
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

RIESZ UZAYLARINA SIRA YOĞUN GÖMMELER

Mücahit DEMİRTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2024

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mücahit DEMİRTÜRK

03/07/2024

RIESZ UZAYLARINA SIRA YOĞUN GÖMMELER
(Yüksek Lisans Tezi)

Mücahit DEMİRTÜRK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2024

ÖZET

Dedekind tamlamanın oluşumu, Richard Dedekind'in 1872'de reel sayıların inşasını oluşturmasına kadar izlenebilir. İlgili çalışmasında Dedekind, reel sayıları, uygun aritmetik işlemlerle donatılmış rasyonel sayıların Dedekind kesitlerinin kümesi olarak tanımlamıştır. 1937'de MacNeille, Dedekind kesitlerini herhangi bir kısmi sıralı küme içinde değerlendirilip, bunların bu küme içine gömülebilen bir Dedekind tam küme oluşturduğunu gösterdi ve bu kümeyi başlangıçtaki kümenin Dedekind tamlaması diye adlandırdı. Riesz uzaylarına sıra yoğun gömmelerin yardımı ile çalışılabilmesi pre-Riesz uzaylarının en büyük avantajıdır. Bu tezde, üç tür sıra yoğun gömme ele alınmıştır. 1) Arşimedyan yönlü sıralı vektör uzayının Dedekind tam Riesz uzayına sıra yoğun gömmesi, 2) Pre-Riesz uzayının Riesz uzayına sıra yoğun gömmesi, 3) Sıra birimli Arşimedyan sıralı vektör uzayının bir kompakt Hausdorff uzay üstünde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayına sıra yoğun gömmesi. X yönlü kısmî sıralı vektör uzayınının Dedekind kesitlerinin kısmî sıralı X^{δ} kümesi üstündeki $\oplus$, $\ominus$ ve $*$ işlemleri ele alındığında temel amaç, X Arşimedyan uzayının Dedekind tamlamasına gömülmesine benzer bir sonuç oluşturmaktır. X uzayı Dedekind tam olması gerekmeyen bir Riesz uzayına yoğun bir şekilde gömülmüş ve X'in Arşimedyan olması koşulu mümkün olduğunca zayıf bir koşula gevşetilmiştir. X'in bir Riesz uzayına yoğun bir şekilde gömülebilmesi için gerek ve yeter şart X'in pre-Riesz uzayı olmasıdır.

Bilim Kodu	:	20404
Anahtar Kelimeler	:	Riesz uzayı, sıralı vektör uzayı, Dedekind tamlama
Sayfa Adedi	:	89
Danışman	:	Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

ORDER DENSE EMBEDDINGS INTO RIESZ SPACES
(M. Sc. Thesis)

Mücahit DEMİRTÜRK

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
July 2024

ABSTRACT

The formation of the Dedekind completion can be traced back to Richard Dedekind's construction of real numbers in 1872. In his related work, he defined real numbers as Dedekind cuts of rational numbers equipped with appropriate arithmetic operations. In 1937, MacNeille showed that Dedekind cuts can be evaluated in any partially ordered set, and a Dedekind complete set can be constructed in which they can be embedded, and he called this set the Dedekind complement of the initial set. The biggest advantage of pre-Riesz spaces is that they can be studied with the help of order dense embeddings in Riesz spaces. In this thesis, three types of order dense embedding are discussed. 1) Order dense embedding of Archimedean directed ordered vector space into Dedekind complete Riesz space, 2) Order dense embedding of Pre-Riesz space into Riesz space, 3) Order dense embedding of an Archimedean ordered vector space with order unit into the space of continuous functions defined on a compact Hausdorff space. Consider the partially ordered X^{δ} set of Dedekind cuts of the directed partial ordered vector space X and the operations $\oplus$, $\ominus$ and $*$ on X^{δ}. The main goal is to produce a result similar to embedding the Archimedean space X into its Dedekind completion. The space X is densely embedded in a Riesz space that is not necessarily Dedekind complete, and the condition for X to be Archimedean is relaxed to as weak a condition as possible. For X to be densely embedded in a Riesz space, a necessary and sufficient condition is that X is a pre-Riesz space.

Science Code	:	20404
Keywords	:	Riesz space, ordered vector space, Dedekind completion
Number of pages	:	89
Supervisor	:	Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca her zaman yanımda olan, daima bana yol gösteren, desteğini ve emeğini esirgemeyen, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum değerli hocam sayın Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca sevgi ve desteklerini benden esirgemeyen, haklarını asla ödeyemeyeceğim sevgili annem Yeter DEMİRTÜRK, babam Hasan DEMİRTÜRK ve kardeşlerime teşekkür ederim. Bu süreç boyunca bana destek olan tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Sıralı Vektör Uzayları ve Koniler 3

2.1.1. Riesz uzayları 10

2.1.2. Riesz ayrışım özelliği 15

2.1.3. Sıra yakınsama 18

2.2. Sıralı Vektör Uzaylarında Operatörler 20

2.2.1. Sıra sınırlı ve düzenli operatörler 20

2.2.2. Riesz Kantorovich formülleri 22

3. GÖMMELER, ÖRTÜLER VE TAMLAMALAR 27

3.1. Dedekind Tamlama 27

3.1.1. Dedekind kesitler, toplamları ve skalerle çarpımları 28

3.1.2. Arşimedyan uzaylarda Dedekind tamlama 39

3.2. Pre-Riesz Uzayları 49

3.3. Riesz Uzay Örtüsü ve Riesz Tamlama 60

3.4. Fonksiyonel Temsil 71

4. SONUÇ VE ÖNERİLER 85

KAYNAKLAR 87

ÖZGEÇMİŞ 89

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
K	Bir vektör uzay içinde bir koni
(X,K)	K konisi ile X sıralı vektör uzayı
X^{δ}	X sıralı kümesinin Dedekind kesitlerinin kümesi
A^{u}	A kümesinin üst sınırları kümesi
A^{l}	A kümesinin alt sınırları kümesi
A^{ul}	A kümesinin üst sınırları kümesinin alt sınırları kümesi
$x \vee y$	x ve y elemanlarının supremumu
$x \wedge y$	x ve y elemanlarının infimumu
$\sup A$	A kümesinin supremumu
$\inf A$	A kümesinin infimumu
x^{+}	x elemanının pozitif kısmı
x^{-}	x elemanının negatif kısmı
$\lvert x \rvert$	x elemanının modülü
$x_\lambda \uparrow x$	(x_λ) artan ağ ve $\sup_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x$
$x_\lambda \downarrow x$	(x_λ) azalan ağ ve $\inf_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x$
$x_\lambda \xrightarrow{o} x$	(x_λ) ağı x elemanına sıra yakınsar
$A+B$	$\{a+b : a\in A, b\in B\}$ kümesi
$A\oplus B$	$(A+B)^{\mathrm{ul}}$ kümesi
$-A$	$\{-a : a\in A\}$ kümesi
$\ominus A$	$-A^{\mathrm{u}}$ kümesi
$\alpha * A$	$\alpha>0$ için αA, $\alpha=0$ için $\{0\}^{\mathrm{l}}$, $\alpha<0$ için αA^{u} kümesi
$\lVert\cdot\rVert_u$	X üstünde bir yarınorm
$(X,K,\lVert\cdot\rVert_u)$	K konisi ve $\lVert\cdot\rVert_u$ yarınormu ile X sıra birimli uzayı

1. GİRİŞ

Riesz uzayları ile ilgili çalışmaların başlangıcı, F. Riesz'in 1920'li yılların sonuna doğru yayınlanan makalesiyle ele alınır [1]. Daha sonra, başta L. V. Kantorovich'in 1930'lu yıllardaki Riesz ayrışım özellikleri üzerine çalışmalarıyla bu konu daha derinlemesine ele alınmıştır [2]. Bu çalışmalar sonucu Riesz uzaylarına olan ilgi artmış ve B. Z. Vulikh , A. Nagel ve W. Rudin gibi matematikçiler Riesz uzayları üzerindeki çalışmaların gelişmesinde katkıda bulunmuşlardır [3–5].

Bu gelişmelerden birisi de her X yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayının bir Dedekind tam Riesz uzayına sıra yoğun bir alt uzay olarak gömülebilmesidir.

Ayrıca, bir çok amaç için Dedekind tam olması gerekmeyen Riesz uzaylarına da gömme yapılabileceği ve bir Riesz uzayını sıra yoğun alt uzay olarak gömmek için X'in Arşimedyan olması koşulunun Pre-Riesz adı verilen bir özelliğe genişletilebildiği ortaya çıkmıştır. Pre-Riesz uzayı kavramı M. van Haandel tarafından verilmiştir [6].

Riesz tamlama adı verilen en küçük bir Riesz uzayı örtüsü vardır. Diğer yandan, noktasal sıralamanın kullanışlılığından dolayı sürekli fonksiyonların bir Riesz uzayına gömülmesi de oldukça uygundur. Kadison'un klasik fonksiyonel temsiliyle bir sıra yoğun gömme ve dolayısıyla bir Riesz uzayı örtüsü elde edilir [7].

Bu çalışma iki ana bölümden oluşmaktadır.

Bu bölümlerin ilkinde; çalışmamızda faydası olacak olan sıralı vektör uzayı, koni, Arşimedyanlık, Riesz uzayı ve özellikleri, Dedekind tamlık, Riesz ayrışım özelliği, sıra yakınsama, sıra sürekli operatörler, Riesz Kantorovich formülleri gibi kavramlar tanıtılmış ve ilgili teorem,önerme ve örneklere yer verilmiştir.

İkinci bölümde; üç tür sıra yoğun gömme ele alınmıştır. Bu sıra yoğun gömme türleri sırasıyla şunlardır:

1) (X,K) yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayı ise, bir X^δ Dedekind tam Riesz uzayı ve $F : X \to X^\delta$ birebir dönüşümü için $F(X)$ görüntüsü X^δ içinde sıra yoğundur.

2) (X,K) pre-Riesz uzayı ise, bir Y Riesz uzayı ve bir $G:X\to Y$ birebir dönüşümü için $G(X)$ görüntüsü Y içinde sıra yoğundur.

3) (X,K) sıra birimli Arşimedyan sıralı vektör uzayı ise, bir Ω kompakt Hausdorff uzayı ve bir $H:X\to C(\Omega)$ birebir dönüşümü için $H(X)$ görüntüsü $C(\Omega)$ içinde sıra yoğundur.

Ayrıca bu üç tür gömme ele alınırken; Dedekind kesit, Dedekind tamlama, pre-Riesz uzayı, Riesz uzayı örtüsü, fonksiyonel temsil gibi kavramlar ve özellikleri verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, sıralı vektör uzayları ve Riesz uzaylarına giriş sağlar, notasyon ve termonolojiyi düzenler. Riesz uzayları teorisi için esas olarak [8–11] kaynaklarından faydalanılmıştır. Kısmi sıralı vektör uzayları için ayrıca [3, 4] kaynaklarına bakılabilir. Burada koni, sıra yakınsama, dual koni ve pozitif operatörler gibi kavramları ele alıp düzenli operatörlerin uzayı araştırılacak ve klasik Riesz-Kantorovich formüllerinin bir ispatı sunulacaktır. İçi boş olmayan koniler göz önüne alınarak normlar ve sıra yapı arasındaki ilişkiler gösterilecektir. Öncelikle merkezi bir kavram olan sıra yoğunluğu tanıtılıp birkaç önemli örnek verilecektir.

Bu çalışmada aksi belirtilmedikçe vektör uzayları reel sayılar cismi $\mathbb{R}$ üzerinde alınacaktır. X reel vektör uzayı olsun. $A, B \subseteq X$ için standart gösterim ifadeleri olarak $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$ toplamı ve $\alpha A = \{\alpha a : a \in A, \alpha \in \mathbb{R}\}$ skaler çarpımı ele alınıp $-A = (-1)A$ ve $A-B = A+(-B)$ kümeleri tanımlanır.

2.1. Sıralı Vektör Uzayları ve Koniler

Çalışma boyunca, vektör uzayı üstündeki lineer işlemlere uygun şekilde bağlanan sıralama bağıntısı göz önüne alınmıştır.

2.1.1. Tanım

X bir vektör uzayı olsun.

(a) X üstünde sıralama bağıntısı $\leq$ olmak üzere, her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha \in [0, \infty)$ için $x \leq y$ iken $x+z \leq y+z$ ve $\alpha x \leq \alpha y$ oluyorsa bu sıralamaya vektör uzay sıralaması denir. Herhangi iki $x, y \in X$ için $x \leq y$ ve $x \neq y$ sağlanıyorsa $x < y$ yazılır ve $[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$ kümesi bir sıra aralık diye adlandırılır. Herhangi bir $A \subseteq X$ kümesinin üst sınırları kümesi $A^{\mathrm{u}} = \{u \in X : \text{her } x \in A \text{ için } x \leq u\}$ ile ve alt sınırları kümesi $A^{\mathrm{l}} = \{l \in X : \text{her } x \in A \text{ için } l \leq x\}$ ile gösterilir. Tez boyunca $(A^{\mathrm{u}})^{\mathrm{l}}$ kümesi yerine kısaca A^{ul} yazılması gibi kısaltmalar kullanılacaktır. $A \subseteq [l, u]$ olacak biçimde $l, u \in X$ varsa A kümesi sıra sınırlı, her $x, y \in A; x < y$ için $[x, y] \subseteq A$ oluyorsa A kümesi dolu küme diye adlandırılır.

(b) X içinde boş olmayan bir küme K olmak üzere her $x, y \in K$ ve her $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ için $\alpha x + \beta y \in K$ oluyorsa K'ya X içinde kama; ek olarak

(i) $K \cap (-K) = \{0\}$ sağlanıyorsa K'ya X içinde koni,
(ii) $X = K - K$ oluyorsa K'ya üreten kama denir.

Bir $A \subseteq X$ kümesi için A'yı içeren en küçük kama

$$\text{pozarf}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i : n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, n\}, \alpha_i \in [0, \infty), a_i \in A \right\}$$

kümesi olur. Vektör uzayından alınan bir koni yardımıyla uzay üstünde vektör uzay sıralaması tanımlanabildiği gibi, vektör uzay sıralaması yardımıyla da koni elde edilebilir.

2.1.2. Önerme

X bir vektör uzayı olsun.

(a) X içinde bir koni K olmak üzere, X üstünde

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanan $\leq$ sıralama bağıntısı bir vektör uzay sıralamasıdır.

(b) X üstünde bir vektör uzay sıralaması $\leq$ olmak üzere,

$$K_0 = \{x \in X : 0 \leq x\} \tag{2.2}$$

biçiminde tanımlanan küme X içinde bir konidir.

(c) Eş. 2.1'de verilen sıralama $\leq$ ve Eş. 2.2'de verilen koni K_0 ise X içindeki herhangi bir K konisi için $K = K_0$ sağlanır.

Not

X vektör uzayında bir K kaması varsa Eş. 2.1'de verilen $\leq$ bağıntısı yansımalı ve geçişlidir. Bu bağıntı Tanım 2.1.1'in ilk kısmındaki özellikleri sağlar. X üstünde Tanım 2.1.1'in ilk kısmındaki özellikleri sağlayan yansımalı ve geçişli bağıntı $\leq$ olduğunda Eş. 2.2'de verilen K_0 kümesi X içinde bir kamadır.

2.1.3. Tanım

X vektör uzayında bir K konisi verildiğinde, Eş. 2.1'de verilen $\leq$ vektör uzay sıralaması ile X donatılır ve (X,K) ikilisi (kısmi) sıralı vektör uzayı olarak adlandırılır. K konisi bilindiğinde çoğunlukla (X,K) yerine X yazılır.

Sonraki önerme,kısmi sıralı vektör uzayları ile basit yapılar sağlar.

2.1.4. Önerme

(a) (X,K) sıralı vektör uzayı ve Y, X'in bir alt uzayı ise, $(Y,Y\cap K)$ sıralı vektör uzayıdır. $Y\cap K$ konisi ile belirlenen Y üstündeki sıralama indergenmiş sıralama diye adlandırılır.

(b) I boş olmayan bir küme olsun ve her $i\in I$ için (X_i,K_i) sıralı vektör uzayı ise, $(\prod_{i\in I}X_i,\prod_{i\in I}K_i)$ kartezyen çarpımı sıralı vektör uzayıdır.

Örnek

(a) Her X vektör uzayı için $(X,\{0\})$ bir sıralı vektör uzayıdır. $\{0\}$ konisi ile belirlenen sıralamaya X üstünde aşikâr sıralama denir. Bu sıralama X içindeki her bir vektörü sadece kendisiyle karşılaştırır.

(b) $[0,\infty)$ konisi ile reel sayıların $\mathbb{R}$ uzayı sıralı vektör uzayıdır. Bu koni ile belirlenen sıralama herkes tarafından bilinen "küçük eşit" sıralamasıdır ve bu sıralama $\mathbb{R}$ üstünde standart sıralama diye adlandırılır.

(c) Herhangi bir boş olmayan Ω kümesi üstünde tanımlı ve reel değerli fonksiyonların $\mathscr{F}$ kümesi fonksiyonlarda toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayıdır. $K = \{f : \Omega \to \mathbb{R}$;her $t \in \Omega$ için $0 \leq f(t)\}$ konisi ile $\mathscr{F}$ sıralı vektör uzayıdır. K konisi ile belirlenen $\mathscr{F}$ üstündeki sıralama

$f \leq g \Leftrightarrow$ her $t \in \Omega$ için $f(t) \leq g(t)$

ile bellidir ve bu sıralama $\mathscr{F}$ üstünde noktasal sıralama veya standart sıralama diye adlandırılır. $\mathscr{F} = \mathbb{R}^{\Omega} = \prod_{t\in\Omega} \mathbb{R}$ olduğundan bu örnek Önerme 2.1.4 (b)'nin özel durumu olarak görülebilir. Ω'nın farklı seçimleriyle $\mathscr{F}$'nin de özel durumlarını elde edebiliriz. Mesela, $\Omega = \{1,\ldots,n\}$ alınırsa, $\mathbb{R}^{\{1,\ldots,n\}} = \mathbb{R}^n$ uzayı

$K = \{(a_1,\ldots,a_n) \mid$ her $i = 1,\ldots,n$ için $0 \leq a_i\}$

konisi ile sıralı vektör uzayıdır. Ayrıca, $\Omega = \mathbb{N}$ alınırsa $\mathscr{F} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dizi uzayının $p > 0$ iken $\ell_p = \{(a_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}$ ve $c_{00} = \{(a_n) \mid \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}$ sonlu küme$\}$ alt uzayları indirgenmiş sıralamayla sıralı vektör uzaylarıdır.

2.1.5. Tanım

(X,K) sıralı vektör uzayı olsun.

(a) Bir $A \subseteq X$ için $x,y \in A$ iken $x \leq z$ ve $y \leq z$ olacak biçimde $z \in A$ varsa, A kümesine (yukarı) yönlü küme,

(b) Bir $0 < u$ ve her $x \in X$ için $x \in [-\alpha u, \alpha u]$ olacak biçimde $\alpha \in (0,\infty)$ varsa u elemanına sıra birim denir.

X sıralı vektör uzayının herhangi bir yukarı yönlü Y alt uzayı aynı zamanda aşağı yönlüdür. Yani Y Tanım 2.1.5 (a)'yı sağlamakla birlikte, $x,y \in Y$ iken $w \leq x$ ve $w \leq y$ olacak şekilde $w \in Y$ de mevcuttur. Bir $0 < u$ elemanının sıra birimi olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $x \leq \alpha u$ olacak biçimde bir $\alpha \in (0,\infty)$ sayısının var olmasıdır.

Yönlü sıralı vektör uzayları için aşağıdaki önermeler referans verilmeden sıklıkla kullanılır.

2.1.6. Önerme

(X,K) sıralı vektör uzayı olsun.

(a) K konisinin üreten olması için gerek ve yeter şart X'in yönlü olmasıdır.

(b) X içinde bir $0 < u$ sıra birimi varsa K üretendir.

İspat

(a) K konisi üreten olsun. Herhangi iki $x,y \in X$ için $x = x_1 - x_2$ ve $y = y_1 - y_2$ olacak biçimde $x_1,x_2,y_1,y_2 \in K$ var, dolayısıyla $0 \leq x_1,y_1$ ve $-x_2,-y_2 \leq 0$ olduğundan $z = x_1 + y_1$ alınırsa, $x \leq x_1 \leq z$ ve $y \leq y_1 \leq z$ elde edilir.

X yönlü olsun. Herhangi bir $x \in X$ için tanımda özel olarak $y = -x \in X$ alınırsa, $x \leq z$ ve $-x \leq z$ olacak biçimde $z \in X$ var olduğundan $z - x, z + x \in K$ sağlanır. K'nın kama olmasından

$$x = \frac{1}{2}(z+x) - \frac{1}{2}(z-x) \in K - K$$

elde edilir.

(b)'nin ispatı için $0 < u$ sıra birim olarak alınırsa, her $x \in X$ için $\alpha u - x \in K$ olacak biçimde bir $\alpha \in (0,\infty)$ vardır. Diğer yandan $\alpha u \in K$ olduğundan $x = \alpha u - (\alpha u - x)$, yani $X = K - K$ olur.

Sayfa 5'deki örneğimizde (a)'da $X \neq \{0\}$ alınırsa, X yönlü olmaz, ancak (c)'de standart sıralamayla $\mathscr{F}$ yönlüdür.

Örnek

(a) Ω boş olmayan bir küme olsun ve $\mathbb{R}^{\Omega}$'nın tüm sınırlı fonksiyonlarının alt uzayı $B(\Omega)$ olsun. $B(\Omega)$'nın her bir X alt uzayı $\mathbf{1}:\Omega\to\mathbb{R};\ \mathbf{1}(t)=1$ sabit fonksiyonunu içerdiğinden bu sabit X içinde bir sıra birimidir. Özel olarak $B(\mathbb{N})=\ell^{\infty}$ için $\mathbf{1}=(1,1,\ldots)$ sabit dizisi bir sıra birimdir.

(b) Boş olmayan bir kompakt Ω Hausdorff uzayı için, Ω üstünde tanımlı tüm reel sürekli fonksiyonların $C(\Omega)$ vektör uzayı noktasal sıralama ile donatılabilir. Her $t\in\Omega$ ve $0<f(t)$ şartını sağlayan her $f\in C(\Omega)$, $C(\Omega)$ içinde sıra birimidir.

(c) l^{p} $(0<p<\infty)$ ve c_{00} uzaylarının sıra birimi yoktur.

2.1.7. Tanım

Herhangi iki $x,y\in X$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $nx\leq y$ iken $x\leq 0$ oluyorsa, (X,K) sıralı vektör uzayına Arşimedyan uzay denir.

2.1.8. Önerme

(X,K) sıralı vektör uzayı olsun ve Y, X'in alt uzayı olsun. X Arşimedyan ise $(Y,Y\cap K)$ uzayı da Arşimedyandır.

Örnek

Sayfa 5'de verilen örneğimizdeki standart sıralama ile $\mathbb{R}^{\Omega}$ uzayı Arşimedyandır. Ayrıca, $\mathbb{R}^{n}$, $B(\Omega)$ ve $C(\Omega)$ uzayları da Arşimedyandır.

Örnek

$2 \leq n$ iken $\mathbb{R}^n$ üstünde sözlüksel sıralama, her $u = (u_1, \ldots, u_n)$ ve $v = (v_1, \ldots, v_n)$ için

$$u \leq v \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} u_1 < v_1 \text{ ya da} \\ \text{bir } k = 2, \ldots n \text{ ve her } j = 1, \ldots, k-1 \text{ için } u_j = v_j \text{ ve } u_k < v_k \text{ ya da} \\ u = v \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Bu sıralamayla $\mathbb{R}^n$ uzayı Arşimedyan değildir. Gerçekten, her $m \in \mathbb{N}$ için $m(0,1,0,\ldots,0) \leq (1,0,0,\ldots,0)$ olmasına rağmen $(0,1,0,\ldots,0) \not\leq (0,0,0,\ldots,0)$ olur.

Şimdi sıralı vektör uzaylarının bölümlerini ele alalım. (X,K) sıralı bir vektör uzayının bir alt uzayı Y olsun. Her $x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 \sim x_2 \;\;\Leftrightarrow\;\; x_1 - x_2 \in Y$$

ile tanımlanan $\sim$ bağıntısı X üstünde denklik bağıntısıdır. Herhangi bir $x \in X$ elemanının denklik sınıfı $x+Y = \{x+y : y \in Y\}$ ile, denklik sınıflarının kümesi $\hat{X} = X/Y$ ile gösterilir. Her $x_1, x_2 \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$(x_1+Y)+(x_2+Y) = (x_1+x_2)+Y \quad \text{ve} \quad \alpha(x_1+Y) = \alpha x_1 + Y$$

ile tanımlanan işlemlerle $\mathbb{R}$ üzerinde $\hat{X}$ vektör uzayıdır ve bölüm uzayı diye adlandırılır. Bölüm uzayının sıfırı Y alt uzayıdır. $Y = X$ ise X/X bölüm uzayının tek elemanı X'dir. $Y = \{0\}$ ise $X/\{0\}$ bölüm uzayı X'in sadece tek nokta kümelerinden oluşur. Bölüm dönüşümü $q : X \to \hat{X}; q(x) = x+Y$ lineer ve örtendir. $\hat{K} = \{x+Y : x \in K\}$ kümesi $\hat{X}$ içinde bir kamadır ve $q(K) = \hat{K}$ sağlanır. Ek olarak Y doluysa, $\hat{K}$ kaması $\hat{X}$ içinde konidir.

2.1.9. Önerme

(X,K) sıralı bir vektör uzayının bir dolu alt uzayı Y ise $(\hat{X},\hat{K})$ bölüm uzayı sıralı vektör uzayıdır. K üreten ise $\hat{K}$ da üretendir.

İspat

$x+Y \in \hat{K} \cap (-\hat{K})$ alınırsa $x \in K$ ve $-x \in K$ olur. K koni olduğundan $x = 0$ ve böylece $\hat{K}$'nın sıfırı Y alt uzayıdır. Y dolu olduğundan $\hat{K}$ konidir.

K üreten iken her $x \in X$ için $x = x_1 - x_2$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in K$ var olduğundan $x+Y = (x_1 - x_2)+Y = (x_1+Y)-(x_2+Y)$, yani $\hat{X} = \hat{K} - \hat{K}$ sağlanır.

Önerme 2.1.9'daki varsayımlar göz önüne alındığında $\hat{K}$'ya bölüm konisi ve $\hat{X}$ üstünde

$$x+Y \leq z+Y \;\Leftrightarrow\; z-x \in K$$

biçiminde tanımlanan sıralamaya bölüm sıralaması denir.

2.1.1. Riesz uzayları

Her $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin $x \vee y$ ile gösterilen en küçük üst sınırı (supremum) veya $x \wedge y$ ile gösterilen en büyük alt sınırı (infimum) varsa, (X, K) sıralı vektör uzayına Riesz uzayı veya vektör latis denir. Bu kesimde [8–10, 12] kaynaklarından yararlanılmış ve Riesz uzaylarının temel bazı özellikleri genellikle ispatsız verilmiştir.

2.1.10. Önerme

(X, K) sıralı vektör uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir ([12], Lemma 1.15).

(a) Her $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu vardır.

(b) (X, K) Riesz uzayıdır.

(c) X içinde boş olmayan her sonlu alt kümenin supremumu ve infimumu vardır.

Her X Riesz uzayında $\wedge$ ve $\vee$ latis işlemleri dağılma özelliğine sahiptir; yani her $x, y \in X$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ve $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ sağlanır ([9], Corollary 12.3).

Riesz uzaylarında, reel sayılardan aşinâ olduğumuz birçok formül geçerlidir. Bu tür formüllerin tipik olarak nasıl ispatlandığını göstermek için bir numune olarak, her $x, y \in X$ için

$$x + y = x \wedge y + x \vee y \tag{2.3}$$

eşitliğinin ispatını ayrıntılı olarak verelim: Gerçekten, $y = x + y - x \leq x + y - x \wedge y$ ve benzer biçimde $x \leq x + y - x \wedge y$ olduğundan $x + y - x \wedge y \in X$, $\{x, y\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. z, $\{x, y\}$'nin başka bir üst sınırıysa $x + y - z \leq x$ ve $x + y - z \leq y$, yani $x + y - z \leq x \wedge y$ sağlanır. Buradan $x + y - x \wedge y \leq z$ olur. Böylece $\{x, y\}$ kümesinin en küçük üst sınırının $x + y - x \wedge y \in X$ olduğu sonucuna varılır.

Tez boyunca Önerme 2.1.11 formülleri kaynak gösterilmeden kullanılacaktır. (a), (b), (c) ifadeleri aşikârdır. (d)'de latis işlemlerinin dağılma özelliği genişletilmiştir.

2.1.11. Önerme

(X, K) sıralı vektör uzayının A alt kümesi için $\sup A$ mevcut olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur ([8], Theorem 1.8).

(a) $-A = \{-y : y \in A\}$ kümesinin infimumu vardır ve $\inf(-A) = -\sup A$ sağlanır.

(b) Her $x \in X$ için $x + A = \{x + y : y \in A\}$ kümesinin supremumu vardır ve $\sup(x + A) = x + \sup A$ sağlanır.

(c) Her $\alpha \in \mathbb{R}; 0 \leq \alpha$ için $\alpha A = \{\alpha y : y \in A\}$ kümesinin supremumu vardır ve $\sup(\alpha A) = \alpha \sup A$ sağlanır.

(d) (X, K) Riesz uzayı ise, her $x \in X$ için $x \wedge A = \{x \wedge y : y \in A\}$ kümesinin supremumu vardır ve $\sup(x \wedge A) = x \wedge \sup A$ sağlanır. Benzer olarak $\inf A$ mevcutsa, her $x \in X$ için $x \vee A = \{x \vee y : y \in A\}$ kümesinin infimumu vardır ve $\inf(x \vee A) = x \vee \inf A$ sağlanır.

Alışılageldiği gibi, X Riesz uzayından alınan herhangi bir x elemanının pozitif kısım işlemi $x^+ = x \vee 0$, negatif kısım işlemi $x^- = (-x) \vee 0$ ve modülü $|x| = x \vee (-x)$ biçiminde tanımlanır.

(X,K) Riesz uzayı ve $x,y,z \in X$ olmak üzere

(a) $|x| = x^+ + x^-$

(b) $x^+ \wedge x^- = 0$

(c) $x = x^+ - x^-$

(d) $||x|-|y|| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$

(e) $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x+y|-|x-y|)$

(f) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x+y|+|x-y|)$

(g) $|x \vee y - y \vee z| \leq |x-z|$

(h) $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x-y|$

(ı) $y,z \in K$ ve $x = y-z$ ise $x^+ \leq y$ ve $x^- \leq z^-$

(i) $y,z \in K$, $x = y-z$ ve $y \wedge z = 0$ ise $y = x^+$ ve $z = x^-$

(j) $x,y,z \in K$ ise $x \wedge (y+z) \leq x \wedge y + x \wedge z$

sağlanır. Ayrıca latis işlemleri ile modül, pozitif kısım, negatif kısım işlemleri birbirleri cinsinden

(k) $x \wedge y = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$

(l) $x \vee y = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$

(m) $|x-y| = x \vee y - x \wedge y$

(n) $(x-y)^+ = (-y+x) \vee (-y+y) = -y + (x \vee y)$

(o) $(x-y)^- = (-x+y)\vee(-x+x) = -x+(y\vee x)$

biçimlerinde ifade edilebilir ([8], Theorem 1.3, 1.5, 1.7).

Aşağıdaki kavram tez boyunca sıklıkla kullanılacaktır.

X Riesz uzayının bir Y alt uzayı için $x,y\in Y$ iken $x\vee y\in Y$ oluyorsa bu alt uzaya X'in Riesz alt uzayı denir. Riesz uzayından indirgenen sıra ile Riesz alt uzayı da bir Riesz uzayıdır.

Örnek

Sayfa 5'de verilen $\mathbb{R}^{\Omega}$ sıralı vektör uzayı, herhangi iki $f,g\in\mathbb{R}^{\Omega}$ için $t\in\Omega$ iken $(f\vee g)(t)=\max\{f(t),g(t)\}$ noktasal latis işlemiyle Riesz uzayıdır. Diğer latis işlemleri de benzer biçimde noktasal olur. Özel olarak $\mathbb{R}^n$ Riesz uzayıdır. Sayfa 8'de verilen $B(\Omega)$ uzayı, $\mathbb{R}^{\Omega}$'nın Riesz alt uzayıdır ve bu sebeple Riesz uzayıdır. Benzer olarak $C(\Omega)$, ℓ^p $(0<p\leq\infty)$ ve c_{00} uzayları da Riesz uzayıdır.

Örnek

$[0,1]$ üstünde türevlenebilen ve türevi sürekli olan fonksiyonların $C^1[0,1]$ vektör uzayı noktasal sıralama ile sıralı vektör uzayı olmasına rağmen Riesz uzayı değildir. Bu iddiamızı olmayana ergi yöntemiyle gösterelim. Yani, $C^1[0,1]$ uzayının Riesz uzayı olduğunu kabul edelim. Her $t\in[0,1]$ için $f(t)=t$ ve $g(t)=1-t$ ile tanımlanan f ve g fonksiyonları $C^1[0,1]$ içindedir. $h=f\vee g\in C[0,1]$ fonksiyonu için $t\in[0,1/2]$ iken $h(t)=1-t$ ve $t\in[1/2,1]$ iken $h(t)=t$ sağlanır. h fonksiyonu $1/2$ noktasında sürekli olmadığından $C^1[0,1]$ içinde olamaz. Bu durum supremum işleminin kalıtsallığı ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır, yani $C^1[0,1]$ noktasal sıralamayla Riesz uzayı değildir.

Aynı şekilde, her $k\in\mathbb{N}$ için tüm k-kez sürekli türevlenebilir fonksiyonların $C^k[0,1]$ uzayının da Riesz uzayı olmadığı gösterilebilir.

İnfimum ile Arşimedyan olma özelliği aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

2.1.12. Önerme

Her $x \in K$ için $\inf\left\{\frac{1}{n}x : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$ oluyorsa (X,K) sıralı vektör uzayı Arşimedyan uzayıdır.

X Riesz uzayının Arşimedyan uzayı olması için gerek ve yeter şart herhangi iki $x,y \in X$ için $n \in \mathbb{N}$ iken $0 \leq nx \leq y$ ise $x = 0$ olmasıdır.

Şimdi Riesz uzaylarında önemli bir kavram olan tamlığın tanımını vereceğiz.

2.1.13. Tanım

Boş olmayan her üstten sınırlı kümenin bir supremumu varsa, (X,K) Riesz uzayına Dedekind tamdır denir.

2.1.14. Önerme

(X,K) Riesz uzayı Dedekind tam ise Arşimedyandır.

İspat

(X,K) Dedekind tam Riesz uzayı ise, herhangi bir $x \in K$ için $u = \inf\left\{\frac{1}{n}x : n \in \mathbb{N}\right\}$ alınırsa, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $2u = u + u \leq \frac{1}{2n}x + \frac{1}{2n}x = \frac{1}{n}x$ olduğundan $2u \leq u$, yani $u = 0$ olur.

Buradan Dedekind tam Riesz uzaylarının her alt uzayının Arşimedyan sıralı vektör uzayı olduğu sonucu ortaya çıkar. Tersine, her yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayının bir Dedekind tam Riesz uzayının alt uzayı olduğu Teorem 3.1.16'da gösterilecektir.

Örnek

$\mathbb{R}^{\Omega}$ ve $B(\Omega)$ Riesz uzayları Dedekind tamdır. $C[0,1]$ Riesz uzayı Dedekind tam değildir.

Gerçekten,

$$\left\{ f \in C[0,1] : t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ iken } f(t) = 0 \text{ ve } t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \text{ iken } f(t) \leq 1 \right\}$$

kümesi üstten **1** ile sınırlıdır. Ancak, bu kümenin $C[0,1]$ içinde supremumu yoktur.

2.1.2. Riesz ayrışım özelliği

Herhangi bir (X,K) sıralı vektör uzayında her $x_1, x_2 \in K$ için

$$[0,x_1] + [0,x_2] \subseteq [0,x_1+x_2]$$

sağlanır. Ancak, kapsamanın ters yönü genel olarak doğru olmadığından aşağıdaki tanım verilir.

2.1.15. Tanım

(X,K) sıralı vektör uzayında herhangi üç $x, y_1, y_2 \in K$ için $x \leq y_1 + y_2$ iken $x = x_1 + x_2$ ve $x_1 \leq y_1,\ x_2 \leq y_2$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in K$ varsa, (X,K) sıralı vektör uzayı Riesz ayrışım özelliğine sahiptir denir.

2.1.16. Önerme

Herhangi bir (X,K) sıralı vektör uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) X Riesz ayrışım özelliğine sahiptir.

(b) Her $x_1, x_2 \in K$ için$[0,x_1] + [0,x_2] = [0,x_1+x_2]$ sağlanır.

(c) Her $x, y_1, \ldots, y_n \in K$ için $x \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$ ise, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ ve $i = 1, \ldots, n$ iken $x_i \leq y_i$ olacak biçimde $x_1, \ldots, x_n \in K$ vardır.

(d) $x_i \leq y_j \ \ (i,j \in \{1,2\})$ eşitsizliklerini sağlayan her dört $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ için $x_i \leq z \leq y_j \ \ (i,j \in \{1,2\})$ olacak biçimde bir $z \in X$ elemanı vardır.

(e) Her $m,n \in \mathbb{N}$ ve $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n \in X$ için $i=1,\ldots,m$ ve $j=1,\ldots,n$ iken $x_i \leq y_j$ eşitsizlikleri sağlanyorsa, her i ve j için $x_i \leq z \leq y_j$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır.

(f) Herhangi iki $m,n \in \mathbb{N}$ için $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n \in K$ iken $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j$ oluyorsa, her $i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$ için $x_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij}$ ve $y_j = \sum_{i=1}^{m} z_{ij}$ olacak biçimde $z_{ij} \in K$ vardır.

2.1.17. Önerme

Her Riesz uzayı Riesz ayrışım özelliğine sahiptir.

İspat

Herhangi bir (X,K) Riesz uzayında $x,y_1,y_2 \in K$ için $x \leq y_1+y_2$ iken $x_1 = x \wedge y_1,\ x_2 = x-x_1$ alınırsa $x = x_1+x_2$ ve $x_1 \leq y_1,\ x_2 \leq y_2$ sağlanır.

Riesz ayrışım özelliğine sahip herhangi bir sıralı vektör uzayı, bir Riesz uzayının genelleştirilmesi olarak görülebilir. Riesz uzayı olmayan, ancak Riesz ayrışım özelliğine sahip olan bir sıralı vektör uzayı örneği verelim.

Örnek

$C[-1,1]$ uzayından indirgenmiş sıralamayla $X = \{f \in C[-1,1] : f(-1)+f(1) = f(0)\}$ alt uzayını ele alalım. Her $t \in [-1,1]$ için $f(t) = t$ ve $g(t) = -t$ ile tanımlanan f ve g fonksiyonları için $f \vee g \notin X$ olduğundan X bir Riesz uzayı değildir. Ancak X sıralı vektör uzayı Riesz ayrışım özelliğine sahiptir. Bunun için Önerme 2.1.16'da (d) şartının sağlandığını gösterelim. Herhangi dört $f_1,f_2,g_1,g_2 \in X$ için $i,j \in \{1,2\}$ iken $f_i \leq g_j$ eşitsizlikleri geçerli olsun. $[-1,0]$ ve $[0,1]$ üstünde lineer olan

$$\iota(-1) = \max\{f_1(-1), f_2(-1)\},\ \iota(1) = \max\{f_1(1), f_2(1)\},\ \iota(0) = \iota(-1)+\iota(1)$$

eşitliklerini sağlayan $\iota \in X$ fonksiyonu ele alındığında, her $t \in [-1,1]$ için $h(t) = \min\{g_1(t), g_2(t), \max\{f_1(t), f_2(t), \iota(t)\}\}$ ile tanımlanan $h \in C[-1,1]$ fonksiyonu

için $i,j \in \{1,2\}$ iken $f_i \leq h \leq g_j$ sağlanır. Bundan sonra $h \in X$ olduğunu, yani $h(0) = h(1)+h(-1)$ olduğunu gösterelim.

$$h(1) = \min\{g_1(1), g_2(1), \max\{f_1(1), f_2(1), \iota(1)\}\} = \min\{g_1(1), g_2(1), \iota(1)\} = \iota(1)$$

ve benzer olarak $h(-1) = \iota(-1)$ sağlanır. Diğer yandan,

$$\begin{aligned}
\max\{f_1(0), f_2(0)\} &= \max\{f_1(-1)+f_1(1), f_2(-1)+f_2(1)\} \\
&\leq \max\{f_1(-1), f_2(-1)\} + \max\{f_1(1), f_2(1)\} \\
&= \iota(0) \\
&\leq \min\{g_1(-1), g_2(-1)\} + \min\{g_1(1), g_2(1)\} \\
&\leq \min\{g_1(-1)+g_1(1), g_2(-1)+g_2(1)\} \\
&= \min\{g_1(0), g_2(0)\}
\end{aligned}$$

olduğundan $h(0) = \max\{f_1(0), f_2(0), \iota(0)\} \leq \iota(0) \leq \min\{g_1(0), g_2(0)\} \leq h(0)$ eşitsizliği, yani $h(0) = \iota(0)$ sağlanır. $\iota \in X$ olduğundan $h \in X$ elde edilir ([13], Example 4).

Örnek

$C^1[0,1]$ uzayının Riesz uzayı olmadığını Sayfa 13'den biliyoruz. $C^1[0,1]$ Riesz ayrışım özelliğine sahiptir ([12], Example 1.58). Benzer şekilde, $C^1(\mathbb{R})$ ve $C^2(\mathbb{R})$ Riesz ayrışım özelliğine sahiptir ([5], Theorem 1). Ancak, $3 \leq n$ için $C^n(\mathbb{R})$ Riesz ayrışım özelliğine sahip değildir ([5], Example 1). Burada $C^n(\mathbb{R})$ uzayı noktasal sıra ile donatılmış, $\mathbb{R}$ üstünde tanımlı ve n-kez sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayıdır.

Örnek

$\mathbb{R}^{[0,1]}$ uzayının derecesi en fazla n olan polinomlarının $P^n[0,1]$ alt uzayı üstündeki indirgenmiş sıralama ile sıralı vektör uzayıdır. Ancak, $P^n[0,1]$ Riesz ayrışım özelliğine sahip değildir. $n = 2$ için bir $36 \leq k$ sabitiyle $t \in [0,1]$ iken $p(t) = 1 - kt^2$ ve $q(t) = kt^2$

biçiminde tanımlanan p ve q polinomları ele alındığında, $t \in [0,1]$ iken

$$p_1(t) = p(t),\ p_2(t) = p\left(t - \frac{2}{3}\right),\ q_1(t) = q\left(t - \frac{1}{3}\right) \text{ ve } q_2(t) = q(t-1)$$

ile tanımlanan polinomlar $i, j \in \{1,2\}$ iken $p_i \leq q_j$ eşitsizliklerini sağlar. Her i ve j için $p_i \leq r \leq q_j$ olacak biçimde $r \in P^2[0,1]$ olduğunu varsayalım. Bu durumda r sabit değildir ve en az iki kritik noktası vardır ki bu varsayımla çelişir. $2 < n$ için $P^n[0,1]$ uzayının Riesz ayrışım özelliğine sahip olmadığını göstermek için Önerme 2.1.16'nın (e) maddesi uyarınca uygun birçok p_i ve q_j polinomları tanımlanabilir. Aynı yaklaşım, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ uzayının bir alt uzayı olan $P^n(\mathbb{R})$ için de geçerlidir.

2.1.3. Sıra yakınsama

X sıralı vektör uzayında sıra yakınsama ağlar için tanımlanır. Λ kümesi $\preccurlyeq$ bağıntısına göre yansımalı, geçişken ve yönlü bir küme olmak üzere X içindeki bir x ağı $x : \Lambda \to X$ dönüşümü ile verilir ve bu ağ genellikle (x_λ) veya $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ biçiminde gösterilir. Bu kesimde [11] ve [14] kaynaklarından yararlanılmıştır.

2.1.18. Tanım

(X,K) sıralı vektör uzayı ve X içindeki bir ağ $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ olsun.

(a) Herhangi iki $\lambda, \varsigma \in \Lambda$ için $\lambda \preccurlyeq \varsigma$ iken $x_\lambda \leq x_\varsigma$ oluyorsa bu ağ artan, $x_\varsigma \leq x_\lambda$ oluyorsa bu ağ azalandır. $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağının artan olması $x_\lambda \uparrow$ ile, azalan olması $x_\lambda \downarrow$ ile gösterilir. $x \in X$ için $x_\lambda \downarrow x$ gösterimi, $x_\lambda \downarrow$ ve $\inf_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x$ anlamında ve $x_\lambda \uparrow x$ gösterimi, $x_\lambda \uparrow$ ve $\sup_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x$ anlamındadır.

(b) $x \in X$ için $\lambda \in \Lambda$ iken $\pm(x_\lambda - x) \leq y_\lambda$ ve $y_\lambda \downarrow 0$ olacak biçimde X içinde $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı varsa $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı x elemanına sıra yakınsar denir ve bu durum $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ ile gösterilir.

(c) $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı $A \subseteq X$ kümesi içinde ve $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ iken $x \in A$ oluyorsa, A kümesine sıra kapalıdır denir.

Sıra kapalı kümelerin kesişimi de sıra kapalıdır. Aşağıdaki önerme sıra yakınsamanın temel özelliklerini verir.

2.1.19. Önerme

(X,K) sıralı vektör uzayı olsun.

(a) X içinde bir (x_λ) ağı hem u'ya hem de v'ye sıra yakınsarsa $u=v$ olur.

(b) $x,y\in X$ ve $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ ve $y_\varsigma \xrightarrow{o} y$ olacak biçimde X içinde $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ve $(y_\varsigma)_{\varsigma\in\Xi}$ ağları varsa $(x_\lambda+y_\varsigma)_{(\lambda,\varsigma)\in\Lambda\times\Xi}$ ağı $x+y$'ye sıra yakınsar. Burada $\Lambda\times\Xi$ kartezyen çarpımında her iki kümenin standart yönü dikkate alınır. Ayrıca her $a\in\mathbb{R}$ için $ax_\lambda \xrightarrow{o} ax$ olur.

İspat

(a) $\pm(x_\lambda-u)\leq y_\lambda\downarrow 0$ ve $\pm(x_\lambda-v)\leq z_\lambda\downarrow 0$ iken $\pm(u-v)=\pm(u-x_\lambda+x_\lambda-v)\leq y_\lambda+z_\lambda\downarrow 0$ olduğundan $u=v$ sağlanır.

(b) İfade Önerme 2.1.11 (b)'nin doğrudan bir sonucudur.

2.1.20. Tanım

(X,K) ve (Y,L) sıralı vektör uzayları olmak üzere X içindeki herhangi bir $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı ve herhangi bir $x\in X$ için $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ iken $f(x_\lambda)\xrightarrow{o} f(x)$ oluyorsa $f:X\to Y$ dönüşümüne sıra süreklidir denir.

Aşağıdaki önerme latis işlemlerinin sıra sürekli olduğunu gösterir.

2.1.21. Önerme

(X,K) bir Riesz uzayı içinde iki ağ $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(y_\varsigma)_{\varsigma\in\Xi}$ ve $x,y\in X$ için $x_\lambda \xrightarrow{o} x$ ve $y_\varsigma \xrightarrow{o} y$ ise, $\Lambda\times\Xi$ kartezyen çarpımında her iki kümenin standart yönü dikkate alındığında $x_\lambda\vee y_\varsigma \xrightarrow{o} x\vee y$, $x_\lambda\wedge y_\varsigma \xrightarrow{o} x\wedge y$, $x_\lambda^+ \xrightarrow{o} x^+$, $x_\lambda^- \xrightarrow{o} x^-$ ve $|x_\lambda| \xrightarrow{o} |x|$ olur ([14], Lemma 8.15).

İspat

$|x_\lambda - x| \leq u_\lambda \downarrow 0$ ve $|y_\varsigma - y| \leq v_\lambda \downarrow 0$ ise

$$\begin{aligned}|x_\lambda \vee y_\varsigma - x \vee y| &= |x_\lambda \vee y_\varsigma - x_\lambda \vee y + x_\lambda \vee y - x \vee y| \\ &\leq |x_\lambda \vee y_\varsigma - x_\lambda \vee y| + |x_\lambda \vee y - x \vee y| \\ &\leq |y_\varsigma - y| + |x_\lambda - x| \leq v_\varsigma + u_\lambda \downarrow 0\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer ifadeler Eş. 2.3 ve Önerme 2.1.19 yardımıyla çözülebilir.

Lineer dönüşümlerin sıra sürekliliği için 0 noktasındaki sıra sürekliliği dikkate almak yeterlidir.

2.1.22. Önerme

(X,K) ve (Y,L) sıralı vektör uzayı ve $f : X \to Y$ lineer dönüşüm olsun. f dönüşümünün sıra sürekli olması için gerek ve yeter şart X içindeki her $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı için $x_\lambda \xrightarrow{o} 0$ iken $f(x_\lambda) \xrightarrow{o} 0$ olmasıdır.

2.2. Sıralı Vektör Uzaylarında Operatörler

2.2.1. Sıra sınırlı ve düzenli operatörler

Bu çalışmada vektör uzayları reel sayılar cismi $\mathbb{R}$ üzerinde alınacaktır. X vektör uzayından Y vektör uzayına lineer operatörlerin $\mathscr{L}(X,Y)$ kümesi operatörlerde toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle vektör uzayıdır. $X = Y$ olduğunda $\mathscr{L}(X,X)$ yerine kısaca $\mathscr{L}(X)$ yazılır. Ayrıca bu bölümde [11] kaynağından yararlanılmıştır.

2.2.1. Tanım

(X,K) ve (Y,L) sıralı vektör uzayları ve $S \in \mathscr{L}(X,Y)$ olmak üzere

(a) her $x \in K$ için $Sx \in L$ oluyorsa S pozitif operatör,

(b) herhangi bir $x \in X$ için $x \in K$ olması için gerek ve yeter şart $Sx \in L$ ise S bipozitif operatör (veya gömme operatörü),

(c) S örten ve bipozitifse S sıra izomorfizmi,

(d) S, X kümesinin sıra sınırlı alt kümelerini Y kümesinin sıra sınırlı alt kümelerine eşliyorsa S sıra sınırlı operatör,

(e) S iki pozitif operatörün farkı olarak yazılabiliyorsa S düzenli operatör diye adlandırılır. Bipozitiflikten birebirlik sağlanır. X ve Y uzayları arasında bir sıra izomorfizmi varsa bu uzaylar sıra izomorfik diye adlandırılır.

$\mathscr{L}(X,Y)$ vektör uzayındaki tüm pozitif lineer operatörlerin kümesi $\mathscr{L}_+(X,Y)$ ile gösterilir. Bu küme kamadır. $T-S$ pozitif ise $S \leq T$ yazılır. $T \in \mathscr{L}_+(X,Y)$ ve $x,y \in X$ için $x \leq y$ iken $Tx \leq Ty$ olduğundan pozitif operatörler monoton, başka bir deyişle sıra koruyandır. Benzer olarak $S \leq T$ ve $x \in K$ iken $Sx \leq Tx$ sağlanır.

2.2.2. Önerme

(X,K) ve (Y,L) sıralı vektör uzayı olsun. K konisinin üreten olması için gerek ve yeter şart $\mathscr{L}_+(X,Y)$ kamasının koni olması, başka bir deyişle $(\mathscr{L}(X,Y), \mathscr{L}_+(X,Y))$'nin sıralı vektör uzayı olmasıdır.

İspat

K üreten olsun. $T,-T \in \mathscr{L}_+(X,Y)$ ve $x \in K$ ise $Tx,-Tx \in L$ olduğundan $Tx=0$ ve böylece $T=0$ olur. Tersine K konisinin üreten olmadığını varsayalım. X'in $Z=K-K$ öz alt uzayı için $X=Z \oplus W$ olacak biçimde bir $W \neq \{0\}$ alt uzayı vardır. $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ opratörünün W üstüne kısıtlanışı izdüşüm operatörü ise, $T,-T \in \mathscr{L}_+(X,Y)$ olduğundan $T \neq 0$ elde edilir.

X uzayı, Sayfa 5'deki örneğin (a) kısmında belirtilen aşikâr sıralamayla donatılırsa $\mathscr{L}_+(X,Y) = \mathscr{L}(X,Y)$ bir kamadır, ancak koni değildir.

Her pozitif operatör düzenlidir ve her düzenli operatör sıra sınırlıdır. Sıra sınırlı operatörlerin uzayı $\mathscr{L}^b(X,Y)$ ile, düzenli operatörlerin uzayı $\mathscr{L}^r(X,Y)$ ile gösterilir.

(X,K) sıralı vektör uzayı için, tüm pozitif lineer fonksiyonellerin $K^* = \mathscr{L}_+(X,\mathbb{R})$ kaması ile sıralanan $X^* = \mathscr{L}(X,\mathbb{R})$ cebirsel dualini ele alalım (burada $\mathbb{R}$ uzayı $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t\}$ standart konisiyle sıralanmıştır.) K üreten olduğunda K^* koni, yani (X^*,K^*) sıralı vektör uzayı olur.

(X,K) sıralı vektör uzayının sıra duali, $K^\sim = \mathscr{L}^b_+(X,\mathbb{R})$ kaması ile sıralanan $X^\sim = \mathscr{L}^b(X,\mathbb{R})$ sıralı vektör uzayıdır. K üreten ise Önerme 2.2.2'den $(X^\sim,K^\sim)$ sıralı vektör uzayıdır. Genel olarak $K^\sim$üreten değildir.

2.2.3. Önerme

(X,K) ve (Y,L) sıralı vektör uzayları için K üreten ve Y Arşimedyan ise, $(\mathscr{L}(X,Y),\mathscr{L}_+(X,Y))$ Arşimedyan sıralı vektör uzayıdır.

İspat

Önerme 2.2.2'den $(\mathscr{L}(X,Y),\mathscr{L}_+(X,Y))$ uzayı sıralı vektör uzayıdır. Bu uzayın Arşimedyan olduğunu gösterelim. Herhangi iki $S,T \in \mathscr{L}(X,Y)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $nS \leq T$ olsun. Her $x \in K$ için $nSx \leq Tx$ ve Y Arşimedyan olduğundan $Sx \leq 0$ ve böylece $S \leq 0$ elde edilir.

Standart sıra ile $\mathbb{R}$ Arşimedyan uzayı olduğundan, her X yönlü sıralı vektör uzayı için X^* cebirsel duali ve $X^\sim$ sıra duali Arşimedyan uzayıdır.

2.2.2. Riesz Kantorovich formülleri

Bu bölümde (X,K) ve (Y,L) sıralı vektör uzaylarının üzerindeki koşullar incelenecek ve $\mathscr{L}^b(X,Y)$ sıra sınırlı operatörler uzayının Riesz uzayı olduğu görülecektir. Aşağıdaki teoremler [2]'den alınmıştır.

2.2.4. Teorem

(X,K) ve (Y,L) sıralı vektör uzayları, K üreten ve $S:K\to L$ toplamsal ve pozitif homojen dönüşüm ise K üstünde $T=S$ olacak biçimde bir tek $T:X\to Y$ lineer operatörü vardır. Ek olarak $S(K)\subseteq L$ ise T pozitiftir.

İspat

İlk olarak $u,v,x,y\in K$ için $v-u=y-x$ iken $v+x=u+y$ ve buradan $Sv+Sx=S(v+x)=S(u+y)=Su+Sy$ olduğundan $Sv-Su=Sy-Sx$ sağlanır. Her $x\in X$ için $x=u-v$ olacak biçimde $u,v\in K$ var olduğundan $T:X\to Y$ dönüşümünü $Tx=Su-Sv$ eşitliği ile tanımlayabiliriz. Bu tanım u ve v'nin seçiminden bağımsızdır.

Her $x,y\in X$ için $u,v,w,z\in K$ iken $x=v-u$ ve $y=z-w$ alınırsa

$$\begin{aligned}T(x+y)&=T(v-u+z-w)=S(v+z)-S(u+w)\\&=S(v)-S(u)+S(z)-S(w)=T(v-u)+T(z-w)\\&=T(x)+T(y)\end{aligned}$$

olduğundan T toplamsaldır. Diğer yandan, her $x\in X$ ve $\alpha\in[0,\infty)$ için $u,v\in K$ iken $x=v-u$ alınırsa $T(\alpha x)=S(\alpha v)-S(\alpha u)=\alpha(S(v)-S(u))=\alpha T(x)$ olduğundan T pozitif homojendir. Bununla beraber $T(-x)=S(u)-S(v)=-T(x)$ olduğundan T lineerdir. K üstünde $T=S=R$ olacak biçimde $R:X\to Y$ lineer dönüşümü varsa, $T=R$ olduğundan T tektir.

Sonraki teorem, $\mathscr{L}^b(X,Y)$ uzayının Riesz uzayı olmasını sağlayan önemli koşulları içerir.

2.2.5. Teorem

(X,K) sıralı vektör uzayı, X Riesz ayrışım özelliğine sahip, K üreten ve (Y,L) Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Her $T\in\mathscr{L}^b(X,Y)$ için $x\in K$ iken $S(x)=\sup\{T(u):u\in[0,x]\}$ olsun.

K üstünde $R = S$ olacak biçimde bir tek $R \in \mathscr{L}_+(X,Y)$ lineer operatörü vardır ve $R = T^+$ sağlanır.

İspat

T sıra sınırlı ve Y Dedekind tam olduğundan S iyi tanımlıdır ve $S(K) \subseteq L$ sağlanır. S'nin toplamsal olduğunu göstermek için $x, y \in K$ alalım. $u \in [0,x]$ ve $v \in [0,y]$ için $u+v \in [0,x+y]$ ve $T(u)+T(v) = T(u+v)$ olduğundan $T(u)+T(v) \leq S(x+y)$ olur. Son eşitsizlik her $u \in [0,x]$ ve her $v \in [0,y]$ için sağlandığından ayrı ayrı supremum alınarak $S(x)+T(x) \leq S(x+y)$ elde edilir. Riesz ayrışım özelliğinden her $w \in [0,x+y]$ için $w = u+v$ olacak biçimde $u \in [0,x]$ ve $v \in [0,y]$ var olduğundan $T(w) = T(u)+T(v) \leq S(x)+S(y)$ ve böylece $S(x+y) \leq S(x)+S(y)$ sağlanır. Ayrıca, pozitif skalerle çarpım ve supremum yer değiştirebildiğinden S pozitif homojendir. Teorem 2.2.4'den K üstünde $R = S$ olacak biçimde $R \in \mathscr{L}_+(X,Y)$ vardır.

Şimdi R'nin T ve 0'ın supremumu olduğunu gösterelim. Her $x \in K$ için $T(x) \leq S(x) = R(x)$ olduğundan R pozitif operatörü $\{T, 0\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. Bu kümenin başka bir Q üst sınırı için $x \in K$ ve $u \in [0,x]$ iken $T(u) \leq Q(u) \leq Q(x)$ olduğundan $R(x) = S(x) \leq Q(x)$ ve böylece $R \leq Q$ elde edilir. Sonuç olarak, $R = T \vee 0 = T^+$ sağlanır.

Her pozitif operatör sıra sınırlı olduğundan Teorem 2.2.5'den $\mathscr{L}^b(X,Y)$ Riesz uzayıdır. Diğer latis işlemleri için benzer formüller vardır.

2.2.6. Sonuç

Teorem 2.2.5 koşulları altında $\mathscr{L}^b(X,Y)$ uzayı Riesz uzayıdır. Her $x \in K$ ve $S, T \in \mathscr{L}^b(X,Y)$ için,

$$T^-(x) = \sup\{-T(u) : u \in [0,x]\}$$

$$|T|(x) = \sup\{|T(u)| : u \in [-x,x]\}$$

$(S \vee T)(x) = \sup\{S(x-u) + T(u) : u \in [0,x]\}$

$(S \wedge T)(x) = \inf\{S(x-u) + T(u) : u \in [0,x]\}$

sağlanır.

Teorem 2.2.5 ve Sonuç 2.2.6'daki formüller Riesz-Kantarovich formülleri olarak adlandırılır.

2.2.7. Teorem

(X,K) sıralı vektör uzayı, X Riesz ayrışım özelliğine sahip, K üreten ve (Y,L) Dedekind tam Riesz uzayı ise $\mathscr{L}^b(X,Y)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır.

İspat

$\mathscr{L}^b(X,Y)$ uzayının Dedekind tam olduğunu göstermek için, bu uzayın üstten sınırlı boş olmayan bir alt kümesi A ve bu kümenin bir üst sınırı U olsun. A kümesinin boş olmayan sonlu alt kümelerinin tüm supremumlarının kümesi B ise U, B kümesinin de üst sınırı olur. Her $x \in K$ için $S(x) = \sup\{T(x) : T \in B\}$ ile tanımlanan S dönüşümü toplamsaldır. Gerçekten, her $T \in B$ için $x,y \in K$ iken $T(x+y) = T(x) + T(y) \leq S(x) + S(y)$ olduğundan $S(x+y) \leq S(x) + S(y)$ ve her $T,R \in B$ için $T \vee R \in B$ olduğundan $T(x) + R(y) \leq (T \vee R)(x+y) = (T \vee R)(x) + (T \vee R)(y) \leq S(x+y)$ ve böylece $S(x) + S(y) \leq S(x+y)$ sağlanır. Basit bir kontrolle S'in pozitif homojen olduğu görülür.

Teorem 2.2.4'e göre K üstünde $V = S$ olacak biçimde bir tek $V \in \mathscr{L}(X,Y)$ operatörü vardır. S operatörünün tanımından V, B kümesinin bir üst sınırıdır ve dolayısıyla A kümesinin de bir üst sınırıdır. A boş olmadığından $T \leq V$ olacak biçimde bir $T \in A$ vardır. Ayrıca $V \leq U$ olduğundan $V \in \mathscr{L}^b(X,Y)$ elde edilir. U, A kümesinin keyfi bir üst sınırı olduğundan $V = \sup A$ olur.

$\mathbb{R}$ Dedekind tam Riesz uzay olduğundan, [1]'den dolayı aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

2.2.8. Sonuç

(X,K) sıralı vektör uzayı, X Riesz ayrışım özelliğine sahip ve K üreten ise $X^{\sim}$ sıra duali Dedekind tam Riesz uzayıdır.

3. GÖMMELER, ÖRTÜLER VE TAMLAMALAR

Pre-Riesz uzayların en büyük avantajı, Riesz uzaylarına sıra yoğun olarak gömülebilmeleridir. Bölüm boyunca [6, 7, 11, 15, 17–20] kaynaklarından yararlanılmış ve üç tür sıra yoğun gömme ele alınmıştır.

İlk olarak, klasik Dedekind tamlamanın ifadesini verelim.

(a) (X,K) yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayı ise bir X^δ Dedekind tam Riesz uzayı ve $F : X \to X^\delta$ birebir dönüşümü için $F(X)$ görüntüsü X^δ içinde sıra yoğundur.

Birçok örnekte uzayın Dedekind tamlamasını açıkça göstermek kolay değildir. Mesela $C[0,1]$ uzayının Dedekind tamlamasının inşası [16]'da verilmiştir. Herhangi bir sıralı vektör uzayının Dedekind tam olmak zorunda olmayan bir Riesz uzayına gömülmesi fikri ilgi çekici olmuştur. Bu amaçla, van Haandel pre-Riesz uzaylarını tanıtmış ve Riesz uzay örtülerini incelemiştir [6]. Ana sonuç aşağıdaki gibidir:

(b) (X,K) pre-Riesz uzayı ise bir Y Riesz uzayı ve bir $G : X \to Y$ birebir dönüşümü için $G(X)$ görüntüsü Y içinde sıra yoğundur.

Riesz tamlama adı verilen en küçük Riesz uzay örtüsü vardır. Diğer taraftan, noktasal sıralamanın kullanışlılığından dolayı sürekli fonksiyonların Riesz uzayına gömmeleri de oldukça uygundur. [7]'de Kadison'un klasik fonksiyonel temsiliyle bir sıra yoğun gömme ve dolayısıyla bir Riesz uzay örtüsü elde edilir.

(c) (X,K) sıra birimli Arşimedyan sıralı vektör uzayı ise bir Ω kompakt Hausdorff uzayı ve bir $H : X \to C(\Omega)$ birebir dönüşümü için $H(X)$ görüntüsü $C(\Omega)$ içinde sıra yoğundur.

3.1. Dedekind Tamlama

Dedekind tamlamanın yapısı, Richard Dedekind'in 1872 yılındaki çalışması [15]'deki reel sayıların inşasına kadar götürülebilir. Richard Dedekind, reel sayıları uygun aritmetik işlemlerle donatılmış rasyonel sayıların Dedekind kesitlerinin kümesi olarak tanımlar. 1937 yılında MacNeille, Dedekind kesitlerinin herhangi bir sıralı X kümesinde ele alınabileceğini

göstermiş ve X kümesinin içine gömülebileceği bir Dedekind tam X^δ kümesini oluşturmuştur [17]. Bu X^δ kümesine X kümesinin Dedekind tamlaması denir. Arşimedyan yönlü sıralı vektör uzayının Dedekind tamlaması [18] ve [19] Bölüm X.3'de anlatılmıştır. Riesz uzay örtülerinin yapılandırılmasında benzer süreç kullanılır ve Arşimedyanlık şartı yerine pre-Riesz uzayı şartı getirilir.

3.1.1. Dedekind kesitler, toplamları ve skalerle çarpımları

(X,K) sıralı vektör uzayı olmak üzere, bir $A \subseteq X$ kümesinin üst sınırlarının A^{u} kümesi ve alt sınırlarının A^{l} kümesi için kullanacağımız temel özellikleri verelim.

3.1.1. Lemma

$A \subseteq X$ ve $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned}
\{x\}^{\mathrm{ul}} &= \{x\}^{\mathrm{l}} \\
\{x+y\}^{\mathrm{ul}} &= \{x\}^{\mathrm{l}} + \{y\}^{\mathrm{l}} \\
(-A)^{\mathrm{u}} &= -A^{\mathrm{l}} \\
(-A)^{\mathrm{l}} &= -A^{\mathrm{u}} \\
A &\subseteq A^{\mathrm{ul}} \\
A^{\mathrm{ulu}} &= A^{\mathrm{u}} \\
A^{\mathrm{lul}} &= A^{\mathrm{l}}
\end{aligned}$$

sağlanır.

$\left(A^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{ul}} = A^{\mathrm{ul}}$ olması aşağıdaki tanımı destekler.

3.1.2. Tanım

X kümesinin bir A alt kümesi için $A^{\mathrm{ul}} = A$ oluyorsa, A kümesine X'in bir Dedekind kesiti denir. $\varnothing$ ve X olmayan X'in Dedekind kesitlerinin kümesi X^δ ile gösterilir.

Her $x \in X$ için $\{x\}^{\mathrm{l}}$ kümesi X'in bir Dedekind kesitidir.

$\mathscr{P}(X)$ kuvvet kümesi üstünde $\subseteq$ kapsama bağıntısı bir sıralama bağıntısı ve $X^{\delta} \subset \mathscr{P}(X)$ olduğundan, X^{δ} kümesi $\subseteq$ bağıntısı ile bir sıralı kümedir.

3.1.3. Önerme

Kapsama bağıntısı $\subseteq$ ile sıralanmış X^{δ} kümesini gözönünde bulunduralım ve $\mathscr{A} \subseteq X^{\delta}$ boş olmasın.

(a) $\mathscr{A}$ üstten sınırlıysa $\sup \mathscr{A} = (\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}}$,

(b) $\mathscr{A}$ alttan sınırlıysa $\inf \mathscr{A} = (\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}} = \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$,

(c) (X,K) yönlü ise, $\subseteq$ kapsama bağıntısıyla sıralanmış X^{δ} kümesi Dedekind tam latistir.

İspat

(a) $\mathscr{A}$ üstten sınırlı ise bir $A_0 \in X^{\delta}$ ve her $A \in \mathscr{A}$ için $A \subseteq A_0$ olur. $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq A_0$ve böylece $(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}} \subseteq A_0^{\mathrm{ul}} = A_0$ olduğundan $(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}}$ kümesi X'den farklıdır. Diğer yandan $\mathscr{A}$ boş olmadığından ve $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq (\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}}$ olduğundan $(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}}$ kümesi boş olamaz. Dolayısıyla $(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}} \in X^{\delta}$ sağlanır. Her $A \in \mathscr{A}$ için $A \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq (\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}}$ olduğundan $(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}}$ kümesi $\mathscr{A}$'nın bir üst sınırıdır. Ayrıca $\mathscr{A}$'nın başka bir $U \in X^{\delta}$ üst sınırı için $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq U$ ve böylece $(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}} \subseteq U^{\mathrm{ul}} = U$ olduğundan $(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}}$, $\mathscr{A}$'nın supremumudur.

(b) $\mathscr{A}$ alttan sınırlı ise bir $A_0 \in X^{\delta}$ ve her $A \in \mathscr{A}$ için $A_0 \subseteq A$ olur. $A_0 \subseteq \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$ ve böylece $A_0 = A_0^{\mathrm{ul}} \subseteq (\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}}$ olduğundan $(\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}}$ kümesi boş değildir. Her $A \in \mathscr{A}$ için

$$\left(\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A\right)^{\mathrm{ul}} \subseteq A^{\mathrm{ul}} = A \tag{3.1}$$

olduğundan $(\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}} \neq X$ olur. Dolayısıyla $(\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}} \in X^{\delta}$ sağlanır ve $(\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}}$,

$\mathscr{A}$'nın bir alt sınırıdır. Ayrıca $\mathscr{A}$'nın başka bir $V \in X^{\delta}$ alt sınırı için $V \subseteq \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$ ve böylece $V = V^{\mathrm{ul}} \subseteq (\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}}$ olduğundan $(\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}}$, $\mathscr{A}$'nın infimumudur. Eş. 3.1'den dolayı $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A \subseteq (\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}} \subseteq \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$ olduğundan $(\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A)^{\mathrm{ul}} = \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A$ elde edilir.

(c) (X,K) yönlü ve $A,B \in X^{\delta}$ olsun. $\{A,B\}$ kümesinin X^{δ} içinde alttan ve üstten sınırlı olduğunu gösterelim. $A = A^{\mathrm{ul}}$, $A \neq \varnothing$ ve $A^{\mathrm{ul}} \neq X$ olduğundan $a \in A$ ve $u \in A^{\mathrm{u}}$ alabiliriz. Benzer şekilde $b \in B$, $v \in B^{\mathrm{u}}$ ve X yönlü olduğundan $c \leq a$, $c \leq b$ ve $u \leq w$, $v \leq w$ olacak biçimde $c,w \in X$ alabiliriz. $C = \{c\}^{\mathrm{l}}$ ve $W = \{w\}^{\mathrm{l}}$ kümeleri için $C,W \in X^{\delta}$ sağlanır. $a \leq u \leq w \Rightarrow a \in \{w\}^{\mathrm{l}} = W$ ve $b \leq v \leq w \Rightarrow b \in \{w\}^{\mathrm{l}} = W$ olduğundan $A \subseteq W$ ve $B \subseteq W$, yani $\{A,B\}$ kümesi X^{δ} içinde üstten sınırlıdır. $x \in C$ iken $x \leq c \leq a$ ve $x \leq c \leq b$ olduğundan $x \in A^{\mathrm{ul}} = A$ ve $x \in B^{\mathrm{ul}} = B$ olur. Buradan $C \subseteq A$ ve $C \subseteq B$, yani $\{A,B\}$ kümesi X^{δ} içinde alttan sınırlıdır. (a) ve (b)'den $\{A,B\}$'nin supremumu ve infimumu X^{δ} içinde mevcuttur, yani X^{δ} latistir.

3.1.4. Tanım

(X,K) sıralı vektör uzayının bir alt uzayı Y olmak üzere,

(a) her $x \in X$ için $x \leq y$ olacak biçimde $y \in Y$ varsa Y büyüyen alt uzay,

(b) her $x \in X$ için $x = \inf\{y \in Y : x \leq y\}$ oluyorsa Y sıra yoğun alt uzay diye adlandırılır.

X sıralı vektör uzayı içinde Y alt uzayının sıra yoğun olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $x = \sup\{y \in Y : y \leq x\}$ olmasıdır. Her sıra yoğun alt uzay büyüyendir. Ancak, büyüyen uzay sıra yoğun olmayabilir. Mesela, $C[0,1]$ içinde sabit fonksiyonların uzayı büyüyen olmasına rağmen sıra yoğun değildir.

3.1.5. Önerme

(X,K) sıralı vektör uzayının alt uzayları Y ve Z için $Y \subseteq Z$ olsun. Y, Z içinde sıra yoğun ve Z, X içinde sıra yoğun ise Y, X içinde sıra yoğundur ([20], Theorem 1.44).

3.1.6. Sonuç

Ω boş olmayan kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere, $C(\Omega)$ supremum normu ile donatılsın. $C(\Omega)$'nın her norm yoğun alt uzayı sıra yoğundur ([11], Corollary 1.6.5).

3.1.7. Tanım

X ve Y sıralı kümeler ve $F : X \to Y$ dönüşüm olmak üzere her $u, v \in X$ için $u \leq v \Leftrightarrow F(u) \leq F(v)$ oluyorsa, F bipozitif dönüşüm diye adlandırılır.

Bundan sonraki kısımda X yönlü sıralı vektör uzayı olarak alınacaktır. X^δ üstünde latis işlemleri bilinen biçimde $\vee$ ve $\wedge$ ile gösterilecektir ve X'in X^δ içine gömülmesi tartışılacaktır.

3.1.8. Önerme

$F : X \to X^\delta; F(x) = \{x\}^{\mathrm{l}}$ bipozitif dönüşümdür ve görüntüsü X^δ içinde sıra yoğundur.

İspat

$x, y \in X$ olsun. $x \leq y$ iken $\{x\}^{\mathrm{l}} \subseteq \{y\}^{\mathrm{l}}$ ve tersine $\{x\}^{\mathrm{l}} \subseteq \{y\}^{\mathrm{l}}$ iken $x \in \{x\}^{\mathrm{l}}$ olduğundan $x \leq y$ sağlanır, yani F bipozitiftir. $F(X)$'in, X^δ'da sıra yoğun olduğunu görmek için $A \in X^\delta$ iken $A = \inf\{F(X) : x \in X,\ A \subseteq F(X)\}$ olduğunu, yani $U = \left\{x \in X : A \subseteq \{x\}^{\mathrm{l}}\right\}$ iken $A = \bigcap_{x \in U} \{x\}^{\mathrm{l}}$ olduğunu gösterelim. Öncelikle $U = A^{\mathrm{u}}$ sağlanır. Gerçekten, $x \in U$ iken $x \in \{x\}^{\mathrm{lu}} \subseteq A^{\mathrm{u}}$ ve tersine $x \in A^{\mathrm{u}}$ iken $A \subseteq \{x\}^{\mathrm{l}}$ sağlandığından $x \in U$ elde edilir. Aynı zamanda, $x \in U$ iken $A \subseteq \{x\}^{\mathrm{l}}$ olmasından $A \subseteq \bigcap_{x \in U} \{x\}^{\mathrm{l}}$ sağlanır. Diğer yandan $y \in \bigcap_{x \in U} \{x\}^{\mathrm{l}}$ iken her $x \in U = A^{\mathrm{u}}$ için $y \leq x$ olduğundan $y \in A^{\mathrm{ul}} = A$, yani $\bigcap_{x \in U} \{x\}^{\mathrm{l}} \subseteq A$ sağlanır. Böylece $F(X), X^\delta$ içinde sıra yoğundur.

Burada X yönlü sıralı vektör uzayı olmak üzere X^δ'ya bir vektör uzayı yapısı kazandırmak hedeflenmiştir. $A, B \in X^\delta$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$A \oplus B = (A+B)^{\mathrm{ul}}$$

$$\ominus A = -A^{\mathrm{u}}$$

$$\alpha * A = \begin{cases} \alpha A, & \alpha > 0 \\ \{0\}^{\mathrm{l}}, & \alpha = 0 \\ \alpha A^{\mathrm{u}}, & \alpha < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\oplus$ toplama ve $*$ skalerle çarpma işlemleriyle X^{δ} kümesinin vektör uzayı olması için X'in Arşimedyan olması gerekecektir. Şimdi, X henüz Arşimedyan alınmadan bu işlemlerin X^{δ} üstünde mümkün olan özelliklerini verelim.

3.1.9. Lemma

$\varnothing \neq A, B \subseteq X$, $a \in X$, $0 < \alpha$ ve $\beta < 0$ olmak üzere

(a) $(a+A)^{\mathrm{u}} = a + A^{\mathrm{u}}$

(b) $\alpha A^{\mathrm{u}} = (\alpha A)^{\mathrm{u}}$

(c) $\beta A^{\mathrm{u}} = (\beta A)^{\mathrm{l}}$

(d) $(A+B)^{\mathrm{ul}} = \left(A + B^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{ul}} = \left(A^{\mathrm{ul}} + B^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{ul}}$

(e) $(a+A)^{\mathrm{l}} = a + A^{\mathrm{l}}$

(f) $\alpha A^{\mathrm{l}} = (\alpha A)^{\mathrm{l}}$

(g) $\beta A^{\mathrm{l}} = (\beta A)^{\mathrm{u}}$

(h) $(A \cup B)^{\mathrm{ul}} = \left(A \cup B^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{ul}} = \left(A^{\mathrm{ul}} \cup B^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{ul}}$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

Burada sadece son iki eşitliği ispatlayalım. $(A+B)^{\mathrm{u}} = \bigcap_{a \in A} (a+B)^{\mathrm{u}} = \bigcap_{a \in A} (a + B^{\mathrm{u}}) = \bigcap_{a \in A} \left(a + B^{\mathrm{ulu}}\right) = \bigcap_{a \in A} \left(a + B^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{u}} = \left(A + B^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{u}}$ sağlanır ve böylece $(A+B)^{\mathrm{ul}} = \left(A + B^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{ul}}$ elde edilir. Benzer şekilde A ve B yerine sırasıyla B^{ul} ve A yazılırsa $(A + B^{\mathrm{ul}}) = (A^{\mathrm{ul}} + B^{\mathrm{ul}})^{\mathrm{ul}}$ elde edilir.

İkinci eşitlik için $(A \cup B)^{\mathrm{ul}} \subseteq \left(A \cup B^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{ul}} \subseteq \left(A^{\mathrm{ul}} \cup B^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{ul}}$ olduğu açıktır. Geriye $(A \cup B)^{\mathrm{u}} \subseteq$

$\left(A^{\mathrm{ul}} \cup B^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{u}}$ olduğunu göstermek kalır. $u \in (A \cup B)^{\mathrm{u}}$ iken $u \in A^{\mathrm{u}} = A^{\mathrm{ulu}}$ sağlanır ve her $x \in A^{\mathrm{ul}}$ için $x \leq u$ elde edilir. Benzer şekilde her $y \in B^{\mathrm{ul}}$ için $y \leq u$ sağlanır. Böylece $u \in \left(A^{\mathrm{ul}} \cup B^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{u}}$ elde edilir.

3.1.10. Lemma

Her $A, B, C \in X^{\delta}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

(a) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
(b) $A \oplus B = B \oplus A$
(c) $A \oplus \{0\}^{\mathrm{l}} = A$
(d) $\ominus(\ominus A) = A$
(e) $A \oplus (\ominus A) \subseteq \{0\}^{\mathrm{l}}$
(f) $\alpha * (\beta * A) = (\alpha\beta) * A$
(g) $1 * A = A$
(h) $(-1) * A = \ominus A$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

(a) Lemma 3.1.9'dan

$$\begin{aligned}(A \oplus B) \oplus C &= ((A+B)^{\mathrm{ul}} + C)^{\mathrm{ul}} = ((A+B)+C)^{\mathrm{ul}} \\ &= (A+(B+C))^{\mathrm{ul}} = (A+(B+C)^{\mathrm{ul}})^{\mathrm{ul}} \\ &= A \oplus (B \oplus C)\end{aligned}$$

sağlanır.

(b) Tanımdan $A \oplus B = (A+B)^{\mathrm{ul}} = (B+A)^{\mathrm{ul}} = B \oplus A$ elde edilir.

(c) $a \in A$, $x \in X$ ve $x \leq 0$ iken $a + x \leq a$ ve böylece $a + x \in A^{\mathrm{ul}} = A$ olduğundan $A + \{0\}^{\mathrm{l}} \subseteq A$ elde edilir ve $A \oplus \{0\}^{\mathrm{l}} = \left(A + \{0\}^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}} \subseteq A^{\mathrm{ul}} = A$ sağlanır. Diğer yandan, $0 \in \{0\}^{\mathrm{l}}$ olduğundan $A = A^{\mathrm{ul}} \subseteq \left(A + \{0\}^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}} = A \oplus \{0\}^{\mathrm{l}}$ sağlanır.

(d) Tanımdan $\ominus(\ominus A) = -(-A^{\mathrm{u}})^{\mathrm{u}}$ sağlanır. $a \in A$ ve $u \in A^{\mathrm{u}}$ için $a \leq u$ ve böylece $-u \leq -a$ olduğundan $-a \in (-A^{\mathrm{u}})^{\mathrm{u}}$ olur. Dolayısıyla $a \in -(-A^{\mathrm{u}})^{\mathrm{u}}$ olduğundan $A \subseteq \ominus(\ominus A)$ elde

edilir. $x \in -(-A^{u})^{u}$ ise, her $y \in -A^{u}$ için $y \leq -x$ ve böylece $x \leq -y$ olduğundan $x \in A^{ul} = A$ sağlanır, yani $\ominus(\ominus A) \subseteq A$ elde edilir.

(e) $A \oplus (\ominus A) = (A + (-A^{u}))^{ul}$ eşitliğini göz önünde bulunduralım. $a \in A$ ve $x \in (-A^{u})$ için $a \leq -x$ ve böylece $a + x \leq 0$ sağlanır. Buradan $0 \in (A + (-A^{u}))^{u}$ ve dolayısıyla $(A + (-A^{u}))^{ul} \subseteq \{0\}^{l}$ elde edilir.

(f) Tanımdan $0 < \alpha, \beta$ iken $\alpha * (\beta * A) = \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = (\alpha\beta) * A$ sağlanır.

Diğer durumlar için Lemma 3.1.9'daki eşitlikleri kullanalım.

$0 < \alpha$ ve $\beta = 0$ iken $\alpha\{0\}^{l} = \{\alpha 0\}^{l} = \{0\}^{l}$ ve böylece $\alpha * (0 * A) = \alpha\{0\}^{l} = \{0\}^{l} = (\alpha 0) * A$ elde edilir. $\alpha < 0$ ve $\beta = 0$ iken $\alpha * (0 * A) = \alpha\left(\{0\}^{l}\right)^{u} = \alpha\{0\}^{l} = \{0\}^{l} = (\alpha 0) * A$ elde edilir. Benzer şekilde, herhangi bir β için $\alpha = 0$ iken $0 * (\beta * A) = \{0\}^{l} = (\beta 0) * A$ elde edilir.

Ayrıca, $0 < \alpha$ ve $\beta < 0$ için $\alpha * (\beta * A) = \alpha(\beta A^{u}) = \alpha\beta A^{u} = (\alpha\beta) * A$ elde edilir. $\alpha < 0$ ve $0 < \beta$ için $\alpha * (\beta * A) = \alpha(\beta A)^{u} = \alpha(\beta A^{u}) = (\alpha\beta)A^{u} = (\alpha\beta) * A$ elde edilir. $\alpha < 0$ ve $\beta < 0$ için $\alpha * (\beta * A) = \alpha(\beta A^{u})^{u} = \alpha((\beta A)^{l})^{u} = (\alpha(\beta A)^{l})^{l} = (\alpha\beta A)^{ul} = (\alpha\beta)A^{ul} = (\alpha\beta)A = (\alpha\beta) * A$ elde edilir.

(g) Tanımdan $1 * A = 1A = A$ elde edilir.

(h) $(-1) * A = (-1)A^{u} = -A^{u} = \ominus A$ sağlanır.

X Arşimedyan değilse $A \oplus (\ominus A) = \{0\}^{l}$ eşitliği genelde doğru değildir. Bu durum Lemma 3.1.15'de gösterilecektir. Genel olarak geçerli olan $\oplus, \ominus$ ve $*$ işlemlerinin özellikleriyle devam edelim. Kolaylık sağlaması için $A, B \in X^{\delta}$ iken $A \oplus \ominus B = A \oplus (\ominus B)$ yazılır.

3.1.11. Lemma

A, $B \in X^{\delta}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler sağlanır.

(a) $A \oplus B = \{0\}^{\mathrm{l}} \Rightarrow B = \ominus A$

(b) $0 \leq \alpha \Rightarrow \alpha * (A \oplus B) = (\alpha * A) \oplus (\alpha * B)$

(c) $A \oplus \ominus A = \{0\}^{\mathrm{l}}$ ve $B \oplus \ominus B = \{0\}^{\mathrm{l}} \Rightarrow \alpha * (A \oplus B) = (\alpha * A) \oplus (\alpha * B)$ ve $\ominus (A \oplus B) = (\ominus A) \oplus (\ominus B)$

(d) $0 \leq \alpha, \beta \Rightarrow (\alpha + \beta) * A = (\alpha * A) \oplus (\beta * A)$

(e) $A \oplus \ominus A = \{0\}^{\mathrm{l}} \Rightarrow (\alpha + \beta) * A = (\alpha * A) \oplus (\beta * B)$

İspat

(a) $A \oplus B = \{0\}^{\mathrm{l}}$ varsayımı $(A+B)^{\mathrm{ul}} = \{0\}^{\mathrm{l}}$ eşitliğini verir. Her bir $a \in A$ ve $b \in B$ için $a+b \leq 0$ olduğundan $b \leq -a$, dolayısıyla $B \subseteq (-A)^{\mathrm{l}} = -A^{\mathrm{u}} = \ominus A$ elde edilir. Diğer yandan Lemma 3.1.10'dan dolayı

$$\begin{aligned} \ominus A &= (\ominus A) \oplus \{0\}^{\mathrm{l}} = (\ominus A) \oplus (A \oplus B) = ((\ominus A) \oplus A) \oplus B = (A \oplus (\ominus A)) \oplus B \\ &\subseteq \{0\}^{\mathrm{l}} \oplus B = B \oplus \{0\}^{\mathrm{l}} = B \end{aligned}$$

elde edilir.

(b) $0 < \alpha$ için

$$\begin{aligned} \alpha * (A \oplus B) &= \alpha (A+B)^{\mathrm{ul}} = (\alpha (A+B))^{\mathrm{ul}} = (\alpha A + \alpha B)^{\mathrm{ul}} \\ &= (\alpha * A + \alpha * B)^{\mathrm{ul}} = (\alpha * A) \oplus (\alpha * B) \end{aligned}$$

ve $\alpha = 0$ için

$$\begin{aligned} 0 * (A \oplus B) &= \{0\}^{\mathrm{l}} = (\{0\}^{\mathrm{l}} + \{0\}^{\mathrm{l}})^{\mathrm{ul}} = ((0A)^{\mathrm{l}} + (0B)^{\mathrm{l}})^{\mathrm{ul}} \\ &= (0 * A + 0 * B)^{\mathrm{ul}} = (0 * A) \oplus (0 * B) \end{aligned}$$

elde edilir.

(c) Eğer $0 \leq \alpha$ ise iddia (b)'deki gibidir. Tersine $\alpha < 0$ seçelim. Lemma 3.1.10 (f) ve (h)'nin yardımıyla

$$\alpha * A = (-\alpha) * ((-1) * A) = (-\alpha) * (\ominus A)$$

ve benzer şekilde $\alpha * B = (-\alpha) * (\ominus B)$ sağlanır. Lemma 3.1.10 (a) ve (b) yardımıyla

$$\begin{aligned}(A \oplus B) \oplus ((\ominus A) \oplus (\ominus B)) &= (A \oplus (\ominus A)) \oplus (B \oplus (\ominus B)) = \{0\}^{\mathrm{l}} \oplus \{0\}^{\mathrm{l}} \\ &= (\{0\}^{\mathrm{l}} + \{0\}^{\mathrm{l}})^{\mathrm{ul}} = (\{0\}^{\mathrm{l}})^{\mathrm{ul}} = \{0\}^{\mathrm{l}}\end{aligned}$$

elde edilir. (a)'dan $\ominus (A \oplus B) = (\ominus A) \oplus (\ominus B)$ olur. Bu eşitlik ve (b)'den

$$\begin{aligned}\alpha * (A \oplus B) &= (-\alpha) * \ominus (A \oplus B) \\ &= (-\alpha) * ((\ominus A) \oplus (\ominus B)) \\ &= ((-\alpha) * (\ominus A)) \oplus ((-\alpha) * (\ominus B)) \\ &= (\alpha * A) \oplus (\alpha * B)\end{aligned}$$

elde edilir.

(d) Bir taraftan

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) * A &= (\alpha + \beta) A \subseteq (\alpha A) + (\beta A) \\ &= \alpha * A + \beta * A \subseteq (\alpha * A + \beta * A)^{\mathrm{ul}} \\ &= (\alpha * A) \oplus (\beta * A)\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan her $a_1, a_2 \in A$ ve $u \in A^{\mathrm{u}}$ için $\alpha a_1 + \beta a_2 \leq (\alpha + \beta) u$ olduğundan $(\alpha + \beta) u \in (\alpha A + \beta A)^{\mathrm{u}}$ sağlanır. Buradan $(\alpha + \beta) A^{\mathrm{u}} \subseteq (\alpha A + \beta A)^{\mathrm{u}}$ ve böylece

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) A &= (\alpha + \beta) A^{\mathrm{ul}} \supseteq (\alpha A + \beta A)^{\mathrm{ul}} \\ &= (\alpha A) \oplus (\beta A) = (\alpha * A) \oplus (\beta * A)\end{aligned}$$

elde edilir.

(e) $0 \leq \alpha, \beta$ için iddia (d)'deki gibidir. Tersine $0 \leq \alpha+\beta$, $0 \leq \alpha$ ve $\beta < 0$ seçildiğinde (d)'den dolayı

$$\alpha * A = ((\alpha+\beta) * A) \oplus ((-\beta) * A)$$

elde edilir. Lemma 3.1.10'dan

$$\begin{aligned}(\alpha * A) \oplus (\beta * A) &= ((\alpha+\beta) * A) \oplus ((-\beta) * A) \oplus (\beta * A) \\ &= ((\alpha+\beta) * A) \oplus ((-\beta) * A) \oplus ((-\beta) * (\ominus A)) \\ &= ((\alpha+\beta) * A) \oplus (-\beta) * (A \oplus (\ominus A)) \\ &= ((\alpha+\beta) * A) \oplus (-\beta) * \{0\}^1 \\ &= ((\alpha+\beta) * A) \oplus \{0\}^1 \\ &= (\alpha+\beta) * A\end{aligned} \tag{3.2}$$

sağlanır. $\oplus$ işleminin değişme özelliğinden $\alpha < 0$, $0 \leq \beta$ ve $0 \leq \alpha+\beta$ için istenilen eşitlik elde edilir. $\alpha+\beta < 0$ için $0 \leq -\alpha$ veya $0 \leq -\beta$ olduğunda ve Eş. 3.2 kullanıldığında

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta) * A &= (-(\alpha+\beta)) * (\ominus A) = ((-\alpha) * (\ominus A)) \oplus ((-\beta) * (\ominus A)) \\ &= (\alpha * A) \oplus (\beta * B)\end{aligned}$$

elde edilir.

X^δ içinde $\subseteq$ sıralaması $\oplus$ ve $*$ işlemlerini korur.

3.1.12. Lemma

Herhangi iki $A, B \in X^\delta$ için $A \subseteq B$ olmak üzere her $C \in X^\delta$ için $A \oplus C \subseteq B \oplus C$ ve her $0 \leq \alpha$ için $\alpha * A \subseteq \alpha * B$ sağlanır.

İspat

$A \oplus C = (A+C)^{\text{ul}} \subseteq (B+C)^{\text{ul}} = B \oplus C$ ve $\alpha * A = \alpha A \subseteq \alpha B = \alpha * B$ elde edilir.

Sonraki lemma Teorem 3.3.9'un ispatında kullanılacaktır.

3.1.13. Lemma

X yönlü ise $A,B,C \in X^{\delta}$ için $(A \vee B) \oplus C = (A \oplus C) \vee (B \oplus C)$ sağlanır.

İspat

X yönlü iken Önerme 3.1.3'den herhangi iki $A,B \in X^{\delta}$ için $A \vee B = (A \cup B)^{\text{ul}} \in X^{\delta}$ sağlanır. Lemma 3.1.9'dan dolayı

$$\begin{aligned}(A \vee B) \oplus C &= ((A \cup B)^{\text{ul}} + C)^{\text{ul}} = ((A \cup B) + C)^{\text{ul}} = ((A+C) \cup (B+C))^{\text{ul}} \\ &\subseteq ((A+C)^{\text{ul}} \cup (B+C)^{\text{ul}})^{\text{ul}} = ((A \oplus C) \cup (B \oplus C))^{\text{ul}} \\ &= (A \oplus C) \vee (B \oplus C)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}A \oplus C &= (A+C)^{\text{ul}} = \left(A^{\text{ul}} + C\right)^{\text{ul}} \\ &\subseteq ((A \cup B)^{\text{ul}} + C)^{\text{ul}} = (A \vee B) \oplus C\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $B \oplus C \subseteq (A \vee B) \oplus C$ olduğundan

$$(A \oplus C) \vee (B \oplus C) = ((A \oplus C) \cup (B \oplus C))^{\text{ul}} \subseteq ((A \vee B) \oplus C)^{\text{ul}} = (A \vee B) \oplus C$$

sağlanır.

Şimdi X^{δ} vektör uzayı olduğunda, X'ten X^{δ}'ya gömme dönüşümünün lineer olduğunu verelim.

3.1.14. Lemma

$F : X \to X^{\delta}$, $F(x) = \{x\}^{l}$ gömme dönüşümü için $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ iken $F(x+y) = F(x) \oplus F(y)$ ve $F(\alpha x) = \alpha * F(x)$ eşitlikleri sağlanır.

İspat

Her $x, y \in X$ için $F(x) \oplus F(y) = \{x\}^{l} \oplus \{y\}^{l} = (\{x\}^{l} + \{y\}^{l})^{ul} = (\{x+y\}^{l})^{ul} = \{x+y\}^{l} = F(x+y)$ sağlanır. Ayrıca, her $x \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha * F(x) = \alpha * \{x\}^{l} = \begin{cases} \alpha\{x\}^{l} = \{\alpha x\}^{l} & , \quad \alpha > 0 \\ \{0\}^{l} = \{\alpha x\}^{l} & , \quad \alpha = 0 \\ \alpha(\{x\}^{l})^{u} = (\alpha\{x\}^{l})^{l} = (\{\alpha x\}^{u})^{l} = \{\alpha x\}^{l} & , \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

olduğundan $\alpha * F(x) = F(\alpha x)$ eşitliği sağlanır.

3.1.2. Arşimedyan uzaylarda Dedekind tamlama

Buraya kadar, X yönlü sıralı vektör uzayı için X^{δ} üstünde $\oplus, \ominus, *$ işlemlerinin $A \oplus \ominus A = \{0\}^{l}$ eşitliği hâriç diğer tüm vektör uzay koşullarını sağladığı gösterildi. Şimdiki lemma, X^{δ} kümesinin bu işlemlerle bir vektör uzayı olması için Arşimedyan olma özelliğinin çok önemli olduğunu gösterir. Bu kesimde [8, 11, 21, 22] kaynaklarından yararlanılmıştır.

3.1.15. Lemma

X yönlü sıralı vektör uzayının Arşimedyan olması için gerek ve yeter şart $A \in X^{\delta}$ iken $A \oplus \ominus A = \{0\}^{l}$ olmasıdır.

İspat

Öncelikle, X'in Arşimedyan olduğunu kabul edelim ve $A \in X^{\delta}$ olsun. Lemma 3.1.10'dan $A \oplus \ominus A \subseteq \{0\}^{l}$ sağlanır. Diğer yönü göstermek için $x \in (A \oplus \ominus A)^{u} = (A + (-A^{u}))^{ulu} =$

$(A-A^{\mathrm{u}})^{\mathrm{u}}$ alalım. Her $a\in A$ ve her $u\in A^{\mathrm{u}}$ için $a-u\leq x$ olduğundan $a-x\leq u$ ve böylece $a-x\in A^{\mathrm{ul}}=A$ elde edilir. Yani $A-x\subseteq A$ sağlanır. Tümevarımla her $n\in\mathbb{N}$ için $A-nx\subseteq A$ elde edilir. A ve A^{u} boş küme olmadığından $a\in A$ ve $u\in A^{\mathrm{u}}$ seçilirse, her $n\in\mathbb{N}$ için $a-nx\leq u$ ve buradan $n(-x)\leq u-a$ elde edilir. X Arşimedyan olduğundan $-x\leq 0$, yani $0\leq x$ olur.Böylece, $(A\oplus\ominus A)^{\mathrm{u}}\subseteq\{0\}^{\mathrm{u}}$ ve buradan $\{0\}^{\mathrm{l}}=\{0\}^{\mathrm{ul}}\subseteq(A\oplus\ominus A)^{\mathrm{ul}}=A\oplus\ominus A$ sonucuna varılır. Buradan $A\oplus\ominus A=\{0\}^{\mathrm{l}}$ elde edilir.

Diğer yandan, her $A\in X^{\delta}$ için $A\oplus\ominus A=\{0\}^{\mathrm{l}}$ olduğunu kabul edelim ve $x,y\in X$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $nx\leq y$ olsun. $x\leq 0$ olduğunu gösterelim. $\left\{\{mx\}^{\mathrm{l}}:m\in\mathbb{N}\right\}$ kesitler kümesi üstten $\{y\}^{\mathrm{l}}$ ile sınırlıdır. Önerme 3.1.3'den bu kümenin supremumuna A denirse A kümesi X^{δ}'nın içindedir ve $A=\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\{mx\}^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}}$ sağlanır. $(A-x)^{\mathrm{ul}}=(A^{\mathrm{u}}-x)^{\mathrm{l}}=A^{\mathrm{ul}}-x=A-x$ olduğundan dolayı $A-x$ kümesi aynı zamanda X^{δ}'nın bir elemanıdır. $m\in\mathbb{N}$ ve $v\in\{mx\}^{\mathrm{l}}$ için $v+x\leq(m+1)x\in A=A^{\mathrm{ul}}$ olduğundan $\left\{\{mx\}^{\mathrm{l}}:m\in\mathbb{N}\right\}$ kümesinin bir üst sınırı $A-x$ olur. Böylece $v+x\in A^{\mathrm{ul}}=A$ sağlanır ve $v\in A-x$ olur. A en küçük üst sınır olduğundan $A\subseteq A-x$ elde edilir. Lemma 3.1.12'den dolayı, $A\oplus\ominus A\subseteq(A-x)\oplus\ominus A=(A-x-A^{\mathrm{u}})^{\mathrm{ul}}=(A-A^{\mathrm{u}})^{\mathrm{ul}}-x=A\oplus\ominus A-x$ elde edilir. $A\oplus\ominus A=\{0\}^{\mathrm{l}}$ olduğundan, $\{0\}^{\mathrm{l}}\subseteq\{0\}^{\mathrm{l}}-x$ sağlanır ve böylece $x=v\leq 0$ yani $0=v-x$ olacak biçimde $v\in\{0\}^{\mathrm{l}}$ vardır.

3.1.16. Teorem

(X,K) yönlü sıralı vektör uzayı olmak üzere $\oplus$, $*$ işlemleri ve $\subseteq$ sıralaması ile donatılmış Dedekind kesitlerin X^{δ} kümesinin Dedekind tam Riesz uzayı olması için gerek ve yeter şart X'in Arşimedyan olmasıdır.Bu durumda $F:X\to X^{\delta}$, $F(x)=\{x\}^{\mathrm{l}}$ dönüşümü bipozitif lineer dönüşümdür ve $F(X)$, X^{δ} içinde sıra yoğundur.

İspat

X^{δ} vektör uzayı ise her $A\in X^{\delta}$ için $A\oplus\ominus A=\{0\}^{\mathrm{l}}$ olduğundan Lemma 3.1.15'den dolayı X Arşimedyandır.

X Arşimedyan olsun. Lemma 3.1.15, Lemma 3.1.10 (a)-(c), (f)-(g) ve Lemma 3.1.11 (c)-(e)'den dolayı X^{δ} vektör uzayıdır ve sıfırı $\{0\}^{\mathrm{l}}$ kümesidir. Lemma 3.1.12'den X^{δ} sıralı

vektör uzayıdır. Önerme 3.1.3'den X^δ Dedekind tam Riesz uzayıdır. Lemma 3.1.14'den F dönüşümü lineerdir. Ayrıca Önerme 3.1.8'den F dönüşümü bipozitif ve görüntüsü $F(X)$, X^δ içinde sıra yoğundur.

3.1.17. Tanım

X yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayı için $\oplus$, $*$ işlemleri ve $\subseteq$ sıralaması ile donatılmış X^δ Dedekind tam Riesz uzayına X'in Dedekind tamlaması denir.

Bundan sonraki kısımda X uzayının sıra yoğun olarak gömüldüğü her Dedekind tam Riesz uzayının X^δ'ya izomorf olduğu gösterilecektir. Bu anlamda Dedekind tamlamanın tek olduğu yorumu yapılabilir.

Dedekind tamlamasının tekliğinin ispatı, gömme dönüşümü için iki uygun genişleme teoremine dayanır. Teorem 3.1.18, Riesz homomorfizminin genişletilmesi için çok önemli bir rol oynayacaktır. Teorem 3.1.22 ise Riesz uzay teorisinde iyi bilinir.

Bir X Riesz uzayının Y alt uzayı için, Y'nin elemanlarının sonlu supremumlarının farkları kümesini Z olarak alırsak, bu küme X'in bir Riesz alt uzayıdır. Bu durumda Z'nin Y tarafından üretilen X'in bir Riesz alt uzayı olduğu veya Y'nin Z'yi Riesz uzayı olarak ürettiği ifade edilir.

3.1.18. Teorem

X ve Y sıralı vektör uzayları ve $f : X \to Y$ dönüşüm olmak üzere her boş olmayan sonlu $A, B \subseteq X$ alt kümeleri için $A^{\mathrm{u}} = B^{\mathrm{u}} \Rightarrow f(A)^{\mathrm{u}} = f(B)^{\mathrm{u}}$ sağlanır.

W ve Z Riesz uzayları ve $F : X \to W$ ve $G : Y \to Z$ bipozitif lineer dönüşümler olsun. W, $F(X)$ tarafından Riesz uzayı olarak üretilirse ve Z, $G(Y)$ içinde sıra yoğun ise $\hat{f} \circ F = G \circ f$ olacak biçimde bir tane $\hat{f} : W \to Z$ Riesz homomorfizması vardır.

Dahası, $\hat{f}$ aralığı $G(f(X))$ tarafından üretilen Z'nin Riesz alt uzayına eşittir.

İspat

$F(X)$, W'yi Riesz uzayı olarak ürettiğinden bazı $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n \in X$ ve her $y \in W$ için $y = F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_m) - F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n)$ eşittir. $\hat{f} : W \to Z$ dönüşümünü $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n \in X$ iken

$$\begin{aligned}&\hat{f}(F(a_1)\vee\ldots\vee F(a_m)-F(b_1)\vee\ldots\vee F(b_n)) \\ &= G(f(a_1))\vee\ldots\vee G(f(a_m))-G(f(b_1))\vee\ldots\vee G(f(b_n))\end{aligned} \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlayalım. Burada Eş. 3.3'ün sağ tarafının a_i ve b_j seçiminden bağımsız olduğu gösterildiğinde $\hat{f}$ iyi tanımlı olacaktır. Bu bağımsızlığın doğrulanması aşağıda ilk iki adımda yapılmaktadır.

Adım 1. Her $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n \in X$ için $F(x_1) \vee \ldots \vee F(x_m) = F(y_1) \vee \ldots \vee F(y_n)$ eşitliğinden $G(f(x_1)) \vee \ldots \vee G(f(x_m)) = G(f(y_1)) \vee \ldots \vee G(f(y_n))$ eşitliğinin elde edildiğini gösterelim. Bunun için öncelikle

$$\{x_i : i = 1,\ldots,m\}^{\mathrm{u}} = \{y_j : j = 1,\ldots,n\}^{\mathrm{u}} \tag{3.4}$$

olduğunu görelim. $u \in \{x_i : i = 1\ldots,m\}^{\mathrm{u}}$ olacak biçimdeki herhangi bir $u \in X$ için $F(u) \in \{F(x_i) : i = 1,\ldots,m\}^{\mathrm{u}}$, dolayısıyla $F(y_1) \vee \ldots \vee F(y_n) = F(x_1) \vee \ldots \vee F(x_m) \leq F(u)$ olduğundan $F(y_1) \vee \ldots \vee F(y_n)$, $\{F(y_j) : j = 1,\ldots,n\}$ kümesinin bir üst sınırdır ve $F(u) \in \{F(y_j) : j = 1,\ldots,n\}^{\mathrm{u}}$ sağlanır. Böylece $u \in \{y_j : j = 1,\ldots,n\}^{\mathrm{u}}$ olduğundan $\{x_i : i = 1,\ldots,m\}^{\mathrm{u}} \subseteq \{y_j : j = 1,\ldots,n\}^{\mathrm{u}}$ elde edilir. Simetrik olarak, benzer yöntemle ters içerme elde edildiğinden Eş. 3.4 sağlanır.

Hipotezden dolayı $\{f(x_i) : i = 1,\ldots,m\}^{\mathrm{u}} = \{f(y_j) : j = 1,\ldots,n\}^{\mathrm{u}}$ sağlanır. G bipozitif olduğundan

$$\{G(f(x_i)) : i = 1,\ldots,m\}^{\mathrm{u}} = \{G(f(y_j)) : j = 1,\ldots,n\}^{\mathrm{u}} \tag{3.5}$$

elde edilir. $G(Y)$, Z içinde sıra yoğun olduğundan

$$\begin{aligned} G(f(x_1)) \vee \ldots \vee G(f(x_m)) &= \inf\{G(f(x_i)) : i = 1, \ldots, m\}^{\mathrm{u}} \\ &= \inf\left\{G\left(f\left(y_j\right)\right) : j = 1, \ldots, n\right\}^{\mathrm{u}} \\ &= G(f(y_1)) \vee \ldots \vee G(f(y_n)) \end{aligned}$$

sonucu ortaya çıkar ve Adım 1'in ispatı tamamlanır.

Adım 2. Her $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_q \in X$ için

$$F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_m) - F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n) = F(c_1) \vee \ldots \vee F(c_p) - F(d_1) \vee \ldots \vee F(d_q) \quad (3.6)$$

iken

$$\begin{aligned} &G(f(a_1)) \vee \ldots \vee G(f(a_m)) - G(f(b_1)) \vee \ldots \vee G(f(b_n)) \\ &= G(f(c_1)) \vee \ldots \vee G(f(c_p)) - G(f(d_1)) \vee \ldots \vee G(f(d_q)) \end{aligned} \quad (3.7)$$

olduğunu gösterelim. Eş. 3.6'yı

$$F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_m) + F(d_1) \vee \ldots \vee F(d_q) = F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n) + F(c_1) \vee \ldots \vee F(c_p)$$

olarak yeniden yazalım. Buradan

$$\begin{aligned} F(a_1 + d_1) \vee \ldots \vee F\left(a_m + d_q\right) &= (F(a_1) + F(d_1)) \vee \ldots \vee \left(F(a_m) + F\left(d_q\right)\right) \\ &= F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_m) + F(d_1) \vee \ldots \vee F\left(d_q\right) \\ &= F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n) + F(c_1) \vee \ldots \vee F(c_p) \\ &= F(b_1 + c_1) \vee \ldots \vee F(b_n + c_p) \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. Adım 1'in ispatı ve Eş. 3.8'dekine benzer işlemler yardımıyla Eş. 3.7'yi veren

$$\begin{aligned} &G(f(a_1)) \vee \ldots \vee G(f(a_m)) + G(f(d_1)) \vee \ldots \vee G\left(f\left(d_q\right)\right) \\ &= G(f(a_1 + d_1)) \vee \ldots \vee G\left(f\left(a_m + d_q\right)\right) \end{aligned}$$

$$= G(f(b_1 + c_1)) \vee \ldots \vee G(f(b_n + c_p))$$
$$= G\left(f\left(b_j\right)\right) \vee \ldots \vee G(f(b_n)) + G(f(c_k)) \vee \ldots \vee G(f(c_p))$$

eşitlikleri sağlanır.

Böylece Eş. 3.3'de verilen $\hat{f} : W \to Z$ dönüşümü iyi tanımlıdır.

Adım 3. Bu aşamada $\hat{f}$ dönüşümünün lineer olduğunu göstermek için $u, v \in W$ alalım. $u = F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_m) - F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n)$ ve $v = F(c_1) \vee \ldots \vee F(c_p) - F(d_l) \vee \ldots \vee F\left(d_q\right)$ olacak biçimde $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_q \in X$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} u + v &= F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_m) + F(c_1) \vee \ldots \vee F(c_p) \\ &\quad - F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n) - F(d_1) \vee \ldots \vee F\left(d_q\right) \\ &= F(a_1 + c_1) \vee \ldots \vee F(a_m + c_p) - F(b_1 + d_1) \vee \ldots \vee F\left(b_n + d_q\right) \end{aligned}$$

ve Adım 3'den

$$\begin{aligned} \hat{f}(u+v) &= G(f(a_1 + c_1)) \vee \ldots \vee G(f(a_m + c_p)) \\ &\quad - G(f(b_1 + d_1)) \vee \ldots \vee G\left(f\left(b_n + d_q\right)\right) \\ &= G(f(a_1)) \vee \ldots \vee G(f(a_m)) + G(f(c_1)) \vee \ldots \vee G(f(c_p)) \\ &\quad - G(f(b_1)) \vee \ldots \vee G(f(b_n)) - G(f(d_1)) \vee \ldots \vee G\left(f\left(d_q\right)\right) \\ &= \hat{f}(u) + \hat{f}(v). \end{aligned}$$

elde edilir. $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha u = F(\alpha a_1) \vee \ldots \vee F(\alpha a_m) - F(\alpha b_1) \vee \ldots \vee F(\alpha b_n)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha u) &= G(f(\alpha a_1)) \vee \ldots \vee G(f(\alpha a_m)) - G(f(\alpha b_1)) \vee \ldots \vee G(f(\alpha b_n)) \\ &= \alpha(G(f(a_1)) \vee \ldots \vee G(f(a_m)) - G(f(b_1)) \vee \ldots \vee G(f(b_n))) \\ &= \alpha \hat{f}(u). \end{aligned}$$

sağlanır. Ek olarak, $-u = F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n) - F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_m)$ için

$$\begin{aligned}
\hat{f}(-u) &= G(f(b_1)) \vee \ldots \vee G(f(b_n)) - G(f(a_1)) \vee \ldots \vee G(f(a_m)) \\
&= -(G(f(a_1)) \vee \ldots \vee G(f(a_m)) - G(f(b_1)) \vee \ldots \vee G(f(b_n))) \\
&= -\hat{f}(u)
\end{aligned}$$

oldğundan $\hat{f}$ lineerdir.

Adım 4. $\hat{f}$ dönüşümünün Riesz homomorfizmi olduğunu gösterelim. Adım 3'deki seçimler yardımıyla

$$\begin{aligned}
u \vee v &= (F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_m) - F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n)) \\
&\quad \vee (F(c_1) \vee \ldots \vee F(c_p) - F(d_1) \vee \ldots \vee F\left(d_q\right)) \\
&= (F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_m)) \\
&\quad \vee \left(F(c_1) \vee \ldots \vee F(c_p) + F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n) - F(d_1) \vee \ldots \vee F\left(d_q\right)\right) \\
&\quad - (F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n)) \\
&= \left(F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_m) + F(d_1) \vee \ldots \vee F\left(d_q\right)\right) \\
&\quad \vee (F(c_1) \vee \ldots \vee F(c_p) + F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n)) \\
&\quad - (F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n)) - \left(F(d_1) \vee \ldots \vee F\left(d_q\right)\right) \\
&= \left(F(a_1 + d_1) \vee \ldots \vee F\left(a_m + d_q\right)\right) \vee (F(c_1 + b_1) \vee \ldots \vee F(c_p + b_n)) \\
&\quad - \left(F(b_1 + d_1) \vee \ldots \vee F\left(b_n + d_q\right)\right)
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. ilk ve son ifadelerin $\hat{f}$ görüntüleri alınırsa

$$\begin{aligned}
\hat{f}(u \vee v) &= \left(G(f(a_1 + d_1)) \vee \ldots \vee G(f\left(a_m + d_q\right))\right) \\
&\quad \vee (G(f(c_1 + b_1)) \vee \ldots \vee G(f(c_p + b_n))) \\
&\quad - \left(G(f(b_1 + d_1)) \vee \ldots \vee G(f\left(b_n + d_q\right))\right) \\
&= (G(f(a_1)) \vee \ldots \vee G(f(a_m)) - G(f(b_1)) \vee \ldots \vee G(f(b_n))) \\
&\quad \vee \left(G(f(c_1)) \vee \ldots \vee G(f(c_p)) - G(f(d_1)) \vee \ldots \vee G(f\left(d_q\right))\right) \\
&= \hat{f}(u) \vee \hat{f}(v)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Adım 5. $\hat{f}$ dönüşümünün tek olduğunu ispatlayalım. $\hat{f}: W \to Z$ dönüşümü için $\hat{f} \circ F = G \circ f$ olduğundan her $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in X$ için

$$\begin{aligned}
&\hat{f}(F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_m) - F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n)) \\
&= \hat{f}(F(a_1)) \vee \ldots \vee \hat{f}(F(a_m)) - \hat{f}(F(b_1)) \vee \ldots \vee \hat{f}(F(b_n)) \\
&= G(f(a_1)) \vee \ldots \vee G(f(a_m)) - G(f(b_1)) \vee \ldots \vee G(f(b_n))
\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadeden $\hat{f}$ dönüşümünün tekliği elde edilmiş olur.

Adım 6. $\hat{f}$ dönüşümünün görüntüsünün Z içinde $G(f(X))$ tarafından üretilen Z_0 Riesz alt uzayına eşit olduğunu gösterelim. Tanımından dolayı $\hat{f}$ dönüşümünün görüntüsü Z_0 içindedir. Tersine $z \in Z_0$ ise $z = G(f(a_1)) \vee \ldots \vee G(f(a_m)) - G(f(b_1)) \vee \ldots \vee G(f(b_n))$ olacak biçimde $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in X$ vardır. $y = F(a_1) \vee \ldots \vee F(a_m) - F(b_1) \vee \ldots \vee F(b_n) \in W$ alınırsa $\hat{f}(y) = z$ sağlanır.

3.1.19. Lemma

X yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayı, Y ve Z Riesz uzayları, $F: X \to Y$ ve $G: X \to Z$ bipozitif lineer dönüşüm, $F(X)$, Y'de sıra yoğun, $G(X)$, Z'de sıra yoğun ve $f = F \circ G^{-1}: G(X) \to Y$ olsun. $G(X)$'in herhangi iki boş olmayan sonlu A ve B alt kümeleri için $A^{\mathrm{u}} = B^{\mathrm{u}}$ ise $f(A)^{\mathrm{u}} = f(B)^{\mathrm{u}}$ sağlanır.

İspat

Boş olmayan sonlu $A, B \subseteq G(X)$ kümeleri için $A^{\mathrm{u}} = B^{\mathrm{u}}$ alalım. Simetrik durumdan dolayı $f(A)^{\mathrm{u}} \subseteq f(B)^{\mathrm{u}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Y ve Z Riesz uzayları, A ve B boş olmayan sonlu kümeler olduğundan $u = \sup f(A)$ ve $v = \sup f(B)$ alıp $v \leq u$ olduğunu, yani $u \leq F(x)$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $v \leq F(x)$ sağlandığını gösterelim. $F(x)$, $f(A) = \left(F \circ G^{-1}\right)(A)$ için bir üst sınırdır. F bipozitif olduğundan x, $G^{-1}(A)$'nın bir üst sınırı, dolayısıyla G bipozitif olduğundan $G(x)$, A'nın bir üst sınırı olur. $A^{\mathrm{u}} = B^{\mathrm{u}}$

olduğundan $G(x)$, B'nin bir üst sınırı, dolayısıyla x, $G^{-1}(B)$'in bir üst sınırı olur. Böylece $F(x)$, $f(B)$ için bir üst sınırdır ve $v \leq F(x)$ sağlanır. $F(X)$, Y içinde sıra yoğun olduğundan

$$v = \inf\{F(x) : x \in X, v \leq F(x)\} \leq \inf\{F(x) : x \in X, u \leq F(x)\} = u$$

elde edilir. Buradan $f(A)^{\mathrm{u}} \subseteq f(B)^{\mathrm{u}}$ sonucu ortaya çıkar.

3.1.20. Tanım

(X,K) ile (Y,L) Riesz uzayları ve $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ olmak üzere, her $x,y \in X$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ oluyorsa T Riesz homomorfizmi, ek olarak T birebir ve örten ise T Riesz izomorfizmi diye adlandırılır.

3.1.21. Teorem

Ω kompakt Hausdorff uzayı ve $f : C(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineer dönüşüm olsun. f dönüşümünün Riesz homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart her $x \in C(\Omega)$ için $f(x) = ax(\omega)$ olacak biçimde $\omega \in \Omega$ ve $0 < a \in \mathbb{R}$ olmasıdır ([8], Theorem 2.33).

Riesz uzayı teorisinin iyi bilinen aşağıdaki sonucu [21] ve bağımsız olarak [22]'de gösterilmiştir. Ayrıca [8], Theorem 2.29'a bakılabilir.

3.1.22. Teorem

Y Riesz uzayı, Z Dedekind tam Riesz uzayı ve W, Y'nin en büyük Riesz alt uzayı olsun. $f : W \to Z$ Riesz homomorfizm ise f'yi genişleten bir $H : Y \to Z$ Riesz homomorfizmi vardır.

Aşağıdaki teorem Dedekind tamlamanın tek olduğunu belirtir.

3.1.23. Teorem

X yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayı, Y ve Z Dedekind tam Riesz uzayları, $F : X \to Y$

ve $G : X \to Z$ bipozitif lineer dönüşümler, $F(X)$, Y içinde sıra yoğun ve $G(X)$, Z içinde sıra yoğun olsun. O zaman Y ve Z izomorf Riesz uzaylarıdır.

İspat

$f = G \circ F^{-1} : F(X) \subseteq Y \to Z$ ve $g = F \circ G^{-1} : G(X) \subseteq Z \to Y$ olsun. Y_0 ile $F(X)$ tarafından üretilen Y'nin Riesz alt uzayını, Z_0 ile $G(X)$ tarafından üretilen Z'nin Riesz alt uzayı gösterelim. Teorem 3.1.18'e ve Lemma 3.1.19'a göre sırasıyla f ve g dönüşümlerini genişleten $\hat{f} : Y_0 \to Z$ ve $\hat{g} : Z_0 \to Y$ Riesz homomorfizmleri vardır. Teorem 3.1.22'den sırasıyla $\hat{f}$ ve $\hat{g}$ dönüşümlerinin genişlemeleri olan $i : Y \to Z$ ve $j : Z \to Y$ Riesz homomorfizmleri vardır.

Her $y \in Y$ için $j(i(y)) \leq y$ olduğunu göstererek devam edelim. $F(X)$, Y içinde sıra yoğun olduğundan herhangi bir $y \in Y$ için $y = \inf\{F(x) : x \in X,\ y \leq F(x)\}$ sağlanır. i pozitif olduğundan $y \leq F(x)$ şartını sağlayan $x \in X$ için

$$i(y) \leq i(F(x)) = f(F(x)) = \left(G \circ F^{-1}\right)(F(x)) = G(x).$$

ve j pozitif olduğundan

$$j(i(y)) \leq j(G(x)) = g(G(x)) = F(x)$$

olur. Sıra yoğunluktan dolayı $j(i(y)) \leq y$ elde edilir. Önceki adımda y yerine $-y$ düşünülerek her $y \in Y$ için $y \leq j(i(y))$ bulunur. Dolayısıyla $j(i(y)) = y$ sağlanır. Böylece $j : Z \to Y$ örten Riesz homomorfizmi yani Riesz izomorfizmidir.

Sonuç olarak, her yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayının bir tek Dedekind tamlaması vardır.

3.2. Pre-Riesz Uzayları

Önceki bölümde her X yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayının bir Dedekind tam Riesz uzayına sıra yoğun bir alt uzay olarak gömülebileceği verildi. Bir çok amaç için Dedekind tam olması gerekmeyen Riesz uzayılarına da gömme yapılabilmektedir. Bir Riesz uzayını sıra yoğun alt uzay olarak gömmek için X'in Arşimedyan olması koşulunun pre-Riesz adı verilen bir özelliğe genişletilebildiği ortaya çıkmıştır. Bu bölümde bu özellik tanıtılacaktır. Pre-Riesz uzayı kavramı van Haandel [6] tarafından verilmiştir. Bu bölümün işleyişi onun doktora tezine dayanmaktadır.

3.2.1. Tanım

(X,K) sıralı vektör uzayı olmak üzere her $x,y,z \in X$ için $\{x+z,y+z\}^{\mathrm{u}} \subseteq \{x,y\}^{\mathrm{u}}$ iken $z \in K$ oluyorsa X'e pre-Riesz uzayı denir.

Tanım 3.2.1'deki önerme herhangi bir Riesz uzayında $x \vee y \leq (x+z) \vee (y+z) = (x \vee y)+z$ iken $0 \leq z$ önermesine indirgenir. Dolayısıyla her Riesz uzayı pre-Riesz uzayıdır. Pre-Riesz uzayının tanımını aşağıdaki biçimde yeniden düzenlenebilir.

3.2.2. Lemma

X sıralı vektör uzayı olsun. Her $x,y \in X$ için $\{x+y,y\}^{\mathrm{u}} \subseteq \{x,0\}^{\mathrm{u}}$ olacak biçimde $0 \leq y$ varsa X pre-Riesz uzayıdır.

İspat

$v,y,z \in X$ için $\{v+y,z+y\}^{\mathrm{u}} \subseteq \{v,z\}^{\mathrm{u}}$ olsun. $x = v-z$ alalım. $w \in \{x+y,y\}^{\mathrm{u}}$ ise $w+z \in \{x+y+z,y+z\}^{\mathrm{u}} = \{v+y,z+y\}^{\mathrm{u}} \subseteq \{v,z\}^{\mathrm{u}}$ sağlanır, yani $w \in \{v-z,z-z\}^{\mathrm{u}} = \{x,0\}^{\mathrm{u}}$ elde edilir. Buradan $\{x+y,y\}^{\mathrm{u}} \subseteq \{x,0\}^{\mathrm{u}}$ sonucu ortaya çıkar. Özel olarak $v = z$ (yani $x = 0$) alınırsa $0 \leq y$ sağlanır. Böylece X pre-Riesz uzayıdır.

Pre-Riesz uzayları, sıralı vektör uzaylarının geniş bir sınıfını oluşturduğunu aşağıdaki önerme ile verelim.

3.2.3. Önerme

Her pre-Riesz uzayı yönlüdür ve her yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayı pre-Riesz uzayıdır ([6], Teorem 1.7(ii)) .

İspat

(X,K) pre-Riesz uzayının yönlü olmadığını, yani herhangi iki $x,y \in X$ için $\{x,y\}$ kümesinin üst sınırı olmadığını kabul edelim. Bu durumda her $z \in X$ için $\{x+z, y+z\}$ kümesinin üst sınırı mevcut değildir. Özel olarak $z = y - x$ alınırsa, $\{x,y\}$ kümesinin bir üst sınırı y değilse (yani $x \leq y$ sağlanmıyorsa), $z \notin K$ olur. Bu durum X'in pre-Riesz uzayı olmasıyla çeliştiğinden dolayı X yönlü olmak zorundadır.

X yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayı ve $x,y,z \in X$ için $\{x+z, y+z\}^{\mathrm{u}} \subseteq \{x,y\}^{\mathrm{u}}$ olsun. X yönlü olduğundan bir $v \in X$ için $v \in \{x,y\}^{\mathrm{u}}$, dolayısıyla $v+z \in \{x+z, y+z\}^{\mathrm{u}}$ ve böylece $v+z \in \{x,y\}^{\mathrm{u}}$ sağlanır. Tümevarımla, her $n \in \mathbb{N}$ için $v+nz \in \{x,y\}^{\mathrm{u}}$ ve buradan $x \leq v+nz$ olduğundan $-nz \leq v-x$ elde edilir. X Arşimedyan olduğundan $-z \leq 0$ sonucu elde edilir ki, bu da X'in pre-Riesz uzayı olduğunu gösterir.

Bir Riesz uzayına sıra yoğun olarak gömülebilen bir sıralı vektör uzayının pre-Riesz uzayı olması, bir sonraki önermenin özel bir sonucudur.

3.2.4. Önerme

X sıralı vektör uzayı, Y pre-Riesz uzayı ve $f : X \to Y$ bipozitif lineer dönüşüm olsun. $f(X)$, Y içinde sıra yoğun ise X pre-Riesz uzayıdır.

İspat

Herhangi üç $x,y,z \in X$ için $\{x+z, y+z\}^{u} \subseteq \{x,y\}^{u}$ ve $w \in \{f(x)+f(z),\ f(y)+f(z)\}^{u}$ olsun. $f(X)$, Y içinde sıra yoğun olduğundan $w = \inf\{f(v) : v \in X,\ w \leq f(v)\}$ sağlanır. $w \leq f(v)$ olacak biçimdeki bir $v \in X$ için $f(x+z) \leq f(v)$ ve $f(y+z) \leq f(v)$ olduğundan f'nin bipozitifliğinden $v \in \{x+y, y+z\}^{u}$, dolayısıyla $v \in \{x,y\}^{u}$ ve $f(v) \in \{f(x), f(y)\}^{u}$ elde edilir. Bu durumda $w \in \{f(x), f(y)\}^{u}$ olduğundan $\{f(x)+f(z), f(y)+f(z)\}^{u} \subseteq \{f(x), f(y)\}^{u}$ sağlanır. Y pre-Riesz uzayı olduğundan $0 \leq f(z)$ ve dolayısıyla $0 \leq z$ olur. Böylece X pre-Riesz uzayıdır.

Pre-Riesz uzayının tanımındaki $\{x,y\}$ ve $\{z\}$ kümeleri aşağıdaki lemmanın (b) kısmında gösterildiği gibi keyfî boş olmayan kümelere genişletilebilir ([6], Teorem 4.15). Lemmanın (a) kısmı ise Önerme 3.3.8'in ispatında kullanılacaktır.

3.2.5. Lemma

X pre-Riesz uzayı olsun.

(a) Her boş olmayan sonlu $A \subseteq X$ kümesi ve her $x \in X$ için $(x+A)^{u} \subseteq A^{u}$ ise $0 \leq x$ sağlanır.

(b) Her boş olmayan sonlu $A, B, C \subseteq X$ kümeleri için $(A+B)^{u} \subseteq (A+C)^{u}$ ise $B^{u} \subseteq C^{u}$ sağlanır.

İspat

X yönlü olduğundan X'in her sonlu A alt kümesinin üst sınırları kümesi A^{u} boş olmayan kümedir.

(a) A'nın elemanlarının sayısı $s(A)$ olmak üzere tümevarımla ispat yapalım. X pre-Riesz uzayı olduğundan $\varnothing \neq A \subseteq X$ olacak biçimdeki her A kümesi ve her $x \in X$ için $n = 2$ iken

$$s(A) \leq n \text{ ve } (x+A)^{u} \subseteq A^{u} \Longrightarrow 0 \leq x \tag{3.9}$$

sağlanır. $2 \leq n \in \mathbb{N}$ için Eş. 3.9'un doğru olduğunu kabul edelim. $s(A) \leq n+1$ ve $(x+A)^{\mathrm{u}} \subseteq A^{\mathrm{u}}$ iken $0 \leq x$ olduğunu gösterelim. X'in $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ve $A = \{a, b_1, \ldots, b_n\}$ alt kümeleri için $A = \{a\} \cup B$ ve $s(B) \leq n$ olduğundan Eş. 3.9'u B'de uygulayarak $(x+B)^{\mathrm{u}} \subseteq B^{\mathrm{u}}$ iken $0 \leq x$ olduğunu göstermeliyiz.

İlk olarak her $z \in B^{\mathrm{u}}$ ve $w \in B^{\mathrm{ul}}$ için $0 \leq x+z-w$ olduğunu gösterelim. $z \in B^{\mathrm{u}}$, $w \in B^{\mathrm{ul}}$ ve $y \in (x+z-w+\{a,z\})^{\mathrm{u}}$ olsun. X'in pre-Riesz uzayı olmasını uygulayabilmek için öncelikle $y \in \{a,z\}^{\mathrm{u}}$ olduğunu görelim. $v \in (x+\{a,z\})^{\mathrm{u}}$ ise $a \leq v-x$ ve her $b \in B$ için $b \leq z \leq v-x$ olduğundan $v \in (x+A)^{\mathrm{u}}$ olur. Özel olarak $v = y-(z-w)$ alınırsa $y-(z-w) \in (x+\{a,z\})^{\mathrm{u}} \subseteq (x+A)^{\mathrm{u}} \subseteq A^{\mathrm{u}} = (\{a\} \cup B)^{\mathrm{u}}$ sonucuna varılır. $w \in B^{\mathrm{ul}} \subseteq (\{a\} \cup B)^{\mathrm{ul}}$ iken $a \leq y-(z-w)$ ve $w \leq y-(z-w)$ olduğundan $a \leq a+(z-w) \leq y$ ve ayrıca $z \leq y$ olduğundan $y \in \{a,z\}^{u}$ bulunur. Böylece $(x+z-w+\{a,z\})^{\mathrm{u}} \subseteq \{a,z\}^{\mathrm{u}}$ sağlanır. X pre-Riesz uzayı olduğundan $0 \leq x+z-w$ elde edilir. Her $w \in B^{\mathrm{ul}}$ için $w \leq x+z$ olduğundan $x+z \in B^{\mathrm{ulu}} = B^{\mathrm{u}}$ olduğu sonucuna varılır. Böylece $(x+B)^{\mathrm{u}} = x+B^{\mathrm{u}} \subseteq B^{\mathrm{u}}$ olur. $s(B) \leq n$ ve Eş. 3.9'daki önerme n için doğru olduğundan $0 \leq x$ olur.

(b) $z \in B^{\mathrm{u}}$ olsun. $v \in (A+z)^{\mathrm{u}}$ ise her $a \in A$, $b \in B$ için $a+b \leq a+z \leq v$ olduğundan $v \in (A+B)^{\mathrm{u}} \subseteq (A+C)^{\mathrm{u}}$ ve böylece $(A+z)^{\mathrm{u}} \subseteq (A+C)^{\mathrm{u}}$ bulunur. Her $c \in C$ için $(A+z)^{\mathrm{u}} \subseteq (A+C)^{\mathrm{u}} \subseteq (A+c)^{\mathrm{u}}$ olduğundan $(A+z-c)^{\mathrm{u}} \subseteq A^{\mathrm{u}}$ olur. (a)'dan dolayı $0 \leq z-c$, yani $z \in C^{\mathrm{u}}$ sağlanır.

Her Riesz uzayı pre-Riesz uzayı olduğundan Arşimedyan olmayan Riesz uzayları, Arşimedyan olmayan pre-Riesz uzaylarına örnektir. Aşağıdaki örnek, $\mathbb{R}^2$'nin hangi konilerle pre-Riesz uzayı olduğunu, hangileriyle olmadığını açıklar.

Örnek

$\mathbb{R}^2$ içinde çeşitli konileri ele alalım.

(a) $K = \mathbb{R} \times (0,\infty) \cup \{(0,0)\}$ olsun. $\left(\mathbb{R}^2, K\right)$ sıralı vektör uzayı yönlüdür, ancak pre-Riesz uzayı değildir. Gerçekten $x = (-1,0), y = (0,0)$ ve $z = (1,0)$ alınırsa $v = (v_1, v_2) \in \{x+z, y+z\}^{\mathrm{u}} = \{(0,0),(1,0)\}^{\mathrm{u}}$ iken $(0,0) \leq v$ ve $(1,0) \leq v$ olduğundan $0 < v_2$ ve $v \neq (0,0)$ olur

ve bu da $v \in \{x,y\}^{\mathrm{u}} = \{(-1,0),(0,0)\}^{\mathrm{u}}$ verir. Buradan $\{x+z,y+z\}^{\mathrm{u}} \subseteq \{x,y\}^{\mathrm{u}}$ olmasına rağmen $z \notin K$ olur.

(b) $K = \mathbb{R} \times (0,\infty) \cup [0,\infty) \times \{0\}$ olsun. $\left(\mathbb{R}^2, K\right)$ Arşimedyan olmayan Riesz uzayı, dolayısıyla pre-Riesz uzayıdır. Buradaki sıralama sözlüksel sıralamadır.

(c) $K = [0,\infty)^2$ olsun. $\left(\mathbb{R}^2, K\right)$ Riesz uzayı, dolayısıyla pre-Riesz uzayıdır. Buradaki sıralama koordinat sıralaması, yani standart sıralamadır.

(d) $K = (0,\infty)^2 \cup \{(0,0)\}$ olsun. $\left(\mathbb{R}^2, K\right)$ uzayı yönlüdür, ancak pre-Riesz uzayı değildir. (a)'daki gibi $x = (-1,0), y = (0,0)$ ve $z = (1,0)$ alınırsa $v = (v_1,v_2) \in \{x+z,y+z\}^{\mathrm{u}} = \{(0,0),(1,0)\}^{\mathrm{u}}$ iken $(0,0) \leq u$ ve $(1,0) \leq u$ olduğundan $1 \leq v_1$ ve $0 \leq v_2$ olur. Buradan $v \neq (0,0)$ ve $0 < v_2$, dolayısıyla $1 < v_1$ ve $v \neq (1,0)$ olduğundan $v - x = (v_1 + 1, v_2) \in K$ ve $v - y = v \in K$ sağlanır. Böylece $v \in \{x,y\}^{\mathrm{u}} = \{(-1,0),(0,0)\}^{\mathrm{u}}$ olmasına rağmen $z \notin K$ olur.

(e) $K = (0,\infty) \times [0,\infty) \cup \{(0,0)\}$ olsun. (a) ve (d)'de olduğu gibi $(\mathbb{R}^2, K)$ yönlüdür, ancak pre-Riesz uzayı değildir. Gerçekten, $x = (1,0), y = (1,1)$ ve $z = (0,1)$ alınırsa $v = (v_1,v_2) \in \{x+z,y+z\}^{\mathrm{u}} = \{(1,1),(1,2)\}^{\mathrm{u}}$ iken $(1,1) \leq u$ ve $(1,2) \leq u$ olduğundan $1 \leq v_1$ ve $2 \leq v_2$ olur. Buradan $v \neq (1,1)$ olduğundan $1 < v_1$, dolayısıyla $v - x = (v_1 - 1, v_2) \in K$ ve $v - y = (v_1 - 1, v_2 - 1)\, v \in K$ sağlanır. Böylece $v \in \{x,y\}^{\mathrm{u}} = \{(1,0),(1,1)\}^{\mathrm{u}}$ olmasına rağmen $z \notin K$ olur.

$\mathbb{R}^2$ içindeki her üreten K konisini üstteki örneğin (a)-(e) konilerinden birine dönüştüren $\mathbb{R}^2$ üstünde birebir, örten ve lineer bir fonksiyon vardır. Böylece herhangi iki boyutlu sıralı vektör uzayı pre-Riesz uzayı olarak belirlenebilir. Koni üreten ve kapalıysa veya koni yarı sınır doğrularından birinin dahil olduğu bir yarı düzlemse bu uzay pre-Riesz uzayıdır, aksi takdirde değildir.

Örnek

(a) $\mathbb{R}$ üstünde tanımlı sürekli fonksiyonların $C(\mathbb{R})$ vektör uzayı fonksiyonların noktasal sıralamasıyla Riesz uzayı olduğundan $C(\mathbb{R})$ pre-Riesz uzayıdır. $C(\mathbb{R})$'nin derecesi en çok 2 olan polinomların $P^2(\mathbb{R})$ alt uzayı aynı sıralamayla Riesz uzayı değil, ancak sıralı vektör

uzayıdır. Diğer yandan, $C(\mathbb{R})$ Arşimedyan olduğundan $P^2(\mathbb{R})$ de Arşimedyandır. Ayrıca, $P^2(\mathbb{R})$ yönlüdür. Gerçekten, $0 < a_2 \leq a_1$ alındığında $p_1(t) = a_1t^2 + b_1t + c_1$ ve $p_2(t) = a_2t^2 + b_2t + c_2$ biçiminde verilen p_1 ve p_2 polinomlarıyla

$$p_3(t) = 2a_1t^2 + b_1t + \max\left\{c_1, c_2 + \frac{(b_1 - b_2)^2}{4(2a_1 - a_2)}\right\}$$

biçiminde tanımlanan p_3 polinomu için $p_1 \leq p_3$ ve $p_2 \leq p_3$ sağlanır. Dolayısıyla, $P^2(\mathbb{R})$ pre-Riesz uzayıdır.

$$Y = \{f \in C(\mathbb{R}) : \text{bir } p \in P^2(\mathbb{R}) \text{ için } |f| \leq p\}$$

Riesz uzayıdır ve $P^2(\mathbb{R})$, Y içinde sıra yoğundur.

(b) (a)'da yapılanların benzeri $C[0,1]$ Riesz uzayının $P^2[0,1]$ alt uzayı için de geçerlidir. Yani, $P^2[0,1]$ pre-Riesz uzayı $C[0,1]$ Riesz uzayı içinde sıra yoğundur. Aynı biçimde, $[0,1]$ üstünde tanımlanan tüm polinomların $P[0,1]$ pre-Riesz uzayı $C[0,1]$ Riesz uzayı içinde sıra yoğundur.

Bir Arşimedyan sıralı vektör uzayının her alt uzayı da Arşimedyan olduğundan Önerme 3.2.3'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.2.6. Sonuç

Bir Arşimedyan sıralı vektör uzayının her yönlü alt uzayı pre-Riesz uzayıdır.

Aşağıdaki örnekte gösterileceği gibi bir pre-Riesz uzayının yönlü alt uzayı pre-Riesz uzayı olmak zorunda değildir.

Örnek

$X = \mathbb{R}^3$ uzayını $K = (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \cup \{0\} \times [0,\infty)^2$ konisiyle ele alalım. (X,K) uzayı Arşimedyan olmayan Riesz uzayıdır. (X,K) uzayının $Y = \{(y_1, y_2, -y_2) : y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$ alt

uzayı Sayfa 52'deki örneğin (a) maddesindeki uzaya sıra izomorfiktir, yani $(Y, Y \cap K)$ yönlüdür, ancak pre-Riesz uzayı değildir.

Bazı latis formüllerini göz önünde bulundurarak pre-Riesz uzaylarının yapısını oluşturalım. Riesz uzayları teorisinde

$$x + y = x \vee y + x \wedge y \tag{3.10}$$

eşitliği sıklıkla kullanılır. Eş. 3.10 gibi formüller pre-Riesz uzayının latis işlemleri açıkça kullanılmadan Bölüm 3.1'deki $\oplus, \ominus, *, \vee$, ve $\wedge$ işlemleriyle yeniden ifade edilebilir. Bu anlamda Eş. 3.10 formülü yerine pre-Riesz uzaylarında

$$\{x+y\}^{\mathrm{ul}} = \left(\{x,y\}^{\mathrm{ul}} + \{x,y\}^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}} \tag{3.11}$$

formülü kullanılır. Herhangi bir X sıralı vektör uzayında her $x, y \in X$ için Eş. 3.11 formülünün sağlanması için gerek ve yeter şart bu uzayın pre-Riesz uzayı olmasıdır. Bu ifadenin gerek şart kısmı Bölüm 3.3'de oluşturulacak olan Riesz tamlaması aracılığıyla kolayca görülebilecektir. Ancak burada aşağıdaki önerme ile Riesz tamlamasının yapısına ihtiyaç duymadan açık bir ispat verilecektir.

3.2.7. Önerme

X sıralı vektör uzayı olmak üzere, her $x, y \in X$ için Eş. 3.11 formülünün sağlanması için gerek ve yeter şart X'in pre-Riesz uzayı olmasıdır.

İspat

X sıralı vektör uzayında her $x, y \in X$ için Eş. 3.11 geçerli olsun. X'in pre-Riesz uzayı olduğunu göstermek için $x, y, z \in X$ iken $\{x+z, y+z\}^{\mathrm{u}} \subseteq \{x,y\}^{\mathrm{u}}$ alalım. Buradan $\{x,y\}^{\mathrm{ul}} \subseteq \{x+z, y+z\}^{\mathrm{ul}}$ olduğundan önce Lemma 3.1.9'da $A = \{x+y\}^{\mathrm{u}}$ ve $a = z$ alınırsa, sonra

Eş. 3.11 formülü iki kez uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\{x+y+z\}^{\mathrm{ul}} &= (\{x+y\}^{\mathrm{u}}+z)^{\mathrm{l}} = \{x+y\}^{\mathrm{ul}}+z \\
&= \left(\{x,y\}^{\mathrm{ul}}+\{x,y\}^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}}+z \\
&= \left(\{x,y\}^{\mathrm{ul}}+\{x,y\}^{\mathrm{l}}+z\right)^{\mathrm{ul}} = \left(\{x,y\}^{\mathrm{ul}}+\{x+z,y+z\}^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}} \\
&\subseteq \left(\{x+z,y+z\}^{\mathrm{ul}}+\{x+z,y+z\}^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}} \\
&= \{x+y+2z\}^{\mathrm{ul}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $x+y+z \leq x+y+2z$, yani $0 \leq z$ olduğundan X pre-Riesz uzayıdır. X pre-Riesz uzayı ve $x,y \in X$ olsun. İlk olarak, $v \in \left(\{x,y\}^{\mathrm{ul}}+\{x,y\}^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{u}}$ alalım. Herhangi bir $w \in \{x+v-(x+y), y+v-(x+y)\}^{\mathrm{u}} = \{v-y, v-x\}^{\mathrm{u}}$ için $v-y \leq w$, $v-x \leq w$ olduğundan $v-w \leq x$, $v-w \leq y$, yani $v-w \in \{x,y\}^{\mathrm{l}}$ sağlanır. Her $z \in \{x,y\}^{\mathrm{ul}}$ için $z+v-w \leq v$, yani $z \leq w$ olduğundan $w \in \{x,y\}^{\mathrm{ulu}} = \{x,y\}^{\mathrm{u}}$ elde edilir. Sonuç olarak $\{x+v-(x+y), y+v-(x+y)\}^{\mathrm{u}} \subseteq \{x,y\}^{\mathrm{u}}$ ve X pre-Riesz uzayı olduğundan $0 \leq v-(x+y)$, yani $v \in \{x+y\}^{u}$ sağlanır. Dolayısıyla $\{x+y\}^{\mathrm{ul}} \subseteq \left(\{x,y\}^{\mathrm{ul}}+\{x,y\}^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}}$ elde edilir.
Tersine, $v \in \{x,y\}^{\mathrm{ul}}$ ve $w \in \{x,y\}^{\mathrm{l}}$ olsun. Herhangi bir $u \in \{x+(x+y)-(v+w), y+(x+y)-(v+w)\}^{\mathrm{u}}$ için

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+(x+y)-(v+w) \leq u \\ y+(x+y)-(v+w) \leq u \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \leq u-(x+y)+(v+w) \\ y \leq u-(x+y)+(v+w) \end{cases} \\
&\Rightarrow \quad u-(x+y)+(v+w) \in \{x,y\}^{\mathrm{u}} \\
&\Rightarrow \quad v \leq u-(x+y)+(v+w) \\
&\Rightarrow \begin{cases} x \leq x+y-w \leq u \\ y \leq x+y-w \leq u \end{cases}
\end{aligned}$$

olduğundan $u \in \{x,y\}^{\mathrm{u}}$ elde edilir. Sonuç olarak $\{x+(x+y)-(v+w), y+(x+y)-(v+w)\}^{\mathrm{u}} \subseteq \{x,y\}^{\mathrm{u}}$ ve X pre-Riesz uzayı olduğundan $0 \leq x+y-(v+w)$, yani $v+w \leq x+y$ sağlanır. Her $z \in \{x+y\}^{\mathrm{u}}$ için $v+w \leq x+y \leq z$ olduğundan $v+w \in \{x+y\}^{\mathrm{ul}}$ olur. Dolayısıyla $\{x,y\}^{\mathrm{ul}}+\{x,y\}^{\mathrm{l}} \subseteq \{x+y\}^{\mathrm{ul}}$ olduğundan $\left(\{x,y\}^{\mathrm{ul}}+\{x,y\}^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}} \subseteq \{x+y\}^{\mathrm{ul}}$ elde edilir.

Riesz uzaylarında latis işlemlerinin dağılma özelliğine benzeyen bir formül pre-Riesz uzaylarında da mevcuttur. Herhangi bir Riesz uzayının boş olmayan alttan sınırlı iki A ve B kümesi için

$$\inf A \vee \inf B = \inf\{x \vee y : x \in A, y \in B\} \tag{3.12}$$

sağlanır. Pre-Riesz uzaylarında benzer bir formül verebilmek için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

3.2.8. Lemma

X pre-Riesz uzayının boş olmayan sonlu bir alt kümesi A ve $x \in X$ olsun.

(a) Her $x \in A$ ve $y \in A^{\mathrm{l}}$ için $z \leq x - y$ ise $z \leq 0$ sağlanır.

(b) Her $x \in A$ ve $y \in A^{\mathrm{u}}$ için $z \leq y - x$ ise $z \leq 0$ sağlanır.

İspat

(a) Her $y \in A^{\mathrm{l}}$ için $z + y \in A^{\mathrm{l}}$ olduğundan $z + A^{\mathrm{l}} \subseteq A^{\mathrm{l}}$ ve böylece $-z - A^{\mathrm{l}} \subseteq -A^{\mathrm{l}}$ olduğundan $(-z - A)^{\mathrm{u}} \subseteq (-A)^{\mathrm{u}}$ sağlanır. X pre-Riesz uzayı olduğundan Lemma 3.2.5 (a)'dan dolayı $0 \leq -z$ elde edilir.

(b) Her $x \in A$ için $y \in A^{\mathrm{u}}$ iken $x \leq y - z$ olduğundan $x \in (A^{\mathrm{u}} - z)^{\mathrm{l}} = (-z + A)^{\mathrm{ul}}$, yani $A \subseteq (-z + A)^{\mathrm{ul}}$ sağlanır. $(-z + A)^{\mathrm{u}} = (-z + A)^{\mathrm{ulu}} \subseteq A^{\mathrm{u}}$ olduğundan Lemma 3.2.5 (a)'dan dolayı $0 \leq -z$ elde edilir.

Bir sonraki lemmadaki Eş. 3.13 formülü Eş. 3.12'ye benzerdir ve pre-Riesz uzaylarındaki dağılma özelliğidir.

3.2.9. Lemma

X sıralı vektör uzayı olsun.

(a) Her boş olmayan ve alttan sınırlı $A,B \subseteq X$ kümeleri için $\left(A^{\mathrm{l}} \cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}} \subseteq \bigcap_{x\in A, y\in B}\{x,y\}^{\mathrm{ul}}$ sağlanır.

(b) X pre-Riesz uzayı ve $A,B \subseteq X$ boş olmayan sonlu alt kümeler ise

$$\left(A^{\mathrm{l}} \cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}} = \bigcap_{x\in A, y\in B} \{x,y\}^{\mathrm{ul}} \tag{3.13}$$

sağlanır.

(c) X yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayı ise her boş olmayan ve alttan sınırlı $A,B \subseteq X$ kümeleri için Eş. 3.13 sağlanır.

İspat

(a) $u \in \left(A^{\mathrm{l}} \cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}}$, $x \in A$, $y \in B$ ve $a \in \{x,y\}^{\mathrm{u}}$. olsun. Her $b \in A^{\mathrm{l}}$ için $b \leq x \leq a$ ve her $z \in B^{\mathrm{l}}$ için $z \leq y \leq a$ olduğundan $a \in \left(A^{\mathrm{l}} \cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{u}}$, böylece $u \leq a$ olduğundan $u \in \{x,y\}^{\mathrm{ul}}$ sağlanır. Bu işlemleri takip ettiğimizde $\left(A^{\mathrm{l}} \cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}} \subseteq \bigcap_{x\in A, y\in B}\{x,y\}^{\mathrm{ul}}$ kapsamasına ulaşılır.

(b) $u \in \bigcap_{x\in A, y\in B}\{x,y\}^{\mathrm{ul}}$, $v \in A^{\mathrm{l}}$, $w \in B^{\mathrm{l}}$, $x \in A$ ve $y \in B$ olsun. İspatta ilk olarak $u+v+w-(x+y) \in \left(A^{\mathrm{l}} \cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}}$ olduğunu gösterip sonra $u \in \left(A^{\mathrm{l}} \cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}}$ olduğu sonucuna varalım. Önerme 3.2.7'den

$$\begin{aligned} u + \{v,w\}^{\mathrm{l}} &\subseteq \{x,y\}^{\mathrm{ul}} + \{v,w\}^{\mathrm{l}} \subseteq \{x,y\}^{\mathrm{ul}} + \{x,y\}^{\mathrm{l}} \\ &\subseteq \left(\{x,y\}^{\mathrm{ul}} + \{x,y\}^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}} = \{x+y\}^{\mathrm{ul}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$u + \{v,w\}^{\mathrm{l}} + \{v,w\}^{\mathrm{ul}} \subseteq \{x+y\}^{\mathrm{ul}} + \{v,w\}^{\mathrm{ul}} = \{v,w\}^{\mathrm{ul}} + x + y$$

sonucuna varılır. Buradan

$$u+\left(\{v,w\}^{\mathrm{l}}+\{v,w\}^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{ul}}=\left(u+\{v,w\}^{\mathrm{l}}+\{v,w\}^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{ul}}$$
$$\subseteq\left(\{v,w\}^{\mathrm{ul}}+x+y\right)^{\mathrm{ul}}=\{v,w\}^{\mathrm{ul}}+x+y.$$

elde edilir. Önerme 3.2.7'den dolayı

$$u+\{v+w\}^{\mathrm{ul}}\subseteq\{v,w\}^{\mathrm{ul}}+x+y=(\{v\}\cup\{w\})^{\mathrm{ul}}+x+y$$
$$\subseteq\left(A^{\mathrm{l}}\cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}}+x+y,$$

olduğundan $u+v+w-(x+y)\in\left(A^{\mathrm{l}}\cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}}$ elde edilir. Herhangi bir $a\in\left(A^{\mathrm{l}}\cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{u}}$ için $u+v+w-(x+y)\leq a$ olduğundan $u+w-y-a\leq x-v$ sağlanır. Bu durum her $x\in A$ ve $v\in A^{\mathrm{l}}$ için geçerli olduğundan Lemma 3.2.8'den $u+w-y-a\leq 0$ ve böylece $u-a\leq y-w$ olur. Bu durum her $y\in B$ ve her $w\in B^{\mathrm{l}}$ için geçerli olduğundan Lemma 3.2.8'den $u-a\leq 0$ sağlanır. Dolayısıyla $u\leq a$ olduğundan $u\in\left(A^{\mathrm{l}}\cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}}$ elde edilir.

(c) X Arşimedyan olduğundan Teorem 3.1.16'da $F:X\to X^{\delta}$, $F(x)=\{x\}^{\mathrm{l}}$ bipozitif lineer dönüşümüyle birlikte ele alınan X'in X^{δ} Dedekind tamlaması $\oplus$, $\ominus$, ve $*$ işlemleri ve $\subseteq$ bağıntısıyla Riesz uzayıdır. A ve B kümeleri X'in boş olmayan alttan sınırlı alt kümeleri olmak üzere $u\in\bigcap_{x\in A,y\in B}\{x,y\}^{\mathrm{ul}}$ olsun. $v=\inf F(A)$ ve $w=\inf F(B)$ alınırsa, her $x\in A$ ve $y\in B$ için

$$F(u)+v\wedge w\leq F(x)\vee F(y)+v\wedge w$$
$$\leq F(x)\vee F(y)+F(x)\wedge F(y)=F(x)+F(y),$$

olduğundan $F(u)+v\wedge w\leq v+w$ ve böylece $F(u)\leq v+w-v\wedge w=v\vee w$ elde edilir. Her $z\in\left(A^{\mathrm{l}}\cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{u}}$ için

$$v=\sup\{F(u):u\in X,F(u)\leq v\}\leq\sup\left\{F(u):u\in A^{\mathrm{l}}\right\}$$
$$\leq F(z)$$

ve benzer şekilde $w \leq F(z)$ olduğundan $v \vee w \leq F(z)$ olur. Dolayısıyla $F(u) \leq F(z)$ ve böylece $u \in \left(A^{\mathrm{l}} \cup B^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{ul}}$ sağlanır.

3.3. Riesz Uzay Örtüsü ve Riesz Tamlama

(X,K) yönlü sıralı vektör uzayının Dedekind kesitlerinin X^{δ} sıralı kümesini üstündeki $\oplus$, $\ominus$ ve $*$ işlemleri ile ele alalım. Bu kısmın temel amacı X Arşimedyan uzayının Dedekind tamlamasına gömülmesini ifade eden Teorem 3.1.16'ya benzer bir sonuç oluşturmaktır. Burada X yönlü sıralı vektör uzayı, Dedekind tam olmasına gerek olmayan bir Riesz uzayına sıra yoğun olarak gömülecektir. Bunu yaparken X üstüne Arşimedyan olma şartından mümkün olduğu kadar zayıf bir şart yüklenecektir. Bu şart X'in pre-Riesz uzayı olarak alınmasıdır. Üstelik, X'in pre-Riesz uzayı olması için gerek ve yeter şart X'in sıra yoğun bir Riesz uzayına gömülebilmesidir. Bu Riesz uzayı X^{δ}'nın bir alt kümesi olarak Eş. 3.15'de gösterilen X^{ρ} olacaktır. Burada, X^{ρ} kümesinin $\oplus$ ve $*$ işlemleriyle vektör uzayı olması için gerek ve yeter şart X yönlü sıralı vektör uzayının pre-Riesz uzayı olması ve sonrasında X^{ρ} vektör uzayının $\subseteq$ bağıntısıyla sıralı vektör uzayı ve latis olduğu, yani Riesz uzayı olduğu gösterilecektir. Ayrıca bu kesimde [6] ve [11] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Önerme 3.1.3'den dolayı herhangi bir sonlu $A \subseteq X^{\delta}$ alt kümesi için X^{δ} içinde $\sup A$ mevcuttur. $F : X \to X^{\delta}$, $F(x) = \{x\}^{\mathrm{l}}$ gömme dönüşümünü ele aldığımızda $x_1, \ldots, x_m \in X$ için

$$\begin{aligned} U &= F(x_1) \vee \ldots \vee F(x_m) = \{x_1\}^{\mathrm{l}} \vee \ldots \vee \{x_m\}^{\mathrm{l}} \\ &= (\{x_1\}^{\mathrm{l}} \cup \ldots \cup \{x_m\}^{\mathrm{l}})^{\mathrm{ul}} \end{aligned}$$

kümesi için

$$U^{\mathrm{u}} = \left(\{x_1\}^{\mathrm{l}} \cup \ldots \cup \{x_m\}^{\mathrm{l}}\right)^{\mathrm{u}} = \{x_1, \ldots, x_m\}^{\mathrm{u}} \tag{3.14}$$

sağlanır.

3.3.1. Tanım

X ve Y sıralı vektör uzayları ve $f : X \to Y$ lineer dönüşüm olmak üzere,

(a) her $x, y \in X$ için $(f(\{x,y\}^{\mathrm{u}}))^{\mathrm{l}} = \{f(x), f(y)\}^{\mathrm{ul}}$ oluyorsa f Riesz homomorfizmi,

(b) her $\varnothing \neq A \subseteq X$ için $\inf A = 0$ iken $\inf f(A) = 0$ oluyorsa f tam Riesz homomorfizmi diye adlandırılır.

3.3.2. Önerme

X pre-Riesz uzayı ve Y sıralı vektör uzayı olmak üzere, $f : X \to Y$ tam Riesz homomorfizmi ise f Riesz homomorfizmidir.

İspat

Herhangi iki $x, y \in X$ için ilk olarak, $\{f(x), f(y)\}^{\mathrm{ul}} \subseteq (f(\{x,y\}^{\mathrm{u}}))^{\mathrm{l}}$ olduğunu gösterelim. $\inf\{x \in X : 0 \leq x\} = 0$ ve f tam Riesz homomorfizmi olduğundan $\inf\{f(x) : 0 \leq x\} = 0$ sağlanır. Dolayısıyla, her $0 \leq x \in X$ için $0 \leq f(x)$, yani f pozitif olduğundan $f(\{x,y\}^{\mathrm{u}}) \subseteq \{f(x), f(y)\}^{\mathrm{u}}$ ve böylece $\{f(x), f(y)\}^{\mathrm{ul}} \subseteq (f(\{x,y\}^{\mathrm{u}}))^{\mathrm{l}}$ sağlanır.

Tersine, herhangi iki $x, y \in X$ için $(f(\{x,y\}^{\mathrm{u}}))^{\mathrm{l}} \subseteq \{f(x), f(y)\}^{\mathrm{ul}}$ olduğunu göstermek için $A = \{x,y\}^{\mathrm{u}} - \{x,y\}$ alınırsa 0 bu kümenin bir alt sınırıdır. A kümesinin herhangi bir z alt sınırı için $z \leq w - x$ ve $z \leq w - y$ olacak biçimde $w \in \{x,y\}^{\mathrm{u}}$ var olduğundan X'in pre-Riesz uzayı olduğu göz önüne alındığında Lemma 3.2.8 (b)'den $z \leq 0$, yani $\inf A = 0$ olur. f tam Riesz homomorfizmi olduğundan $\inf f(A) = 0$ bulunur. f'nin lineerliğinden $f(A) = f(\{x,y\}^{\mathrm{u}}) - \{f(x), f(y)\}$ ve buradan $(f(\{x,y\}^{\mathrm{u}}) - \{f(x), f(y)\})^{\mathrm{l}} = \{0\}^{\mathrm{l}}$ sağlanır. Herhangi bir $z \in (f(\{x,y\}^{\mathrm{u}}))^{\mathrm{l}}$ için $w \in \{f(x), f(y)\}^{\mathrm{u}}$ iken $-w \in (-\{f(x), f(y)\})^{\mathrm{l}}$ olduğundan

$$z - w \in (f(\{x,y\}^{\mathrm{u}}))^{\mathrm{l}} + (-\{f(x), f(y)\})^{\mathrm{l}} \subseteq (f(\{x,y\}^{\mathrm{u}}) - \{f(x), f(y)\})^{\mathrm{l}} = \{0\}^{\mathrm{l}},$$

yani $z \leq w$ elde edilir. Böylece $(f(\{x,y\}^{\mathrm{u}}))^{\mathrm{l}} \subseteq \{f(x), f(y)\}^{\mathrm{ul}}$ sağlanır.

3.3.3. Önerme

X ve Y sıralı vektör uzayı $f : X \to Y$ bipozitif lineer dönüşüm ve $f(X)$, Y içinde sıra yoğun ise f tam Riesz homomorfizmidir.

İspat

Bir $A \subseteq X$ için $\inf A = 0$ olsun. f pozitif olduğundan $f(A)$'nın bir alt sınırı 0'dır. $f(A)$'nın başka bir alt sınırı $y \in Y$ olsun. $f(X)$, Y içinde sıra yoğun olduğundan $y = \sup\{f(x) : x \in X,\ f(x) \leq y\}$ sağlanır. $f(x) \leq y$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $z \in A$ iken $f(x) \leq y \leq f(z)$ olduğundan f'nin bipozitifliğinden $x \leq z$ olur. $\inf A = 0$ olduğundan $x \leq 0$ ve dolayısıyla $y \leq 0$ sağlanır. Böylece $\inf f(A) = 0$ elde edilir.

(X,K) yönlü sıralı vektör uzayının X^{δ} Dedekind tamlaması içindeki

$$X^{\rho} = \{(\{x_1\}^{1} \vee \ldots \vee \{x_m\}^{1}) \oplus \ominus(\{y_1\}^{1} \vee \ldots \vee \{y_n\}^{1}) : \\ x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in X \text{ ve } m,n \in \mathbb{N}\} \tag{3.15}$$

alt kümesini göz önüne alalım.

3.3.4. Tanım

X ve Y sıralı vektör uzayları, $f : X \to Y$ lineer dönüşüm olmak üzere, her boş olmayan sonlu $A \subseteq X$ için $f(A^{\mathrm{ul}}) \subseteq f(A)^{\mathrm{ul}}$ oluyorsa f Riesz* homomorfizmi diye adlandırılır.

3.3.5. Lemma

X ve Y sıralı vektör uzayları, $f : X \to Y$ lineer dönüşüm olsun ([11], Lemma 2.3.2).

(a) f Riesz* homomorfizmi ise f pozitiftir.

(b) f dönüşümünün Riesz* homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart her boş olmayan $A \subseteq X$ için $f(A^{\mathrm{ul}})^{\mathrm{ul}} = f(A)^{\mathrm{ul}}$ olmasıdır.

(c) X ve Y Riesz uzayı iken f dönüşümünün Riesz* homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart f'nin Riesz homomorfizmi olmasıdır.

3.3.6. Önerme

X ve Y sıralı vektör uzayları, $h : X \to Y$ lineer dönüşüm, W ve Z Riesz uzayları için $f : X \to W$ ve $g : Y \to Z$ bipozitif lineer dönüşümler ve $f(X)$, W içinde sıra yoğun olsun. Bir $\hat{h} : W \to Z$ Riesz homomorfizmi için $g \circ h = \hat{h} \circ f$ sağlanıyorsa, h Riesz* homomorfizmidir ([11], Proposition 2.3.6).

3.3.7. Teorem

X ve Y sıralı vektör uzayları, $f : X \to Y$ lineer dönüşüm olsun. $F : X \to W$ ve $G : Y \to Z$ bipozitif lineer dönüşümleri için $F(X)$, W içinde sıra yoğun ve Y'yi Riesz uzayı olarak üretir ve $G(Y)$, Z içinde sıra yoğun olursa aşağıdaki ifadeler denktir ([11], Theorem 2.3.12).

(a) f Riesz* homomorfizmidir.

(b) Herhangi iki boş olmayan sonlu $A, B \subseteq X$ kümeleri için $A^{\mathrm{u}} = B^{\mathrm{u}}$ ise, $f(A)^{\mathrm{u}} = f(B)^{\mathrm{u}}$ sağlanır.

(c) $G \circ f = \hat{f} \circ F$ olacak biçimde $\hat{f} : W \to Z$ Riesz homomorfizmi vardır.

3.3.8. Önerme

X yönlü sıralı vektör uzayının pre-Riesz uzayı olması için gerek ve yeter şart her $x_1, \ldots,$ $x_m \in X$ için $U = \{x_1\}^{\mathrm{l}} \vee \ldots \vee \{x_m\}^{\mathrm{l}}$ iken $U \oplus \ominus U = \{0\}^{\mathrm{l}}$ olmasıdır.

İspat

X pre-Riesz uzayı olsun. Her $x_1, \ldots, x_m \in X$ için $U = \{x_1\}^{\mathrm{l}} \vee \ldots \vee \{x_m\}^{\mathrm{l}} = \{x_1, \ldots, x_m\}^{\mathrm{ul}}$ iken $z \in (U \oplus \ominus U)^{\mathrm{u}} = (U + (-U^{\mathrm{u}}))^{\mathrm{ulu}} = (U - U^{\mathrm{u}})^{\mathrm{u}}$ alınırsa, $x \in U$ ve $u \in U^{\mathrm{u}}$ için $x - u \leq z$, yani $x - z \leq u$ sağlanır. Bu durumda $x - z \in U^{\mathrm{ul}} = U$ olduğundan $U - z \subseteq U$ elde edilir.

Dolayısıyla $U^{\mathrm{u}} \subseteq (U-z)^{\mathrm{u}}$ ve buradan $(U+z)^{\mathrm{u}} \subseteq U^{\mathrm{u}}$ olur. Böylece $(\{x_1,\ldots,x_m\}+z)^{\mathrm{u}} = (U+z)^{\mathrm{u}} \subseteq U^{\mathrm{u}} = \{x_1,\ldots,x_m\}^{\mathrm{u}}$ sağlanır. Lemma 3.2.5'in (a) kısmından $0 \leq z$, yani $z \in \{0\}^{\mathrm{u}}$ olduğundan $(U \oplus \ominus U)^{\mathrm{u}} \subseteq \{0\}^{\mathrm{u}}$ ve buradan $\{0\}^{\mathrm{l}} = \{0\}^{\mathrm{ul}} \subseteq (U \oplus \ominus U)^{\mathrm{ul}} = U \oplus \ominus U$ elde edilir. Bu durum Lemma 3.1.10'un (e) kısmı ile birlikte düşünüldüğünde $U \oplus \ominus U = \{0\}^{\mathrm{l}}$ elde edilir.

Ters gerektirme için $x_1,\ldots,x_m \in X$, $A = \{x_1,\ldots,x_m\}$ ve $z \in X$ için $(A+z)^{\mathrm{u}} \subseteq A^{\mathrm{u}}$ alıp $0 \leq z$ olduğunu gösterelim. $U = \{x_1\}^{\mathrm{l}} \vee \ldots \vee \{x_m\}^{\mathrm{l}}$ için $\{0\}^{\mathrm{l}} = U \oplus \ominus U = (U + (-U^{\mathrm{u}}))^{\mathrm{ul}} = \left(U^{\mathrm{ul}} - U^{\mathrm{u}}\right)^{\mathrm{ul}}$ olduğundan Eş. 3.14'den $\{0\}^{\mathrm{u}} = \{0\}^{\mathrm{lu}} = \left(U^{\mathrm{ul}} - U^{\mathrm{u}}\right)^{\mathrm{ulu}} = (\{x_1,\ldots,x_m\}^{\mathrm{ul}} - \{x_1,\ldots,x_m\}^{\mathrm{u}})^{\mathrm{u}}$ sağlanır. Her $u \in \{x_1,\ldots,x_m\}^{\mathrm{u}}$ için $i = 1,\ldots,m$ iken $x_i + z \leq u + z$ olduğundan $u+z \in (A+z)^{\mathrm{u}} \subseteq A^{\mathrm{u}}$ ve dolayısıyla $x_i \leq u+z$, yani $u+z \in \{x_1,\ldots,x_m\}^{\mathrm{u}}$ sağlanır. Herhangi bir $v \in \{x_1,\ldots,x_m\}^{\mathrm{ul}}$ için $v \leq u+z$, yani $v-u \leq z$ olduğundan $z \in (\{x_1,\ldots,x_m\}^{\mathrm{ul}} - \{x_1,\ldots,x_m\}^{\mathrm{u}})^{\mathrm{u}}$ ve böylece $0 \leq z$ elde edilir. Sonuç olarak X pre-Riesz uzayı olur.

3.3.9. Teorem

X pre-Riesz uzayı olmak üzere, Eş. 3.15'deki biçimde tanımlanan X^{ρ} kümesi $\oplus$, $*$ işlemleri ve $\subseteq$ sıralamasıyla Riesz uzayıdır. $G : X \to X^{\rho}$, $G(x) = \{x\}^{\mathrm{l}}$ bipozitif lineer dönüşümdür ve $G(X)$, X^{ρ} içinde sıra yoğun olup X^{ρ}'yu Riesz uzayı olarak üretir. Ayrıca, G tam Riesz homomorfizmidir.

İspat

X yönlü olduğundan Eş. 3.15'deki supremumlar Önerme 3.1.3'e göre X^{δ} içinde mevcuttur.

$$\mathscr{A} = \left\{ \{x_i\}^{\mathrm{l}} \vee \ldots \vee \{x_m\}^{\mathrm{l}} : x_1,\ldots,x_m \in X,\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

alınırsa $X^{\rho} = \{V \oplus \ominus W : V, W \in \mathscr{A}\}$ sağlanır. İlk olarak her $W \in X^{\rho}$ için $W \oplus \ominus W = \{0\}^{\mathrm{l}}$ olduğunu görelim. Gerçekten, herhangi bir $U \in \mathscr{A}$ için Önerme 3.3.8'den $U \oplus \ominus U = \{0\}^{\mathrm{l}}$

olduğundan her $U,V \in \mathscr{A}$ için Lemma 3.1.10 ve Lemma 3.1.11'den

$$\begin{aligned}(U \oplus \ominus V) \oplus \ominus(U \oplus \ominus V) &= (U \oplus \ominus U) \oplus (V \oplus \ominus V) \\ &= \{0\}^1 \oplus \{0\}^1 \\ &= \{0\}^1\end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla, her $W \in X^\rho$ için $W \oplus \ominus W = \{0\}^1$ elde edilir.

Şimdi X^ρ kümesinin $\oplus, *$ işlemleriyle vektör uzayı olduğunu gösterelim. Herhangi iki $m,n \in \mathbb{N}$ için $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n \in X$ iken $U = \{x_1\}^1 \vee \ldots \vee \{x_m\}^1$, $V = \{y_1\}^1 \vee \ldots \vee \{y_n\}^1$ ve $W = U \oplus \ominus V$ olsun. $0 < \alpha$ için Lemma 3.1.10 ve Lemma 3.1.11'in (c) kısmından

$$\begin{aligned}\alpha * W &= (\alpha * U) \oplus (\alpha * (\ominus V)) = (\alpha * U) \oplus (\alpha * ((-1) * V)) \\ &= (\alpha * U) \oplus ((-\alpha) * V) = (\alpha * U) \oplus ((-1) * (\alpha * V)) \\ &= (\alpha * U) \oplus \ominus(\alpha * V) \\ &= (\alpha A) \oplus \ominus(\alpha B) \\ &= (\{\alpha x_1\}^1 \vee \ldots \vee \{\alpha x_m\}^1) \oplus \ominus(\{\alpha y_1\}^1 \vee \ldots \vee \{\alpha y_n\}^1) \in X^\rho.\end{aligned}$$

sağlanır. Ayrıca, $0 * W = \{0\}^1 \in X^\rho$ ve

$$\begin{aligned}(-1) * W &= ((-1) * U) \oplus ((-1) * (\ominus V)) \\ &= \ominus U \oplus (\ominus \ominus V) \\ &= \ominus U \oplus V \\ &= V \oplus \ominus U \in X^\rho.\end{aligned}$$

olduğundan her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve her $W \in X^\rho$ için $\alpha * W \in X^\rho$ elde edilir. Diğer yandan, Lemma 3.1.9 ve Eş. 3.14'den

$$\begin{aligned}U \oplus V = (U+V)^{\mathrm{ul}} &= \left(U^{\mathrm{ul}} + V^{\mathrm{ul}}\right)^{\mathrm{ul}} \\ &= (\{x_1,\ldots,x_m\}^{\mathrm{ul}} + \{y_1,\ldots,y_n\}^{\mathrm{ul}})^{\mathrm{ul}} \\ &= \left\{x_i + y_j : i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n\right\}^{\mathrm{ul}}\end{aligned}$$

$$= (\{x_1 + y_1\}^1 \cup \ldots \cup \{x_m + y_n\}^1)^{\mathrm{ul}}$$
$$= (\{x_1 + y_1\}^1 \vee \ldots \vee \{x_m + y_n\}^1) \in \mathscr{A}$$

sağlanır. Herhangi dört $U, V, W, Z \in \mathscr{A}$ kümesi için $U \oplus W$ ve $V \oplus Z \in \mathscr{A}$ iken Lemma 3.1.11'in (c) kısmı yardımıyla

$$(U \oplus \ominus V) \oplus (W \oplus \ominus Z) = (U \oplus W) \oplus (\ominus V \oplus \ominus Z)$$
$$= (U \oplus W) \oplus \ominus(V \oplus Z) \in X^\rho$$

elde edilir. Lemma 3.1.10'un (a)-(c) ve (f)-(g) kısımları, Lemma 3.1.11'in (c)-(e) kısımlarından da görüldüğü gibi X^ρ kümesi, üstündeki iç işlem $\oplus$, dış işlem $*$ ve $\oplus$ işlemine göre etkisiz eleman $\{0\}^1$ ile vektör uzayıdır. Lemma 3.1.14'den G dönüşümü lineer ve Lemma 3.1.12'den X^ρ sıralı vektör uzayıdır. Bu uzayın latis olduğunu görmek için supremum altında kapalı olduğunu gösterelim. Herhangi iki $m, n \in \mathbb{N}$ için $m < n$, $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n \in X$, $U = \{x_1\}^1 \vee \ldots \vee \{x_m\}^1$ ve $V = \{x_{m+1}\}^1 \vee, \ldots, \vee \{x_n\}^1$ iken

$$U \vee V = (\{x_1\}^1 \vee \ldots \vee \{x_m\}^1) \vee (\{x_{m+1}\}^1 \vee \ldots \vee \{x_n\}^1)$$
$$= (\{x_1\}^1 \vee \ldots \vee \{x_n\}^1) \in \mathscr{A}$$

sağlanır. Herhangi dört $U, V, W, Z \in \mathscr{A}$ için $U \oplus Z$, $W \oplus V$, $V \oplus Z \in \mathscr{A}$ olduğundan Lemma 3.1.13 yardımıyla

$$(U \oplus \ominus V) \vee (W \oplus \ominus Z) = [(U \oplus \ominus V) \vee (W \oplus \ominus Z)] \oplus (V \oplus Z) \oplus \ominus(V \oplus Z)$$
$$= [(U \oplus \ominus V \oplus (V \oplus Z)) \vee (W \oplus \ominus Z \oplus (V \oplus Z))] \oplus \ominus(V \oplus Z)$$
$$= [(U \oplus Z) \vee (W \oplus V)] \oplus \ominus(V \oplus Z) \in X^\rho$$

elde edilir. Sonuç olarak X^ρ Riesz uzaylarıdır.

Önerme 3.1.8'e göre G dönüşümü bipozitiftir ve $G(X)$, X^ρ içinde sıra yoğundur. Eş. 3.15 eşitliğinden $G(X)$'in X^ρ'yu Riesz uzayı olarak ürettiği anlaşılır. Önerme 3.3.3'den dolayı G dönüşümü tam Riesz homomorfizmidir.

X Riesz uzayı olduğunda X^ρ Riesz uzayının X uzayını ürettiğini aşağıdaki önerme ile verelim.

3.3.10. Önerme

X Riesz uzayı olmak üzere, X^ρ ve G Teorem 3.3.9'daki gibi tanımlanırsa $G : X \to X^\rho$ dönüşümü Riesz izomorfizmidir.

İspat

Teorem 3.3.9 ve Önerme 3.3.2'den G Riesz homomorfizmidir. X^ρ'nun Eş. 3.15'deki tanımı ile X'in Riesz uzayı olması birlikte göz önüne alındığında G örten olur. Böylece G Riesz izomorfizmidir.

X^ρ uzayı aşağıdaki anlamda tektir.

3.3.11. Önerme

X pre-Riesz uzayı, X^ρ ve G Teorem 3.3.9'daki gibi tanımlansın. Y Riesz uzayı ve $f : X \to Y$ bipozitif lineer dönüşüm olmak üzere $f(X)$, Y içinde sıra yoğun ve Y Riesz uzayını üretiyorsa Y ve X^ρ izomorfik Riesz uzaylarıdır.

İspat

Teorem 3.3.9 ve varsayımlar göz önüne alındığında, Teorem 3.3.7'de $X = Y$, $W = X^\rho$, $Z = Y$, $G = f$ alınırsa $g : X \to X$, $g(x) = x$ dönüşümü Riesz* homomorfizmidir. Teorem 3.3.7'ye göre $\hat{g} : X^\rho \to Y$ Riesz homomorfizmi vardır ve $\hat{g} \circ G = f \circ g = f$ sağlanır. Geriye $\hat{g}$'nın örten olduğunu göstermek kalır.

$y \in Y$ olsun. $f(X)$, Y Riesz uzayını ürettiğinden $y = f(x_1) \vee \ldots \vee f(x_m) - f(y_1) \vee \ldots \vee f(y_n)$

olacak biçimde $x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n \in X$ vardır.

$$y = \hat{g}(G(x_1)) \vee \ldots \vee \hat{g}(G(x_m)) - \hat{g}(G(y_1)) \vee \ldots \vee \hat{g}(G(y_n))$$
$$= \hat{g}(G(x_1) \vee \ldots \vee G(x_m) - G(y_1) \vee \ldots \vee G(y_n))$$

olduğundan $\hat{g} : X^{\rho} \to Y$ dönüşümü örten ve böylece $\hat{g}$ Riesz izomorfizmidir.

Pre-Riesz uzaylarını incelerken temel yöntem olarak onları Riesz uzaylarına gömmek benimsenir. Bu nedenle aşağıdaki iki önemli kavram verilir.

3.3.12. Tanım

X sıralı vektör uzayı olsun.

(1) Bir Y Riesz uzayı ve bir $f : X \to Y$ bipozitif lineer dönüşümü için $f(X)$, Y içinde sıra yoğun oluyorsa, (Y, f) ikilisine X'in Riesz uzay örtüsü,

(2) Bir Y Riesz uzayı ve bir $f : X \to Y$ bipozitif lineer dönüşümü için $f(X)$, Y içinde sıra yoğun ve bir Riesz uzayı olarak Y'yi üretiyorsa, (Y, f) ikilisine X'in Riesz tamlaması denir.

van Haandel sayesinde ([6], Sonuç 4.9-4.11 ve Teorem 3.5-3.7,4.13) bu bölümün asıl teoremini verelim.

3.3.13. Teorem

X sıralı vektör uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) X pre-Riesz uzayıdır.

(b) X'in bir (Y, f) Riesz uzay örtüsü vardır.

(c) X'in bir (Y, f) Riesz tamlaması vardır.

Ayrıca X'in tüm Riesz tamlamaları, Riesz uzayı olarak izomorfiktir.

İspat

(a) $\Rightarrow$ (c) gerektirmesi Teorem 3.3.9'un içeriğidir. (c) $\Rightarrow$ (b) aşikârdır. Y pre-Riesz uzayı olduğundan (b) $\Rightarrow$ (a) gerektirmesinin ispatı Önerme 3.2.4'den sağlanır. Ayrıca Önerme 3.3.11 (c) şartını sağlayan Y Riesz uzaylarının birbirine izomorfik olduğunun sonucunu verir.

Teorem 3.3.13 (c)'deki gibi verilen Y uzayları Riesz izomorfik olduğundan X'in Riesz tamlaması meselâ Eş. 3.15'deki X^ρ göz önüne alınarak (X^ρ, G) ile belirtilebilecektir.

Riesz tamlamanın yanı sıra diğer Riesz uzay örtüleri de kullanışlıdır. Teorem 3.1.16 ve ([11], Proposition 1.5.41)'den aşağıdaki ifade elde edilir.

3.3.14. Sonuç

Her yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayı, Dedekind tam ve dolayısıyla düzgün tam bir Riesz uzay örtüsüne sahiptir.

Örnek

(a) Sayfa 53'deki örneğin (a) maddesinden $Y = \{f \in C(\mathbb{R}) : \text{bir } p \in P^2(\mathbb{R}) \text{ için } |f| \leq p\}$ Riesz uzayı içinde, derecesi en fazla 2 olan polinomların $P^2(\mathbb{R})$ pre-Riesz uzayının sıra yoğun olduğunu biliyoruz. $g : P^2(\mathbb{R}) \to Y$; $g(x) = x$ dönüşümüyle (Y, g) ikilisi $P^2(\mathbb{R})$'nin Riesz uzay örtüsüdür. Böylece $P^2(\mathbb{R})$'nin Riesz tamlaması, Y'nin Riesz alt uzayı olarak elde edilir. Bu tamlamanın elemanlarını tanımlayalım. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{R}$; $s_1 \leq \cdots \leq s_n$ verildiğinde, $(-\infty, s_1], [s_1, s_2], \ldots, [s_{n-1}, s_n], [s_n, \infty)$ kümeleri üstünde ayrı ayrı derecesi en fazla 2 olan polinomlarla ifade edilebilen bir f fonksiyonunu en fazla 2 dereceli parçalı polinom fonksiyonu diye adlandıralım ve böyle fonksiyonların kümesini $P_p^2(\mathbb{R})$ ile

gösterelim.

$$Z = \left\{ f \in P_p^2(\mathbb{R}) : \lim_{s\to-\infty} \frac{f(s)}{s^2} = \lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^2} \right\}$$

kümesi için $P^2(\mathbb{R}) \subset Z \subseteq Y$ olduğundan $P^2(\mathbb{R})$ pre-Riesz uzayı, Y'nin Z Riesz alt uzayı içinde sıra yoğundur. $P^2(\mathbb{R})$, Z'yi Riesz uzayı olarak üretir ([11], Example 2.4.8). Dolayısıyla, $P^2(\mathbb{R})$ pre-Riesz uzayının Riesz tamlaması (Z,g) ikilisi olur.

(b) (a)'da yapılanların benzeri $C[0,1]$ Riesz uzayının $P^2[0,1]$ alt uzayı için de geçerlidir. Yani, $P^2[0,1]$ pre-Riesz uzayı, $P_p^2[0,1]$ Riesz uzayı içinde sıra yoğundur. $P^2[0,1]$, $P_p^2[0,1]$ Riesz uzayını üretir. $P[0,1]$ pre-Riesz uzayının Riesz tamlaması, $g : P^2[0,1] \to P_p^2[0,1]$; $g(x) = x$ olmak üzere $(P_p^2[0,1], g)$ ikilisidir.

3.3.15. Teorem

X ve Y pre-Riesz uzaylarının sırasıyla Riesz uzay örtüleri (W,f) ve (Z,g), $h : X \to Y$ lineer dönüşüm olsun ([11], Theorem 2.4.11).

(a) Bir $\hat{h} : W \to Z$ Riesz homomorfizmi için $\hat{h} \circ f = g \circ h$ ise, h Riesz* homomorfizmidir.

(b) (W,f), X'in Riesz tamlaması ve h Riesz* homomorfizmi ise $\hat{h} \circ f = g \circ h$ olacak biçimde bir tek $\hat{h} : W \to Z$ Riesz homomorfizmi vardır. Ayrıca, her $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l \in X$ için $\hat{h}$ dönüşümü

$$\hat{h}(f(a_1) \vee \ldots \vee f(a_k) - f(b_1) \vee \ldots \vee f(b_l)) = g(h(a_1) \vee \ldots \vee h(a_k)) - g(h(b_1) \vee \ldots \vee h(b_l))$$

eşitliği sağlar.

3.3.16. Önerme

(X,K) pre-Riesz uzayı Arşimedyan ise X'in (Y,f) Riesz uzay örtüsü de Arşimedyandır.

İspat

Herhangi iki $x,y \in Y$ için $n \in \mathbb{N}$ iken $nx \leq y$ olsun. $f(X)$, Y içinde sıra yoğun dolayısıyla büyüyen olduğundan bir $u \in X$ için $y \leq f(u)$ sağlanır. Diğer yandan, $f(v) \leq x$ olacak biçimde $v \in X$ alındığında, her $n \in \mathbb{N}$ için $nf(v) \leq nx \leq y \leq f(u)$ ve böylece $nv \leq u$ sağlanır. X Arşimedyan olduğundan $x \leq 0$ sağlanır. $f(X)$, Y içinde sıra yoğun olduğundan $x = \sup\{f(v) : f(v) \leq x\} \leq 0$ elde edilir.

3.4. Fonksiyonel Temsil

Riesz tamlaması, pre-Riesz uzaylarının incelenmesinde önemli bir araçtır. Ancak, bir çok örnekte Riesz tamlamasını Dedekind kesitlerle inşa etmek oldukça zordur. Böyle bir yapılandırma için sürekli fonksiyonları içeren bir Riesz uzay örtüsü daha uygundur, çünkü bu örtü noktasal sıralama ile donatılabilmektedir. Bir sıra birimli (X,K) Arşimedyan sıralı vektör uzayı ile bir sürekli fonksiyonlar uzayını ilişkilendiren klasik yöntem, aşağıda verildiği gibi fonksiyonel gösterim diye adlandırılır. Bu durumda X yönlüdür ve Önerme 3.2.3'den dolayı pre-Riesz uzayıdır. Ayrıca bu kesimde [7, 11, 23–26] kaynaklarından yararlanılmıştır.

(X,K) sıralı vektör uzayının sıra birimi u olmak üzere, her $x \in X$ için

$$\|x\|_u = \inf\{a \in (0,\infty) : -au \leq x \leq au\} \tag{3.16}$$

ile tanımlanan $\|\cdot\|_u$ dönüşümü X üstünde bir yarınormdur. X Arşimedyan ise $\|\cdot\|_u$, X üstünde bir normdur ve her $x \in X$ için $\mp x \leq au$ olacak biçimde en küçük $0 < a \in \mathbb{R}$ elemanı var olduğundan Eş. 3.16'daki infimum mevcuttur. Bu norma 'sıra birim normu' ya da 'u-norm' denir. $(X,K,\|\cdot\|_u)$ sıralı normlu uzayına da 'sıra birimli uzay' denir. $\|u\|_u = 1$ ve u-norm monotondur. Herhangi iki u ve v sıra birimine karşılık gelen $\|\cdot\|_u$ ve $\|\cdot\|_v$ normları denktir.

3.4.1. Lemma

$(X,K,\|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzay olsun ([11], Lemma 1.5.9).

(a) (x_n), X içinde bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere $x_n \overset{\|\cdot\|_u}{\to} x$ olması için gerek ve yeter şart $a_n \to 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\pm(x_n - x) \leq a_n u$ olacak biçimde pozitif bir (a_n) dizisinin var olmasıdır.

(b) K konisi $\|\cdot\|_u$ normuna göre kapalıdır.

K konisinin içi $\overset{\circ}{K}$ olmak üzere, $(X, K, \|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzayında $u \in \overset{\circ}{K}$ sağlanır.

3.4.2. Önerme

$(X, K, \|\cdot\|)$ sıralı normlu uzayında $\overset{\circ}{K} \neq \varnothing$ olsun ([11], Proposition 1.5.11).

(a) Herhangi bir $u \in K \backslash \{0\}$ elemanının sıra birim olması için gerek ve yeter şart $u \in \overset{\circ}{K}$ olmasıdır.

(b) Herhangi bir $u \in \overset{\circ}{K}$ için $\|\cdot\|_u$ yarınormu $\|\cdot\|$ normundan daha zayıftır.

(c) X Arşimedyan ise, K kapalıdır.

3.4.3. Önerme

$(X, K, \|\cdot\|)$ sıralı normlu uzayında $\overset{\circ}{K} \neq \varnothing$ olsun ([11], Proposition 1.5.17).

(a) X üstünde her pozitif lineer fonksiyonel süreklidir.

(b) her $u \in \overset{\circ}{K}$ ve $f \in K' \backslash \{0\}$ için $0 < f(u)$ vardır.

3.4.4. Tanım

$(X, K, \|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzayında $\|\cdot\|_u$ normuna göre X'in Z tamlaması, K'nın C kapanışıyla sıralandığında X'in düzgün tamlaması diye adlandırılır.

3.4.5. Önerme

$(X,K,\|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzayının (Z,C) düzgün tamlaması da sıra birimli uzaydır ve $f:X\to Z$ içerme dönüşümü bipozitiftir ([11], Proposition 1.5.27).

3.4.6. Tanım

(X,K) Arşimedyan sıralı vektör uzayı u sıra birimiyle verilsin. Ω kompakt Hausdorff uzayı, $\mathbf{1}:\Omega\to\mathbb{R};\mathbf{1}(\omega)=1$ ve $\sigma:X\to C(\Omega)$ bipozitif lineer dönüşüm olmak üzere, $\sigma(u)=\mathbf{1}$ ve bir $x\in X$ için $\upsilon\neq\omega$ iken $\sigma(x)(\upsilon)\neq\sigma(x)(\omega)$ oluyorsa (yani $\sigma(X)$, Ω kümesinin noktalarını ayırıyorsa), (σ,Ω) ikilisine X'in fonksiyonel temsili denir.

$C(\Omega)$ uzayındaki $\mathbf{1}$-normu supremum normuna eşit olduğundan σ dönüşümü bir izometridir.

3.4.7. Tanım

(X,K) Arşimedyan sıra birimli uzayının iki fonksiyonel temsili (σ,Ω) ve (H,Φ) olsun.

(a) $\Psi\subseteq\Phi$ ve $x\in X,\ \omega\in\Omega$ iken $\sigma(x)(\omega)=H(x)(\vartheta(\omega))$ olacak biçimde $\vartheta:\Omega\to\Psi$ homomorfizmi varsa (σ,Ω) fonksiyonel temsili (H,Φ) fonksiyonel temsilinden daha küçüktür denir.

(b) (σ,Ω) fonksiyonel temsili (H,Φ) fonksiyonel temsilinden daha küçük ve $\Psi=\Phi$ ise, (σ,Ω) ve (H,Φ) fonksiyonel temsilleri izomorfiktir denir.

X vektör uzayı, $A\subseteq X$ boş olmayan konveks küme ve $x\in A$ olmak üzere, her $y,z\in A$ ve her $a\in(0,1)$ için $x=ay+(1-a)z$ iken $x=y=z$ oluyorsa, x'e A'nın bir uç noktası denir. (X,K) sıralı vektör uzayı $L\subseteq K$ boş olmayan konveks küme olmak üzere, her $x\in K\backslash\{0\}$ için $x=ay$ olacak biçimde (x'e bağlı) bir tek $y\in L$ ve bir tek $a\in(0,\infty)$ varsa, L'ye K'nın bir tabanı denir.

Bundan sonraki kısımda Kadison'un [7]'de verdiği bir fonksiyonel temsili oluşturacağız. Bu fonksiyonel için bazı kavramları açıklayalım. $(X,K,\|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzayı için X'in X'

dual uzayını K' dual konisi ile ele alalım.

$$\Upsilon = \left\{ f \in K' : f(u) = 1 \right\} \tag{3.17}$$

kümesi konvekstir ve K' konisinin bir tabanıdır. Banach-Alaoğlu teoreminden, X' dual uzayının B' kapalı birim yuvarı zayıf* kompakttır. Υ, B''nin zayıf* kapalı alt kümesi olduğu için Υ, X' içinde zayıf* kompakttır. Krein-Milman teoreminden Υ kümesi, kendisinin uç noktalarının konveks zarfının zayıf* kapanışına eşittir. Υ kümesinin uç noktalarının kümesini ext(Υ) ile gösterelim. X sonlu boyutlu olsa bile ext(Υ) zayıf* kapalı olmayabilir. Bu ifade ile ilgili örneği vermeden önce aşağıdaki hazırlığı yapalım.

$\mathbb{R}^n$ Öklid normuyla donatıldığında $(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$ olduğunu fonksiyonel analizden biliyoruz. Ayrıca, $\mathbb{R}^n$ kapalı K konisi ile ele alındığında $K'' = K$ sağlanır ([11], Lemma 2.6.8). $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayının elemanlarını (a,r) biçiminde yazalım. Burada $a \in \mathbb{R}$ ve $r \in \mathbb{R}^n$ alınır.

3.4.8. Önerme

L, $\mathbb{R}^n$ uzayının boş olmayan bir konveks kompakt alt kümesi olmak üzere, $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayının

$$M = \{(a,l) : 0 \leq a \in \mathbb{R},\ l \in aL\}$$
$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \text{her } y \in M \text{ için } 0 \leq \langle x,y \rangle \right\}$$
$$\Upsilon = \{(1,l) : l \in L\}$$

alt kümelerini tanımlayalım. $\mathbb{R}^{n+1}$ içinde K kapalı konidir ve $u = (1,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ elemanı K konisi içinde sıra birimidir. Ayrıca, $M = K'$ ve $\Upsilon = \{m \in M : \langle u,m \rangle = 1\}$ sağlanır.

İspat

K konisinin $\mathbb{R}^{n+1}$ içinde kapalıdır. Gerçekten, $x \in \overline{K}$ alınırsa, $x_n \to x$ olacak biçimde K içinde bir (x_n) dizisi var olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ ve her $y \in M$ için $0 \leq \langle x_n, y \rangle$ ve buradan her $y \in M$ için $0 \leq \langle x,y \rangle$, yani $x \in K$ sağlanır. u'nun bir sıra birim olduğunu göstermek için

$x=(a,r)\in K$ ve $b=a+\max\{\langle r,s\rangle : s\in L\}$ alınırsa her $y=(c,l)\in M\setminus\{0\}$ için

$$\langle bu-x,y\rangle=(b-a)c-\langle r,l\rangle=c\left(\max\{\langle r,s\rangle : s\in L\}-\left\langle r,\frac{1}{c}l\right\rangle\right)\geq 0$$

ve buradan $x\leq bu$ elde edilir.

$K=M'$ olduğundan ([11], Lemma 2.6.8)'den $K'=M''=M$ elde edilir. Son olarak, herhangi bir $(a,l)\in\mathbb{R}^{n+1}$ alındığında $(a,l)\in\Upsilon$ olması için gerek ve yeter şart $(a,l)\in M$ ve $\langle(1,0),(a,l)\rangle=1$ olmasıdır. Gerçekten, $(a,l)\in\Upsilon$ ise, $a=1$ ve $l\in L$ olduğundan $(a,l)\in M$ ve $\langle u,(a,l)\rangle=\langle(1,0),(a,l)\rangle=a=1$ olur. Tersine, $m=(a,l)\in M$ ve $\langle u,m\rangle=1$ ise, $l\in aL$ ve $\langle a,0\rangle=\langle(1,0),(a,l)\rangle=1\Rightarrow a=1$ ve dolayısıyla $l\in L$ olur.

Önerme 3.4.8'i kullanarak aşağıda Υ kümesinin uç noktalarının $\text{ext}(\Upsilon)$ kümesinde kapalı olmadığını gösteren bir örnek verilecektir.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayında öklid normuyla L kümesi, $(1,0,1)$ ve $(-1,0,1)$ noktaları arasındaki doğru parçası ile birim kürenin konveks kombinasyonu olsun. Önerme 3.4.8'de verilen M, K, Υ kümelerini ele alalım. Bu kümeler $\mathbb{R}^4$'ün alt kümeleridir. Υ kümesinin uç noktalarının $\text{ext}(\Upsilon)$ kümesi için $(1,0,0,1)\notin\text{ext}(\Upsilon)$ olmasına rağmen $\left\{(1,0,y,z) : y^2+z^2=1\right\}\setminus\{(1,0,0,1)\}\subseteq\text{ext}(\Upsilon)$ olduğundan $\text{ext}(\Upsilon)$ kümesi kapalı değildir.

Υ içinde $\text{ext}(\Upsilon)$ kümesinin $\overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ zayıf* kapanışı, zayıf* topolojiyle kompakt Hausdorff uzayıdır.

$$\begin{array}{rcl} H:X & \to & C\left(\overline{\text{ext}(\Upsilon)}\right) \\ x & \to & H(x): \ \overline{\text{ext}(\Upsilon)} \to \mathbb{R} \\ & & f \to H(x)(f)=f(x) \end{array} \tag{3.18}$$

dönüşümünü ele alalım.

3.4.9. Lemma

$x \in X$ olsun. $x \in K$ olması için gerek ve yeter şart her $f \in \text{ext}(\Upsilon)$ için $0 \leq f(x)$ olmasıdır.

İspat

Lemma 3.4.1 (b)'den K konisi $\|\cdot\|_u$ normuna göre kapalıdır. Diğer yandan, $x \in K$ olması için gerek ve yeter şart her $f \in K'$ için $0 \leq f(x)$ olmasıdır.

Υ, $\text{ext}(\Upsilon)$'nın konveks zarfının zayıf* kapanışına eşittir. Her $f \in \text{ext}(\Upsilon)$ için $0 \leq f(x)$ olsun. x, X' üstünde zayıf* sürekli fonksiyonel gibi davrandığından her $f \in \Upsilon$ ve dolayısıyla her $f \in K'$ için $0 \leq f(x)$ sağlanır.

Şimdi, Kadison'un ([7], Teorem 2.1)'de verdiği X'in fonksiyonel temsilini ifade edelim.

3.4.10. Teorem

$(X, K, \|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzay olmak üzere, $\text{ext}(\Upsilon)$ ve H yukarıda verilen biçimde tanımlansın. $(H, \overline{\text{ext}(\Upsilon)})$, X'in bir fonksiyonel temsilidir.

İspat

Öncelikle H lineerdir ve u'yu $\mathbf{1}$ sabit fonksiyonuna eşler. $H(X)$ uzayı $\overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ kümesini noktalarına ayırır, yani $f_1 \neq f_2$ olacak biçimdeki $f_1, f_2 \in \overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ için $x \in X$ iken $f_1(x) \neq f_2(x)$ sağlanır. Böylece Lemma 3.4.9'dan H bipozitiftir.

Bir sonraki önermede, $\text{ext}(\Upsilon)$ kümesindeki her bir fonksiyonelin Riesz homomorfizmi ve $\overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ kümesindeki her bir fonksiyonelin Riesz* homomorfizmi olduğu verilmiştir.

3.4.11. Önerme

$(X,K,\|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzay, Υ ve $\text{ext}(\Upsilon)$ yukarıdaki gibi tanımlansın ve $f \in \Upsilon$ olsun ([11], Proposition 2.5.5).

(a) f'nin Riesz homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart $f \in \text{ext}(\Upsilon)$ olmasıdır.

(b) X Riesz uzayı ise $\text{ext}(\Upsilon)$ zayıf* kompakttır.

(c) f'nin Riesz* homomorfizmi olması için gerek ve yeter şart $f \in \overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ olmasıdır.

Şimdi ileride kullanacağımız Stone-Weierstrass teoremini verelim.

3.4.12. Teorem

Ω boş olmayan kompakt Hausdorff uzayı ve $C(\Omega)$ supremum normu ile donatılan özelliklere sahip olmak üzere, $C(\Omega)$'nın $\mathbf{1}$ sabit fonksiyonunu içeren bir X Riesz alt uzayı Ω'yı noktalarına ayırıyorsa (yani her $\omega,\upsilon \in \Omega$ için $\omega \neq \upsilon$ iken $x(\omega) \neq x(\upsilon)$ olacak biçimde $x \in X$ varsa) X, $C(\Omega)$ içinde norm yoğundur ([23], Theorem 11.3).

$(X,K,\|\cdot\|_u)$'nın Riesz uzayı olduğu durumu ele alalım. Teorem 3.4.10 uygulandığında Kakutani'nin soyut M-uzaylarının temsilini veren teoremini türetebiliriz.

3.4.13. Teorem

$(X,K,\|\cdot\|_u)$ sıra birimli Riesz uzayı olsun ve $\text{ext}(\Upsilon)$ yukarıda verilen biçimde verilsin. $\text{ext}(\Upsilon)$ zayıf* kompakt, $H(X)$, $C(\text{ext}(\Upsilon))$'nın bir norm yoğun Riesz alt uzayı ve $H : X \to H(X)$ izometrik Riesz izomorfizmidir ([24], Theorem 2).

İspat

Önerme 3.4.11'den $\text{ext}(\Upsilon)$ zayıf* kompakt, dolayısıyla $\text{ext}(\Upsilon) = \overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ olur. Teorem 3.4.10'dan $(H,\text{ext}(\Upsilon))$ fonksiyonel gösterim olup $H : X \to C(\text{ext}(\Upsilon))$ lineer ve bipozitiftir.

$H(X)$ kümesi ext(Υ)'yı noktalarına ayırır ve H dönüşümü u'yu sabit $\mathbf{1}$ fonksiyonuna eşler. Böylece H bir izometridir.

Şimdi H'nin Riesz homomorfizmi olduğunu gösterelim. $x,y \in X$ ve $f \in \text{ext}(\Upsilon)$ olsun. Önerme 3.4.11'e göre f Riesz homomorfizmidir, dolayısıyla

$$\begin{aligned} H(x \vee y)(f) &= f(x \vee y) \\ &= f(x) \vee f(y) = (H(x) \vee H(y))(f) \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece H'nin Riesz homomorfizmi ve $H(X)$ görüntüsünün de $C(\text{ext}(\Upsilon))$'nin Riesz alt uzayı olduğu sonucuna varılır. Stone-Weierstrass Teoreminden ([23], Theorem 11.3), $H(X)$'nin $C(\text{ext}(\Upsilon))$ içinde norm yoğun olduğu sonucuna varılır.

Bu bölümün kalan kısmında yine bir $(X,K,\|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzayı ele alınacak ve ext(Υ) ve H yukarıda verilen biçimdeki gibi tanımlanacaktır. $H(X)$'in $C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ içinde sıra yoğun olup olmadığı yani, $(C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)}),H)$'nun X pre-Riesz uzayının Riesz uzay örtüsü olup olmadığına bakılacaktır. Lemma 3.4.15, Teorem 3.4.16 ve Teorem 3.4.18'deki sonuçlar Bas Lemmens tarafından [25]'de verilmiştir. $C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ içinde $H(X)$ tarafından üretilen Riesz alt uzayını Lat(X,K) ile gösterelim, yani

$$\text{Lat}(X,K) = \left\{(f_1 \vee \ldots \vee f_m) - (g_1 \vee \ldots \vee g_n) : f_i, g_j \in H(X);\ i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n\right\} \tag{3.19}$$

olsun. Aşağıdaki lemma $(H,\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$'nın X'in herhangi bir (σ,Ω) sıra yoğun fonksiyonel temsilinden daha küçük olduğunu gösterir.

3.4.14. Önerme

Ω ve Δ boş olmayan topolojik uzaylar, Ω kompakt ve Δ Hausdorff olmak üzere herhangi bir sürekli,birebir ve örten $\delta : \Omega \to \Delta$ dönüşümü homeomorfizmdir ([23], Theorem 8.15).

3.4.15. Lemma

(σ,Ω), X'in bir fonksiyonel temsili olmak üzere $\sigma(X)$, $C(\Omega)$ içinde sıra yoğun olsun.

(a) Her $f \in \overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ için $x \in X$ iken $f(x) = \sigma(x)(\omega)$ olacak biçimde $\omega \in \Omega$ vardır.

(b) Her $f \in \overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ ve her $x \in X$ için $f(x) = \sigma(x)(\delta(f))$ olacak biçimde $\delta : \overline{\text{ext}(\Upsilon)} \to \Omega$ dönüşümünü ve $\Delta = \delta(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ kümesini ele alalım. Bu durumda $\delta : \overline{\text{ext}(\Upsilon)} \to \Delta$ bir homeomorfizmdir.

İspat

$C(\Omega)$'nin $\sigma(X)$ tarafından üretilen Riesz alt uzayı Y olsun. $C(\Omega)$ içinde $\sigma(X)$ sıra yoğun olduğundan Y içinde de $\sigma(X)$ sıra yoğundur. Böylece Y, X'in Riesz tamlamasıdır. $\sigma(X) \subseteq Y$ ve $\sigma(X)$, X'i noktalarına ayırdığından Y de X'i noktalarına ayırır. Ayrıca, $\mathbf{1} \in Y$ olduğundan Stone-Weierstrass teoreminden (Teorem 3.4.12) dolayı Y Riesz alt uzayı $C(\Omega)$ içinde norm yoğundur.

(a) $f \in \overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ olsun. Önerme 3.4.11'den f dönüşümü X üstünde Riesz* homomorfizmidir. σ bipozitif olduğundan $\sigma : X \to \sigma(X)$ birebir ve örten dönüşüm, dolayısıyla $f \circ \sigma^{-1} : \sigma(X) \to \mathbb{R}$ Riesz* homomorfizmidir. Teorem 3.3.7'den $f \circ \sigma^{-1}$ dönüşümüne genişleyen bir tek $g : Y \to \mathbb{R}$ Riesz homomorfizmi vardır. Sabit $\mathbf{1}$ fonksiyonu Y içinde koninin bir iç noktası ve g pozitif olduğundan, Önerme 3.4.3'den g dönüşümü süreklidir. Y, $C(\Omega)$ içinde norm yoğun olduğundan g'nin bir tek $h : C(\Omega) \to \mathbb{R}$ sürekli lineer genişlemesi vardır. Latis işlemleri sürekli olduğundan h bir Riesz homomorfizmidir. Teorem 3.1.21'den bir $\omega \in \Omega$ ve bir $0 < a \in \mathbb{R}$ için $f \in C(\Omega)$ iken $h(f) = af(\omega)$ sağlanır. $h(\mathbf{1}) = g(\mathbf{1}) = f(u) = 1$ olduğundan $a = 1$ bulunur ve her $x \in X$ için $f(x) = g(\sigma(x)) = h(\sigma(x)) = \sigma(x)(\omega)$ elde edilir. Son olarak ω'nun tek olduğunu gösterelim. $\upsilon \in \Omega$ için $\upsilon \neq \omega$ alınırsa $\sigma(X)$, Ω'yı noktalarına ayırdığından $\sigma(x)(\upsilon) \neq \sigma(x)(\omega) = f(x)$ olacak biçimde $x \in X$ vardır. Dolayısıyla, bir tek $\omega \in \Omega$ ve her $x \in X$ için $\sigma(x)(\omega) = f(x)$ eşitliği sağlanır.

(b) δ'nın varlığı ve tekliği (a)'da verilmiştir. δ'nın birebir olduğunu görmek için $f, g \in$

$\overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ iken $\delta(f) = \delta(g)$ alınırsa, her $x \in X$ için $f(x) = g(x)$ ve böylece $f = g$ sağlanır. Dolayısıyla $\delta : \overline{\text{ext}(\Upsilon)} \to \Delta$ birebir ve örtendir.

δ'nın sürekli olduğunu gösterelim. $\overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ içindeki bir $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ağı için $f_\lambda \to f \in \overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ olsun. Her $x \in X$ için bir $f_\lambda(x) \to f(x)$ olduğundan $\sigma(x)(\delta(f_\lambda)) \to \sigma(x)(\delta(f))$ sağlanır. $C(\Omega)$ içindeki latis işlemleri noktasal olduğundan, her $y \in Y$ için bir $y(\delta(f_\lambda)) \to y(\delta(f))$ olur. $(\delta(f_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ağının $\delta(f)$'ye yakınsamadığını varsayalım. $\delta(f) \in A$ olacak biçimdeki bir $A \subseteq \Omega$ açık kümesi için $\lambda \in \Lambda$ iken $\delta(f_\varsigma) \notin A$ olacak biçimde $\lambda \leq \varsigma \in \Lambda$ vardır. Urysohn lemmasından bir $h \in C(\Omega); 0 \leq h \leq \mathbf{1}$ için $h(\delta(f)) = 1$ ve $\omega \in \Omega\backslash A$ iken $h(\omega) = 0$ elde edilir. Y, $C(\Omega)$ içinde norm yoğun olduğundan bir $y \in Y$ için $\frac{1}{2} < y(\delta(f))$ ve $\omega \in \Omega\backslash A$ iken $y(\omega) < \frac{1}{2}$ sağlanır. Ancak, her $\lambda \in \Lambda$ için $y(\delta(f_\varsigma)) < \frac{1}{2}$ olacak biçimde $\lambda \leq \varsigma \in \Lambda$ var olduğundan, bu durum $y(\delta(f_\lambda)) \to y(\delta(f))$ olmasıyla çelişir. Yani, δ süreklidir. Bir kompakt uzay ile bir Hausdorff uzayı arasında δ sürekli, birebir ve örten olduğundan Önerme 3.4.14'den dolayı δ bir homeomorfizmdir.

Bir sonraki teorem, bir sıra birimli Arşimedyan sıralı vektör uzayının sıra yoğun olarak gömülebildiği tüm fonksiyonel temsillerin izomorfik olduğunu söyler.

3.4.16. Teorem

$(X, K, \|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzay, $\text{ext}(\Upsilon)$ ve H Eş. 3.18'de verilen biçimde tanımlansın.

(a) (σ, Ω), (X, K) uzayının fonksiyonel temsili olmak üzere $\sigma(X)$, $C(\Omega)$ içinde sıra yoğun ise (σ, Ω) ile $(H, \overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ izomorfiktir.

(b) (Y, f), (X, K) uzayının Riesz tamlaması ve $(H_Y, \text{ext}(\Upsilon)_Y)$, Y'nin fonksiyonel temsili olmak üzere $H_Y(f(X))$, $C(\text{ext}(\Upsilon)_Y)$ içinde sıra yoğundur. Ayrıca, $\overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ ve $(\text{ext}\Upsilon)_Y$ kompakt Hausdorff uzayları homeomorfiktir.

İspat

(a) Lemma 3.4.15'den bir $\Delta \subseteq \Omega$ kümesi ve bir $\delta : \overline{\text{ext}(\Upsilon)} \to \Delta$ homomorfizmi için $x \in X$,

$f \in \overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ iken $H(x)(f) = \sigma(x)(\delta(f))$ sağlanır. $\Delta = \Omega$ olduğunu gösterelim. Herhangi bir $\omega \in \Omega$ için $h : C(\Omega) \to \mathbb{R}$; $h(f) = f(\omega)$ tanımlandığında Teorem 3.1.21'den dolayı h Riesz homomorfizmidir ve $h(\mathbf{1}) = 1$ sağlanır. $\sigma(X)$, $C(\Omega)$ içinde sıra yoğun olduğundan Önerme 3.3.6'dan $\hat{h} = h \circ \sigma$ olacak biçimde $\hat{h} : X \to \mathbb{R}$ Riesz* homomorfizmi vardır. Ayrıca, $\hat{h}(u) = 1$ eşitliği sağlanır. Önerme 3.4.11'den $\hat{h} \in \overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ olur. Her $x \in X$ için

$$\sigma(x)(\omega) = h(\sigma(x)) = \hat{h}(x) = H(x)(\hat{h}) = \sigma(x)(\delta(\hat{h}))$$

ve $\sigma(X)$, Ω'yı noktalarına ayırdığından $\omega = \delta(\hat{h})$ sağlanır.

(b) Önerme 3.3.16'dan Y Arşimedyan Riesz uzayıdır. Ayrıca $f(X)$, Y içinde büyüyen alt uzay olduğundan $f(u)$, Y içinde bir sıra birimdir. Diğer yandan, Önerme 3.4.11 (b)'den $\text{ext}(\Upsilon)_Y$ topolojik uzayı zayıf* kompakttır. Şimdi (X,K) uzayının fonksiyonel temsilinin $(H_Y \circ f, \text{ext}(\Upsilon)_Y)$ olduğunu gösterelim. $H_Y \circ f$ bipozitiftir ve u'yu $\mathbf{1}$ sabit fonksiyonuna eşler. Ek olarak $(H_Y \circ f)(X)$, $\text{ext}(\Upsilon)_Y$ 'yi noktalarına ayırır. Bunu görmek için $g,h \in \text{ext}(\Upsilon)_Y$ ve $g \neq h$ olsun. Önerme 3.4.11'den g ve h dönüşümleri Y üstünde Riesz homomorfizmidir. Teorem 3.3.15 (a)'dan $\hat{g} = g \circ f$ ve $\hat{h} = h \circ f$ dönüşümleri X üstünde Riesz* homomorfizmidir. (Y,f), X'in Riesz tamlaması olduğundan Theorem 3.3.15 (b)'den g ve h dönüşümleri sırasıyla $\hat{g}$ ve $\hat{h}$ Riesz* homomorfizmlerine genişleyen Y üstünde tek Riesz homomorfizmleri olduğundan $\hat{g} \neq \hat{h}$ sağlanır, yani $\hat{g}(x) \neq \hat{h}(x)$ olacak biçimde $x \in X$ vardır. Buradan

$$H_Y(f(x))(g) = g(f(x)) = \hat{g}(x) \neq \hat{h}(x) = h(f(x)) = H_Y(f(x))(h)$$

elde edilir. Böylece $(H_Y \circ f, (\text{ext}(\Upsilon)_Y)$, (X,K)'nın fonksiyonel temsilidir. $H_Y(f(X))$'in $C(\text{ext}(\Upsilon)_Y)$ içinde sıra yoğun olduğunu göstermek için Teorem 3.4.13'ü kullanalım ve $H_Y(Y)$'nin $C(\text{ext}(\Upsilon)_Y)$'nin norm yoğun Riesz alt uzayı olduğunu gösterelim. Sonuç 3.1.6'dan $H_Y(Y)$ uzayı $C(\text{ext}(\Upsilon)_Y)$ içinde sıra yoğundur. Y içinde $f(X)$ sıra yoğun olduğundan ve H_Y bipozitif olduğundan $H_Y(f(X))$, $H_Y(Y)$ içinde sıra yoğundur ve Önerme 3.1.5'den $C(\text{ext}(\Upsilon)_Y)$ içindedir. Diğer yandan, (a)'dan dolayı $\text{ext}(\Upsilon)_Y$ ve $\overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ topolojik uzayları homomorfiktir.

3.4.17. Önerme

Ω, Φ kompakt Hausdorff uzaylar ve $g : \Phi \to \Omega$ homeomorfizm olmak üzere $F : C(\Omega) \to C(\Phi)$, $F(f) = f \circ g$ izometrik Riesz izomorfizmidir ([26], Theorem 4.25).

Önceki teoremin gösterimleri ile bu bölümün ana sonucunu ifade edip, fonksiyonel temsili bir Riesz uzay örtüsü olarak elde edelim.

3.4.18. Teorem

$(X, K, \|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzay olmak üzere $(C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)}), H)$, X'in Riesz uzay örtüsüdür. Ayrıca $\text{Lat}(X, K)$, (X, K) uzayının Riesz tamlamasıdır.

İspat

Teorem 3.4.10'a göre, $(H, \overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ ikilisi X'in fonksiyonel temsilidir ve $H : X \to C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ dönüşümü bipozitif ve lineerdir.

$H(X)$'in $C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ içinde sıra yoğun olduğunu gösterelim. X'in (Y, f) Riesz tamlamasını ve Teorem 3.4.16 (b)'yi kullanarak $H_Y(f(X))$'in $C(\text{ext}(\Upsilon)_Y)$ içinde sıra yoğun olduğu elde edilir. Ayrıca bir $\delta : \overline{\text{ext}(\Upsilon)} \to \text{ext}(\Upsilon)_Y$ homeomorfizmi vardır. $F : C(\text{ext}(\Upsilon)_Y) \to C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$; $F(f) = f \circ \delta$ olsun. Önerme 3.4.17'den, F dönüşümü izometrik Riesz izomorfizmidir. Dolayısıyla $F(H_Y(f(X)), C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ içinde sıra yoğundur. Her $x \in X$ ve her $g \in \overline{\text{ext}(\Upsilon)}$ için

$$F\left(H_Y(f(x))\right)(g) = H_Y(f(x))(\delta(g)) = H(x)(g)$$

olduğundan $F\left(H_Y(f(x))\right) = H(x)$ ve buradan da $F(H_Y(f(X))) = H(X)$ sağlanır. Bu durumda $H(X)$, $C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ içinde sıra yoğun olur. Böylece $(C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)}), H)$, X'in Riesz uzay örtüsüdür ve dolayısıyla $\text{Lat}(X, K)$, (X, K)'ın Riesz tamlamasıdır.

Bu bölümü aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz.

$$X \overset{f \text{ (sıra izomorfizm)}}{\longrightarrow} f(X) \overset{\text{sıra yoğun}}{\subseteq} Y \overset{H_Y \text{ (Riesz izomorfizmi)}}{\longrightarrow} H_Y(Y) \overset{\text{norm yoğun}}{\subseteq} C(\text{ext}(\Upsilon)_Y)$$

$$X \overset{H \text{ (sıra izomorfizm)}}{\longrightarrow} H(X) \subseteq \text{Lat}(X,K) \subseteq C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$$

$$C(\text{ext}(\Upsilon)_Y) \overset{F \text{ (izometrik Riesz izomorfizmi)}}{\longrightarrow} C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$$

Son olarak $C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ uzayının, X'in Riesz tamlamasının düzgün tamlaması olduğunu ifade edelim.

3.4.19. Sonuç

$(X,K,\|\cdot\|_u)$ sıra birimli uzay olmak üzere X'in Riesz tamlamasının düzgün tamlaması $C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ uzayına izometrik Riesz izomorfiktir.

İspat

Teorem 3.4.18'den $(\text{Lat}(X,K),\ H)$, X'in Riesz tamlamasıdır ve Teorem 3.4.10'dan $(H,\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ ikilisi X'in fonksiyonel temsilidir. Buradan $\text{Lat}(X,K)$, $C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$'nın $\mathbf{1}$ sabit fonksiyonunu içeren Riesz alt uzayıdır ve $\overline{\text{ext}(\Upsilon)}$'nı noktalarına ayırır. Teorem 3.4.12'den $\text{Lat}(X,K)$, supremum normuna göre $C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$ içinde norm yoğundur.$H(u)=\mathbf{1}$ fonksiyonu $\text{Lat}(X,K)$ Riesz tamlaması içinde sıra birimdir ve $\text{Lat}(X,K)$ üstünde $\mathbf{1}$-normu, supremum normuna eşittir. Düzgün tamlamanın $\mathbf{1}$-norma göre tamlama olmasından (Önerme 3.4.5) dolayı $\text{Lat}(X,K)$, $C(\overline{\text{ext}(\Upsilon)})$'nın düzgün tamlamasıdır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde üç tür sıra yoğun gömme elde edilmiştir. Bu gömmelerin ilkinde (X,K) uzayı yönlü Arşimedyan sıralı vektör uzayı alınarak X^{δ} Dedekind tam Riesz uzayına $F : X \to X^{\delta}$, $F(x) = \{x\}^{\mathrm{l}}$ bipozitif dönüşümüyle sıra yoğun olarak gömülmüştür. İkinci gömme türü, Riesz uzaylarındaki tanımlar ve özellikler daha geniş bir sınıf olan ve Maris van Haandel tarafından tanımlanan pre-Riesz uzaylarına genişletilerek verilmiştir. Burada (X,K) pre-Riesz uzayı alındığında $G(X)$ görüntüsü bir Y Riesz uzayında sıra yoğun olacak biçimde bir $G : X \to Y$ bipozitif dönüşümünün var olduğu gözlemlenmiştir. Üçüncü tür gömmede ise, Kadison'un klasik fonksiyonel temsili ele alınarak (X,K) sıra birimli Arşimedyan sıralı vektör uzayı iken bir Ω kompakt Hausdorff uzayı ve bir $H : X \to C(\Omega)$ bipozitif dönüşümü için $H(X)$ görüntüsü $C(\Omega)$ içinde sıra yoğun olarak elde edilmiştir.

Maris van Haandel'in Arşimedyan uzaylar için geliştirdiği teorinin daha önceki bir versiyonu, Gerard Buskes ve Arnoud van Rooij tarafından pre-Riesz uzayları üzerindeki yarınormların Riesz uzaylarına gömülmesi yoluyla verilmiştir. Daha sonra bir çok araştırmacı konu ile ilgili sistematik çalışmalar yürütmüş ve pre-Riesz uzayları üzerine bir operatör teorisi inşâ edip, bu teoriyi geliştirmiştir. Bu araştırmacılardan Anke Kalauch ve Onno van Gaans, Riesz uzayları teorisinin kavramlarını pre-Riesz uzaylarında uygulamışlardır.

Kısaca, sıralı vektör uzaylarının Riesz uzaylarına gömülmesi ele alınmıştır. Dedekind tamlamanın yapısı tüm detaylarıyla verilmiştir. van Haandel'in pre-Riesz uzaylar ve Riesz uzay örtüleri teorisi incelenmiş, özellikle en küçük Riesz uzay örtüsü olan ve Riesz izomorfizmleri altında tek olan Riesz tamlamalar ele alınmıştır. Kadison'un fonksiyonel temsili, sıra birimli Arşimedyan sıralı vektör uzaylarının tamlaması için Riesz uzaylarının uygun bir belirgin yapısını verir. Bu gömülmenin sıra yoğun olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Riesz, F. (1930). *Sur la décomposition des opérations linéaires*. Atti del Congresso Internazionale dei Matematici Bologna, 3, 143-148.

2. Kantorovich, L. V. (1940). Linear operators in semi-ordered spaces. *Matematicheskii Sbornik*, 49, 209-284.

3. Vulikh, B. Z. (1977). *Introduction to The Theory of Cones in Normed Spaces (Russian)*. Kalinin State University, Kalinin, 1-13.

4. Vulikh, B. Z. (1978). *Special Topics in The Geometry of Cones in Normed Spaces (Russian)*. Kalinin State University, Kalinin, 1-73.

5. Nagel, A. and Rudin, W. (1974). Riesz decompositions. *Canadian Journal of Mathematics*, XXVI(3), 753-760.

6. van Haandel, M. (1993). *Completions in Riesz Space Theory*. PhD thesis, University of Nijmegen, 1-35.

7. Kadison, R. V. (1951). *A representation theory for commutative topological algebra*. Memoirs of the American Mathematical Society, 7, Rhode Island, 7, 9-11.

8. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. (2006). *Positive Operators*. London: Academic Press, Inc., 1-30, 105, 108-109.

9. Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C. (1971). *Riesz Spaces I*. Amsterdam, 1-7, 63.

10. Meyer-Nieberg, P. (1991). *Banach Lattices*. Berlin: Springer-Verlag, 1-12.

11. Kalauch, A. and van Gaans, O. (2019). *Pre-Riesz spaces*. Berlin: De Gruyter Expositions in Mathematics, 66, 29-30, 32, 34-35, 41, 75, 77-78, 93, 96-97, 107.

12. Aliprantis, C. D. and Tourky, R. (2007). *Cones and Duality*. Rhode Island: American Mathematical Society, 13-14, 49-51.

13. Namioka, I. (1957). *Partially ordered linear topological spaces*. Memoirs of the American Mathematical Society, 24, Rhode Island, 5-6.

14. Aliprantis, C. D. and Border, K. C. (2006). *Infinite Dimensional Analysis*. New York: Springer-Verlag, 322-323.

15. Dedekind R. (1872). *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*. Braunschweig: Vieweg-Verlag, 3-22.

16. Danet, N. (2016). The Dedekind completion of $C(X)$ with pointwise discontinuous functions. In Ordered Structures and Applications: Positivity VII (2013), *Trends in Mathematics*, Springer, Switzerland, 111-126.

17. MacNeille, H. M. (1937). Partially ordered sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 42, 416-460.

18. Yudin, A. I. (1941). On the extension of partially ordered linear spaces. *Uchenye Zapiski Leningrad State University*, 12, 57-61.

19. Wulich, B. Z. (2017). *Geometrie Der Kegel: In Normierten Räumen*. Walter de Gruyter GmbH,Berlin/Boston (Russian original from 1977/1978, translated by M. R. Weber), 158-163.

20. van Waaij, J. (2013). Tensor products in Riesz space theory. Master thesis, Leiden University, 16-17.

21. Luxemburg, W. A. J. and Schep, A. R. (1979). An extension theorem for Riesz homomorphisms. *Indagationes Mathematicae*, 41, 145-154.

22. Lipecki, Z. (1980). Extension of vector-lattice homomorphisms. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 79, 247-248.

23. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. (1998). *Principles of Real Analysis*. New York, 63, 88.

24. Kakutani, S. (1941). Concrete representation of abstract (M)-spaces (A characterization of the space of continuous functions). *Annals of Mathematics*, 42(2), 994-1024.

25. Kalauch, A., Lemmens, B. and van Gaans, O. (2014). Riesz completions, functional representations, and anti-lattices. *Positivity*, 18(1), 201-218.

26. Abramovich, Y. A. and Aliprantis, C. D. (2002). *An invitation to operator theory*. Transactions of the American Mathematical Society, Rhode Island, 145-146.



Gazili olmak ayrıcalıktır