned}\pounds_{u-2}(x,q) &= q\,\pounds_{u0}(qx,q) - xq^2\sqrt{q}^{-1}\,\pounds_{u-1}(\sqrt{q}x,q) + q^2\left(x\sqrt{q}+q^{-1}-1\right)\\ &= q(4+q) - xq^2\sqrt{q}^{-1}\left(q-2q\sqrt{q}x\right) + q^2\left(x\sqrt{q}+q^{-1}-1\right)\\ &= 2q^3x^2+5q\end{aligned}$$

olup, Eş. 4.12 ifadesinin sağ tarafında $n=2$ seçilirse

$$\begin{aligned}(-1)^2\sqrt{q^2}\pounds_{u2}\left(x\sqrt{q^2},q\right)+(-1)^3\sqrt{q^4}+q &= 2x^2q^3+5q\\ &= \pounds_{u-2}(x,q)\end{aligned}$$

olur. Eş. 4.12 ifadesinin $n=t$ ve $n=t+1$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\pounds_{u-t}(x,q) = (-1)^t\sqrt{q^t}\pounds_{ut}\left(x\sqrt{q^t},q\right)+(-1)^{t+1}\sqrt{q^{t+2}}+q$$

$$\pounds_{u-t-1}(x,q) = (-1)^{t+1}\sqrt{q^{t+1}}\pounds_{ut+1}\left(x\sqrt{q^{t+1}},q\right)+(-1)^{t+2}\sqrt{q^{t+3}}+q$$

olsun. Eş. 4.11 ifadesinde $n=-t$ seçilirse,

$$\begin{aligned}\pounds_{u-t-2}(x,q) &= q^{1+t}\,\pounds_{u-t}(qx,q) - xq^{2+t}\sqrt{q}^{-t-1}\,\pounds_{u-t-1}(x\sqrt{q},q)\\ &\quad + q^{2+t}\left(x\sqrt{q}^{-t+1}+q^{-t-1}-1\right)\\ &= q^{1+t}\,\pounds_{u-t}(qx,q) - xq^{2+t}\sqrt{q}^{-(t+1)}\,\pounds_{u-t-1}(x\sqrt{q},q)\\ &\quad + q^{2+t}\left(xq\sqrt{q}^{-(t+1)}+q^{-(t+1)}-1\right)\end{aligned} \tag{4.13}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\pounds_{u-(t+2)}(x,q) &= q^{1+t}\,\pounds_{u-t}(qx,q) - xq^{2+t}\sqrt{q}^{-(t+1)}\,\pounds_{u-(t+1)}(x\sqrt{q},q)\\ &\quad + q^{t+2}\left(x\sqrt{q}^{-t+1}+q^{-t-1}-1\right)\\ &= q^{1+t}\left((-1)^t\sqrt{q^t}\pounds_{ut}\left(xq\sqrt{q^t},q\right)+(-1)^{t+1}\sqrt{q^{t+2}}+q\right)\\ &\quad - xq^{2+t}\sqrt{q}^{-(t+1)}\left[(-1)^{t+1}\sqrt{q^{t+1}}\pounds_{ut+1}\left(x\sqrt{q^{t+2}},q\right)+(-1)^{t+2}\sqrt{q^{t+3}}+q\right]\\ &\quad + q^{t+2}\left(x\sqrt{q}^{-t+1}+q^{-t-1}-1\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^t \sqrt{q^{t+2}} \left(xq\sqrt{q^t} \pounds_{u_t+1} \left(x\sqrt{q^{t+2}}, q \right) + q^t \pounds_{u_t} \left(xq\sqrt{q^t}, q \right) \right) \\
&\quad - (-1)^t \sqrt{q^{t+2}} \left(+xq^2\sqrt{q^t} + q^{t+1} \right) + q \\
&= (-1)^t \sqrt{q^{t+2}} \left(u\pounds_{u_t+1}(u,q) + q^t \pounds_{u_t}(u,q) - q\left(u+q^t\right) \right) + q \qquad u = xq\sqrt{q^t} \\
&= (-1)^t \sqrt{q^{t+2}} \left(\pounds_{u_t+2}(u,q) - q \right) + q \\
&= (-1)^{t+2} \sqrt{q^{t+2}} \pounds_{u_t+2} \left(xq\sqrt{q^t}, q \right) + (-1)^{t+3} \sqrt{q^{t+4}} + q
\end{aligned}
$$

elde edilir. İspat tümevarım yöntemi gereğince tamamlanır.

- Eş. 4.12 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse

$$\pounds_{u_{-n}}(x) = (-1)^n \pounds_{u_n}(x) + (-1)^{n+1} + 1$$

- Eş. 4.12 ifadesinde $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse

$$\pounds_{u_{-n}} = (-1)^n \pounds_{u_n} + (-1)^{n+1} + 1$$

elde edilir.

4.3. q–Leonardo Polinomları Arasındaki İlişkiler

Şimdi $q-$Leonardo Pisano polinomlarını içeren bazı ilişkileri ve bunların özel durumları verelim.

4.3.1. Teorem

$q-$Leonardo Pisano polinomlarının $q-$Cassini formülü, $n \geq 2$ için

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{e_{n+1}}(x,q)\mathcal{L}_{e_{n-1}}\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}},q\right) - \sqrt{q}\mathcal{L}_{e_n}(x,q)\,\mathcal{L}_{e_n}\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}},q\right) \\
&\qquad + q\left(\mathcal{L}_{e_{n+1}}(x,q) - \sqrt{q}\mathcal{L}_{e_n}(x,q) - \sqrt{q}\mathcal{L}_{e_n}\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}},q\right) + \mathcal{L}_{e_{n-1}}\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}},q\right)\right) \\
&\qquad = 4(-1)^n q^{\frac{n^2+1}{2}} - q^2\left(1-\sqrt{q}\right)
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

dir.

İspat

$q-$Fibonacci polinomlarının Cassini formulü

$$F_{n+2}(x,q)F_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right)-\sqrt{q}F_{n+1}(x,q)F_{n+1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right)=(-1)^{n+1}\left(\sqrt{q}\right)^{n^2+1} \tag{4.15}$$

şeklindedir [40]. Bu eşitlikte, Eş. 4.1 ile verilen $q-$Leonardo Pisano polinomları ile $q-$Fibonacci polinomları arasındaki ilişki kullanılırsa,

$$\left(\frac{\mathcal{L}e_{n+1}(x,q)+q}{2}\right)\left(\frac{\mathcal{L}e_{n-1}(\frac{x}{\sqrt{q}},q)+q}{2}\right)-\sqrt{q}\left(\frac{\mathcal{L}e_n(x,q)+q}{2}\right)\left(\frac{\mathcal{L}e_n(\frac{x}{\sqrt{q}},q)+q}{2}\right)=(-1)^{n+1}\left(\sqrt{q}\right)^{n^2+1}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}e_{n+1}(x,q)\mathcal{L}e_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right)-\sqrt{q}\mathcal{L}e_n(x,q)\mathcal{L}e_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right)+q\mathcal{L}e_{n+1}(x,q)+q\mathcal{L}e_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right)\\ -q\sqrt{q}\mathcal{L}e_n(x,q)-q\sqrt{q}\mathcal{L}e_n\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right)\\ =4(-1)^{n+1}\left(\sqrt{q}\right)^{n^2+1}+q^2\left(\sqrt{q}-1\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

- Eş. 4.14 ifadesinde $q\to 1^-$ seçilirse, Leonardo polinomların Cassini formülü

  $$\mathcal{L}e_n(x)\,\mathcal{L}e_{n-2}(x)-\mathcal{L}e_{n-1}^2(x)+\mathcal{L}e_n(x)-2\mathcal{L}e_{n-1}(x)+\mathcal{L}e_{n-2}(x)=4(-1)^n$$

- Eş. 4.14 ifadesinde $q\to 1^-$ ve $x=1$ seçilirse Leonardo sayılarının Cassini formülü

  $$Le_n^2-Le_{n-1}Le_{n+1}=Le_{n-1}-Le_{n-2}+4(-1)^n$$

elde edilir [21].

4.3.2. Teorem

$q-$Leonardo Pisano polinomlarının $q-$Honsberger formülü

$$\begin{aligned}2\sqrt{q}^{-kn}\mathcal{L}e_{n+k}(x,q) &= \mathcal{L}e_n(x,q)\mathcal{L}e_k\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}^n},q\right)+\sqrt{q}^{k+n-1}\mathcal{L}e_{n-1}(x,q)\mathcal{L}e_{k-1}\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right)\\ &\quad+q\left(\mathcal{L}e_n(x,q)+\mathcal{L}e_k\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}^n},q\right)\right)\\ &\quad+\sqrt{q}^{k+n+1}\left(\mathcal{L}e_{n-1}(x,q)+\mathcal{L}e_{k-1}\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right)\right)\\ &\quad+q^2\left(1+\sqrt{q}^{k+n-3}-2\sqrt{q}^{-kn-2}\right)\end{aligned}\tag{4.16}$$

dir.

İspat

$q-$Fibonacci polinomlarının Honsberger formulü

$$\sqrt{q}^{-kn}\mathbf{F}_{n+k+1}(x,q)=\mathbf{F}_{n+1}(x,q)\mathbf{F}_{k+1}\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}^n},q\right)+\sqrt{q}^{k+n-1}\mathbf{F}_n(x,q)\mathbf{F}_k\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right)\tag{4.17}$$

şeklindedir [40]. Bu eşitlikte, Eş. 4.1 ile verilen $q-$Leonardo Pisano polinomları ile $q-$Fibonacci polinomları arasındaki ilişki kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\sqrt{q}^{-kn}\left(\frac{\mathcal{L}e_{n+k}(x,q)+q}{2}\right) &= \left(\frac{\mathcal{L}e_n(x,q)+q}{2}\right)\left(\frac{\mathcal{L}e_k\left(\frac{x}{\sqrt{q}^n},q\right)+q}{2}\right)\\ &\quad+\sqrt{q}^{k+n-1}\left(\frac{\mathcal{L}e_{n-1}(x,q)+q}{2}\right)\left(\frac{\mathcal{L}e_{k-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right)+q}{2}\right).\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\begin{aligned}2\sqrt{q}^{-kn}\mathcal{L}e_{n+k}(x,q) &= \mathcal{L}e_n(x,q)\mathcal{L}e_k\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}^n},q\right)+\sqrt{q}^{k+n-1}\mathcal{L}e_{n-1}(x,q)\mathcal{L}e_{k-1}\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right)\\ &\quad+q\left(\mathcal{L}e_n(x,q)+\mathcal{L}e_k\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}^n},q\right)\right)+\sqrt{q}^{k+n+1}\left(\mathcal{L}e_{n-1}(x,q)+\mathcal{L}e_{k-1}\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}^{n+1}},q\right)\right)\\ &\quad+q^2\left(1+\sqrt{q}^{k+n-3}-2\sqrt{q}^{-kn-2}\right).\end{aligned}$$

elde edilir.

- Eş. 4.16 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse, Leonardo polinomların Honsberger formülü

$$2\mathcal{L}_{e_{n+k}}(x) = \mathcal{L}_{e_n}(x)\,\mathcal{L}_{e_k}(x) + \mathcal{L}_{e_{n-1}}(x)\,\mathcal{L}_{e_{k-1}}(x) + \mathcal{L}_{e_n}(x) + \mathcal{L}_{e_k}(x) + \mathcal{L}_{e_{n-1}}(x) + \mathcal{L}_{e_{k-1}}(x)$$

- Eş. 4.16 ifadesinde $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse, Leonardo sayıların Honsberger formülü

$$2Le_{n+k} = Le_nLe_k + Le_{n-1}Le_{k-1} + Le_{n+1} + Le_{k+1}$$

elde edilir.

4.3.3. Sonuç

Her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$\begin{aligned} 2\sqrt{q}^{-n^2}\mathcal{L}_{e_{2n}}(x,q) = {} & \mathcal{L}_{e_n}\left(\frac{x}{\sqrt{q}^n}, q\right)\left(\mathcal{L}_{e_n}(x,q) + q\right) \\ & + \sqrt{q}^{2n-1}\mathcal{L}_{e_{n-1}}\left(\frac{x}{\sqrt{q^{n+1}}}, q\right)\left(\mathcal{L}_{e_{n-1}}(x,q) + q\right) \\ & + \mathcal{L}_{e_n}(x,q) + q\left(\sqrt{q}^{2n-1}\mathcal{L}_{e_{n-1}}(x,q)\right) + \sqrt{q}\left(q^4 + q^{2n+3} - 2q^{-n^2}\right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

dir.

İspat

Eş. 4.16 ifadesinde $k = n$ seçilirse, istenilen elde edilir.

- Eş. 4.18 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse,

$$2\mathcal{L}_{e_{2n}}(x) = \mathcal{L}_{e_n}^2(x) + \mathcal{L}_{e_{n-1}}^2(x) + 2\left(\mathcal{L}_{e_n}(x) + \mathcal{L}_{e_{n-1}}(x)\right)$$

- Eş. 4.18 ifadesinde $q \to 1^{-}$ ve $x = 1$ seçilirse

$$2Le_{2n} = Le_n^2 + Le_{n-1}^2 + 2\left(Le_n + Le_{n-1}\right)$$

elde edilir.

4.3.4. Sonuç

Her $n \geq 1$ doğal sayısı için

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L}e_{2n}\left(x\sqrt{q^n}, q\right) &= \sqrt{q}^{n^2}\left(\mathcal{L}e_n\left(x\sqrt{q^n}, q\right)\mathcal{L}e_n\left(x, q\right)\right) \\ &+ \sqrt{q}^{n^2+2}\left(\mathcal{L}e_n\left(x\sqrt{q^n}, q\right) + \mathcal{L}e_n\left(x, q\right)\right) \\ &+ \sqrt{q}^{n^2+2n-1}\left(\mathcal{L}e_{n-1}\left(x\sqrt{q^n}, q\right)\mathcal{L}e_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right)\right) \\ &+ \sqrt{q}^{n^2+2n+1}\left(\mathcal{L}e_{n-1}\left(x\sqrt{q^n}, q\right) + \mathcal{L}e_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right)\right) \\ &+ \sqrt{q}^{n^2+3}\left(q^n + \sqrt{q}\right) - 2q \end{aligned} \tag{4.19}$$

dir.

- Eş. 4.19 ifadesinde $q \to 1^{-}$ seçilirse,

$$2\mathcal{L}e_{2n}\left(x\right) = \mathcal{L}e_n^2\left(x\right) + \mathcal{L}e_{n-1}^2\left(x\right) + 2\left(\mathcal{L}e_n\left(x\right) + \mathcal{L}e_{n-1}\left(x\right)\right)$$

- Eş. 4.19 ifadesinde $q \to 1^{-}$ ve $x = 1$ seçilirse

$$2Le_{2n} = Le_n^2 + Le_{n-1}^2 + 2\left(Le_n + Le_{n-1}\right)$$

elde edilir.

Şimdi, birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları ile $q-$Leonardo Pisano polinomları arasındaki bazı ilişkileri ve özel durumları verelim.

4.3.5. Teorem

Her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$\sqrt{q}^{n} \pounds_{u_n}(x,q) = \mathcal{L}_{e_n}(x\sqrt{q},q) + q^{n-1}\mathcal{L}_{e_{n-2}}(\tfrac{x}{\sqrt{q}},q) + q\left(1+q^{n-1}+\sqrt{q}^{n}\right) \tag{4.20}$$

dir.

İspat

Birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomların açık formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\pounds_{u_n}(x,q) &= q + 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} \left(1 + \frac{[k]_q}{[n-k]_q}\right) x^{n-2k} \\
&= q + 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{k(k-1)} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} x^{n-2k} + 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{k(k-1)} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} \frac{[k]_q}{[n-k]_q} x^{n-2k} \\
&= q + \sqrt{q^{-n}} 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} (x\sqrt{q})^{n-2k} + 2\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^{n-2k} q^{-k} \\
&= q + \sqrt{q^{-n}}\left(\mathcal{L}_{e_n}(x\sqrt{q},q) + q\right) + 2\sum_{t=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} q^{(t+1)^2} \begin{bmatrix} n-t-2 \\ t \end{bmatrix} x^{n-2t-2} q^{-t-1} \\
&= q + \sqrt{q^{-n}}\mathcal{L}_{e_n}(x\sqrt{q},q) + \sqrt{q}^{1-n} + 2\sqrt{q^{n-2}} \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} q^{t^2} \begin{bmatrix} n-t-2 \\ t \end{bmatrix} \left(\tfrac{x}{\sqrt{q}}\right)^{n-2t-2} \\
&= q + \sqrt{q^{-n}}\mathcal{L}_{e_n}(x\sqrt{q},q) + \sqrt{q}^{1-n} + \sqrt{q^{n-2}}\left(\mathcal{L}_{e_{n-2}}\left(\tfrac{x}{\sqrt{q}},q\right) + q\right).
\end{aligned}$$

olup, burdan

$$\sqrt{q}^{n} \pounds_{u_n}(x,q) = \mathcal{L}_{e_n}(x\sqrt{q},q) + q^{n-1}\mathcal{L}_{e_{n-2}}(\tfrac{x}{\sqrt{q}},q) + q\left(1+q^{n-1}+\sqrt{q}^{n}\right).$$

elde edilir.

- Eş. 4.20 ifadesinde $q \to 1^{-}$ seçilirse,

  $$\pounds_{u_n}(x) = \mathcal{L}_{e_n}(x) + \mathcal{L}_{e_{n-2}}(x) + 3$$

- Eş. 4.20 ifadesinde $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse

$$\pounds_{u_n} = Le_n + Le_{n-2} + 3$$

elde edilir.

4.3.6. Sonuç

Her $n \geq 1$ doğal sayısı için

$$\pounds_{u_n}(x,q) = 2\sqrt{q}^{-n}\mathcal{L}_{e_n}(x\sqrt{q},q) - x\mathcal{L}_{e_{n-1}}(x,q) + q\left(2\sqrt{q}^{-n} - x + 1\right) \tag{4.21}$$

dir.

- Eş. 4.21 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse,

$$\pounds_{u_n}(x) = 2\mathcal{L}_{e_n}(x) - x\mathcal{L}_{e_{n-1}}(x) + 3 - x$$

- Eş. 4.21 ifadesinde $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse

$$\pounds_{u_n} = 2Le_n - Le_{n-1} + 2$$

elde edilir.

4.3.7. Sonuç

Her $n \geq 0$ doğal sayısı için

$$q^{n+1}\left(x^2 + 2 + \frac{2}{q}\right)\mathcal{L}_{e_n}(x,q) = \pounds_{u_{n+2}}(x\sqrt{q},q) + q^{n+1}\pounds_{u_n}\left(\frac{x}{\sqrt{q}},q\right) - \left(q + q^{n+2} + x^2\right) - 2\sqrt{q}^{n+2}(1+q) \tag{4.22}$$

dir.

- Eş. 4.22 ifadesinde $q \to 1^{-}$ seçilirse,

$$\left(x^2+4\right)\mathcal{L}_{e_n}(x) = £_{u_{n+2}}(x) + \mathcal{L}_{e_n}(x) - \left(x^2+6\right)$$

- Eş. 4.22 ifadesinde $q \to 1^{-}$ ve $x = 1$ seçilirse

$$5Le_n = £_{u_{n+2}} + £_{u_n} - 7$$

elde edilir.

4.3.8. Sonuç

Her $n \geq 0$ doğal sayısı için

$$\left(x^2+4\right)\mathcal{L}_{e_n}(x,q) = x£_{u_{n+1}}(x,q) + 2\sqrt{q}^{n} £_{u_n}\left(\frac{x}{\sqrt{q}}, q\right) - q\left(x^2+x+2\sqrt{q}^{n}+4\right) \tag{4.23}$$

dir.

- Eş. 4.23 ifadesinde $q \to 1^{-}$ seçilirse,

$$\left(x^2+4\right)\mathcal{L}_{e_n}(x) = x£_{u_{n+1}}(x) + 2£_{u_n}(x) - \left(x^2+x+6\right)$$

- Eş. 4.23 ifadesinde $q \to 1^{-}$ ve $x = 1$ seçilirse

$$5Le_n = £_{u_{n+1}} + 2£_{u_n} - 8$$

elde edilir.

Şimdi ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları ile $q-$Leonardo Pisano polinomları arasındaki bazı ilişkileri ve özel durumları verelim.

4.3.9. Teorem

Her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$\pounds u_n(x,q) = \mathcal{L}e_n(x,q) + q^{n-1}\mathcal{L}e_{n-2}(x,q) + q\left(q^{n-1}+2\right) \tag{4.24}$$

dir.

İspat

İkinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomların Eş. 4.6 ile verilen explicit (açık) formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\pounds u_n(x,q) &= 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q \left(1 + q^{n-2k}\frac{[k]_q}{[n-k]_q}\right) x^{n-2k} + q \\
&= \mathcal{L}e_n(x,q) + q + 2\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} q^{k^2} \frac{[n-k]\,[n-k-1]!}{[n-2k]!\,[k]\,[k-1]!}\frac{[k]}{[n-k]} q^{n-2k}x^{n-2k} + q \\
&= \mathcal{L}e_n(x,q) + q + 2\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2}-1 \rfloor} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} (xq)^{n-2k} + q + 0 \\
&= \mathcal{L}e_n(x,q) + q + 2q^{n-1}\sum_{t=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} q^{t^2} \begin{bmatrix} n-t-2 \\ t \end{bmatrix} x^{n-2t-2} + q \\
&= \mathcal{L}e_n(x,q) + q^{n-1}\mathcal{L}e_{n-2}(x,q) + q\left(q^{n-1}+2\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

- Eş. 4.24 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse,

  $$\pounds u_n(x) = 2\mathcal{L}e_n(x) + \mathcal{L}e_{n-1}(x) + 2$$

- Eş. 4.24 ifadesinde $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse

  $$\pounds u_n = 2Le_n - Le_{n-1} + 2$$

elde edilir.

4.3.10. Sonuç

Her $n \geq 1$ doğal sayısı için

$$\pounds u_n(x,q) = 2\mathcal{L}e_n(x,q) - x\mathcal{L}e_{n-1}(x,q) + q(3-x) \tag{4.25}$$

dir.

- Eş. 4.25 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse,

  $$\pounds u_n(x) = 2\mathcal{L}e_n(x) - x\mathcal{L}e_{n-1}(x) + (3-x)$$

- Eş. 4.25 ifadesinde $x = 1$ seçilirse,

  $$\pounds u_n(q) = 2\mathcal{L}e_n(q) - \mathcal{L}e_{n-1}(q) + 2q$$

- Eş. 4.25 ifadesinde $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse

  $$\pounds u_n = 2Le_n - Le_{n-1} + 2$$

elde edilir.

4.3.11. Sonuç

Her $n \geq 2$ doğal sayısı için

$$\pounds u_n(x,q) = x\mathcal{L}e_{n-1}(x,q) + 2q^{n-1}\mathcal{L}e_{n-2}(x,q) + q\left(2q^{n-1} + x + 1\right) \tag{4.26}$$

dir.

- Eş. 4.26 ifadesinde $q \to 1^{-}$ seçilirse,

$$\pounds_{u_n}(x) = x\mathcal{L}_{e_{n-1}}(x) + 2\mathcal{L}_{e_{n-2}}(x) + x + 3$$

- Eş. 4.26 ifadesinde $x = 1$ seçilirse,

$$\pounds_{u_n}(q) = \mathcal{L}_{e_{n-1}}(q) + 2q^{n-1}\mathcal{L}_{e_{n-2}}(q) + 2q\left(q^{n-1} + 1\right)$$

- Eş. 4.26 ifadesinde $q \to 1^{-}$ ve $x = 1$ seçilirse, Leonardo Lucas sayıları ile Leonardo sayıları arasında

$$\pounds_{u_n} = Le_{n-1} + 2Le_{n-2} + 4$$

eşitlik elde edilir.

4.3.12. Teorem

Her $n \geq 0$ doğal sayısı için

$$\left(x^2 + 2q^{n+1} + 2q^n\right)\mathcal{L}_{e_n}(x,q) = \pounds_{u_{n+2}}(x,q) + q^n\pounds_{u_n}(x,q) - q^{n+1}(3+2q) - q\left(1+x^2\right) \quad (4.27)$$

dir.

İspat

Eş. 4.24 ile verilen ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları ile $q-$Leonardo Pisano polinomları arasındaki eşitliği ve $q-$Leonardo Pisano polinomlarının rekürans bağıntısı Eş. 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\pounds_{u_{n+2}}(x,q) &= \mathcal{L}_{e_{n+2}}(x,q) + q^{n+1}\mathcal{L}_{e_n}(x,q) + q\left(q^{n+1} + 2\right) \\ &= \mathcal{L}_{e_{n+2}}(x,q) + q^{n+1}\mathcal{L}_{e_n}(x,q) + q^{n+2} + 2q \\ &= x\mathcal{L}_{e_{n+1}}(x,q) + 2q^{n+1}\mathcal{L}_{e_n}(x,q) + qx + 2q^{n+2} + q\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} q^n \pounds_{u_n}(x,q) &= q^n \left(\mathcal{L}_{e_n}(x,q) + q^{n-1} \mathcal{L}_{e_{n-2}}(x,q) + q^n + 2q \right) \\ &= q^n \left(\mathcal{L}_{e_n}(x,q) + \mathcal{L}_{e_n}(x,q) - x\mathcal{L}_{e_{n-1}}(x,q) - qx - q^n + q + q^n + 2q \right) \\ &= q^n \left(2\mathcal{L}_{e_n}(x,q) - x\mathcal{L}_{e_{n-1}}(x,q) - qx + 3q \right) \\ &= 2q^n \mathcal{L}_{e_n}(x,q) - xq^n \mathcal{L}_{e_{n-1}}(x,q) - q^{n+1}x + 3q^{n+1} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bulduğumuz ifadeler toplanırsa,

$$\begin{aligned} \pounds_{u_{n+2}}(x,q) + q^n \pounds_{u_n}(x,q) &= x\mathcal{L}_{e_{n+1}}(x,q) + 2q^{n+1} \mathcal{L}_{e_n}(x,q) + qx + 2q^{n+2} + q \\ &\quad + 2q^n \mathcal{L}_{e_n}(x,q) - xq^n \mathcal{L}_{e_{n-1}}(x,q) - q^{n+1}x + 3q^{n+1} \\ &= \mathcal{L}_{e_n}(x,q) \left(2q^{n+1} + 2q^n \right) + x \left(\mathcal{L}_{e_{n+1}}(x,q) - q^n \mathcal{L}_{e_{n-1}}(x,q) \right) \\ &\quad + qx + 2q^{n+2} + q - q^{n+1}x + 3q^{n+1} \\ &= \mathcal{L}_{e_n}(x,q) \left(2q^{n+1} + 2q^n \right) + x \left(x\mathcal{L}_{e_n}(x,q) + qx + q^{n+1} - q \right) \\ &\quad + qx + 2q^{n+2} + q - q^{n+1}x + 3q^{n+1} \\ &= \left(x^2 + 2q^{n+1} + 2q^n \right) \mathcal{L}_{e_n}(x,q) + q\left(x^2 + 1 \right) + q^{n+1}(3 + 2q) \end{aligned}$$

elde edilir. İspat tamamlanmış olur.

- Eş. 4.27 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse,

  $$\left(x^2 + 4 \right) \mathcal{L}_{e_n}(x) = \pounds_{u_{n+2}}(x) + \pounds_{u_n}(x) - \left(x^2 + 6 \right)$$

- Eş. 4.27 ifadesinde $x = 1$ seçilirse,

  $$\left(1 + 2q^{n+1} + 2q^n \right) \mathcal{L}_{e_n}(q) = \pounds_{u_{n+2}}(q) + q^n \pounds_{u_n}(q) - q\left(3q^n + 2q^{n+1} + 2 \right)$$

- Eş. 4.27 ifadesinde $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse

  $$5Le_n = \pounds_{u_{n+2}} + \pounds_{u_n} - 7$$

elde edilir.

4.3.13. Sonuç

Her $n \geq 0$ doğal sayısı için

$$\left(x^2+4q^{n+1}\right)\mathcal{L}e_n(x,q) = 2\pounds u_{n+2}(x,q) - x\pounds u_{n+1}(x,q) + qx(1-x) - 2q\left(1+2q^{n+1}\right) \quad (4.28)$$

dir.

- Eş. 4.28 ifadesinde $q \to 1^-$ seçilirse,

  $$\left(x^2+4\right)\mathcal{L}e_n(x) = 2\pounds u_{n+2}(x) - x\pounds u_{n+1}(x) + x(1-x) - 6$$

- Eş. 4.28 ifadesinde $x = 1$ seçilirse,

  $$\left(4q^{n+1}+1\right)\mathcal{L}e_n(q) = 2\pounds u_{n+2}(q) - \pounds u_{n+1}(q) - 2q\left(1+2q^{n+1}\right)$$

- Eş. 4.28 ifadesinde $q \to 1^-$ ve $x = 1$ seçilirse

  $$5Le_n = 2\pounds u_{n+2} - \pounds u_{n+1} - 6$$

elde edilir.

4.4. *q*–Leonardo Polinomlarının Üreteç Fonksiyonları

4.4.1. Teorem

η_z, Eş. 2.3 ile tanınmlı bir operatör olmak üzere $q-$Leonardo Pisano polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$K(z) = \frac{q}{z-1} + \frac{2}{1-xz-z^2\eta_z}\mathbf{1} \quad (4.29)$$

dir.

İspat

$q-$Fibonacci polinomlarının Eş. 2.4 ile verilen üreteç fonksiyonu ve $q-$Leonardo Pisano polinomları ile $q-$Fibonacci polinomları arasındaki Eş. 4.1 ilişki kullanılırsa

$$\begin{aligned} K(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_{e_n}(x,q)\, z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2\mathbf{F}_{n+1}(q) - q)\, z^n \\ &= \frac{2}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n(q) z^n - q\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= \frac{q}{z-1} + \frac{2}{1-xz-z^2\eta_z}\mathbf{1} \end{aligned}$$

elde edilir.

4.4.2. Teorem

Birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$M(z) = \frac{q}{1-z} + \frac{4-2xz}{1-xz-qz^2\eta_z}\mathbf{1} \tag{4.30}$$

İspat

Birinci çeşit $q-$Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonu Eş. 2.6 ve birinci çeşit $q-$Lucas polinomları ile birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları arasındaki Eş. 4.2 ile verilen ilişki kullanılırsa

$$\begin{aligned} M(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} £_{u_n}(x,q)\, z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2\mathbf{L}_n(x,q) + q)\, z^n \\ &= \frac{q}{1-z} + \frac{4-2xz}{1-xz-qz^2\eta_z}\mathbf{1} \end{aligned}$$

elde edilir.

4.4.3. Teorem

İkinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonu,

$$N(z) = 4 - 2q + \frac{q}{1-z} + \frac{2(2-xz)}{1-xz-z^2\eta_z}\mathbf{1} \tag{4.31}$$

dir.

İspat

$q-$Leonardo Pisano polinomlarının Eş. 4.29 ile verilen üreteç fonksiyonu ve Eş. 4.24 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
N(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \pounds_{uk}(x,q)\, z^k \\
&= \pounds_{u0}(x,q) + \sum_{k=1}^{\infty} \pounds_{uk}(x,q)\, z^k \\
&= 4 + q + \sum_{k=1}^{\infty} \left(2\mathcal{L}_{ek}(x,q) - x\mathcal{L}_{ek-1}(x,q) + q(3-x)\right) z^k \\
&= 4 - 2q + qx + (2-xz)\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_{ek}(x,q)\, z^k + q(3-x)\sum_{k=0}^{\infty} z^k \\
&= 4 - 2q + qx + (2-xz)\left(\frac{q}{z-1} + \frac{2}{1-xz-z^2\eta_z}\mathbf{1}\right) + q(3-x)\frac{1}{1-z} \\
&= 4 - 2q + \frac{q}{1-z} + \frac{2(2-xz)}{1-xz-z^2\eta_z}\mathbf{1}
\end{aligned}$$

4.5. *q*–Leonardo Polinomlarının Toplam Formülleri

4.5.1. Teorem

$q-$Leonardo Pisano polinomlarının toplam formülü

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \left(x + q^{i+1} - 1\right) \mathcal{L}_{ei}(x,q) &= \mathcal{L}_{en+1}(x,q) + q^{n+1}\mathcal{L}_{en}(x,q) \\
&\quad + q\left((n+1)(1-x) + 2 - [n+1]\right) - 2
\end{aligned} \tag{4.32}$$

dir.

İspat

$q-$Leonardo Pisano polinomların indirgeme bağıntısı

$$x\mathcal{L}_{e_{n-1}}(x,q)+q^{n-1}\mathcal{L}_{e_{n-2}}(x,q)-\mathcal{L}_{e_n}(x,q)=q(1-x)-q^n$$

şeklinde düzenlenebilir. Elde edilen ifadenin açılmasıyla

$$\begin{aligned}
&x\mathcal{L}_{e_1}(x,q)+q^1\mathcal{L}_{e_0}(x,q)-\mathcal{L}_{e_2}(x,q)=q(1-x)-q^2\\
&x\mathcal{L}_{e_2}(x,q)+q^2\mathcal{L}_{e_1}(x,q)-\mathcal{L}_{e_3}(x,q)=q(1-x)-q^3\\
&\quad\vdots\\
&x\mathcal{L}_{e_n}(x,q)+q^n\mathcal{L}_{e_{n-1}}(x,q)-\mathcal{L}_{e_{n+1}}(x,q)=q(1-x)-q^{n+1}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu ifadelerin taraf tarafa toplanmasıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\left(x+q^{i+1}-1\right)\mathcal{L}_{e_i}(x,q) &= \mathcal{L}_{e_{n+1}}(x,q)+q^{n+1}\mathcal{L}_{e_n}(x,q)+x\mathcal{L}_{e_0}(x,q)-\mathcal{L}_{e_0}(x,q)\\
&\quad-\mathcal{L}_{e_1}(x,q)+nq(1-x)-q^2\sum_{i=0}^{n-1}q^i\\
&=\mathcal{L}_{e_{n+1}}(x,q)+q^{n+1}\mathcal{L}_{e_n}(x,q)+(x-1)(2-q)-(2x-q)\\
&\quad+nq(1-x)-q^2[n]\\
&=\mathcal{L}_{e_{n+1}}(x,q)+q^{n+1}\mathcal{L}_{e_n}(x,q)+q-2+(n+1)(1-x)q\\
&\quad-q^2[n]\\
&=\mathcal{L}_{e_{n+1}}(x,q)+q^{n+1}\mathcal{L}_{e_n}(x,q)+q((n+1)(1-x)+2-[n+1])-2
\end{aligned}$$

elde edilir.

- Eş. 4.32 ifadesinde $x=1$ seçilirse,

$$\sum_{i=0}^{n}q^{i+1}\mathcal{L}_{e_i}(q)=\mathcal{L}_{e_{n+2}}(q)+q(2-[n+2])-2$$

- Eş. 4.32 ifadesinde $q \to 1^{-}$ seçilirse,

$$\sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}_{e_i}(x) = \frac{\mathcal{L}_{e_{n+1}}(x) + \mathcal{L}_{e_n}(x) - x(n+1)}{x}$$

- Eş. 4.32 ifadesinde $x = 1$ ve $q \to 1^{-}$ seçilirse,

$$\sum_{i=0}^{n} Le_i = Le_{n+2} - (n+2)$$

eşitliği sağlanır.

4.5.2. Teorem

Birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının toplam formülü

$$\sum_{i=0}^{n} \left(x + q^i - 1\right) £_{u_i}(x,q) = £_{u_{n+1}}(x,q) + q^n £_{u_n}(x,q) + q\left((n+1)(x-1) + q[n-1]\right) + 2x - 4 \tag{4.33}$$

dir.

İspat

Birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının indirgeme bağıntısı

$$x£_{u_{n-1}}(x,q) + q^{n-2}£_{u_{n-2}}(x,q) - £_{u_n}(x,q) = q(x-1) + q^{n-1}$$

şeklinde düzenlenebilir. Elde edilen ifadenin açılmasıyla

$$x£_{u_1}(x,q) + q^0 £_{u_0}(x,q) - £_{u_2}(x,q) = q(x-1) + q^1$$
$$x£_{u_2}(x,q) + q^1 £_{u_1}(x,q) - £_{u_3}(x,q) = q(x-1) + q^2$$
$$\vdots$$
$$x£_{u_n}(x,q) + q^{n-1} £_{u_{n-1}}(x,q) - £_{u_{n+1}}(x,q) = q(x-1) + q^n$$

eşitlikleri elde edilir. Bu ifadelerin taraf tarafa toplanmasıyla

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\left(x+q^{i}-1\right)£_{u_i}(x,q) = {} & £_{u_{n+1}}(x,q)+q^{n}£_{u_n}(x,q)+x£_{u_0}(x,q)-£_{u_0}(x,q)-£_{u_1}(x,q)\\ & +nq(x-1)+q[n]\\ = {} & £_{u_{n+1}}(x,q)+q^{n}£_{u_n}(x,q)+2x+(n+1)(x-1)q-q-4+q[n]\\ = {} & £_{u_{n+1}}(x,q)+q^{n}£_{u_n}(x,q)+2x+(n+1)(x-1)q-q-4+q^{2}[n-1]\\ = {} & £_{u_{n+1}}(x,q)+q^{n}£_{u_n}(x,q)+q((n+1)(x-1)+q[n-1])+2x-4\end{aligned}$$

elde edilir.

- Eş. 4.33 ifadesinde $x=1$ seçilirse,

$$\sum_{i=0}^{n}q^{i}£_{u_i}(q) = £_{u_{n+2}}(q)+q^{n}+q^{2}[n-1]-2$$

- Eş. 4.33 ifadesinde $q\to 1^{-}$ seçilirse,

$$\sum_{i=0}^{n}£_{u_i}(x) = \frac{£_{u_{n+1}}(x)+£_{u_n}(x)-6}{x}+n+3$$

- Eş. 4.33 ifadesinde $x=1$ ve $q\to 1^{-}$ seçilirse,

$$\sum_{i=0}^{n}£_{u_i} = £_{u_{n+2}}+n-2$$

eşitliği sağlanır.

4.5.3. Teorem

$\mathcal{L}_{e_n}(x,q)$ $q-$Leonardo Pisano polinomu olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n}x^{n-k}q^{k+1}\mathcal{L}_{e_k}(x,q) = \mathcal{L}_{e_{n+2}}(x,q)-\left(2x^{n+2}+2qx^{n}-q\right)-q^{3}\frac{x^{n}-q^{n}}{x-q} \tag{4.34}$$

dir.

İspat

$n \geq 0$ için Eş. 3.1 ile verilen $q-$Leonardo Pisano polinomlarının rekürans bağıntısı kullanılarak

$$\frac{q^n}{x^n}\mathcal{L}_{e_n}(x,q) = \frac{1}{qx^n}\mathcal{L}_{e_{n+2}}(x,q) - \frac{1}{qx^{n-1}}\mathcal{L}_{e_{n+1}}(x,q) + \left(\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n-1}} - \frac{q^{n+1}}{x^n}\right)$$

yazılabilir. Elde edilen ifadenin açılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\frac{q}{x^1}\mathcal{L}_{e_1}(x,q) &= \frac{1}{qx^1}\mathcal{L}_{e_3}(x,q) - \frac{1}{qx^0}\mathcal{L}_{e_2}(x,q) + \left(\frac{1}{x^1} - \frac{1}{x^0} - \frac{q^2}{x^1}\right)\\
\frac{q^2}{x^2}\mathcal{L}_{e_2}(x,q) &= \frac{1}{qx^2}\mathcal{L}_{e_4}(x,q) - \frac{1}{qx^1}\mathcal{L}_{e_3}(x,q) + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^1} - \frac{q^3}{x^2}\right)\\
&\vdots\\
\frac{q^n}{x^n}\mathcal{L}_{e_n}(x,q) &= \frac{1}{qx^n}\mathcal{L}_{e_{n+2}}(x,q) - \frac{1}{qx^{n-1}}\mathcal{L}_{e_{n+1}}(x,q) + \left(\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x^{n-1}} - \frac{q^{n+1}}{x^n}\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin taraf tarafa toplanmasıyla,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{q}{x}\right)^k\mathcal{L}_{e_k}(x,q) &= \frac{1}{qx^n}\mathcal{L}_{e_{n+2}}(x,q) - \frac{1}{q}\mathcal{L}_{e_2}(x,q) - 1 + \frac{1}{x^n} - \frac{q^2}{x}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{q}{x}\right)^k\\
&= \frac{1}{qx^n}\mathcal{L}_{e_{n+2}}(x,q) - \frac{1}{q}\left(2x^2 + 2q - \frac{q}{x^n}\right) - \frac{q^2}{x}\frac{1-\left(\frac{q}{x}\right)^n}{1-\frac{q}{x}}.
\end{aligned}$$

bulunur. Son denklem düzenlenirse

$$\sum_{k=1}^{n} x^{n-k}q^{k+1}\mathcal{L}_{e_k}(x,q) = \mathcal{L}_{e_{n+2}}(x,q) - \left(2x^{n+2} + 2qx^n - q\right) - q^3\frac{x^n - q^n}{x-q}$$

elde edilir.

- Eş. 4.34 ifadesinde $x = 1$ seçilirse,

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k+1}\mathcal{L}_{e_k}(q) = \mathcal{L}_{e_{n+2}}(q) - \left(2 + q + q^3[n]\right)$$

- Eş. 4.34 ifadesinde $x = 1$ ve $q \to 1^{-}$ seçilirse,

$$\sum_{k=1}^{n} Le_k = Le_{n+2}(q) - (3+n)$$

eşitliği sağlanır.

4.5.4. Teorem

$£_{\iota n}(x,q)$ birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n} x^{n-k} q^k £_{\iota n}(x,q) = £_{\iota n+2}(x,q) - \left(2x^{n+2} + 4x^n + q\right) + q^2 \frac{x^n - q^n}{x-q} \tag{4.35}$$

dir.

İspat

$n \geq 0$ için birinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomunun Eş. 3.2 ile verilen rekürans bağıntısı kullanılarak

$$\frac{q^n}{x^n} £_{\iota n}(x,q) = \frac{1}{x^n} £_{\iota n+2}(x,q) - \frac{1}{x^{n-1}} £_{\iota n+1}(x,q) + q\left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{x^n} + q^n\right)$$

yazılabilir. Elde edilen ifadenin açılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\frac{q}{x} £_{\iota 1}(x,q) &= \frac{1}{x^1} £_{\iota 3}(x,q) - \frac{1}{x^0} £_{\iota 2}(x,q) + q\left(\frac{1}{x^0} - \frac{1}{x} + q^1\right) \\
\frac{q^2}{x^2} £_{\iota 2}(x,q) &= \frac{1}{x^2} £_{\iota 4}(x,q) - \frac{1}{x^1} £_{\iota 3}(x,q) + q\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + q^2\right) \\
&\vdots \\
\frac{q^n}{x^n} £_{\iota n}(x,q) &= \frac{1}{x^n} £_{\iota n+2}(x,q) - \frac{1}{x^{n-1}} £_{\iota n+1}(x,q) + q\left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{q}{x^n} + q^n\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin taraf tarafa toplanmasıyla,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{q}{x}\right)^k £_{\iota n}(x,q) = \frac{1}{x^n} £_{\iota n+2}(x,q) - £_{\iota 2}(x,q) + q - \frac{q}{x^n} + q\sum_{k=1}^{n} \frac{q^k}{x^k}$$

$$= \frac{1}{x^n} £_{u_{n+2}}(x,q) - \left(2x^2 + 4 + \frac{q}{x^n}\right) + \frac{q^2}{x} \frac{1 - \left(\frac{q}{x}\right)^n}{1 - \frac{q}{x}}$$

olup, buradan

$$\sum_{k=1}^{n} x^{n-k} q^k £_{u_n}(x,q) = £_{u_{n+2}}(x,q) - \left(2x^{n+2} + 4x^n + q\right) + q^2 \frac{x^n - q^n}{x - q}$$

elde edilir.

- Eş. 4.35 ifadesinde $x = 1$ seçilirse,

$$\sum_{k=1}^{n} q^k £_{u_k}(q) = £_{u_{n+2}}(q) - (6 + q) + q^2 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

- Eş. 4.35 ifadesinde $x = 1$ ve $q \to 1^-$ seçilirse,

$$\sum_{k=1}^{n} £_{u_k} = £_{u_{n+2}} + n - 7$$

eşitliği sağlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde $q-$analiz, $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomları, Fibonacci, Lucas ve Leonardo sayıları ile ilgili çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, tezde kullanılacak temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, $q-$Leonardo Pisano polinomları, birinci ve ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının rekürans bağıntıları ve bu rekürans bağıntılarının özel durumları tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde ise $q-$Leonardo polinomları ile $q-$Fibonacci ve $q-$Lucas polinomları arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Bu ilişkileri kullanarak $q-$Leonardo Pisano polinomları, birinci ve ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının açık (explicit) formülleri elde edilmiştir. Negatif indisli $q-$Leonardo Pisano polinomları, birinci ve ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları tanımlanmıştır. Honsberger ve Cassini özdeşlikleri başta olmak üzere $q-$Leonardo Pisano polinomları ile bazı özdeşlik ve özellikler elde edilip bu özelliklerin özel durumlarına yer verilmiştir. $q-$Leonardo polinomlarının birbirleri ile arasındaki ilişkiler elde edilip bu ilişkilerin özel durumları incelenmiştir. Ayrıca $q-$Leonardo Pisano polinomları, birinci ve ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomlarının üreteç fonksiyonlarına yer verilmiştir. Son olarak $q-$Leonardo polinomları ile ilgili toplam formülleri elde edilerek bu toplam formüllerinin özel durumlarına yer verilmiştir.

x ve q değerlerinin özel durumları için literatürdeki bilinen polinom ve özdeşliklerin elde edilmesi, $q-$Leonardo Pisano polinomlarının literatürdeki polinomların bir genelleştirilmesi olduğunu göstermektedir. Birinci ve ikinci çeşit $q-$Leonardo Lucas polinomları rekürans bağıntıları elde edilip bu rekürans bağıntılarının özel durumları tanımlandığı için bu çalışma önem taşımaktadır.

KAYNAKLAR

1. Vajda, S. (1989). *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications* (First edition). New York: Halsted Press, 10–100.

2. Hoggatt Jr.,V. E. (1969). *The Fibonacci and Lucas numbers* (First edition). Boston: Houghton Mifflin, 1–70.

3. Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications* (First edition). New Jersey: A Wiley-Interscience Publication, 10–150.

4. Carlitz, L. (1964). A note on Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 2(1), 15–28.

5. Horadam, A.F. (1961). A Generalized Fibonacci sequence. *The American Mathematical Monthly*, 68, 455–459.

6. Klein, S.T. (1991). Combinatorial representation of generalized Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 29, 124–131.

7. Pond, J.C. (1968). Generalized Fibonacci summations. *The Fibonacci Quarterly*, 6, 97–108.

8. Miles, E.P. (1960). Generalized Fibonacci numbers and associated matrices. *The American Mathematical Monthly*, 67, 745–752.

9. Belbachir, H., Benmezai, A., Bouyakoub, A. (2023). The $q-$analogue of a specific property of second order linear recurrences. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5(3), 49–57.

10. Belbachir, H., Benmezai, A.(2014). On the expansion of Fibonacci and Lucas polynomials, revisited. *Les Annales RECITS*, 1, 1–10.

11. Catalan, E.C. (1883). Notes surla theorie des fractions continuess et sur certaines series. *Mémoires de l'Académie Royale de Belgique*, 45, 1–82.

12. Bicknell, M. (1973). Generalized Fibonacci polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 11(5), 457–465.

13. Cigler, J. (2003). $q-$Fibonacci polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 41, 31-40.

14. Carlitz, L. (1974). Fibonacci Notes-3: $q-$Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 12(4), 317–322.

15. Carlitz, L. (1975). Fibonacci notes 4: $q-$Fibonacci polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 13(2), 97–102.

16. Cigler, J. (2002). Einige $q-$analoga der Lucas-und Fibonacci-polynome. *Sitzungsber. Abt. II*, 211, 3–20.

17. Cigler, J. (2011). Some beautiful $q-$analogues of Fibonacci and Lucas polynomials. *arXiv preprint arXiv:1104.2699.*

18. Cigler, J. (2003). A new class of $q-$Fibonacci polynomials. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 10.

19. Belbachir, H. (2012). Expansion of Fibonacci and Lucas polynomials: An answer to Prodinger's question. *Journal of Integer Sequences*, 15, 1–4.

20. Belbachir, H., Benmezai, A. (2014). An alternative approach to Cigler's $q-$Lucas polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 226(1), 691–698.

21. Catarino, P., Borges, A. (2019). On Leonardo numbers. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 89(1), 75–86.

22. Catarino, P., Borges, A. (2020). A Note on incomplete Leonardo numbers. *Integers*, 20.

23. Shannon, A. G. (2019). A note on generalized Leonardo numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 25(3), 97–101.

24. Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V., Catarino, P. M. (2019). Relaçoes bidimensionais e identidades da sequencia de Leonardo. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemãtica*, 4(2), 156–173.

25. Alp, Y., Koçer, E. G. (2021). Some properties of Leonardo numbers. *Konuralp Journal of Mathematics*, 9(1), 183–189.

26. Alp, Y., Koçer, E. G. (2025). Bivariate Leonardo polynomials and Riordan arrays. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 31(2), 236—250.

27. Alp, Y., Koçer, E. G. (2021). Hybrid Leonardo numbers. *Chaos, Solitons and Fractals*, 150, 111–128.

28. Soykan, Y. (2023). Special cases of generalized Leonardo numbers: Modifed $p-$Leonardo, $p-$Leonardo-Lucas and $p-$Leonardo numbers. *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, 11(2), 317–342.

29. Tan, E., Leung, H. H. (2023). On Leonardo $p-$numbers, *Integers*, 23.

30. Çelemoğlu, Ç. (2024). Pell Leonardo numbers and their matrix representations. *Journal of New Results in Science*, 13(2), 101–108.

31. Karataş, A. (2022). On complex Leonardo numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 28(3), 458–465.

32. Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. *The American Mathematical Monthly*, 70(3), 289–291.

33. Shannon, A.G., Deveci, Ö. (2022). A note on generalized and extended Leonardo sequences. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 28(1), 109–114.

34. Kuhapatanakul, K., Ruankong, P. (2024). On generalized Leonardo $p-$numbers. *Journal of Integer Sequences*, 27.

35. Aydın, F. T. (2023). $q-$Leonardo bicomplex numbers. *Konuralp Journal of Mathematics*, 11(2), 176-183.

36. Kürüz, F., Dağdeviren, A., Catarino, P. (2021). On Leonardo Pisano hybrinomials. *Mathematics*, 9, 2923.

37. Shattuck, M. (2022). Combinatorial proofs of identities for the generalized Leonardo numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 28(4), 778–790.

38. Kac, V., Cheung, P. (2001). *Quantum Calculus*, New York: Springer, 5–20.

39. Andrews, G. E. (2004). Fibonacci numbers and the Rogers-Ramanujan identities. *The Fibonacci Quarterly*, 42, 3–19.

40. Esen, Sevgi. (2018). *$q-$Fibonacci ve $q-$Lucas Polinomları*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 37–45.



Gazili olmak ayrıcalıktır