
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

APOSTOL BERNOULLİ FİBONACCİ POLİNOMLARI VE APOSTOL EULER FİBONACCİ POLİNOMLARI

Elif GÜLAL

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2023

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Elif GÜLAL
08/08/2023

APOSTOL BERNOULLİ FİBONACCİ POLİNOMLARI VE APOSTOL EULER FİBONACCİ POLİNOMLARI

(Doktora Tezi)

Elif GÜLAL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2023

ÖZET

Bu çalışmada, Apostol Bernoulli Fibonacci polinomları ve Apostol Euler Fibonacci polinomları tanımlandı ve bu polinomların çeşitli özellikleri elde edildi. Apostol Bernoulli Fibonacci polinomlarının ve Apostol Euler Fibonacci polinomlarının harmonik tabanlı $F-$üstel üreteç fonksiyonları elde edildi. Incomplete Bernoulli-F polinomları tanımlandı ve çeşitli özellikleri incelendi.

Bilim Kodu	:	20401
Anahtar Kelimeler	:	Apostol Bernoulli Fibonacci polinomları, Apostol Euler Fibonacci sayıları, incomplete Bernoulli-F polinomları, Harmonik-tabanlı üreteç fonksiyonları
Sayfa Adedi	:	47
Danışman	:	Prof. Dr. Naim TUĞLU

APOSTOL BERNOULLI FIBONACCI POLYNOMIALS AND APOSTOL EULER FIBONACCI POLYNOMIALS

(Ph. D. Thesis)

Elif GÜLAL

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2023

ABSTRACT

In this study, we defined the Apostol Bernoulli-Fibonacci polynomials and Apostol Euler-Fibonacci polynomials and obtained some properties of these polynomials. Then, harmonic-based $F-$exponential generating functions for Apostol Bernoulli Fibonacci polynomials and Apostol Euler Fibonacci polynomials were studied. Finaly, we defined incomplete Bernoulli-F polynomials and investigated some properties of these polynomials.

Science Code	:	20401
Keywords	:	Apostol Bernoulli Fibonacci polynomials, Apostol Euler-Fibonacci numbers, incomplete Bernoulli-F polynomials, Harmonic-based generating functions
Number of pages	:	47
Supervisor	:	Prof. Dr. Naim TUĞLU

TEŞEKKÜR

Doktora süresince kıymetli katkılarıyla beni yönlendirip desteğini esirgemeyen ve çalışmalarımın her aşamasında bilgisine başvurduğum Hocam Prof. Dr. Naim TUĞLU'ya, bu süreçte önerileriyle çalışmama katkıda bulunan Prof. Dr. Dursun TAŞÇI'ya, Prof. Dr. E. Gökçen KOÇER 'e, Doç. Dr. Can KIZILATEŞ'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca her zorlukta yanımda olup, beni yalnız bırakmayan annem Hatice ERCAN'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. TANIMLAR ve TEOREMLER 5

2.1. Temel Kavramlar 5

2.2. Bazı Özel Polinomlar ve Özellikleri 8

3. APOSTOL BERNOULLİ-FİBONACCİ POLİNOMLARI VE APOSTOL EULER-FİBONACCİ POLİNOMLARI 15

3.1. Apostol Bernoulli-Fibonacci Polinomlar ve Aposto Euler-Fibonacci Polinomlar İle İlgili Temel Kavramlar 15

3.2. Apostol Bernoulli-Fibonacci Polinomlar ve Aposto Euler-Fibonacci Polinomların Özellilikleri 17

4. APOSTOL BERNOULLİ FİBONACCİ VE APOSTOL EULER FİBONACCİ SAYILARININ HARMONİK ÜRETEÇLERİ 29

4.1. Harmonik Üstel Üreteç 29

4.2. Apostol Bernoulli-Fibonacci Sayılarının Harmonik Tabanlı Üreteçleri 30

5. INCOMPLETE BERNOULLİ-F POLİNOMLARI 35

5.1. Incomplete Polinomlar 35

5.2. Incomplete Bernoulli-F Polinomların Bazı Özellikleri 36

6. SONUÇ VE ÖNERİLER 39

KAYNAKLAR 41

ÖZGEÇMİŞ 45

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{B_n^F(x,\lambda)}$	Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomu
$\boldsymbol{E_n^F(x,\lambda)}$	Apostol Euler Fibonacci polinomu
$\boldsymbol{B_n(x)}$	Bernoulli polinomu
$\boldsymbol{B_{n,F}}$	Bernoulli-F polinomu
$\boldsymbol{B_n}$	Bernoulli sayısı
$\boldsymbol{E_n(x)}$	Euler polinomu
$\boldsymbol{E_n}$	Euler sayısı
$\boldsymbol{F_n!}$	F-faktöriyel
$\boldsymbol{\partial_{F,x}}$	F-türev operatörü
$\boldsymbol{F_n}$	Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{\binom{n}{k}_F}$	Fibonomial katsayı
$\boldsymbol{\mathbb{F}_n}$	Harmonik Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{B_{n,F}^m}$	Incomplete Bernoulli-F Polinomu
$\boldsymbol{B_n^{F,\alpha}(x,\lambda)}$	α. mertebeden Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomu
$\boldsymbol{E_n^{F,\alpha}(x,\lambda)}$	α. mertebeden Apostol Euler-Fibonacci polinomu
$\boldsymbol{B_n^{\alpha}(x)}$	α. mertebeden Bernoulli Polinomu
$\boldsymbol{E_n^{\alpha}(x)}$	α. mertebeden Euler Polinomu

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
o.ü.	Olmak üzere

1. GİRİŞ

Bernoulli ve Euler polinomları ve sayıları matematiğin trigonometrik fonksiyon serileri, sayısal türev ve integral, diferensiyel denklemler, istatistik, olasılık kuramı, sayılar teorisi gibi bir çok alanında kullanılmaktadır. Ayrıca Bernoulli polinomları yaklaşım teorisinde elemanter fonksiyonların Euler gama fonsiyonları cinsinden asimtotik açılımlarda da kullanılmaktadır.

Ars Conjectandi adlı kitabında Jakobs Bernoulli klasik Bernoulli, sayılarını tanımlamış olup bu sayılar günümüze kadar insanların ilgi odağı olmuş ve çeşitli özellikleri incelenmiştir [1].

Bernoulli sayıları kullanılarak Bernoulli polinomları tanımlanmış ve birçok özelliği üzerine çalışmalar yapılmıştır.

İlk olarak 1924 yılında Nörlund, Bernoulli polinomlarını tanımlamış olup [2], bunun üzerine Carlitz, Nörlund yaptığı tanımlama kullanarak $q-$Bernoulli sayıları ve polinomlarını tanımlamıştır [3]. Ayrıca Carlitz, yüksek mertebeden Bernoulli sayıları ile Euler sayıları arasındaki ilişkileri içeren bazı özellikler bulmuştur [4, 5]. Al-Salam'da $q-$Bernoulli sayıları ve polinomlarını içeren çalışmalar yapmıştır [6]. 1973 yılında H. Radamacher, Bernoulli sayılarının Riemann zeta fonksiyonları arasındaki ilişkileri içeren bir çalışma yapmıştır [7]. S. Roman, farklı tipte Bernoulli sayılarını tanımlayıp ayrıca Bernoulli sayıları ve polinomları için üreteç fonksiyonunu elde etmiştir [8]. D. Zagier, Bernoulli sayılarının farklı bir genellemesini tanımlamış ve modifiye Bernoulli sayıları olarak adlandırmış ve bunların çeşitli özellikler elde etmiştir [9]. Koblitz, $q-$Bernoulli sayıları ile $q-$zeta fonksiyonları arasında çeşitli bağıntılar elde etmiş ve $q-$Bernoulli sayılarını kullanarak $p-$adik $q-$Bernoulli sayılarını tanımlamıştır [10]. Satoh, $q-$Bernoulli sayıları ile Riemann zeta fonksiyonu arasında birçok özellik ve bağıntılar bulmuşlardır [11]. Tsumura, $q-$Dirichlet serileri ile $q-$Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi incelemiştir ve bunlarla ilgili çeşitli özellikler elde etmiştir [12]. F. T. Howard, 1996 yılında dejenere Bernoulli sayıları üzerine çalışmıştır [13]. Y. Şimşek, 2003 yılında $q-$twisted Bernoulli sayılarını tanımlayarak bu sayı ve polinomların sağladıkları genel özellikleri

incelemiştir [14]. Hegazi, $q-$Bernoulli sayıları ve polinomlarının indirgeme bağıntısını elde etmiş, bu bağıntıyı kullanarak üretecini elde etmiştir [15].

Leonhard Euler (1707-1783) tarafından Euler polinomlar, tanımlanmıştır. Srivastava ve Choi, Euler polinomları ve Euler sayıları üzerine bir çok çalışmalar yapmış [16], Qiu-Ming Luo, bilinen Euler sayıları ve polinomları içeren bir çok özellik elde etmiştir [17]. Ayrıca, Cheon tarafından Bernoulli ve Euler polinomları ile ilgili çalışmalar devam ettirmiştir [18].

Çatma ise Bernoulli ve Euler polinomlarını inceleyip, bu polinomların bazı özelliklerini elde etmiştir [19].

Liber Abaci kitabında İtalyan Matematikçi Pisalı Leonard tarafından terimleri $0,1,1,2,3,5,...$ olan dizi Fibonacci dizisi olarak adlandırılmış [20, 21], Filipponi tarafından 1996 yılında Fibonacci sayılarının bir genelleştirmesi olan incomplete Fibonacci sayıları tanımlanmıştır. Bu çalışmada Fibonacci ve Lucas sayılarının açık formülünden yararlanarak incomplete Fibonacci ve Lucas sayıları tanımlanmıştır. Sonrasında bu diziler için indirgeme bağıntıları bu sayıların bazı özellikleri ve toplam formülleri elde edilmiştir [22]. Pinter ve Srivastava incomplete Fibonacci ve Lucas sayıları için üreteç fonksiyonlarını hesap etmişlerdir [23]. 2004 yılında incomplete genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas sayıları ve üreteç fonksiyonları üzerinde çalışılmıştır [24]. 2010 yılında Tasci ve Cetin-Firengiz, Fibonacci sayılarının genelleştirilmesi olan Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarının açık formülünden yararlanılarak, incomplete Fibonacci ve Lucas $p-$sayılarını tanımış ve birçok özelliğini elde etmiştir [25].

Krot tarafından Fibonomiyel katsayılar kullanılarak Bernoulli$-F$ polinomlarını tanımlamıştır [26].

Apostol, bilinen Bernoulli sayıları ve polinomlarına benzer şekilde Lipchitz-Lerch Zeta fonksiyonları üzerinde çalışmış ve elde ettiği polinomları Apostol-Bernoulli olarak adlandırmıştır [27]. Apostol Bernoulli polinomları üzerine Srivastava çalışmalar yapmış, bazı genellemeleri Luo ve Srivastava tarafından elde edilmiştir [28, 29]. Daha sonra Carlitz, $\alpha-$genişletilmiş Apostol-Bernoulli polinomlarını tanımlamıştır [30]. Apostol tipinden

polinomların çeşitli özellikleri Luo tarafından elde edilmiştir [31]. Luo ve Srivastava birlikte Apostol polinomların bir genelleştirmesi olan α Apostol-Euler ve ApostolBernoulli polinomlarını tanımlamış ve birçok özelliğini elde etmişlerdir. Apostol tipinden polinomlarının ve Apostol-Euler polinomlarının indirgeme bağıntıları ile çeşitli özellikleri elde edilmiştir [17, 28, 29, 31, 32]. Srivastava ve Pinter, Euler ve Bernoulli polinomlarının toplam formüllerini ve çeşitli özelliklerini içeren teoremler elde etmiştir [33].

Dattoli, harmonik sayılar ve harmonik polinomlar üzerine çalışmada, vakum yükseltme operatör yardımıyla bunların harmonik tabanlı üstel üreteçlerını elde etmiştir [34, 35].

Özvatan ve Pashaev, Fibonomiyel katsayıları kullanarak Fibonacci hesaplamaları ve bunların uygulamalarını yapmışlardır. Ayrıca Altın üstel fonksiyondan yararlanarak Bernoulli Fibonacci sayıları ve Bernoulli Fibonacci polinomlarını tanımlamış ve bunların $F-$üstel üreteçlerini içeren çeşitli özellikler elde etmişlerdir [36, 37].

Cvijovic, harmonik sayıları içeren üreteç fonksiyonlar ile ilgili 2010 yılında araştırmalar yapmıştır [38]. Tuğlu ve arkadaşları harmonik Fibonacci sayılarını tanımlamış, elemanları harmonik ve hiperharmonik Fibonacci sayıları olan circulant matrislerin çeşitli özelliklerini incelemiştir [39]. S. Kuş doktora tez çalışmasında, Euler Fibonacci sayıları ve Euler Fibonacci polinomlarını ve $F-$üstel üreteçlerini elde etmiştir. Ayrıca burada Euler Fibonacci sayıları ve Bernoulli Fibonacci polinomlarının harmonik tabanlı $F-$üstel üreteçleri elde edilmiştir [40].

Bu çalışmada, Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomları, Apostol Bernoulli-Fibonacci sayıları, Apostol Euler-Fibonacci polinomları, Apostol Euler-Fibonacci sayılarının tanımları verilmiştir. Bu polinom ve sayıların sağladıkları bazı özellikler verilmiş, harmonik tabanlı üstel üreteçleri elde edilmiştir. Bernoulli-F sayılarının tanımı kullanılarak incomplete Bernoulli$-F$ sayılarının tanımı verilmiş bunlarla ilgili özellikler elde edilmiştir.

2. TANIMLAR ve TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmamızda ihtiyaç duyacağımız bazı tanım ve kavramlara yer vereceğiz.

2.1. Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç şartları ve $n \geq 0$ için

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı $\{F_n\}_{n\geq 0}$ dizisine Fibonacci dizisi denir [21].

2.1.2. Tanım

$\{F_n\}_{n\geq 0}$ Fibonacci dizisi ve $F_0! = 1$ olmak üzere $F-$faktöriyel

$F_n! = F_n \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} \cdots F_1$

şeklinde tanımlıdır [41].

Örneğin $F_4! = F_4 \cdot F_3 \cdot F_2 \cdot F_1$ şeklindedir.

2.1.3. Tanım

n. Fibonacci sayısı F_n olmak üzere Fibonomiyel katsayılar

$$\binom{n}{k}_F = \begin{cases} \dfrac{F_n!}{F_{n-k}!F_k!}\,, & 0 \leq k \leq n \\ 0\,, & n < k \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır [41].

Örnek

$$\binom{3}{0}_F = 1$$

$$\binom{3}{1}_F = \frac{F_3!}{F_{3-1}!F_1!} = \frac{2!}{1!1!} = 2$$

$$\binom{3}{2}_F = \frac{F_3!}{F_{3-2}!F_2!} = 2$$

$$\binom{3}{3}_F = \frac{F_3!}{F_{3-3}!F_3!} = 1$$

2.1.4. Tanım

$F-$Binomiyel açılım formülü

$$(x+y)^n_F = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F x^k y^{n-k}$$

olarak tanımlanır [26].

Örnek

$F-$Binomiyel formülünde $n=3$ alınırsa

$$\begin{aligned}(x+y)^3_F &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}_F x^3 y^{3-k} \\ &= \binom{3}{0}_F x^0 y^{3-0} + \binom{3}{1}_F x^1 y^{3-1} + \binom{3}{2}_F x^2 y^{3-2} + \binom{3}{3}_F x^3 y^{3-3} \\ &= y^3 + 2xy^2 + 2x^2 y + x^3\end{aligned}$$

elde edilir.

2.1.5. Tanım

$F-$üstel fonksiyonlar e_F^x ve E_F^x olmak üzere

$$e_F^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{F_n!} \tag{2.1}$$

ve

$$E_F^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{x^n}{F_n!}$$

olarak tanımlanır [36].

$F-$üstel fonksiyonlar arasında

$$e_F^x E_F^y = e_F^{(x+y)_F} \tag{2.2}$$

şeklinde bir bağıntı mevcuttur [37].

2.1.6. Tanım

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere herhangi bir f fonksiyonunun $F-$türevi

$$\partial_{F,x}(f(x)) = \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{(\alpha - \beta)x}$$

olarak tanımlanır [37].

Örneğin $f(x) = x^n$ fonksiyonunun $F-$türevi

$$\partial_{F,x}(x^n) = F_n x^{n-1}$$

dir [26].

$F-$üstel fonksiyonların $F-$ türevleri

$$\partial_{F,x}\left(e_F^{tx}\right) = te_F^{tx}$$

ve

$$\partial_{F,x}\left(E_F^{tx}\right) = tE_F^{-tx}$$

şeklindedir.

2.2. Bazı Özel Polinomlar ve Özellikleri

Bu bölümde, Bernoulli polinomlarının, Bernoulli sayılarının, Euler polinomlarının, Euler sayılarının tanımları ve sağladıkları bazı özellikleri inceleyeceğiz. Daha sonra Bernoulli-Fibonacci sayıları, Bernoulli-Fibonacci polinomları Bernoulli-Euler polinomları Bernoulli-Euler sayıları ve Bernoulli $F-$polinomlarının tanımlarını verip sonraki bölümlerde Bernoulli-Fibonacci polinomları ve Bernoulli-Euler polinomlarının bir genelleştirmesi olan Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomları ve Apostol Bernoulli-Euler polinomlarının tanımları elde edilecektir.

2.2.7. Tanım

$B_0 = 1$ olmak üzere, $n \geq 1$ tamsayısı için

$$B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k$$

ile tanımlı sayılara Bernoulli sayıları ve

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$$

ile tanımlı polinomlara Bernoulli polinomları denir [30].

$B_n(x)$ Bernoulli polinomları ve B_n Bernoulli sayıları üstel üreteci fonksiyonları

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{2.3}$$

ve

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}$$

şeklindedir [42].

$B_n(x)$ Bernoulli polinomlarında $x=0$ alınırsa B_n Bernoulli sayıları elde edilir.

Aşağıda bazı Bernoulli polinomları ve Bernoulli sayıları verilmiştir.

$B_0(x)=1$	$B_0=1$
$B_1(x)=x-\frac{1}{2}$	$B_1=-\frac{1}{2}$
$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$	$B_2=\frac{1}{6}$
$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$	$B_3=0$
$B_4(x)=x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30}$	$B_4=-\frac{1}{30}$
$B_5(x)=x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{2}x^3-\frac{1}{6}x$	$B_5=0$

Bernoulli polinomları ve sayılarının sağladığı bazı özellikler

$$B_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)y^{n-k}, \tag{2.4}$$

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kx^{n-k},\quad n\geq 0 \tag{2.5}$$

ve

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \quad n \geq 2 \tag{2.6}$$

dir [42].

2.2.8. Tanım

Üstel üreteci

$$\frac{2e^{tx}}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} \tag{2.7}$$

ile tanımlı $E_n(x)$ polinomlara Euler polinomları ve

$$\frac{2}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\frac{t^n}{n!}$$

üstel üreteçi ile tanımlı sayılara E_n Euler sayıları denir [43].

Bazı Euler sayılarının ve polinomlarıaşağıda verilmiştir.

$E_0(x) = 1$	$E_0 = 1$
$E_1(x) = x - \frac{1}{2}$	$E_1 = -\frac{1}{2}$
$E_2(x) = x^2 - x$	$E_2 = \frac{1}{6}$
$E_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}$	$E_3 = 0$
$E_4(x) = x^4 - 3x^3 + x$	$E_4 = 0$
$E_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{2}$	$E_5 = -\frac{1}{2}$

Euler polinomları

$$E_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x) y^{n-k} \tag{2.8}$$

özelliği sağlar [43].

Litaratürde, Bernoulli ve Euler polinomlarının birçok genelleştirmeleri vardır. Lucas ve arkadaşları tarafından sırasıyla α. mertebeden Bernoulli polinomlarının ve α. mertebeden Euler polinomlarının üstel üreteç formülü

$$\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^{\alpha} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{\alpha}(x)\frac{z^n}{n!} \tag{2.9}$$

ve

$$\left(\frac{2}{e^z+1}\right)^{\alpha} e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{\alpha}(x)\frac{z^n}{n!}. \tag{2.10}$$

şeklinde verilmiştir [17]. Eğer burada $x = 0$ alınırsa α. mertebeden Bernoulli ve Euler polinomları α. mertebeden Bernoulli ve Euler sayılarına dönüşür.

Bir diğer genelleme α ve λ keyfi reel ya da kompleks parametre olmak üzere α. mertebeden genelleştirilmiş Apostol Bernoulli polinomu ve λ. mertebeden genelleştirilmiş Apostol Euler polinomları sırasıyla

$$\left(\frac{t}{\lambda e^t-1}\right)^{\alpha} e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{\alpha}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!} \tag{2.11}$$

ve

$$\left(\frac{2}{\lambda e^t+1}\right)^{\alpha} e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{\alpha}(x,\lambda)\frac{t^n}{n!}. \tag{2.12}$$

dir [27, 44, 45].

Eş. 2.11 ifadesinde $\lambda = 1$ alınırsa α. $B_n^{\alpha}(x)$ mertebeden Bernoulli polinomlarına dönüşür.

Eş. 2.12 ifadesinde $\lambda = 1$ alınırsa α. mertebeden $E_n^{\alpha}(x)$ Euler polinomlarına dönüşür.

Eş. 2.11 ve Eş. 2.12 ifadelerinde $\lambda = \alpha = 1$ alınırsa sırasıyla klasik $B_n(x)$ Bernoulli polinomları ve $E_n(x)$ Euler polinomları elde edilir.

Bu polinomların sağladıkları bazı özellikler

$$B_n^{\alpha}(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{\alpha}(x)y^{n-k}, \tag{2.13}$$

$$B_n^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{\alpha}, \tag{2.14}$$

$$E_n^{\alpha}(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k^{\alpha}(x)y^{n-k}, \tag{2.15}$$

$$B_n^{\alpha+\beta}(x+y,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_n^{\alpha}(x,\lambda)B_{n-k}^{\beta}(y,\lambda) \tag{2.16}$$

$$E_n^{\alpha+\beta}(x+y,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_n^{\alpha}(x,\lambda)E_{n-k}^{\beta}(y,\lambda). \tag{2.17}$$

dir [27, 44, 45].

2.2.9. Tanım

$F_n!$ $F-$faktöriyel olmak üzere

$$\frac{te_F^{tx}}{e_F^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^F(x)\frac{t^n}{F_n!} \tag{2.18}$$

$F-$üstel üreteci ile tanımlı polinomlara $B_n^F(x)$ Bernoulli-Fibonacci polinomları ve bu polinomlarda $x=0$ için

$$\frac{t}{e_F^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^F\frac{t^n}{F_n!}$$

ile tanımlı sayılara B_n^F Bernoulli-Fibonacci sayıları denir [36].

Aşağıda bazı Bernoulli-Fibonacci polinomları ve Bernoulli-Fibonacci sayıları verilmiştir.

$B_0^F(x) = 1$ $\qquad$ $B_0^F = 1$

$B_1^F(x) = x - 1$ $\qquad$ $B_1^F = -1$

$B_2^F(x) = x^2 - x + \frac{1}{2}$ $\qquad$ $B_2^F = \frac{1}{2}$

$B_3^F(x) = x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{3}$ $\qquad$ $B_3^F = -\frac{1}{3}$

$B_4^F(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + \frac{3}{10}$ $\qquad$ $B_4^F = \frac{3}{10}$

$B_5^F(x) = x^5 - 5x^4 + \frac{15}{2}x^3 - 5x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}$ $\qquad$ $B_5^F = \frac{5}{8}$

2.2.10. Tanım

n. Fibonacci sayısı F_n olmak üzere

$$\frac{2e_F^{tx}}{e_F^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(x) \frac{t^n}{F_n!}$$

$F-$üstel üreteci ile tanımlı polinomlara $E_n^F(x)$ Euler-Fibonacci polinomları ve

$$\frac{2}{e_F^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F \frac{t^n}{F_n!}$$

$F-$üstel üreteci ile tanımlı sayılara E_n^F Euler Fibonacci sayıları denir [40].

Aşağıda bazı Euler-Fibonacci polinomları ve Euler-Fibonacci sayıları verilmiştir.

$$E_0^F(x) = 1 \qquad E_0^F = 1$$

$$E_1^F(x) = x - \tfrac{1}{2} \qquad E_1^F = -\tfrac{1}{2}$$

$$E_2^F(x) = x^2 - \tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{4} \qquad E_2^F = -\tfrac{1}{4}$$

$$E_3^F(x) = x^3 - x^2 - \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{4} \qquad E_3^F = \tfrac{1}{4}$$

$$E_4^F(x) = x^4 - \tfrac{3}{2}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{5}{8} \qquad E_4^F = \tfrac{5}{8}$$

$$E_5^F(x) = x^5 - \tfrac{5}{2}x^4 - \tfrac{15}{4}x^3 - \tfrac{15}{4}x^2 + \tfrac{25}{8}x - \tfrac{13}{16} \qquad E_5^F = -\tfrac{13}{16}$$

3. APOSTOL BERNOULLİ-FİBONACCİ POLİNOMLARI VE APOSTOL EULER-FİBONACCİ POLİNOMLARI

Bu bölümde, Özvatan ve Pashaev'in altın üstel fonksiyondan yararlanarak tanımladığı Bernoulli Fibonacci polinomlarından faydalanarak α. mertebeden Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomları ve Kuş ve Tuğlu'nun tanımladığı Euler-Fibonacci polinomlarından yararlanarak yeni bir genelleştirme olan α. mertebeden Apostol Euler-Fibonacci polinomları tanımlanmıştır.

Apostol Bernoulli-Fibonacci ve Apostol Euler-Fibonacci polinomları ve bunların özel durumları olan sayıları tanımlanmış, aralarındaki ilişkiler ve çeşitli özellikleri elde edilmiştir [36, 37].

3.1. Apostol Bernoulli-Fibonacci Polinomlar ve Aposto Euler-Fibonacci Polinomlar İle İlgili Temel Kavramlar

3.1.1. Tanım

α ve λ keyfi reel ya da kompleks parametreler olmak üzere

$$\left(\frac{t}{\lambda e_F^t - 1}\right)^{\alpha} e_F^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{F,\alpha}(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} \tag{3.1}$$

$F-$üstel üreteci ile tanımlı polinomlara α. mertebeden $B_n^{F,\alpha}(x,\lambda)$Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomları denir.

3.1.2. Tanım

α ve λ keyfi reel ya da kompleks parametreler olmak üzere

$$\left(\frac{2}{\lambda e_F^t + 1}\right)^{\alpha} e_F^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{F,\alpha}(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} \tag{3.2}$$

$F-$üstel üreteci ile tanımlı polinomlara α. mertebeden $E_n^{F,\alpha}(x,\lambda)$ Apostol Euler-Fibonacci polinomları denir.

Eş. 3.1 ifadesinde $\alpha = 1$ alınırsa, α. mertebeden $B_n^{F,\alpha}(x,\lambda)$ Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomları, $B_n^F(x,\lambda)$ Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomlarına dönüşür.

Eş. 3.2 ifadesinde $\alpha = 1$ seçilirse α. mertebeden $E_n^{F,\alpha}(x,\lambda)$ Apostol Euler-Fibonacci polinomları, $E_n^{F,\alpha}(x,\lambda)$ Apostol Euler-Fibonacci polinomlarına dönüşür. Bu polinomların $F-$üstel üreteçleri sırasıyla

$$\frac{t}{\lambda e_F^t - 1} e_F^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} \tag{3.3}$$

ve

$$\frac{2}{\lambda e_F^t + 1} e_F^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} \tag{3.4}$$

dir.

Eş. 3.1 ifadesinde $\alpha = 1$ ve $x = 0$ seçilirse, α. mertebeden $B_n^{F,\alpha}(x,\lambda)$ Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomlarından, $B_n^F(\lambda)$ Apostol Bernoulli-Fibonacci sayıları elde edilir.

Eş. 3.2 ifadesinde $\alpha = 1$ ve $x = 0$ seçilirse α. mertebeden $E_n^{F,\alpha}(x,\lambda)$ Apostol Euler-Fibonacci polinomlarından, $E_n^{F,\alpha}(\lambda)$ Apostol Euler-Fibonacci sayıları elde edilir.

Apostol Bernoulli-Fibonacci sayıları ve Apostol Euler-Fibonacci sayılarının $F-$üstel üreteçleri sırasıyla

$$\frac{t}{\lambda e_F^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}$$

ve

$$\frac{2}{\lambda e_F^t + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}$$

dır.

3.2. Apostol Bernoulli-Fibonacci Polinomlar ve Aposto Euler-Fibonacci Polinomların Özellilikleri

Bu bölümde Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomları ve sayıları ile Apostol Euler-Fibonacci polinomları ve sayılarının çeşitli özellikleri incelenecektir.

3.2.1. Teorem

$B_n^{F,\alpha}(x,\lambda)$, α. mertebeden Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomu ve $B_n^{F,\beta}(\lambda)$, β. mertebeden Apostol Bernoulli-Fibonacci sayısı olmak üzere

$$B_n^{F,\alpha+\beta}(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F B_k^{F,\alpha}(x,\lambda)B_{n-k}^{F,\beta}(\lambda)$$

dir.

İspat

Eş. 3.1 ifadesi kullanılırsa;

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{F,\alpha+\beta}(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}&=\left(\frac{t}{\lambda e_F^t-1}\right)^{\alpha+\beta}e_F^{tx}\\&=\left(\frac{t}{\lambda e_F^t-1}\right)^{\alpha}e_F^{tx}\left(\frac{t}{\lambda e_F^t-1}\right)^{\beta}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{F,\alpha}(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{F,\beta}(\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Cauchy çarpımından yararlanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{F,\alpha+\beta}(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F B_k^{F,\alpha}(x,\lambda)B_{n-k}^{F,\beta}(\lambda)\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

olup

$$B_n^{F,\alpha+\beta}(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F B_k^{F,\alpha}(x,\lambda)B_{n-k}^{F,\beta}(\lambda)$$

olduğu bulunur. Böylece istenilen elde edilmiş olur.

3.2.2. Teorem

$B_n^{F,\alpha}(x,\lambda)$, α. mertebeden Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomları olmak üzere

$$B_n^{F,\alpha}(x+y,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}B_k^{F,\alpha}(x,\lambda)y^{n-k} \tag{3.5}$$

dir.

İspat

Eş. 3.1 ve Eş. 2.2 ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{F,\alpha}(x+y,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}&=\left(\frac{t}{\lambda e_F^t-1}\right)^{\alpha}e_F^{t(x+y)}\\&=\left(\frac{t}{\lambda e_F^t-1}\right)^{\alpha}e_F^{tx}E_F^{ty}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{F,\alpha}(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{y^nt^n}{F_n!}\end{aligned}$$

olup, bu ifadeye Cauchy çarpımı uygulanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{F,\alpha}(x+y,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}B_k^{F,\alpha}(x,\lambda)y^{n-k}\right)$$

olur. Buradan açıkça görülür ki

$$B_n^{F,\alpha}(x+y,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}B_k^{F,\alpha}(x,\lambda)y^{n-k}$$

dır.

Eş. 3.5 ifadesinde $y=1$ alınırsa

$$B_n^{F,\alpha}(x+1,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}}B_k^{F,\alpha}(x,\lambda)$$

elde edilir.

3.2.3. Teorem

$B_n^F(x,\lambda)$, Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomları ve $B_n^F(\lambda)$ Apostol Bernoulli-Fibonacci sayıları olmak üzere

$$B_n^F(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F B_k^F(\lambda) x^{n-k} \tag{3.6}$$

bulunur.

İspat

Eş. 3.3 ve Eş. 2.2 eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} &= \left(\frac{t}{\lambda e_F^t - 1}\right) e_F^{tx} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeye Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F B_k^F(\lambda)x^{n-k}\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

bulunur. Katsayılar karşılaştırılırsa

$$B_n^F(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F B_k^F(\lambda) x^{n-k}$$

olup, istenilen sonuç elde edilir.

Eş. 3.6 ifadesinde $x = 1$ alınırsa

$$B_n^F(1,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F B_k^F(\lambda)$$

olduğu açıkça görülür.

3.2.4. Teorem

$E_n^F(x,\lambda)$, Apostol Euler-Fibonacci polinomları ve $E_n^F(\lambda)$, Apostol Euler-Fibonacci sayıları olmak üzere

$$E_n^F(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F E_k^F(\lambda) x^{n-k} \tag{3.7}$$

elde edilir.

İspat

Eş. 3.4 ve Eş. 2.2 eşitliklerinden kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} &= \left(\frac{2}{\lambda e_F^t + 1}\right) e_F^{tx} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{F_n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeye Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F E_k^F(\lambda)x^{n-k}\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

bulunur, katsayılar karşılaştırılırsa

$$E_n^F(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F E_k^F(\lambda)x^{n-k}$$

elde edilir.

3.2.5. Teorem

$B_n^F(x,\lambda)$ Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomları olmak üzere

$$B_n^F(x+y,\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F (-1)^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} y^{n-k} B_n^F(x,\lambda) \tag{3.8}$$

dir.

İspat

Eş. 3.3 ve Eş. 2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x+y,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} &= \left(\frac{t}{\lambda e_F^t - 1}\right) e_F^{t(x+y)} \\ &= \left(\frac{t}{\lambda e_F^t - 1}\right) e_F^{tx} E_F^{ty} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} y^n \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F (-1)^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} y^{n-k} B_k^F(x,\lambda) \right) \frac{t^n}{F_n!}\end{aligned}$$

katsayılar karşılaştırılırsa

$$B_n^F(x+y,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F (-1)^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} y^{n-k} B_n^F(x,\lambda)$$

elde edilir.

Eğer Eş. 3.8 ifadesinde $y = 1$ alınırsa

$$B_n^F(x+1,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F (-1)^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} B_k^F(x,\lambda)$$

elde edilir.

3.2.6. Teorem

$E_n^{F,\alpha}(x,\lambda)$, Apostol Euler -Fibonacci polinomları olmak üzere

$$E_n^F(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F (-1)^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} y^{n-k} E_n^F(x,\lambda) \tag{3.9}$$

dir.

İspat

Eş. 3.4 ve Eş. 2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(x+y,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} &= \left(\frac{2}{\lambda e_F^t+1}\right) e_F^{t(x+y)} \\ &= \left(\frac{2}{\lambda e_F^t+1}\right) e_F^{tx} E_F^{ty} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} y^n \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F (-1)^{\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}} y^{n-k} E_k^F(x,\lambda)\right)\frac{t^n}{F_n!}\end{aligned}$$

dir. Katsayıların karşılaştırılmasından sonuç açıktır.

3.2.7. Teorem

$E_n^F(x,\lambda)$, Apostol Euler-Fibonacci polinomları olmak üzere

$$E_n^F\left(\frac{x}{2},\lambda\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F (-1)^{\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-k} E_k^F(x,\lambda) \tag{3.10}$$

dir.

İspat

Eş. 3.4 ve Eş. 2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} E_n^F\left(\frac{x}{2},\lambda\right)\frac{t^n}{F_n!} &= \left(\frac{2}{\lambda e_F^t+1}\right) e_F^{\frac{x}{2}t} \\ &= \left(\frac{2}{\lambda e_F^t+1}\right) e_F^{xt} E_F^{-\frac{x}{2}t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{-x}{2}\right)^n \frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F (-1)^{\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-k} E_k^F(x,\lambda)\right)\frac{t^n}{F_n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\frac{t^n}{F_n!}$ katsayıları karşılaştırılırsa istenilen

$$E_n^F\left(\frac{x}{2},\lambda\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F(-1)^{\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-k}E_k^F(x,\lambda)$$

elde edilir.

3.2.8. Teorem

$B_n^F(x,\lambda)$ Apostol-Bernoulli-Fibonacci polinomlar ve $\partial_{F,x}$ $F-$türev operatörü olmak üzere

$$\partial_{F,x}\left(B_{n+1}^F(x,\lambda)\right)=F_{n+1}B_n^F(x,\lambda) \tag{3.11}$$

dir.

İspat

Eş. 3.3 eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\partial_{F,x}\left(\frac{t}{\lambda e_F^t-1}e_F^{tx}\right)&=\frac{t}{\lambda e_F^t-1}\partial_{F,x}\left(e_F^{tx}\right)\\&=\frac{t}{\lambda e_F^t-1}te_F^{tx}\\&=t\sum_{n=0}^{\infty}B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\end{aligned} \tag{3.12}$$

olur. Diğer taraftan, $F-$türev operatörünün lineerlik özelliğinden

$$\begin{aligned}\partial_{F,x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\right)&=\partial_{F,x}\left(B_0^F(x,\lambda)\frac{t^0}{F_0!}+B_1^F(x,\lambda)\frac{t^1}{F_1!}+\cdots\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\partial_{F,x}\left(B_n^F(x,\lambda)\right)\frac{t^n}{F_n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\partial_{F,x}(B_{n+1}^F(x,\lambda))\frac{t^{n+1}}{F_{n+1}!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\partial_{F,x}(B_{n+1}^F(x,\lambda))\frac{t}{F_{n+1}}\frac{t^n}{F_n!}\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. Eğer Eş. 3.12 ve Eş. 3.13 ifadelerideki katsayılar karşılaştırılırsa

$$\partial_{F,x}\left(B_{n+1}^{F}(x,\lambda)\right) = F_{n+1}\,B_{n}^{F}(x,\lambda)$$

elde edilir.

3.2.9. Teorem

$E_n^F(x,\lambda)$, Apostol-Euler-Fibonacci polinomları ve $\partial_{F,x}$ $F-$türev operatörü olmak üzere

$$\partial_{F,x}\left(E_{n+1}^{F}(x,\lambda)\right) = F_{n+1}\,E_{n}^{F}(x,\lambda)$$

dir.

İspat

Eş. 3.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\partial_{F,x}\left(\frac{2}{\lambda e_F^t+1}e_F^{tx}\right) &= \frac{2}{\lambda e_F^t+1}\,\partial_{F,x}\left(e_F^{tx}\right) \\ &= \frac{2te_F^{tx}}{\lambda e_F^t+1} \\ &= t\sum_{n=0}^{\infty}E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\end{aligned} \tag{3.14}$$

olur. diğer taraftan, $F-$türev operatörünün lineerlik özelliğinden

$$\begin{aligned}\partial_{F,x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\right) &= \partial_{F,x}\left(E_0^F(x,\lambda)\frac{t^0}{F_0!}+E_1^F(x,\lambda)\frac{t^1}{F_1!}+\cdots\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\partial_{F,x}\left(E_k^F(x,\lambda)\right)\frac{t^n}{F_n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\partial_{F,x}(E_{k+1}^F(x,\lambda))\frac{t^{n+1}}{F_{n+1}!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\partial_{F,x}(E_{n+1}^F(x,\lambda))\frac{t}{F_{n+1}}\frac{t^n}{F_n!}\end{aligned} \tag{3.15}$$

olup, Eş. 3.14 ve Eş. 3.15) ifadelerinde $\frac{t^n}{F_n!}$ katsayıları karşılaştırılırsa

$$tE_n^F(x,\lambda) = \partial_{F,x}\left(E_{n+1}^F(x,\lambda)\right)\frac{t}{F_{n+1}}$$

olup

$$\partial_{F,x}\left(E_{n+1}^F(x,\lambda)\right) = F_{n+1}\,E_n^F(x,\lambda)$$

elde edilir.

3.2.10. Teorem

$B_l^F(x,\lambda)$ Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomlar olmak üzere $n \geq 1$ için

$$\lambda\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}_F B_l^F(x,\lambda) = F_n x^{n-1} + B_n^F(x,\lambda)$$

dir.

İspat

Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomlarının üstel üreteç kullanırsa

$$\frac{t}{\lambda e_F^t - 1}e_F^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}$$

eşitliğin her iki tarafı λe_F^t ile çarpılırsa

$$\frac{te_F^{tx}}{\lambda e_F^t - 1}\lambda e_F^t = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\lambda e_F^t$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{te_F^{tx}}{\lambda e_F^t - 1}\left(\lambda e_F^t - 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda e_F^t B_n^F(x,\lambda) - B_n^F(x,\lambda)\right)\frac{t^n}{F_n!}$$

olup,

$$te_F^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda e_F^t B_n^F(x,\lambda) - B_n^F(x,\lambda)\right) \frac{t^n}{F_n!} \tag{3.16}$$

dir. Eş. 3.16 eşitliğin sol tarafından

$$\begin{aligned} te_F^{tx} &= \partial_{F,x}\left(e_F^{tx}\right) \\ &= \partial_{F,x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{F_n!}\right) \\ &= \partial_{F,x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tx)^n}{F_n!}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \partial_{F,x}(x^n)}{F_n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n F_n x^{n-1}}{F_n!} \end{aligned}$$

olup Eş. 3.16 nin sağ tarafı incelenecek olursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda e_F^t B_n^F(x,\lambda) - B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda e_F^t B_l^F(x,\lambda)\frac{t^l}{F_l!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}$$

dir. Eşitliğin sağ tarafını aşağıdaki gibi yazabilir;

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{l=0}^{\infty} e_F^t B_l^F(x,\lambda)\frac{t^l}{F_l!} &= \lambda \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_l^F(x,\lambda)\frac{t^k}{F_k!}\frac{t^l}{F_l!} \\ &= \lambda \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B_l^F(x,\lambda)\frac{t^{k+l}}{F_k!F_l!}. \end{aligned}$$

Burada $k+l=n$, için

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{l=0}^{\infty} e_F^t B_l^F(x,\lambda)\frac{t^l}{F_l!} &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_n!}\sum_{l=0}^{n} B_l^F(x,\lambda)\frac{t^n F_n!}{F_{n-l}!F_l!} \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{F_n!}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}_F B_l^F(x,\lambda)\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n F_n x^{n-1}}{F_n!} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{F_n!}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}_F B_l^F(x,\lambda)\right) - \sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}$$

olup, katsayılar eşitlenirse

$$\lambda \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}_F B_l^F(x,\lambda) - B_n^F(x,\lambda) = F_n x^{n-1}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3.2.11. Teorem

$E_n^F(x,\lambda)$ Apostol-Euler-Fibonacci polinomları ve F_n Fibonacci sayıları olmak üzere

$$\lambda t \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{k}_F E_l^F(x,\lambda) + E_n^F(x,\lambda) = 2F_n x^{n-1}$$

dir.

İspat

Eş. 3.4 ifadesinden

$$\frac{2}{\lambda e_F^t + 1} e_F^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(x,\lambda) \frac{t^n}{F_n!}$$

olup, λe_F^t ile çarpılırsa

$$\frac{2e_F^{tx}}{\lambda e_F^t + 1} \lambda e_F^t = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^F(x,\lambda) \frac{t^n}{F_n!} \lambda e_F^t$$

olur. Buradan

$$\frac{2e_F^{tx}}{\lambda e_F^t + 1} \left(\lambda e_F^t + 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda e_F^t E_n^F(x,\lambda) + E_n^F(x,\lambda)\right) \frac{t^n}{F_n!}$$

olup

$$2e_F^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda e_F^t E_n^F(x,\lambda) + E_n^F(x,\lambda)\right) \frac{t^n}{F_n!} \tag{3.17}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafını kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2e_F^{tx} &= \frac{2}{t}\partial_{F,x}\left(e_F^{tx}\right) \\
&= \frac{2}{t}\partial_{F,x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tx)^n}{F_n!}\right) \\
&= \frac{2}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n\partial_{F,x}(x^n)}{F_n!} \\
&= \frac{2}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^nF_nx^{n-1}}{F_n!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş. 3.17 in sağ tarafı ele alınırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda e_F^t E_n^F(x,\lambda)+E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}\lambda e_F^t E_l^F(x,\lambda)\frac{t^l}{F_l!}+\sum_{n=0}^{\infty}E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}$$

burada

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty}\lambda e_F^t E_l^F(x,\lambda)\frac{t^l}{F_l!} &= \lambda\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}E_l^F(x,\lambda)\frac{t^k}{F_k!}\frac{t^l}{F_l!} \\
&= \lambda\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}E_l^F(x,\lambda)\frac{t^{k+l}}{F_k!F_l!}
\end{aligned}$$

$k+l=n$ için

$$\begin{aligned}
\lambda\sum_{l=0}^{\infty}e_F^t E_l^F(x,\lambda)\frac{t^l}{F_l!} &= \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_n!}\sum_{l=0}^{n}E_l^F(x,\lambda)\frac{t^nF_n!}{F_{n-l}!F_l!} \\
&= \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{F_n!}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{k}_F E_l^F(x,\lambda)\right)
\end{aligned}$$

olur.

$$\frac{2}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^nF_nx^{n-1}}{F_n!}=\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{F_n!}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{k}_F E_l^F(x,\lambda)\right)+\sum_{n=0}^{\infty}E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}.$$

katsayılar eşitlenirse

$$\lambda t\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{k}_F E_l^F(x,\lambda)+E_n^F(x,\lambda)=2F_nx^{n-1}$$

elde edilir.

4. APOSTOL BERNOULLİ FİBONACCİ VE APOSTOL EULER FİBONACCİ SAYILARININ HARMONİK ÜRETEÇLERİ

Bu bölümde Apostol Bernoulli-Fibonacci ve Apostol Euler-Fibonacci sayılarının harmonik tabanlı üstel üreteçlerini elde edeceğiz.

4.1. Harmonik Üstel Üreteç

n doğal sayı olmak üzere h_n harmonik sayıları

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ile tanımlıdır.

Dattoli'nin 2008 yılında yaptığı çalışmada harmonik sayılarını vakum yükseltme operatörü yardımıyla harmonik tabanlı üstel üreteç fonksiyonuyla tanımlamıştır [34]. Tuglu ve arkadaşları Harmonic Fibonacci sayılarını

$$\mathbb{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_k}$$

olarak tanımlamışlardır [39]. Harmonik Fibonacci sayılarının tanımından

$$\mathbb{F}_{n+1} = \mathbb{F}_n + \frac{1}{F_{n+1}}$$

S. Kuş doktora tez çalışmasında Euler-Fibonacci sayılarının harmonic tabanlı F-üstel üreteçlerini elde etmiştir. Burada harmonik tabanlı F üstel üreteç fonksiyonu

$$e^{f_{\mathbb{F}}t} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n \frac{t^n}{F_n!}$$

ile ifade edilir ve

$$\partial_{F,t}(e^{f_{\mathbb{F}}t}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1} \frac{t^n}{F_n!}$$

dir [40].

Sonraki bölümde, Apostol Bernoulli-Fibonacci sayılarının harmonik tabanlı F üstel üreteçlerini elde edilecektir

4.2. Apostol Bernoulli-Fibonacci Sayılarının Harmonik Tabanlı Üreteçleri

4.2.1. Teorem

$B_n^F(\lambda)$ Apostol Bernoulli-Fibonacci sayılarının harmonik tabanlı F-üstel üreteçi

$$\frac{t}{\lambda-1+\lambda t(\partial_{F,t}e^{f_{\mathbb{F}}t}-e^{f_{\mathbb{F}}t}+1)}$$

dir.

İspat

$e^{f_{\mathbb{F}}t}$ F-üstel üreteç ve Apostol Bernoulli-Fibonacci sayılarını tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\lambda e_F^t-1 &= \lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{F_n!}-1\\
&= \lambda+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{F_n!}-1\\
&= \lambda-1+\lambda t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{n+1}}\frac{t^n}{F_n!}\\
&= \lambda-1+\lambda t\sum_{n=0}^{\infty}(\mathbb{F}_{n+1}-\mathbb{F}_n)\frac{t^n}{F_n!}\\
&= \lambda-1+\lambda t\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{F}_{n+1}\frac{t^n}{F_n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{F}_n\frac{t^n}{F_n!}\right)\\
&= \lambda-1+\lambda t\left(\partial_{F,t}\ e_{F,t}^{Ft}-e_{F,t}^{Ft}+1\right)
\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\frac{1}{\lambda e_F^t-1}=\frac{1}{\lambda-1+\lambda t\left(\partial_{F,t}\ e_{F,t}^{Ft}-e_{F,t}^{Ft}+1\right)} \tag{4.1}$$

yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(\lambda)\frac{t^n}{F_n!} = \frac{t}{\lambda - 1 + \lambda t(\partial_{F,t}e^{f_{\mathbb{F}}t} - e^{f_{\mathbb{F}}t} + 1)}$$

elde edilir.

4.2.2. Teorem

$B_n^F(x,\lambda)$ Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomlarının harmonik tabanlı F-üstel üreteci

$$\frac{te_F^{xt}}{\lambda - 1 + \lambda t(\partial_{F,t}e^{f_{\mathbb{F}}t} - e^{f_{\mathbb{F}}t} + 1)}$$

dir.

İspat

$B_n^F(x,\lambda)$ Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomları Eş. 3.6 ifadesinden

$$B_n^F(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F B_k^F(\lambda)x^{n-k}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F B_k^F(\lambda)x^{n-k}\right)\frac{t^n}{F_n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{F_n!}{F_{n-k}!F_k!}B_k^F(\lambda)x^{n-k}\right)\frac{t^n}{F_n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{n-k}!F_k!}B_k^F(\lambda)x^{n-k}\right)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_k^F(\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{F_n!}
\end{aligned}$$

dir. Apostol Bernoulli-Fibonacci sayılarının harmonik tabanlı F-üstel üreteci kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!} = \frac{te_F^{xt}}{\lambda - 1 + \lambda t(\partial_{F,t}e^{f_{\mathbb{F}}t} - e^{f_{\mathbb{F}}t} + 1)}$$

elde edilir.

4.2.3. Teorem

$E_n^F(\lambda)$ Apostol Euler-Fibonacci sayılarının harmonik-tabanlı F-üstel üreteci

$$\frac{2}{1+\lambda+\lambda t\left(\partial_{F,t}e^{f_{\mathbb{F}}t}-e^{f_{\mathbb{F}}t}+1\right)}$$

dir.

İspat

$e^{f_{\mathbb{F}}t}$, F-üstel üreteç ve $E_n^F(\lambda)$ Apostol Euler-Fibonacci sayılarının tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda e_F^t+1 &= 1+\lambda+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{F_n!}\\
&= 1+\lambda+\lambda t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_{n+1}}\frac{t^n}{F_n!}\\
&= 1+\lambda+\lambda t\sum_{n=0}^{\infty}(\mathbb{F}_{n+1}-\mathbb{F}_n)\frac{t^n}{F_n!}\\
&= 1+\lambda+\lambda t\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{F}_{n+1}\frac{t^n}{F_n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{F}_n\frac{t^n}{F_n!}\right)\\
&= 1+\lambda+\lambda t\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{F}_{n+1}\frac{t^n}{F_n!}-\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{F}_n\frac{t^n}{F_n!}\right)\\
&= 1+\lambda+\lambda t\left(\partial_{F,t}e^{f_{\mathbb{F}}t}-e^{f_{\mathbb{F}}t}+1\right)
\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\frac{1}{\lambda e_F^t+1}=\frac{1}{1+\lambda+\lambda t\left(\partial_{F,t}e^{f_{\mathbb{F}}t}-e^{f_{\mathbb{F}}t}+1\right)}$$

dir. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n^F(\lambda)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{1}{1+\lambda+\lambda t\left(\partial_{F,t}e^{f_{\mathbb{F}}t}-e^{f_{\mathbb{F}}t}+1\right)}$$

elde edilir.

4.2.4. Teorem

$E_n^F(x,\lambda)$ Apostol Euler-Fibonacci polinomlarının harmonik tabanlı F-üstel üreteci

$$\frac{2e_F^{xt}}{1+\lambda+\lambda t\left(\partial_{F,t}e^{f_{\mathbb{F}}t}-e^{f_{\mathbb{F}}t}+1\right)}$$

dir.

İspat

$E_n^F(x,\lambda)$ Apostol Euler-Fibonacci polinomları ve Eş. 3.7 ifadesinden

$$E_n^F(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F E_k^F(\lambda)x^{n-k}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_F E_k^F(\lambda)x^{n-k}\right)\frac{t^n}{F_n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{F_n!}{F_{n-k}!F_k!}E_k^F(\lambda)x^{n-k}\right)\frac{t^n}{F_n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{F_{n-k}!F_k!}E_k^F(\lambda)x^{n-k}\right)t^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}E_k^F(\lambda)\frac{t^n}{F_n!}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{F_n!}\end{aligned}$$

olup, Apostol Euler-Fibonacci sayılarının harmonik tabanlı F-üstel üreteci kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}E_n^F(x,\lambda)\frac{t^n}{F_n!}=\frac{2e_F^{xt}}{1+\lambda+\lambda t\left(\partial_{F,t}e^{f_{\mathbb{F}}t}-e^{f_{\mathbb{F}}t}+1\right)}$$

dir.

5. INCOMPLETE BERNOULLİ-F POLİNOMLARI

Bu bölümde, Krot tarafından tanımlanan Bernoulli-F polinomlarından faydalanarak Incomplete Bernoulli-F polinomlarını tanımlayıp, bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

5.1. Incomplete Polinomlar

5.1.1. Tanım

F_n, n. Fibonacci sayısı olmak üzere

$$B_{n,F} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k}$$

şeklinde tanımlı polinomlara Bernoulli-F polinomları denir [26].

Bernoulli-F polinomlarının bazıları aşağıdaki tabloda verilmektedir.

$$B_{0,F}(x) = 1$$

$$B_{1,F}(x) = x + 1$$

$$B_{2,F}(x) = x^2 + x + \tfrac{1}{2}$$

$$B_{3,F}(x) = x^3 + 2x^2 + x + \tfrac{1}{3}$$

$$B_{4,F}(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + \tfrac{1}{5}$$

$$B_{5,F}(x) = x^5 + 5x^4 + \tfrac{15}{2}x^3 + 5x^2 + x + \tfrac{1}{8}$$

5.1.2. Tanım

m, n birer tamsayı ve $0 \leq m \leq n$ olmak üzere

$$B_{n,F}^{m} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{F_{k+1}} \binom{n}{k}_F x^{n-k}$$

şeklindeki polinomlara Incomplete Bernoulli-F polinomları denir.

Incomplete Bernoulli-F polinomlarında özel olarak $m=n$ seçilirse $B_{n,F}^{m}=B_{n,F}$ elde edilir.

Örnek

$n=3$ ise $0\leq m\leq 3$ olur.

$m=0$ ise

$$B_{3,F}^{0}=\sum_{k=0}^{0}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{3}{k}_{F}x^{3-k}=\frac{1}{F_1}\binom{3}{0}_{F}x^{3}=x^{3}$$

$m=1$ ise

$$B_{3,F}^{1}=\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{3}{k}_{F}x^{3-k}=\frac{1}{F_1}\binom{3}{0}_{F}x^{3}+\frac{1}{F_2}\binom{3}{1}_{F}x^{2}=x^{3}+2x^{2}$$

$m=2$ ise

$$B_{3,F}^{2}=\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{3}{k}_{F}x^{3-k}=\frac{1}{F_1}\binom{3}{0}_{F}x^{3}+\frac{1}{F_2}\binom{3}{1}_{F}x^{2}+\frac{1}{F_3}\binom{3}{2}_{F}x=x^{3}+2x^{2}+x$$

$m=3$ ise

$$B_{3,F}^{3}=\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{3}{k}_{F}x^{3-k}=\frac{1}{F_1}\binom{3}{0}_{F}x^{3}+\frac{1}{F_2}\binom{3}{1}_{F}x^{2}+\frac{1}{F_3}\binom{3}{2}_{F}x+\frac{1}{F_4}\binom{3}{3}_{F}=x^{3}+2x^{2}+x+\frac{1}{3}$$

5.2. Incomplete Bernoulli-F Polinomların Bazı Özellikleri

5.2.1. Teorem

$B_{n,F}^{m}(x)$ incomplete Bernoulli-F polinomlar ve $\partial_{F,x}$ $F-$türev olmak üzere

$$\partial_{F,x}\left(B_{n,F}^{m}(x)\right)=F_{n}B_{n-1,F}(x)$$

dir.

İspat

$B_{n,F}^{m}(x)$ incomplete Bernoulli $F-$polinomlarının birinci mertebeden F-türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
\partial_{F,x}\left(B_{n,F}^{m}(x)\right) &= \partial_F\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n}{k}_F x^{n-k}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n}{k}_F F_{n-k}x^{n-k-1}\\
&= \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{F_{k+1}}\frac{F_n!}{F_{n-k}!F_k!}F_{n-k}x^{n-k-1}\\
&= \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{F_{k+1}}\frac{F_n!}{F_{n-k-1}!F_k!}x^{n-k-1}\\
&= F_n\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{F_{k+1}}\binom{n-1}{k}_F x^{n-k-1}\\
&= F_n B_{n,F}^{m}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek

$n=3,\ m=1$ için

$$\partial_{F,x}\left(B_{3,F}^{1}(x)\right) = \partial_F\left(x^3+2x^2\right) = F_3x^2+2F_2x = 2\left(x^2+x\right) = F_3B_{2,F}^{1}(x)$$

dir. Ayrıca $n=3,\ m=2$ için

$$\partial_{F,x}\left(B_{3,F}^{2}(x)\right) = \partial_F\left(x^3+2x^2+x\right) = F_3x^2+2F_2x+F_1 = 2\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right) = F_3B_{2,F}^{1}(x)$$

olarak elde edilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, Apostol Bernoulli-Fibonacci polinomları ve Apostol Euler-Fibonacci polinomları tanımlanmıştır. Ayrıca bu polinomların özellikleri detaylı olarak incelenmiştir. Üreteç fonksiyonları kullanılarak yeni özellikler elde edilmiştir. Teoremler ve detaylı verilen ispatlar ile bu çalışmayı inceleyenlere yardımcı olacaktır.

KAYNAKLAR

1. Bernoulli, J. (1713). *Ars Conjectandi*. Basel: Published Posthumously, 104-185.

2. Nörlund, N. E. (1924). *Vorlesungen über differenzenrechnung* (First edition). New York: Chelsea Publishing Company, 10-25.

3. Carlitz, L. (1948). $q-$Bernoulli Numbers and Polynomials. *Duke Mathematics J*ournal, 15(4), 987-1000.

4. Carlitz, L. (1952). Some theorems on Bernoulli Numbers of Higher Order Received. *Pacific Journal of Math*ematics, 2(2), 127–139.

5. Carlitz, L. (1954). Some theorems on Bernoulli and Euler Numbers of Higher Order. *Duke Mathematics Journal*, 21(3), 405-421.

6. Al-Salam, W. A. (1958). q-Bernoulli Numbers and Polynomials. *Mathematische Nachrichten*, 17(3-6), 239-260.

7. Rademacher, H. (1973). Bernoulli Polynomials and Bernoulli Numbers. *Analytic Number Theory Springer–Verlag*, 169, 1–13.

8. Roman, S. (1984). *The umbral calculus*. New York: Academic Press Inc.

9. Zagier, D. (1998). A Modified Bernoulli Numbers. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 4(16), 1-2, 63-72.

10. Koblitz, N. (1982). On Carlitz's q–Bernoulli Numbers. *Journal of Number Theory*, 14(3), 332– 339.

11. Satoh, J. (1989). q-Analogue of Riemann's ζ–Function and q–Euler Numbers. *Journal of Number Theory*, 3(3), 346–362.

12. Tsumura, H. (1991). A Note on q-Analogues of the Dirichlet Series and q–Bernoulli Numbers. J*ournal of Number Theory*, 39(3), 251–256.

13. Howard, F. T.(1996). Explicit formulas for degenerate Bernoulli numbers. *Discrete Math*ematics, 162(1-3), 175–185.

14. Şimşek, Y. (2003). On q–Analogue of the Twisted L–Functions and q–Twisted Bernoulli Numbers. *J–Korean Math*ematics, 40(6), 963–975.

15. Hegazi, A. S., and Mansour, M.(2005). A Note on q-Bernoulli Numbers and Polynomials. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 13(1), 9-18.

16. Srivastava, H. M. and Choi, J. (2001). *Series associated with the zeta and related functions. Dordrecht:* Kluwer Academic Publishers, 77-128.

17. Luo, Q.M., Zheng, Y.M., and Qi, F. (2003). Euler numbers of higher order and Euler polynomials of higher order. *Henan Science*, 21(1), 1-6.

18. Cheon, G.S. (2003). A note on the Bernoulli and Euler polynomials. *Applied Mathematics Letters*, 16(3), 365-368.

19. Çatma, G. (2013). *Bernoulli and Euler polynomials*. Master Thesis, Institute of Graduate Studies and Research, Eastern Mediterranean Universty, North Cyprus.

20. Hoggatt Jr., V. E. (1969). *The Fibonacci and Lucas Numbers* (First edition), Boston: Houghton Mifflin, 1-70.

21. Vajda, S. (1989). *Fibonacci and Lucas numbers, and the Golden Section*: *Theory and Applications* (First edition), New York: Halsted Press, 10-100.

22. Filipponi, P. (1996). Incomplete Fibonacci and Lucas numbers. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 45(2), 37-56.

23. Filipponi, P. (1996). Incomplete Fibonacci and Lucas numbers. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 45(2), 37-56.

24. Djordjević, G. B. and Srivastava, H. M. (2005). Incomplete generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. *Mathematical and Computer Modelling*, 42(9,10), 1049-1056.

25. Tasci, D. and Cetin Firengiz, M. (2010). Incomplete Fibonacci and Lucas p-numbers. *Mathematical and Computer Modelling*, 52(9,10), 1763-1770.

26. Krot, E. (2004). An introduction to finite fibonomial calculus. *Central Europen Journal of Mathematics*, 2(5), 754-766.

27. Apostol, T. M. (1951). On the Lerch zeta function. *Pacific Journal of Mathematics*, 1, 161-167.

28. Luo, Q. M., and Srivastava, H. M. (2005). Some generalizations of the Apostol Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 308, no. 1, 290-302.

29. Srivastava, H. M. (2000). Some formulas for the Bernoulli and Euler polynomials at rational arguments. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 129(1), 77-84.

30. Carlitz, L. (1979). Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers. *Utilitas Mathematica*, 15, 51-88.

31. Luo, Q. M., and Srivastava, H. M. (2006). Some relationships between the Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. *Computers and Mathematics with Applications*, 51(3-4), 631-642.

32. Luo, Q. M. (2005). Some recursion formulae and relations for Bernoulli numbers and Euler numbers of higher order. *Advanced Studies Contemporary Mathematics*, 10(1), 63-70.

33. Srivastava, H. M. and Pinter, (2004). Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials. *Applied Mathematics Letters*, 17(4), 375-380.

34. Dattoli, G., Germano, B., Licciardi, S., and Martinelli M. R. (2018). Umbral methods and harmonic numbers. *Axioms*, 7(62), 1-9.

35. Dattoli, G., and Srivastava, H.M. (2008). A note on harmonic numbers, umbral calculus and generating functions. *Applied Mathematics Letters*, 21(79), 686-693.

36. Özvatan, M. (2018). *Generalized Golden-Fibonacci Calculus and Applications*, Master Thesis, The Graduate School of Engineering and Sciences of Izmir Institute of Technology, İzmir.

37. Pashaev, O.K., and Nalci, S. (2012). Golden quantum oscillator and Binet-Fibonacci calculus. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoritical*, 45(1), 1-23.

38. Cvijovic, D. (2010). The Dattoli–Srivastava conjectures concerning generating functions involving the harmonic numbers. *Applied Mathematics and Computation*, 215(11), 4040-4043.

39. Tuglu N., Kızılateş C., and Kesim S. (2015). On the harmonic and hyperharmonic Fibonacci numbers. *Advances in Difference Equations*, (297), 1-12.

40. Kuş, S. (2020). *Generalizations of Bernoulli Polynomials and Fibo-Bernoulli Matrices*, Ph.D. Thesis, Gazi University Graduate School of Natural and Applied Sciences, Ankara.

41. Kac, V., and Cheung, P., (2002). *Quantum Calculus*. New York: Springer, 17-21.

42. Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (1964). *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. National bureau of standards. *Applications of Mathematics Series 55*, 5-827.

43. Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (1972). *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. USA: Courier Corporation, 6-140.

44. Apostol, T. M. (1976). *Modular functions and Dirichlet series in number theory.* New York: Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1-189.

45. Luo, Q. M. (2009). The multplication formulas for the Apostol-Bernoulli and Apostol Euler polynomials of higher order. *Integral Transforms and Spesial Functions*, 20 (5), 377-391



Gazili olmak ayrıcalıktır