GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

ROTASYONLU GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI

Fettah VURAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2021

Fettah VURAL tarafından hazırlanan "ROTASYONLU GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Unvanı Adı SOYADI

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. . . . .

Başkan: Unvanı Adı SOYADI

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. . . . .

Üye: Unvanı Adı SOYADI

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. . . . .

Tez Savunma Tarihi: 18/02/2021

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

. . . .

Prof. Dr. Cevriye GENCER

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Fettah VURAL
18/02/2021

ROTASYONLU GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Fettah VURAL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2021

ÖZET

Genel olarak genişlemeyen dönüşümler için sabit noktaların varlığını sağlamak için hipotezlere uzayın geometrisiyle ilgili bazı varsayımlar eklenir. Ancak 1981'de K. Goebel and M. Koter, bir Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi üzerinde herhangi bir kompaktlık varsayımının ve Banach uzayında özel geometrik şartların gerekli olmadığına dair bir sonuç elde etmiştir. Bu sonuçtan yola çıkarak oluşturulan bu çalışmada, Banach uzaylarında rotasyonlu genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaları üzerine bazı sonuçlar verilmiştir. Banach uzaylarında rotasyonluluk şartının, zayıf kompaktlık veya başka bir özel geometrik yapı olmasa bile genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını garanti ettiğine dair temel bir ispat sunulmuştur. Bu ispat, araştırma konusu olan dönüşümün sabit noktasına yakınsayan bir dizi oluşturmaya dayanır.

Bilim Kodu : 20404
AnahtarKelimeler: nach uzayı , sabitnokta,rotasyonlugenişlemeyendönüşüm.
Sayfa Adedi : 40
Danışman : Unvanı Adı SOYADI

FIXED POINTS OF ROTATIVE NONEXPANSIVE MAPPINGS
(M. Sc. Thesis)

Fettah VURAL

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
February 2021

ABSTRACT

In general, some assumptions about the geometry of space are added to the hypotheses to ensure the existence of fixed points for nonexpansive mappings. However, in 1981 K. Goebel and M. Koter obtained the conclusion that no assumptions of compactness on a closed convex subset of a Banach space and special geometric conditions are not required in the Banach space. In this study, which is created based on this result, some results are given on the fixed points of the rotational nonexpansive mappings in Banach spaces. A fundamental proof is presented that the requirement of rotation in Banach spaces guarantees the existence of fixed points of nonexpansive mappings, even if there is no weak compactness or other special geometrical structure. This proof is based on constructing a sequence that converges to the fixed point of the mapping that is the subject of research.

Science Code	: 20404
Key Words	: Banach space, fixed point, rotative nonexpansive mapping.
Page Number	: 40
Supervisor	: Prof. Name SURNAME

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini esirgemeyen, her konuda rahatlıkla ulaşıp danıştığım, tezimin belirlenmesinde ve yürütülmesinde büyük yardımlarını gördüğüm, bilgi birikimi, bakış açısı ve eğitime verdiği destek ile kendime örnek aldığım, sevgi, saygı ve insanlık gibi değerlerin varlığını her daim hissettiren değerli danışman hocam Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK'e,

Tez süresince, birçok konuda yardımlarını esirgemeyen ve son ana kadar yanımda bulunarak bana destek olan değerli arkadaşım Uzm. Kimyager Rabia ŞEMSİ'ye,

Hayatım boyunca bana her konuda destek olan, varlıkları sayesinde kendimi çok şanslı hissettiğim, karşılıksız sevgileri, sonsuz hoşgörü ve sabırlarıyla her zaman yanımda olan aileme,

En içten duygularımla teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Metrik uzaylar üstünde tanımlanan ve nokta çiftlerinin arasındaki mesafeye göre bunların görüntüleri arasındaki mesafeleri artırmayan dönüşüme *genişlemeyen dönüşüm* denir. Dolayısıyla bu kavramı tanımlamak için gereken tek şey soyut bir metrik uzaydır. Burada daha ilginç sonuçlar özellikle kapalı yuvarların kompakt olmasını sağlayan bazı topoloji kavramlarına ihtiyaç duyulduğunu gösterir. Ancak bu ciddi bir sınırlama değildir, çünkü fonksiyonel analizde doğal olarak ortaya çıkan birçok uzay bu tür topolojilere sahiptir; en önemlisi Banach uzaylarındaki zayıf ve zayıf* topolojilerdir.

Bu çalışmada sabit noktaların varlığı konusuna odaklanarak, genişlemeyen dönüşümlerin klasik teorisine genel bir bakış sunulmaktadır. Teoride genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta teorisinin kayda değer bir araştırma yolu olarak tanınmasının en çok bilinen sonucu 1965 tarihli yayındır.

Teorem

X düzgün konveks Banach uzayının bir sınırlı kapalı ve konveks alt kümesi K olmak üzere $T : K \to K$ genişlemeyen dönüşüm (yani her $x, y \in K$ için $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$) ise T bir sabit noktaya sahiptir.

Yukarıda verilen teorem birbirinden bağımsız olarak F. Bowder [1] ve D. Göhde [2] tarafından, daha genel bir formda W.Kirk [3] tarafından ispatlanmıştır. Browder [4], daha önce, bu sonucun Hilbert uzay versiyonunu, bir Hilbert uzayındaki bir T dönüşümünün, ancak ve ancak $I - T$ dönüşümünün monoton olması durumunda genişlemeyeceği gerçeğini göstermiştir. Göhde'nin ispatı düzgün konveks uzaylara özgü özelliklere dayanırken; Browder ve Kirk, aslında daha genel bir sonuç veren aynı argümanı kullandı. Sonuç olarak, Göhde'nin ispatı, sabit noktaların, "yaklaşık" sabit nokta dizilerinin zayıf sınırları olarak elde edilebileceğini ortaya koymaktadır. Bu çalışmaya dahil edilen ispatlar, teorideki çeşitli standart yöntemleri göstermek için seçilmiştir.

2. KLASİK VARLIK SONUÇLARI

2.1. Genel Bakış

Önce bir Banach uzayı üstünde genişlemeyen dönüşümlerin bir çalışmasını, daha sonra teorinin yalnızca metrik yönlerini ele alalım. X bir Banach uzayının alt kümesi ve $A \subseteq X$ olmak üzere her $x, y \in A$ için

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$$

şartını sağlayan bir $T : A \to X$ dönüşümü *genişlemeyen dönüşüm* diye adlandırılır.

Genişlemeyen dönüşümler için sabit noktaların varlığının incelenmesi genellikle üç kategoriye ayrılır. Boş olmayan sınırlı kapalı konveks alt kümelerinin her biri, genişlemeyen öz-dönüşümler için sabit nokta özelliğine sahipse, Banach uzayının "sabit nokta özelliği"ne sahip olduğu, zayıf kompakt konveks alt kümelerinin her birinin sabit nokta özelliğine sahip olması durumunda Banach uzayının "zayıf kompakt sabit nokta özelliği"ne sahip olduğu ve kapalı birim yuvarının (dolayısıyla herhangi bir yuvarının) sabit nokta özelliğine sahip olması durumunda Banach uzayının "yuvar sabit nokta özelliği"ne sahip olduğu söylenebilir.

Bu son kategori öncelikle, birim yuvarın herhangi bir öndualine göre zayıf* topolojisinde her zaman kompakt olduğu dual uzaylarla ilgilidir ve bu durumlarda sabit nokta özelliği her zaman kapalı yuvarların kesişimleri olan kümelere genişler. Klasik yansımayan uzay olan ℓ_1 uzayı yuvar sabit nokta özelliğine sahip olan, ancak sabit nokta özelliğine sahip olmayan Banach uzayı örneğidir (Karlovitz [5], Lim [6]). Ayrıca, c_0 Banach uzayı zayıf kompakt sabit nokta özelliğine sahip olmasına rağmen sabit nokta özelliğine ve yuvar sabit nokta özelliğine sahip değildir (Maurey [7]).

Teorideki temel amaçlardan birinin sabit nokta özelliğine sahip olan Banach uzaylarını tam olarak karakterize etmek olması doğaldır. Ancak bu amaç hâlâ belirsizdir. Esasen tüm klasik yansımalı uzayların - özellikle tüm düzgün konveks uzayların - normal yapı adı verilen bir geometrik özelliğin varlığı sayesinde sabit nokta özelliğine, dolayısıyla zayıf kompakt sabit nokta özelliğine sahip olduğu bilinmektedir. Bir X Banach uzayı, daha genel olarak X'in bir kapalı konveks alt kümesi için K'nın birden daha fazla elemana sahip herhangi bir L sınırlı konveks alt kümesi çap noktası olmayan bir nokta içeriyorsa, yani

$$\sup\{\|x_0 - x\| : x \in L\} < d(K) := \sup\{\|x - y\| : x, y \in L\}$$

olacak biçimde bir $x_0 \in L$ varsa K'ya (X'e) *normal yapılıdır* denir. $A \subset X$ için

$$d(A) = \sup \{\|u - v\| : u, v \in A\},$$

$$r_x(A) = \sup \{\|x - v\| : v \in A\},$$

$$r(A) = \inf \{r_x(A) : x \in A\}$$

olsun. X yansımalı ve A sınırlı kapalı konveks ise, X içindeki kapalı yuvarların zayıf kompaktlığından dolayı

$$\mathcal{C}(A) = \{z \in A : r_z(A) = r(A)\}$$

kümesi A'nın *boş olmayan* kapalı konveks alt kümesidir. Sırasıyla $r(A)$ sayısına ve $\mathcal{C}(A)$ kümesine A kümesinin *Chebyshev yarıçapı* ve *Chebyshev merkezi* denir.

K'nin zayıf kompaktlığı yeterli olsa da, yansımalı uzaylar için aşağıdaki teoremi ifade edelim.

2.1. Teorem

X bir yansımalı Banach uzayı ve X'in bir sınırlı kapalı konveks K alt kümesi normal yapılı ise herhangi bir genişlemeyen $T : K \to K$ dönüşümünün sabit noktası vardır. Ayrıca, X normal yapılı ise X sabit nokta özelliğine sahiptir.

İspat

$$\mathcal{A} = \{\emptyset \neq A \subset K : A \text{ kapalı ve konveks}, T(A) \subset A\}$$

olsun. $\mathcal{A}$'nın kümeleri zayıf kompakt olduğundan $\mathcal{A}$ içindeki her azalan zincirin bir alt sınırı (üyelerinin kesişimi) vardır. Dolayısıyla Zorn Lemmasından $\mathcal{A}$'nın bir minimal A_0 elemanı vardır. Diğer yandan,

$$T(A_0) \subset A_0 \Rightarrow T\left(\overline{konv}(T(A_0))\right) \subset T(A_0) \subset \overline{konv}(T(A_0))$$

olduğundan $\overline{konv}\left(T\left(A_0\right)\right) \in \mathcal{A}$ ve A_0'ın minimal olmasından $\overline{konv}\left(T\left(A_0\right)\right) = A_0$ bulunur. $u \in \mathcal{C}\left(A_0\right)$ olsun. Bu durumda $r_u\left(A_0\right) = r\left(A_0\right)$ olur. Her $v \in A_0$ için $\left\|T\left(u\right) - T\left(v\right)\right\| \leq \left\|u - v\right\| \leq r\left(A_0\right)$ olduğundan $T\left(A_0\right) \subset B\left(T\left(u\right), r\left(A_0\right)\right)$ ve buradan

$$A_0 = \overline{konv}\left(T\left(A_0\right)\right) \subset B\left(T\left(u\right), r\left(A_0\right)\right)$$

bulunur. Böylece $r_{T(u)}\left(A_0\right) = r\left(A_0\right)$ olduğundan $T\left(u\right) \in \mathcal{C}\left(A_0\right)$ olur. A_0 kümesinin minimal olmasından $\mathcal{C}\left(A_0\right) = A_0$ sağlanır. $d\left(A_0\right) \leq r\left(A_0\right)$ ve K normal yapılı olduğundan A_0 kümesi T dönüşümünün sabit noktası olan bir tek elemana sahiptir.

Sabit nokta özelliğine sahip uzayların belirlenmesindeki en büyük engel, sabit nokta özelliğinin denk normlar altında kararlı olup olmadığının bilinmemesidir. Başka engeller de vardır. Bir Banach uzayının K sınırlı kapalı konveks alt kümesi için sabit nokta özelliğinin uzayın veya K kümesinin 'iyi' geometrik özelliklerine güçlü olarak bağlı olduğu neredeyse en başından beri biliniyordu. Ancak, X Banach uzayının sabit nokta özelliğine sahip iki kapalı konveks K_1 ve K_2 alt kümelerinin $K_1 \cap K_2$ kesişimleri sabit nokta özelliğine sahip olmayabilir. Goebel and Kuczumow [8] ℓ_1 uzayının boş olmayan sınırlı kapalı konveks alt kümelerinin bir (K_n) azalan dizisini n tek iken sabit nokta özelliğine sahip, n çift iken sabit nokta özelliğine sahip olmayan kümelerle yapılandırıp $\cap K_n$ kümesinin boş olmadığını ve her iki kategoriye de girmediğini gösterdi. $\ell_1$uzayı, başka bir ilginç örnek için ortam sağlar. ℓ_1 uzayı içinde her biri sabit nokta özelliğine sahip olan, ancak $\varepsilon \to 0$ iken Hausdorff metriğine göre sabit nokta özelliğine sahip olmayan bir sınırlı kapalı konveks K_0 kümesine yakınsayan bir $\{K_\varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ ailesi oluşturmak mümkündür ([9], Örnek 5.3).

Yansımalı uzaylarda bile sabit nokta özelliği için normal yapının gerekli olmadığı bilinmektedir. $\varepsilon > 0$ iken

$$X_\varepsilon = \{x \in \ell_2 : \left\|x\right\|_\varepsilon = \max\{\left\|x\right\|_2, \varepsilon \left\|x\right\|_\infty\}\}$$

biçiminde tanımlanan X_ε uzayı bunun bir örneğidir. Bu uzay için aşağıdakiler sağlanır:

(i) X_ε yansımalıdır (ℓ_2 Hilbert uzayı ile eşyapılı (izomorf) olduğundan)

(ii) X_ε normal yapılıdır $\Leftrightarrow \varepsilon < \sqrt{2}$.

(iii) X_ε asimptotik normal yapılıdır $\Leftrightarrow \varepsilon < 2$.

Asimptotik normal yapı kavramı Baillon ve Schöneberg tarafından 1981 yılında tanımlandı. Bir Banach X uzayının her boş olmayan sınırlı kapalı konveks ve birden fazla nokta içeren K alt kümesi için $(x_n) \subset K$ ve $\|x_n - x_{n+1}\| \to 0$ iken

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < d(K)$$

olacak biçimde $x \in K$ varsa, X'e *asimptotik normal yapılıdır* denir.

Baillon and Schöneberg [10]'de aşağıdaki teoremi ispatladı.

2.2. Teorem

Yansımalı Banach uzayı asimptotik normal yapılı ise sabit nokta özelliğine sahiptir.

Aynı makalede, X_2'nin aslında sabit nokta özelliğine sahip olduğunu, bu sebeple asimptotik normal yapının sabit nokta özelliği için gerekli bir şart olmadığını ispatladılar. 1985'te P. K. Lin, her $\varepsilon > 0$ için X_ε uzayının sabit nokta özelliğine sahip olduğunu ispatladı [11].

1971'de Day, James ve Swaminathan [12] tarafından her ayrılabilir uzayın normal yapılı denk normunun mevcut olduğu gösterildi (ayrıca bkz. van Dulst [13]). O halde, her ayrılabilir yansımalı uzayın sabit nokta özelliğine sahip bir denk normu vardır.

Sabit nokta özelliği için yansımalılığın gerekli olup olmadığı sorusu açık kalsa da, olabileceğine dair ikna edici kanıt vardır. İlk olarak, klasik yansımasız uzaylar olan c_0 ve ℓ_1 içinde bazı sınırlı kapalı konveks kümelerin sabit nokta özelliğine sahip olmadığı bilinmektedir. Ayrıca, Bessaga ve Pełczynski, X'in herhangi bir şartsız tabanlı Banach uzayı olması durumunda, X'in yansımalı olması için c_0 veya ℓ_1 ile eşyapılı olan bir alt uzayı içermesinin gerekip yettiğini göstermiştir. Bu yüzden, tüm klasik yansımasız uzaylar, sabit nokta özelliğine sahip olamayacak şekilde yeniden biçimlendirilebilir.

Yukarıda belirtildiği gibi ℓ_1 (dolayısıyla L_1) sabit nokta özelliğine sahip değildir. Bununla birlikte, 1981'de Alspach [14] çok daha fazlasını, yani L_1'in zayıf kompakt sabit nokta özelliğine sahip olmadığını ispatladı. Aynı zamanda, Maurey [7], L_1'in tüm yansımalı alt uzaylarının sabit nokta özelliğine (dolayısıyla zayıf kompakt sabit nokta özelliğine) sahip olduğunu ispatladı. Dowling, Lennard ve Turret (1993), L_1'in yansımasız alt uzaylarının sabit nokta özelliğine sahip olmadığını göstermiştir.Böylece, L_1'in bir alt uzayının sabit nokta özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart o alt uzayın yansımalı olmasıdır.

2.2. Goebel-Karlovitz Lemması

Teorem 2.1'in ispatındaki strateji, minimum boş olmayan kapalı konveks T-değişmez küme elde etmek için Zorn Lemmasının zayıf kompaktlık ile birlikte kullanılmasıydı. Sonrasında bu minimal kümenin pozitif çapının olması, uzayın normal yapılı olmasıyla bir çelişki elde etmek için kullanıldı. Böyle bir yaklaşım standarttır. Öte yandan, Teorem 2.2'in ispatı bu yaklaşımın iyileştirilmesini gerektirir.

Herhangi bir $T : K \to K$ dönüşümü altında değişmez olması bakımından bir Banach uzayının minimal olan herhangi bir boş olmayan kapalı konveks K kümesi için $\overline{konv}(T(K)) = K$ sağlanır. Bunun, T dönüşümünün özellikleriyle ilgisi yoktur. Bununla birlikte, T genişlemeyen ve K sınırlıysa, o zaman daha fazlası söylenebilir. İlki, Teorem 2.1'in ispatındaki önemli gözlemdir.

2.3. Lemma

K'nın her bir noktası bir çap noktasıdır, başka bir deyişle her $x \in K$ için $d(K) = \sup\{\|x-y\| : y \in K\}$ sağlanır.

K sınırlı kapalı konveks küme, $z \in K$ ve $T : K \to K$ genişlemeyen dönüşüm olsun. Herhangi bir $t \in (0,1)$ için $T_t(x) = (1-t)\,z + tT(x)$ biçiminde tanımlanan $T_t : K \to K$ dönüşümü tek x_t sabit noktasına sahip büzülme dönüşümüdür.

$$\lim_{t \to 1^-} \|x_t - T(x_t)\| = \lim_{t \to 1^-} (1-t)\,\|z - T(x_t)\| = 0$$

olduğundan aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

2.4. Lemma

Bir Banach uzayının sınırlı kapalı konveks bir alt kümesi K ve $T : K \to K$ genişlemeyen dönüşüm ise, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$ olacak biçimde bir $(x_n) \subset K$ dizisi vardır.

Bu lemma bizi, önceki lemma ile bağlantılı olarak, genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta sonuçlarını normal yapılı uzayların ötesine genişletmede son derece yararlı olduğu ispatlanan temel bir gerçeğe ulaştırır. Bu gerçek, Goebel [15] ve Karlovitz [16] tarafından bağımsız olarak aynı zamanda keşfedilmiştir ve Teorem 2.2'nin ispatı için çok önemlidir.

2.5. Lemma

(Goebel-Karlovitz) X Banach uzayının boş olmayan, zayıf kompakt, konveks ve bazı T genişlemeyen dönüşümler için T-değişmez olan bir K alt kümesi minimal değişmez ve bir $(x_n) \subset K$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$ ise her $x \in K$ için $d(K) = \lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|$ sağlanır.

İspat

$d(K) > 0$ ise K'nın çap noktası yoktur. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$ ve bir $x \in K$ için $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = r < d(K)$ olacak biçimde bir $(x_n) \subset K$ dizisi var olduğunu kabul edelim.

$$C = \left\{ z \in K : \limsup_{n\to\infty} \|z - x_n\| \leq r \right\}$$

biçiminde verilen C kümesi konvekstir ve $(u_i) \subseteq C$ ve $\lim_{i\to\infty} u_i = u$ alındığında her $i = 1, 2, \ldots$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|u - x_n\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|u - u_i\| + \limsup_{n\to\infty} \|u_i - x_n\| \leq \|u - u_i\| + r$$

olduğundan $i \to \infty$ iken $\limsup\limits_{n\to\infty} \|u - x_n\| \leq r$ olur. Bu durumda $u \in C$, yani C kapalıdır. Ayrıca $u \in K$ iken

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|T(u) - x_n\| &\leq \limsup_{n\to\infty} [\|T(u) - T(x_n)\| + \|T(x_n) - x_n\|] \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \|T(u) - T(x_n)\| \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \|u - x_n\| \leq r
\end{aligned}$$

olduğundan $T : C \to C$ dönüşüm olur. Zayıf kompakt bir kümenin herhangi bir kapalı kompleks altkümesi de zayıf kompakt olduğundan, K'nın minimal olmasından $C = K$ sonucuna varılır. Bununla birlikte $d(K) > 0$ ve bir $\varepsilon > 0$ için $r + \varepsilon < d(K)$ ise $\{B(x, r + \varepsilon) : x \in K\}$ ailesi sonlu kesişim özelliğine sahiptir, çünkü her bir yuvar (x_n) dizisinin sonlu sayıda terimleri dışında kalanları içerir. Bu yuvarlar zayıf kompakt olduğundan

$\cap_{x \in K} B(x, r + \varepsilon) \neq \emptyset$

sağlanır ve böylece $r(K) \leq r + \varepsilon < d(K)$ olur. Ancak bu durum, K'nın herhangi bir çap noktasına sahip olmaması gerçeğiyle çelişir.

Goebel-Karlovitz Lemması, hem Lemma 2.5'te formüle edildiği gibi hem de ultraproducts dilinde [17] belirtildiği gibi genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta teorisi çalışmasında kapsamlı bir şekilde uygulanmıştır. Daha yeni uygulamalardan biri, A. Jiménez-Melado ve E. Lloréns-Fuster'ın [18]'de düzgün konveksliğin genelleştirilmesiyle bağlantılı olarak ortogonal konvekslik adı verilen kavramını tanıtmasıyla, Goebel-Karlovitz Lemmasını ortogonal konveks uzayların zayıf kompakt konveks alt kümelerinin zayıf kompakt sabit nokta özelliğine sahip olduğunu ispatlamak için kullanmasıdır.

Ortogonal konvekslik şu şekilde tanımlanır: X Banach uzayının x, y noktaları ve $\lambda > 0$ için

$$M_\lambda(x, y) = \left\{ z \in X : \max(\|z - x\|, \|z - y\|) \leq \frac{1}{2}(1 + \lambda) \|x - y\| \right\},$$

X'in bir A sınırlı alt kümesi için $|A| = \sup\{\|x\| : x \in A\}$ ve X içinde bir (x_n) sınırlı dizisi ile $\lambda > 0$ için

$$A((x_n)) = \limsup_{i \to \infty} \left(\limsup_{j \to \infty} \|x_i - x_j\| \right) \text{ ve}$$

$$A_\lambda((x_n)) = \limsup_{i \to \infty} \left(\limsup_{j \to \infty} |M_\lambda(x_i, x_j)| \right)$$

olsun.

2.6. Tanım

X Banach uzayı içinde sıfıra zayıf yakınsayan ve $A((x_n)) > 0$ şartını sağlayan her (x_n) dizisi için $A_\lambda((x_n)) < A((x_n))$ olacak biçimde $\lambda > 0$ sayısı varsa X'e ortogonal konvekstir denir.

Genelde, bir uzayın ortogonal konveks olup olmadığını test etmek zordur, ancak [19]'de her düzgün konveks Banach uzayının ortogonal konveks olduğu belirtilmiştir. Schauder tabana sahip uzaylar için durum daha doğal olarak ortaya çıkar. ℓ_1, c_0 ve c uzayları ortogonal konvekstir.

2.7. Teorem

X Banach uzayının boş olmayan, zayıf kompakt ve konveks bir K alt kümesi ortogonal konveks ise her $T : K \to K$ genişlemeyen dönüşümünün bir sabit noktası vardır.

Bu teoremin ispatında önce Zorn Lemması kullanılır ve K'nın boş olmama ve T-değişmez olması bakımından minimal olduğunu varsayılır. Sonra $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$ şartını sağlayan $(x_n) \subset K$ dizisinin zayıf yakınsak bir alt dizisine geçilir. Üstelik (bir kayma ile) (x_n) dizisinin $0 \in K$ elemanına zayıf yakınsadığı varsayılabilir. Bu durumda strateji, $d(K) > 0$ ise K'nın ortogonal konveks olamayacağını göstermektir. Bunu başarmak için birkaç adım gerekir.

2.3. Düzgün Lipşitzyen Dönüşümler

Düzgün lipşitzyen dönüşümlerin sınıfı Goebel ve Kirk tarafından 1973'de tanıtıldı [20]. Bu sınıf, genişlemeyen dönüşümler ailesinin doğal bir uzantısını oluşturur.

(X, d) metrik uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için bir $T : X \to X$ dönüşümü için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olacak biçimde $k \geq 0$ sayısı varsa, T dönüşümüne *lipşitzyendir* (veya *Lipşitz şartını sağlar*, *Lipşitz dönüşümü*) denir. T dönüşümü için Lipşitz şartını sağlayan en küçük k sayısına T'nin *Lipşitz sabiti* denir ve bu sayı $k(T)$ ile gösterilir. Herhangi iki $T, S : X \to X$ Lipşitz dönüşümü için

$$k(T \circ S) \leq k(T)\, k(S)$$

ve özel olarak her $n \in \mathbb{N}$ için $k(T^n) \leq k^n(T)$ sağlanır. Genişlemeyen bir T dönüşümü için $k(T) \leq 1$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için T^n dönüşümü de genişlemeyendir.

X üstünde iki metrik d ve ρ olmak üzere iki $a > 0, b > 0$ sayısı ve her $x, y \in X$ için

$$a\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq b\rho(x, y)$$

oluyorsa, d ve ρ metriklerine *denk metrikler* denir. d ve ρ denk metrikler ise, herhangi bir d-lipşitzyen dönüşüm ρ-lipşitzyendir. Ayrıca $k_d(T)$ ve $k_\rho(T)$ Lipşitz sabitleri için

$$\frac{a}{b}k_\rho(T) \leq k_d(T) \leq \frac{b}{a}k_\rho(T)$$

sağlanır. T ρ-genişlemeyen dönüşüm, yani $k_\rho(T) \leq 1$ ise

$$\sup\{k_d(T^n) : n = 0, 1, 2, ...\} \leq \frac{b}{a} < +\infty$$

sağlanır. Bu durum bizi aşağıdaki tanıma götürür.

2.8. Tanım

$T : X \to X$ dönüşüm olmak üzere, bir $k \geq 0$ sabiti ve her $x, y \in X$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x, y)$$

oluyorsa T dönüşümüne *düzgün lipşitzyendir* denir.

Başka bir deyişle, düzgün lipşitzyen dönüşümler için $n \in \mathbb{N}$ iken $k_d(T^n) \leq k$ sağlanır. k sayısı baştan verildiğinde T dönüşümüne *düzgün k-lipşitzyendir* denir. Düzgün lipşitzyen bir dönüşüm

$$\rho(x, y) = \sup\{d(T^n x, T^n y) : n \in \mathbb{N}\}$$

biçiminde tanımlanan bir ρ denk metriğini üretir. Bu denk metriğe göre T genişlemeyen dönüşümdür. Böylece (X, d) metrik uzayı üstünde düzgün lipşitzyen dönüşümler, d metriğine en az biri denk olan metriğe göre genişlemeyen dönüşümler olarak tamamen karakterize edilebilir.

Özel olarak, tüm periyodik lipşitzyen dönüşümler düzgün lipşitzyendir. Ayrıca, X'in bir lipşitzyen kısıtlaması K ve $S : X \to K$ dönüşümü $k(S) = k$ olacak biçimde bir lipşitzyen kısıtlama dönüşümü ise, herhangi bir genişlemeyen $T : K \to K$ dönüşümünün

$\widetilde{T} = T \circ S$ biçiminde verilen ve $k\left(\widetilde{T}^n\right) = k\left(T^n \circ S\right) \leq k$ şartını sağlayan $\widetilde{T} : X \to X$ düzgün lipşitzyen genişlemesi vardır.

Düzgün lipşitzyen dönüşümler için ilk sabit nokta sonuçlarımızı belirtmek için bazı temel gerçekleri hatırlatalım. Bir X Banach uzayının *konvekslik modülü*

$$\delta_X\left(\varepsilon\right) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}$$

biçiminde tanımlanan $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ fonksiyonudur. X'in konvvekslik karakteristiği $\varepsilon_0\left(X\right) = \sup\left\{\varepsilon : \delta_X\left(\varepsilon\right) = 0\right\}$ sayısıdır. $\varepsilon_0\left(X\right) = 0$ olursa, X uzayına *düzgün konvekstir* denir. Düzgün konveks uzaylar ve $\varepsilon_0\left(X\right) < 1$ şartını sağlayan tüm uzaylar normal yapılıdır. $\varepsilon_0\left(X\right) < 2$ şartını sağlayan tüm uzaylar ise süper-yansımalıdır.

Biçimsel olmayan tanım olarak, bir süper-yansımalı X Banach uzayı şu özelliğe sahiptir: Keyfi bir Y Banach uzayı verildiğinde, Y'nin tüm sonlu boyutlu alt uzayları X içinde bir yerde oturan çok benzer bir kopyaya sahipse, o zaman Y yansımalı olmak zorundadır. Bu tanıma göre, X uzayının kendisi de yansımalı olmak zorundadır. Temel bir örnek olarak, iki boyutlu alt uzayları $X = \ell_2$'nin alt uzaylarına izometrik olan her Y Banach uzayı paralelkenar kuralını sağlar, dolayısıyla Y bir Hilbert uzayıdır, bu nedenle Y yansımalıdır; yani ℓ_2 süper-yansımalıdır.

Biçimsel tanım, izometrileri değil, hemen hemen izometrileri kullanır. X ve Y Banach uzayları olmak üzere, Y'nin her Y_0 sonlu boyutlu alt uzayı ve her her $\varepsilon > 0$ için X'in

$$d(X_0, Y_0) = \inf\{\|T\| \left\|T^{-1}\right\| : T : X_0 \to Y_0 \text{ lineer izomorfizm}\} < 1 + \varepsilon$$

olacak biçimde X_0 alt uzayı varsa, Y Banach uzayı X Banach uzayı içinde *sonlu temsil edilebilir* denir. ℓ_2 içinde sonlu temsil edilebilir bir Banach uzayı Hilbert uzayıdır. Her Banach uzayı c_0 içinde sonlu temsil edilebilirdir. $L_p([0,1])$ uzayı ℓ_p içinde sonlu temsil edilebilirdir. X Banach uzayı içinde sonlu temsil edilebilir tüm Y Banach uzayları yansımalı ise, başka bir deyişle X içinde sonlu temsil edilebilir olan hiç bir yansımalı olmayan Y uzayı yoksa X'e süper-yansımalıdır denir.

Düzgün lipşitzyen dönüşümler için ilk sabit nokta sonucu [20]'de verildi.

2.9. Teorem

Bir X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi K olmak üzere,

$k\left(1-\delta_X\left(k\right)\right)<1$

şartını sağlayan bir düzgün *k-lipşitzyen* $T:K\rightarrow K$ dönüşümünün K içinde sabit noktası vardır.

Bu teorem, asimptotik merkez tekniği diye adlandırılan yöntemle elde edilmiştir. Bu teknik aynı zamanda $\varepsilon_0\left(X\right)<1$ şartını sağlayan uzaylara da genişletilebilir.

Genel bir metrik uzayda ifade edilen bu yöndeki ufuk açıcı sonuç, 1975'te E. A. Lifschitz tarafından elde edilmiştir [21].

Bir (X,d) tam metrik uzay içindeki $c\geq 1$ sayısı için aşağıdaki şartı sağlayan yuvarlara c-düzenlidir denir:

Herhangi bir $k<c$ için $x,y\in X$ ve $\varepsilon>0$ iken $d\left(x,y\right)\geq(1-a)\varepsilon$ ve $B\left(x,\left(1+a\right)\varepsilon\right)\cap B\left(y,k\left(1+a\right)\varepsilon\right)$ kümesi $b\varepsilon$ yarıçaplı bir kapalı yuvar içinde olacak biçimde $a,b\in(0,1)$ vardır.

Herhangi bir metrik uzay içinde 1-düzenlidir ve $c>1$ iken c-düzenli yuvarlar her $e\in[1,c]$ için e-düzenlidir.

$c\left(X\right)=\sup\{c\geq 1: X$ içindeki yuvarlar c-düzenli$\}$

sayısına X'in *Lifschitz karakteristiği* denir. $c\left(X\right)\geq 1$ sağlandığı ve X içindeki yuvarların $c\left(X\right)$-düzenli olduğu aşikardır.

Banach uzayları için yukarıdaki tanımın daha basit ve daha sezgisel bir formülasyonu vardır: X bir Banach uzayı ve $d\left(A\right)$, $A\subset X$ kümesinin Chebyshev yarıçapını gösteriyorsa,

$c\left(X\right)=\sup\left\{c\geq 1:\|x\|=1 \text{ iken } d\left(B\left(0,1\right)\cap B\left(x,c\right)\right)<1\right\}$

olur.

H Hilbert uzayının en az 2 boyutlu herhangi bir kapalı konveks A alt kümesi için aynı durum geçerli olduğunda $c(H)=\sqrt{2}$ sağlanır. Diğer Banach uzayları için durum böyle değildir, yani A kümesine göre $c(A)$ değişebilir.

Downing and Turret [22] keyfî bir Banach uzayı için aşağıdaki katsayıyı göz önüne aldı:

$$c_0(X) = \inf\{c(A) : A\ X\text{'in boş olmayan kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi}\}.$$

$c_0(X) > 1$ ise X yansımalıdır. Ayrıca, $\varepsilon \geq 1$ iken

$$\varepsilon\left(1 - \delta_X\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) = 1$$

denkleminin tek çözümü $c_0(X) \geq \varepsilon$ olur. Sonuç olarak, $\varepsilon_0(X) < 1$ iken $c_0(X) > 1$ sağlanır.

2.10. Teorem

(X, d) sınırlı ve tam metrik uzay olmak üzere, $x, y \in X$, $n \in \mathbb{N}$ ve $k < c(X)$ iken

$$d(T^n x, T^n y) \leq k d(x, y)$$

şartını sağlayan $T : X \to X$ düzgün lipşitzyen dönüşümünün X içinde sabit noktası vardır.

İspat

$c(X) = 1$ durumu aşikar olduğundan $c(X) > 1$ olsun. Seçilen bir $x \in X$ için

$$\varepsilon(x) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{ en az bir } y \in X \text{ için } n \in \mathbb{N} \text{ iken } d(x, T^n y) \leq \varepsilon\}$$

olsun. $c(X)$-düzenli yuvarlarının tanımındaki k ile ilişkili pozitif sayı a olsun. Seçilen $x \in X$ için $d(x, T^m x) \geq (1 - a)\varepsilon(x)$ olacak biçimde m vardır. Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ iken $d(x, T^n y) \leq (1 + a)\varepsilon(x)$ olacak biçimde $y \in X$ vardır. Böylece $c(X)$-düzenliliğinden

$$A = B(x, (1 + a)\varepsilon(x)) \cap B(T^m x, k(1 + a)\varepsilon(x))$$

kümesi bir $z \in X$ merkezli ve $b < 1$ iken $b\varepsilon(x)$ yarıçaplı bir kapalı yuvar içindedir.

Buradan $n > m$ iken

$$d(T^m x, T^n y) \leq kd\left(x, T^{n-m} y\right) \leq k(1+a)\,\varepsilon(x)$$

sağlanır. Bu durum $\{T^n y : n > m\}$ yörüngesinin A, dolayısıyla $B(z, b\varepsilon(x))$ içinde olduğunu gösterir. Sonuç olarak, $\varepsilon(z) \leq b\varepsilon(x)$ olur. Ayrıca, herhangi bir $u \in A$ için $e = 1 + a + b$ iken

$$d(z,x) \leq d(z,u) + d(u,x) \leq b\varepsilon(x) + (1+a)\,\varepsilon(x) = e\varepsilon(x)$$

sağlanır.

$x_0 = x$ ve $z(x_0) = z$ alarak her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = z(x_n)$ olacak biçimde (x_n) dizisi oluşturmak mümkündür. Burada $z(x_n)$ yukarıdaki yöntemle elde edilir. Böylece $\varepsilon(x_n) \leq b^n \varepsilon(x_0)$ ve $d(x_{n+1}, x_n) \leq e\varepsilon(x_n)$ olduğundan (x_n) dizisi bir sabit noktaya yakınsar.

Bir X Banach uzayının her A sınırlı konveks alt kümesi ve bir $a \in (0,1)$ için Chebyshev yarıçapı $r(A) \leq a\ d(A)$ şartını sağlıyorsa, X'e *düzgün normal yapılıdır* denir. X uzayının normal yapı katsayısı

$$N(X) = \inf\{d(A)/r(A) : A \subset X \text{ kapalı, sınırlı ve konveks}\}$$

biçiminde tanımlanır. X'in düzgün normal yapılı olması için gerek ve yeter şart $N(X) > 1$ olmasıdır. Genel olarak normal yapı katsayısının hesaplanması zordur. Ancak, meselâ S. Prus [23]'de $1/q + 1/p = 1$ iken $N(L^p) = \min\left\{2^{1/p}, 2^{1/q}\right\}$ olduğunu göstermiştir.

Aşağıdaki teorem E. Cassini and E. Maluta tarafından [24]'de verilmiştir.

2.11. Teorem

$N(X) > 1$ olacak biçimdeki bir X düzgün konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi K olmak üzere,

$$k < \sqrt{N(X)}$$

şartını sağlayan bir düzgün k-lipşitzyen $T : K \to K$ dönüşümünün K içinde sabit noktası vardır.

Önceki üç teorem, düzgün k-lipşitzyen dönüşümler için sabit noktaların varlığına ilişkin en yaygın bilinen sonuçlardır. Artık genel şemayı formüle edebiliriz. X metrik uzay olmak üzere tüm düzgün k-lipşitzyen $T : X \to X$ dönüşümlerin sabit noktaları varsa, X'e *düzgün k-lipşitzyen dönüşümler için sabit nokta özelliğine sahiptir* denir. Bu durumda diğer bir metrik uzay karakteristiğini

$$b\,(X) = \sup\{k \geq 1 : X \text{ düzgün } k\text{-lipşitzyen dönüşümler için sabit nokta özelliğine sahip}\}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Ayrıca, bir X Banach uzayı için

$$b_0\,(X) = \inf\{b\,(A) : A \subset X \text{ kapalı, sınırlı ve konveks}\}$$

alabiliriz. Yukarıda ifade edilen teoremler $b(X)$ için bazı değerlendirmeler verir. Genel olarak, $b(X) \geq c(X)$ sağlanır. X Banach uzayının herhangi bir konveks, kapalı ve sınırlı A alt kümesi için $b\,(A) \geq b_0\,(X) \geq c_0\,(X)$, $b\,(A) \geq b_0\,(X) \geq \sqrt{N\,(X)}$ ve $b\left(1 - \delta_X\left(\frac{1}{b}\right)\right) = 1$ iken $b\,(A) \geq b$ sağlanır. Buradan $\varepsilon_0\,(X) < 1$ şartını sağlayan uzaylar için $b\,(A) > (1 - \delta_X\,(1))^{-1} > 1$ elde edilir. Bu tür tahminler arasındaki karşılıklı ilişkiler birkaç yazar tarafından tartışılmıştır. Ayrıca somut uzaylar için $b_0(X)$'i değerlendirme girişimleri olmuştur. Meselâ, Teck-Cheong Lim [25] $2 < p < \infty$ için L^p uzaylarında, $(0, 1)$ aralığında $(p-2)\,x^{p-1} + (p-1)\,x^{p-2} = 1$ denkleminin tek çözümü α iken

$$b_0\,(X) \geq \left(1 + \frac{1 + \alpha^{p-1}}{(1+\alpha)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

olduğunu ispatlamıştır. R. Smarzewski [26] $1 < p \leq 2$ için $b_0\,(L^p) \geq \sqrt{p}$ tahminini buldu. Tomas D. Benavídes [27] bir X Banach uzayı için üç sabiti içeren

$$b_0\,(X) \geq \frac{1 + \sqrt{1 + 4N\,(X)\,(c_0\,(X) - 1)}}{2}$$

gelişmiş değerlendirmesini sundu. Bir H Hilbert uzayının herhangi bir A alt kümesi için bilinen en iyi değerlendirme $b(A) \geq c(A) = c_0(H) = \sqrt{2}$'dir. Ancak bu durumda yukarıdan bir değerlendirme de biliyoruz. Lifschitz'in orijinal çalışmasında bir örnekten bahsedilmiş ve ayrıca Jean-Bernard Baillon [28] tarafından bağımsız olarak sunulmuştur.

Örnek

B^{+}, ℓ_2 uzayında birim yuvarın pozitif kısmı olmak üzere, $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$ ve $Px = (0, x_1, x_2, \ldots)$ kaydırma operatörü iken $T0 = e_1$ genişlemesiyle

$$Tx = \left(\cos \frac{\pi \|x\|}{2}\right) e_1 + \frac{1}{\|x\|} \sin \frac{\pi \|x\|}{2} Px$$

biçiminde tanımlanan $T : B^{+} \to B^{+}$ dönüşümü düzgün $\pi/2$-lipşitzyendir ve sabit noktası yoktur.

Yukarıdaki örnek için $\sqrt{2} \leq b_0(H) \leq b(B^{+}) \leq \pi/2$ sağlanır, ancak $b_0(H)$'nın değeri tam olarak bilinmemektedir.

Düzgün lipşitz dönüşüm çalışmalarının amaçladığı başka bir yön daha bulunmaktadır. X zayıf kompakt sabit nokta özelliğine sahip bir Banach uzayı olsun. Bu özelliğin yeniden biçimlendirme sırasında kararlı olup olmadığı konusunda soru bulunmaktadır. Bu durumu şöyle biçimlendirelim:

$(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayı üstünde $\|\cdot\|$ normuna denk olan normların ailesi $\mathcal{N}$ olsun. Herhangi iki $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normu için

$$D(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_2}{\|x\|_1} \sup_{x \neq 0} \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$$

biçiminde tanımlanan $D : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna denk normlar arasında *Banach-Mazur uzaklığı* denir. D bir metrik değildir, ancak

$$d(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2) = \ln D(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2)$$

alınarak $\mathcal{N}$ ailesi metrikleştirilebilir.

Bir konveks, kapalı ve sınırlı $A \subset X$ kümesi için $T : A \to A$ dönüşümü bir $|||\cdot||| \in \mathcal{N}$ normuna göre genişlemeyen dönüşüm ise $\|\cdot\|$ normuna göre T dönüşümü $K(\|\cdot\|, |||\cdot|||)$-düzgün lipşitzyen dönüşümdür. Ancak owever $|||\cdot|||$-genişlemeyenlik daha fazlasını ifade eder. $\inf_{x \in A} \|x - Tx\| = 0$ ve ayrıca $(I + T)/2$ dönüşümü asimptotik düzenlidir.

Bir X Banach uzayının yeniden biçimlendirilmesiyle elde edilen tüm uzayların ailesi,

X üstündeki normların $\mathcal{N}$ uzayı ile tanımlanabilir. X süper-yansımalı iken X üstünde bir $|||\cdot||| \in \mathcal{N}$ düzgün konveks normu vardır. Başka bir $\|\cdot\| \in \mathcal{N}$ normu ve herhangi bir $\lambda > 0$ için $\|.\|_\lambda = \|.\| + \lambda\,|.|$ normunun düzgün konveks olduğundan, düzgün konveks normlar $\mathcal{N}$ içinde bir yoğun küme oluştururlar.

2.4. Genişlemeyen Dönüşümlerin Alt Sınıfları

Genişlemeyen dönüşümlerin çeşitli alt sınıfları doğal yollar ile ortaya çıkar. Bir konveks, kapalı ve sınırlı $A \subset X$ kümesi için $T : A \to A$ genişlemeyen dönüşümlerinin $\mathcal{F}$ ailesi,

$$\|T\|_{C[A,X]} = \sup\{\|Tx\|_X : x \in A\}$$

doğal düzgün normuyla donatılmış A kümesinden X içine sürekli fonksiyonların $C[A, X]$ uzayının konveks, kapalı ve sınırlı alt kümesidir. Büzülme dönüşümlerinin $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ ailesi, bu normun ürettiği topolojide $\mathcal{F}$ içinde yoğundur. Banach Büzülme İlkesi göz önüne alındığında, A'nın $\mathcal{F}_0$'a göre sabit nokta özelliğine sahip olduğu, ancak $\mathcal{F}$'ye göre sabit nokta özelliğine sahip olmadığı söylenebilir. $\mathcal{F}$'nin birkaç ilginç alt sınıfı daha vardır.

İzometriler $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$ şartını sağlayan $T : A \to A$ dönüşümlerdir. Genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta teorisinde çok faydalı olan normal yapı kavramı, aslında M.S. Brodskii ve D.P. Milman tarafından 1948'de izometrilerin sabit noktalarını incelemek için kullanılmıştır [29]. Normal yapı ile birlikte A'nın zayıf yoğunluğunun, A'nın tüm izometrilerinin ortak bir sabit noktasının varlığına işaret ettiğini ispatladılar. B. Maurey [7] ise izometriler için aşağıdaki teoremi verdi.

2.12. Teorem

Bir süper-yansımalı Banach uzayının A zayıf kompakt konveks alt kümesi izometri sınıfına göre sabit nokta özelliğine sahiptir.

Başka bir ilginç sınıf,$x \neq y$ iken $\|Tx - Ty\| < \|x - y\|$ şartını sağlayan ve büzülen dönüşüm diye adlandırılan $T : A \to A$ dönüşümlerdir. Bir T büzülen dönüşümünün en fazla bir sabit noktası vardır ve T'nin sabit noktası mevcut değil ve A zayıf kompakt ise T bir tek minimal kapalı konveks değişmez (invaryant) kümeye sahiptir. A zayıf kompakt ve bir kapalı konveks $K \subset A$ için

$$\sup\{\|z - x\| : x \in K\} < d(K)$$

olacak biçimde $z \in A$ varsa, A büzülen dönüşümler için sabit nokta özelliğine sahiptir.

Bu durumun normal yapının bir değişikliği olduğunu gözlemleyebiliriz. Genel olarak, büzülen dönüşümler için sabit nokta özelliğine sahip, ancak $\mathcal{F}$ sınıfının tamamında sabit nokta özelliğine sahip olmayan konveks kümelerin var olup olmadığı bilinmemektedir. $\mathcal{B}$ kesin olarak artan konveks $b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$; $b\,(0) = 0$ fonksiyonlarının sınıfı olmak üzere

$$b\,(\|cTx + (1-c)\,Ty - T\,(cx + (1-c)y)\|) \leq \|x-y\| - \|Tx - Ty\|$$

olacak biçimde $b \in \mathcal{B}$ varsa $T : A \to A$ dönüşümüne $\mathcal{B}$ *tipindendir* denir. $\mathcal{B}$ tipi dönüşümler genişlemeyendir, afin genişlemeyen dönüşümler $\mathcal{B}$ tipindedir ve $\mathcal{B}$ tipi dönüşümlerin sabit nokta kümeleri konvekstir. Düzgün konveks uzaylarda herhangi bir genişlemeyen $T : A \to A$ dönüşümü $\mathcal{B}$ tipindendir [30].

Düzgün konveks uzayların genişlemeyen dönüşümler ile bağlantısı, ilk bakışta göründüğünden daha yakındır. Khamsi [31], bir X Banach uzayı için aşağıdaki ifadelerin denk olduğunu göstermiştir:

(a) X düzgün konvekstir.

(b) $d(A) = 1$ olan her genişlemeyen $T : A \to A$ dönüşümü, bir $b \in \mathcal{B}$ için $\mathcal{B}$ tipinden dönüşümdür.
Dolayısıyla bu uzaylarda $\mathcal{B}$ tipi dönüşüm sınıfı, $\mathcal{F}$ sınıfının tamamı ile çakışır. Daha az düzgün uzaylarda konveks olmayan kümeler üstünde tanımlı ve sabit noktaya sahip dönüşümler vardır ve bu durum herhangi bir b için $\mathcal{B}$ tipi olmayan genişlemeyen dönüşümlerin olduğunu gösterir. $\mathcal{B}$ tipi dönüşüm sınıfının, sabit noktaların zayıf yaklaştırılmasıyla bağlantılı olarak çok yararlı olduğu ispatlanmıştır.

Sonraki sınıf da R. Bruck [32] tarafından tanıtıldı. Herhangi iki $x, y \in A$ için $t \in [0,1]$ iken

$$\varphi_{x,y}\,(t) = \|(1-t)\,(x-y) + t\,(Tx - Ty)\|$$

fonksiyonu $[0,1]$ üstünde artmayan oluyorsa, $T : A \to A$ dönüşümüne *sıkı genişlemeyendir* denir. Sıkı genişlemeyen dönüşüm genişlemeyen dönüşümdür, ancak tersi doğru değildir. H Hilbert uzayının bir alt kümesi A olmak üzere, $T : A \to A$ dönüşümünün sıkı genişlemeyen olması için gerek ve yeter şart bir $S : A \to H$ genişlemeyen dönüşümü için $T = \frac{1}{2}\,(I + S)$ olmasıdır. Herhangi bir $x \in A$ ve bir

$\alpha \in [0, 1)$ için

$$z = (1 - \alpha)\, x + \alpha T z$$

denkleminin bir tek z_α çözümü vardır ve bu çözüm x ve α'ya bağlı bir çözüm olduğundan, $\alpha \in [0, 1)$ iken $F_\alpha x = z_\alpha$ olacak biçimde $F_\alpha : A \to A$ dönüşümlerinin bir ailesini tanımlayabiliriz. F_α dönüşümleri sıkı genişlemeyendir. Ayrıca, herhangi bir $\alpha \in [0, 1)$ için $\operatorname{Fix} F_\alpha$ sabit nokta kümesi, $\operatorname{Fix} T$ ile çakışır. Bu, sıkı genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta özelliğinin $\mathcal{F}$ sınıfının tamamı için sabit nokta özelliği ile çakıştığını gösterir. A'nın sınırlılığından

$$\lim_{\alpha \to 1} \| F_\alpha x - T F_\alpha x \| = 0$$

sağlanır. Bu gerçek, güçlü yaklaşım tekniklerini incelemek için kullanılmıştır.

3. ROTASYONLU GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER

3.1. Ön Bilgiler

E Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi K ve $T : K \to K$ *genişlemeyen dönüşüm*, yani her $x, y \in K$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \tag{3.1}$$

olsun. Genel olarak genişlemeyen dönüşümlerde sabit noktaların varlığını sağlamak için hipotezlere uzayın geometrisiyle ilgili bazı varsayımlar eklenir [9, 33]. $n \geq 2$ tamsayısı ve $a \in [0, 1)$ verildiğinde her $x \in K$ için

$$\|x - T^n x\| \leq a\,\|x - Tx\| \tag{3.2}$$

oluyorsa $T : K \to K$ dönüşümüne (a, n)*-rotasyonlu dönüşüm* denir. $a < n$ iken (a, n)-rotasyonlu olan T dönüşümüne n*-rotasyonlu*, $n \geq 2$ iken n-rotasyonlu olan T dönüşümü *rotasyonlu* diye adlandırılır. Büzülme dönüşümleri rotasyonludur ve rotasyonlu izometriler de vardır. Diğer yandan, herhangi bir (a, n) çifti için (a, n)-rotasyonlu olmayan genişlemeyen dönüşüm mevcuttur.

Genel durumun tersine, rotasyonlu genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta özelliği, kümenin geometrisine bağlı değildir. Sınırlı olup olmadığına bakılmaksızın, herhangi bir kapalı konveks A kümesi bu özelliğe sahiptir.

1981 de K.Goebel ve M.Koter aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır [34]. Bu teoremde dönüşümün tanımlı olduğu küme üzerinde herhangi bir kompaktlık varsayımına gerek yoktur ve Banach uzayı için özel geometrik şartlar da gerekmemektedir.

3.1. Teorem

Bir E Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi K olmak üzere herhangi bir genişlemeyen rotasyonlu $T : K \to K$ dönüşümünün bir sabit noktası vardır.

Rotasyon terimi, öklid düzlemindeki tüm dönüşümlerin bu durumu sağlamasından kaynaklanır. n periyotlu bir T periyodik dönüşümü için $T^n = I$ olduğundan bu dönüşüm $(0, n)$-rotasyonlu, $n \geq 2$ için her büzelme dönüşümü rotasyonludur.

Rotasyonlu dönüşümlerinin aşikar olmayan örneklerini göstermek zordur.Uzun yıllar, bir Banach uzayının kapalı konveks bir alt kümesinde $(0,2)$-rotasyonlu lipchitzyen bir self-dönüşümün var olup olmadığı bilinmiyordu ([9], s. 180). Böyle durumlara uygun olarak aşağıdaki örnekler rotasyonluluk olgusunu açıklar.

Örnek

$C[0,1]$ standart supremum normu ile $[0,1]$ üzerinde sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı ve

$$K = \{x \in C[0,1] : 0 = x(0) \leq x(t) \leq x(1) = 1\}$$

olmak üzere $x \in K$, $t \in [0,1]$ iken $Tx(t) = t\,x(t)$ ile tanımlanan $T : K \to K$ dönüşümü genişlemeyen (hatta büzülen, yani $x \neq y$ iken $\|Tx - Ty\| < \|x - y\|$ olan) ve sabit noktası olmayan dönüşümdür.Bu dönüşüm Teorem 3.1'in bir sonucu olarak rotasyonlu değildir.

Örnek

K Örnek 3.1'deki gibi tanımlansın ve $x \in K$ fonksiyonlarının kümesi K_1 olsun. $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ve $x \in K_1$ için

$$Tx(t) = \begin{cases} x\left(\dfrac{n-1}{n} + t\right) - x\left(\dfrac{n-1}{n}\right) & , \quad t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\[2ex] x\left(t - \dfrac{1}{n}\right) + \left[1 - x\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right] & , \quad t \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $T : K_1 \to K_1$ dönüşümü genişlemeyen dönüşümdür, $T^n x(t) = x(t)$ olduğundan n-rotasyonludur ve $x(t) = t$ $(t \in [0,1])$ biçiminde tanımlanan x fonksiyonu T'nin bir sabit noktasıdır.

(3.2) rotasyonluluk şartı aslında T'nin genişlemeyen olmasından bağımsızdır. Aslında bu şart çok düzensiz dönüşümlerle sağlanabilir.

Her $x, y \in K$ için $\| Tx - Ty \| \leq k \| x - y \|$ şartını sağlayan $T : K \to K$ dönüşümü *k-lipşitzyen* diye adlandırılır. $k > 1$ için k-lipşitzyen rotasyonlu dönüşümleri de düşünebiliriz. Bu durumda rotasyonluluk k'nın birden biraz daha büyük olmasıyla sabit noktaların varlığını garanti eder (bkz. [9, 35, 36]).

Bir Hilbert uzayında bile birim yuvarın bir self-dönüşümünün sabit noktasız ve herhangi bir $\varepsilon \in (0,1)$ için $(1+\varepsilon)$-lipşitzyen olarak yapılandırılabildiğini hatırlatalım (bkz. [33], Örnek 1). Tabii ki bu dönüşüm rotasyonlu değildir.

Örnek

K Örnek 3.1'deki gibi tanımlansın. $k > 1$ için

$$Tx(t) = k \max\left\{x(t) - \left(1 - \frac{1}{k}\right), 0\right\}$$

biçiminde tanımlanan $T : K \to K$ dönüşümü k-lipşitzyendir, ayrıca $\left(\sum_{j=1}^{n} k^{\frac{1}{j-1}}, n\right)$-rotasyonludur ve sabit noktası yoktur. Burada $a > 1$'dir. 2-rotasyonlu dönüşümler için $a = 0$ olması durumlarından ayrı olarak, $0 < a \leq 1$ durumlarında hiçbir örnek bilinmemektedir.

Aşağıdaki lemma bu çalışma için önemli bir role sahiptir.

3.2. Lemma ([37])

E Banach uzayının boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi K olmak üzere $T : K \to K$ dönüşümü k-lipşitzyen olsun. $A, B \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq A < 1$, $0 < B$ olmak üzere herhangi bir $x \in K$ için

$$\|Tz - z\| \leq A\|Tx - x\| \text{ ve } \|z - x\| \leq B\|Tx - x\|$$

olacak biçimde $z \in K$ varsa, T dönüşümünün K içinde bir sabit noktası vardır.

3.3. Lemma

$x \in \mathbb{R}_+ \backslash \{1\}$ve $n \geq 3$ için

$$\sum_{j=2}^{n-1} j x^{j-1} = \frac{2x - nx^{n-1} - x^2 + (n-1)x^n}{(1-x)^2} \tag{3.3}$$

sağlanır.

İspat

$$\sum_{j=2}^{n-1} jx^{j-1} = 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2}$$

$$= [x^2]' + [x^3]' + \cdots + [x^{n-1}]'$$

$$= \left[\sum_{j=2}^{n-1} x^j\right]' = \left[\frac{x^2 - x^n}{1-x}\right]'$$

olduğundan (3.3) eşitliği sağlanır.

3.2. Ana Sonuç

Şimdi Teorem 3.1'in yeni bir temel ve yapıcı ispatını verelim. İspatımız incelenen dönüşümün bir sabit noktasına yakınsayan bir dizi bulmaya dayanmaktadır. Burada Harpern'in iteratif yöntemle açıkladığı fikrini kullanacağız [38]. Halpern yöntemini, Hilbert uzayında tanımlı genişlemeyen dönüşümün bir sabit noktasına yakınsayan sonsuz dizi oluşturmak için kullandı. Onun fikrini farklı bir şekilde ve Banach uzaylarında kullanıyoruz.

İspat (Teorem 3.1'in ispatı)

$n = 2$ olsun. x_0, K içinde herhangi bir nokta olmak üzere

$$z = \frac{1}{2}(T^2 x_0 + Tx_0)$$

alalım ve (z_p) dizisini

$$z_1 = z \quad \text{ve} \quad p = 1, 2, 3, \ldots \text{ iken } z_{p+1} = \frac{1}{2}(T^2 z_p + Tx_0)$$

biçiminde oluşturalım. Üçgen eşitsizliği ile (3.1) ve (3.2) eşitsizliklerini kullanarak

$$\|z - Tz\| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{4}\right) \|x_0 - Tx_0\| \tag{3.4}$$

ve

$$\|z - x_0\| \leq \frac{1}{2}(a+1)\|x_0 - Tx_0\| \tag{3.5}$$

elde edilir. $a < 2$ için $\frac{1}{2}+\frac{a}{4} < 1$ olduğundan (3.4) ve (3.5) eşitlikleri ve Lemma 3.2'den K içinde T dönüşümünün sabit noktalarının vardır ve (z_p) dizisi T'nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

$n \geq 3$ olsun. Aşağıda iterasyon ile oluşturulan diziyi göz önüne alalım. Burada $\alpha \in (0,1)$ alınmıştır.

$$x_0 = x \in K,$$

$$x_1 = \alpha T^n x_0 + (1-\alpha)Tx_0,$$

$$x_2 = \alpha T^n x_0 + (1-\alpha)Tx_1,$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = \alpha T^n x_0 + (1-\alpha)Tx_{n-2}.$$

$z = x_{n-1}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|z - Tz\| &= \|\alpha T^n x_0 + (1-\alpha)Tx_{n-2} - Tz\| \qquad (3.6)\\
&\leq \alpha \left\|T^{n-1}x_0 - z\right\| + (1-\alpha)\|x_{n-2} - z\|\\
&= \alpha \left\|T^{n-1}x_0 - \alpha T^n x_0 - (1-\alpha)Tx_{n-2}\right\| + (1-\alpha)\\
&\quad \|\alpha T^n x_0 + (1-\alpha)Tx_{n-3} - \alpha T^n x_0 - (1-\alpha)Tx_{n-2}\|\\
&\leq \alpha^2\|x_0 - Tx_0\| + \alpha(1-\alpha)\left\|T^{n-2}x_0 - x_{n-2}\right\|\\
&\quad + (1-\alpha)^2\|x_{n-3} - x_{n-2}\|
\end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha(1-\alpha)\|T^{n-2}x_0 - x_{n-2}\|$ için bir tahmin aşağıdaki gibidir.

$$\alpha(1-\alpha)\left\|T^{n-2} - x_{n-2}\right\| \tag{3.7}$$

$$= \alpha(1-\alpha)\left\|T^{n-2}x_0 - \alpha T^n x_0 - (1-\alpha)Tx_{n-3}\right\|$$

$$= \alpha(1-\alpha)\left\|\alpha(T^{n-2}x_0 - T^n x_0) + (1-\alpha)(T^{n-2}x_0 - Tx_{n-3})\right\|$$

$$\leq \alpha^2(1-\alpha)\left\|x_0 - T^2x_0\right\| + \alpha(1-\alpha)^2\left\|T^{n-3}x_0 - x_{n-3}\right\|$$

$$= \alpha^2(1-\alpha)\left\|x_0 - T^2x_0\right\|$$

$$+ \alpha(1-\alpha)^2\left\|T^{n-3}x_0 - \alpha T^n x_0 - (1-\alpha)Tx_{n-4}\right\|$$

$$= \alpha^2(1-\alpha)\left\|x_0 - T^2x_0\right\|$$

$$+ \alpha(1-\alpha)^2\left\|\alpha(T^{n-3}x_0 - T^n x_0) + (1-\alpha)(T^{n-3}x_0 - Tx_{n-4})\right\|$$

$$\leq \alpha^2(1-\alpha)\left\|x_0 - T^2x_0\right\| + \alpha^2(1-\alpha)^2\left\|x_0 - T^3x_0\right\|$$

$$+ \alpha(1-\alpha)^3\left\|T^{n-4}x_0 - x_{n-4}\right\|$$

$$\leq \cdots$$

$$\leq \alpha^2(1-\alpha)\left\|x_0 - T^2x_0\right\| + \alpha^2(1-\alpha)^2\left\|x_0 - T^3x_0\right\|$$

$$+ \alpha^2(1-\alpha)^3\left\|x_0 - T^4x_0\right\| + \cdots + \alpha^2(1-\alpha)^{n-2}\left\|x_0 - T^{n-1}x_0\right\|$$

(sadece üçgen eşitsizliğini ve (3.1)'i kullanarak)

$$\leq \left[\alpha^2 \sum_{j=2}^{n-1} j(1-\alpha)^{j-1}\right]\|x_0 - Tx_0\|$$

bulunur. (3.6)'daki bir sonraki ifade için değerlendirme aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
(1-\alpha)^2 \|x_{n-3}-x_{n-2}\| &\le (1-\alpha)^3 \|x_{n-4}-x_{n-3}\| \le \cdots \\
&\le (1-\alpha)^{n-1} \|x_1 - x_0\| \\
&= (1-\alpha)^{n-1} \|\alpha(T^n x_0 - x_0) + (1-\alpha)(Tx_0 - x_0)\| \\
&\le [\alpha(1-\alpha)^{n-1}\alpha + (1-\alpha)^n] \|x_0 - Tx_0\| .
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

(3.6)'yı (3.7) ve (3.8) ile birleştirerek

$$
\begin{aligned}
\|z - Tz\| \le \Bigg\{ &\alpha^2 + \alpha^2 \sum_{j=2}^{n-1} j(1-\alpha)^{j-1} \\
&+\alpha(1-\alpha)^{n-1}\alpha + (1-\alpha)^n \Bigg\} \|x_0 - Tx_0\|
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

bulunur. Şimdi $\alpha = \frac{1}{n}$ alıp Lemma 3.3'yi kullanarak (3.9) yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\|z - Tz\| \le \Bigg\{ &\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \sum_{j=2}^{n-1} j \left(\frac{n-1}{n}\right)^{j-1} \\
&+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} a + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} \Bigg\} \|x_0 - Tx_0\| \\
= &\left\{ 1 + \left(\frac{a}{n} - 1\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \right\} \|x_0 - Tx_0\|
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

elde edilir. Üstelik,

$$
\begin{aligned}
\|z-x_0\| &= \|\alpha(T^n x_0 - x_0) + (1-\alpha)(Tx_{n-2} - x_0)\| \qquad (3.11)\\
&\le \alpha a \|x_0 - Tx_0\| + (1-\alpha)\|Tx_{n-2} - x_0\|\\
&\le \alpha a \|x_0 - Tx_0\| + (1-\alpha)[\|Tx_{n-2} - T^n x_0\| + \|T^n x_0 - x_0\|]\\
&\le a\|x_0 - Tx_0\| + (1-\alpha)\left\|x_{n-2} - T^{n-1}x_0\right\|\\
&= a\|x_0 - Tx_0\|\\
&\quad + (1-\alpha)\left\|\alpha(T^n x_0 - T^{n-1}x_0) + (1-\alpha)(Tx_{n-3} - T^{n-1}x_0)\right\|\\
&\le a\|x_0 - Tx_0\| + \alpha(1-\alpha)\|x_0 - Tx_0\|\\
&\quad + (1-\alpha)^2\left\|x_{n-3} - T^{n-2}x_0\right\|\\
&\le a\|x_0 - Tx_0\| + \alpha(1-\alpha)\|x_0 - Tx_0\|\\
&\quad + \alpha(1-\alpha)^2\left\|x_0 - T^2x_0\right\| + \alpha(1-\alpha)^3\left\|x_0 - T^3x_0\right\| + \cdots\\
&\quad + \alpha(1-\alpha)^{n-2}\left\|x_0 - T^{n-2}x_0\right\| + (1-\alpha)^{n-1}\|x_0 - Tx_0\|
\end{aligned}
$$

(sadece üçgen eşitsizliğini ve (3.1)'i kullanarak)

$$
\begin{aligned}
&\le \left\{a + \alpha(1-\alpha) + 2\alpha(1-\alpha)^2 + \cdots\right.\\
&\quad \left.+(n-2)\alpha(1-\alpha)^{n-2} + (1-\alpha)^{n-1}\right\}\|x_0 - Tx_0\|\\
&\le \{n + 1 + 2 + \cdots + (n-2) + 1\}\|x_0 - Tx_0\|\\
&= \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)\|x_0 - Tx_0\|
\end{aligned}
$$

bulunur.

$$a < n \text{ için } \left(\frac{a}{n} - 1\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} < 1$$

olduğundan (3.10) ve (3.11) eşitsizlikleri ile Lemma 3.2, K içinde T dönüşümünün sabit noktalarının varlığını garanti eder.

Not

Bir önceki ispattan $p \in \mathbb{N}$ için

$$z_1(x) = x_{n-1}(x),\ z_2(x) = x_{n-1}(z_1(x)),\ \ldots\ ,\ z_{p+1}(x) = x_{n-1}(z_p(x))$$

iterasyon işlemi ile üretilen (z_p) dizisi T'nin bir sabit noktasına düzgün yakınsar. Ayrıca,

$$R(x) = \lim_{p\to\infty} z_p(x) \tag{3.12}$$

biçiminde tanımlanan $R : K \to K$ dönüşümü T dönüşümünün sabit noktalar kümesi üzerine K'nin bir genişlemeyen çekmesidir. (Hatırlatma: $r : K \to F$ sürekli dönüşüm olmak üzere her $x \in F$ için $r(x) = x$ oluyorsa r'ye *çekme* denir.)

İspat

$x_0 \in K$ ve $0 < \alpha < 1$ iken

$$T_\alpha x_0 = (1-\alpha)Tx_{n-2} + \alpha T^n x_0$$

biçiminde tanımlanan $T_\alpha : K \to K$ dönüşümü genişlemeyendir. Gerçekten, herhangi

$x_{0,}y_0 \in K$ için

$$
\begin{aligned}
\|T_\alpha x_0 - T_\alpha y_0\| &= \|(1-\alpha)Tx_{n-2} + \alpha T^n x_0 - (1-\alpha)Ty_{n-2} - \alpha T^n y_0\| \\
&\le (1-\alpha)\|Tx_{n-2} - Ty_{n-2}\| + \alpha\|T^n x_0 - T^n y_0\| \\
&\le (1-\alpha)\|x_{n-2} - y_{n-2}\| + \alpha\|x_0 - y_0\| \\
&= (1-\alpha)\|(1-\alpha)Tx_{n-3} + \alpha T^n x_0 - \\
&\quad (1-\alpha)Ty_{n-3} - \alpha T^n y_0\| + \alpha\|x_0 - y_0\| \\
&\le (1-\alpha)[(1-\alpha)\|x_{n-3} - y_{n-3}\| + \alpha\|x_0 - y_0\|] + \alpha\|x_0 - y_0\| \\
&\le (1-\alpha)^2\|x_{n-3} - y_{n-3}\| + [(1-\alpha)\alpha + \alpha]\|x_0 - y_0\| \le \cdots \\
&\le (1-\alpha)^{n-1}\|x_0 - y_0\| \\
&\quad + [(1-\alpha)^{n-2} + (1-\alpha)^{n-3} + \cdots + (1-\alpha) + 1]\alpha\|x_0 - y_0\| \\
&= \left\{(1-\alpha)^{n-1} + \frac{1}{\alpha}[1-(1-\alpha)^{n-1}]\alpha\right\}\|x_0 - y_0\| \\
&= \|x_0 - y_0\|
\end{aligned}
$$

sağlanır. Rutin hesaplamalarla T'nin bir sabit noktasının T_α'nın bir sabit noktası olduğu görülür.

Şimdi $x_0, y_0 \in K$ için $k \in \mathbb{N}$ iken $z_{k+1} = T_\alpha z_k$ ve $z^*_{k+1} = T_\alpha z^*_k$ biçiminde oluşturulan

$x_0 \longrightarrow z_1 \longrightarrow z_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow z$ ve

$y_0 \longrightarrow z^*_1 \longrightarrow z^*_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow z^*$

dizilerini ele alalım. T_α genişlemeyen dönüşüm olduğundan

$$\left\|z_{k+1} - z_{k+1}^*\right\| = \|T_\alpha z_k - T_\alpha^* z_k\| \leq \|z_k - z_k^*\|$$

olur, böylece artmayan ve sınırlı $(\|z_k - z_k^*\|)$ dizisi yakınsaktır.

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k - z_k^*\| = \|z - z^*\|$$

olsun. Normun sürekliliğinden ve $\|z - z^*\| \leq \|x_0 - y_0\|$ olmasından

$$\|Rx_0 - Ry_0\| = \|z - z^*\| \leq \|x_0 - y_0\|$$

sağlanır ve böylece ispat tamamlanır.

Not

Bir önceki iterasyon işlemleri ve modifikasyonu $n \geq 3$ iken n-rotasyonlu k-lipşitzyen dönüşümlerin sabit noktalarının ispatları için uygulanabilir [35]. Burada elde edilen sonuçlar şimdiye kadar bilinenlerden daha iyi sonuçlardır [39].

4. SONUÇ

Genişlemeyen dönüşümlerin sabit nokta özelliğini sağlamak için uzayın geometrisiyle ilgili bazı varsayımlar eklenir. Başka bir yöntem ise dönüşümün kendisine bazı ek kısıtlamalar getirmektir. Bunlardan biri de rotasyonluluktur. Bu özellik, genişlemeyen dönüşümler için oldukça doğal görünmektedir. Ayrıca, k sayısı 1'den biraz daha büyük olduğunda bu özellik k-lipşitzyen dönüşümlerin sabit noktaların varlığını garanti eder. Konu ile ilgili çalışmalarda, sadece bu tür dönüşümlerle ilgili mevcut bilgi sunulmaz, aynı zamanda birkaç ilginç açık problem de ortaya çıkar. Sıkı lipşitzyen dönüşüm kavramı, sıkı genişlemeyen dönüşümlerin bir uyarlamasıdır. Çalışmamızda, sıkı lipşitzyen dönüşümlerin belirli özellikleri ve asimptotik davranışları ile ilgili bazı sonuçlar sunulmuştur. Ayrıca, sonsuz boyutlu bir Banach uzayında birim yuvarın kendi birim küresine örten olan lipşitzyen kısıtlamasının varlığı, pozitif minimum yer değiştirmeli kompakt olmayan bir kümenin bir lipşitzyen kendine dönüşümünün varlığı gibi bazı sonuçlardan bahsedilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Browder, F. E. (1965). Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. *Proceedings of the National Academy Science of the United States of America,* 54, 1041-1044.

2. Göhde, D. (1965). Zum Prinzip der Kontraktiven Abbildung. *Mathematische Nachrichten*, 30, 251-258.

3. Kirk, W. A. (1965). A fixed point theorem for mappings which do not increase distances. *American Mathematical Monthly*, 72, 1004-1006.

4. Browder, F. E. (1965). Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space. *Proceedings of the National Academy Science of the United States of America*, 53, 1272-1276.

5. Karlovitz, L. A. (1976). Existence of a fixed point for a nonexpansive map in a space without normal structure. *Pacific Journal of Mathematics*, 66, 153-159.

6. Lim, T. C. (1985). Asymptotic centers and nonexpansive mappings in some conjugate spaces. *Pacific Journal of Mathematics,* 116, 135-143.

7. Maurey, B. (1981). Points fixes des contractions sur un convexe fermé de L_1, Seminaire d'Analyse Fonctionelle. *Ecole Polytechnique Palaiseau,* vol. 80-81.

8. Goebel, K. and Kuczumow, T. (1978). Irregular convex sets with the fixed point property for nonexpansive mappings. *Colloquim Mathematicum*, 40, 259-264.

9. Goebel, K. and Kirk, W. A. (1990). *Topics in Metric Fixed Point Theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 244 pp.

10. Baillon, J. B. and Schöneberg, R. (1981). Asymptotic normal structure and fixed points of nonexpansive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 81, 257-264.

11. Lin, P. K. (1985). Unconditional bases and fixed points of nonexpansive mappings. *Pacific Journal of Mathematics,* 116, 69-76.

12. Day, M. M., James, R. C. and Swaminathan, S. (1971). Normed linear spaces that are uniformly convex in every direction. *Canadian Journal of Mathematics,* 23, 1051-1059.

13. Dulst, D. van (1982). Equivalent norms and the fixed point property for nonexpansive mappings. *Journal of the London Mathematical Society,* 25, 139-144.

14. Alspach, D. (1981). A fixed point free nonexpansive map. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 82, 423-424.

15. Goebel, K. (1975). On the structure of minimal invariant sets for nonexpansive mappings. *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska,* 29, 73-77.

16. Karlovitz, L. A. (1976). On nonexpansive mappings. *Proceedings of American Mathematical Society,* 55, 321-325.

17. Aksoy, A. and Khamsi, M. A. (1990). *Nonstandard Methods in Fixed Point Theory.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York,Tokyo.

18. Melado, A. Jiménez (1993). Melado and E. Lloréns Fuster, A sufficient condition for the fixed point property. *Nonlinear Analysis*, 20, 849-853.

19. Melado, A. Jiménez (1988). *Una propriedad geométrica de los espacios de Banach relacionada con la teoría del punto fijo*. Ph.D. Dissertation, University of Málaga, Spain.

20. Goebel, K. and Kirk, W. A. (1973). A fixed point theorem for mappings whose iterates have uniform Lipschitz constant. *Studia Mathematica*, 71, 135-140.

21. Lifschitz, E. A. (1975). Fixed point theorems for operators in strongly convex spaces. *Voronez University Trudy Mathematics*, 16, 23-28.

22. Downing, D. and Turett, B. (1983). Some properties of the characteristic of convexity relating to fixed poing theory. *Pacific Journal of Mathematics*, 104, 343-350.

23. Prus, S. (1990). On Bynum's fixed point theorem. *Atti del Seminario Matematico e Fisico Modena*, 38, 535-545.

24. Cassini, E. and Maluta, E. (1985). Fixed points for uniformly lipschitzian mappings in spaces with uniformly normal structure. *Nonlinear Analysis*, 9, 103-108.

25. Lim, T. C. (1983). Fixed point theorems for uniformly Lipschitz mappings in L^p spaces. *Nonlinear Analysis*, 7, 555-563.

26. Smarzewski, R. (1986). Strongly unique minimization of functionals in Banach spaces with applications to theory of approximation and fixed points. *Journal Mathematical Analysis and Applications*, 115, 155-172.

27. Benavides, T. D. (1998). Fixed point thoerems for uniformly lipschitzian mappings and asymptotically regular mappings. *Nonlinear Analysis*, 32, 15-27.

28. Baillon, J. B. (1978-99). *Qeulques aspects de la théorie des points fixes dans les éspaces Banach.* Seminaire d'Analysis Fonctionnelle, Ecole Polytechnique I.

29. Brodskii, M. S. and Milman D. P. (1948). On the center of a convex set. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 59, 837-840.

30. Bruck, R. E. (1979). A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics,* 32, 107-116.

31. Khamsi, M. A. (1989). On normal structure, fixed point property and contractions of type (γ). *Proceedings of the American Mathematical Society,* 106, 995-1001.

32. Bruck, R. E. (1973). Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 47, 341-355.

33. Goebel, K. (2001). *Metric environment of the topological fixed point theorems.* Handbook of Metric Fixed Point Theory (Kirk, W. A., Sims B., eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 577–611.

34. Goebel, K. and Koter, M. (1981). A remark on nonexpansive mappings. *Canadian Mathematical Bulletin*, 24, 113–115.

35. Górnicki, J. and Pupka, K. (2005). Fixed points of rotative mappings in Banach spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 6.

36. Kaczor W., Koter, M. -Mórgowska (2001). *Rotative mappings and mappings with constant displacement.* Handbook of Metric Fixed Point Theory (W. A. Kirk, B. Sims, eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 323–337.

37. Górnicki, J. (1996). Fixed points of involutions. *Mathematica Japonica* 43, no. 1, 151–155.

38. Halpern, B. (1967). Fixed points of nonexpansive maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73, 957–961.

39. Górnicki, J. (2005). Another proof of the existence of fixed points of rotative nonexpansive mappings. *Annales UMCS Mathematica*, 59, 19–26.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	VURAL, Fettah
Uyruğu	:	T.C
Doğum tarihi ve yeri	:	12.03.1992 Ankara

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	Devam ediyor
Lisans	Trakya Üniversitesi / Matematik Bölümü	2016
	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2013 (Farabi Prog.)
Ön Lisans	Kırıkkale Üniversitesi / Anestezi Bölümü	Devam ediyor
Lise	Kalaba Lisesi	2010

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Vural, F. (2020, 7-8-9 Aralık). *Banach Örgülerinde Rotasyonlu Genişlemeyen Dönüşümlerin Sabit Noktaları*, Uluslararası Akademik Araştırmalar Kongresi - International Congress of Academic Research (ICAR), Online.

Hobiler

Kitap okumak, müzik dinlemek, seyahat etmek, satranç oynamak.

GAZİ GELECEKTİR...