
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
Gazi
1926

p-ÖNGÖRÜLEN EĞRİLİK VE q-RELATİVİSTİK OPERATÖRLERİNİ İÇEREN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM TEORİSİ

Elif Ece DEMİR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2025

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Elif Ece DEMİR

16/06/2025

p-ÖNGÖRÜLEN EĞRİLİK VE q-RELATİVİSTİK OPERATÖRLERİNİ İÇEREN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SALINIM TEORİSİ

(Doktora Tezi)

Elif Ece DEMİR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2025

ÖZET

Bu tezde, lineer olmayan diferensiyel denklemlerin yeni sınıfları için salınım davranışı incelenmektedir. Daha sonra, p-öngörülen eğrilik ve q-relativistik operatörleri tanıtılıp $y'' + f(u)y = 0$ diferensiyel denkleminde y' ve y yerine bu opertörler alınarak sırasıyla diğer bölümlerde ikinci basamaktan, yüksek basamaktan ve kısmi diferensiyel denklemlerin salınımlılıkları için yeni teoremler verilmiştir. Genelleştirilmiş Riccati-tipi dönüşüm ve integral ortalama tekniği kullanılarak bu diferensiyel denklemlerin salınımlılığı için yeni kriterler ortaya konmuştur. Ayrıca, bu diferensiyel denklemlerde sonuçların önemini ve uygulanabilirliğini göstermek amacıyla örnekler verilmiştir. Bu bağlamda, çalışma salınım teorisine katkıda bulunmakta ve yeni tür diferensiyel denklemlerin çözümlerinin davranışlarını anlamaya yönelik güçlü bir araç sunmaktadır.

Bilim Kodu	:	20406
Anahtar Kelimeler	:	p-öngörülen eğrilik operatör, q-relativistik operatör, salınımlı çözüm, kısmi diferensiyel denklem
Sayfa Adedi	:	69
Danışman	:	Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

OSCILLATION THEORY FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS INVOLVING
p-PRESCRIBED CURVATURE AND q-RELATIVISTIC OPERATORS
(Ph. D. Thesis)

Elif Ece DEMİR

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
June 2025

ABSTRACT

This thesis investigates the oscillatory behavior of new classes of nonlinear differential equations. Then, the p-prescribed curvature and q-relativistic operators are introduced, and in place of y' and y in the differential equation $y'' + f(u)y = 0$, these operators are used. In the following sections, new theorems are presented for the oscillations of second-order, higher-order, and partial differential equations. Using the generalized Riccati-type transformation and the integral averaging technique, new criteria for the oscillatory behavior of these differential equations are established. Moreover, examples are provided to demonstrate the significance and applicability of the results obtained for these equations. In this context, the study contributes to oscillation theory and offers a powerful tool for understanding the behavior of solutions to new types of differential equations.

Science Code	:	20406
Keywords	:	p-prescribed curvature operator, q-relativistic operator, oscillatory solution, partial differential equation
Number of pages	:	69
Supervisor	:	Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ başta olmak üzere bilgi birikiminden yararlandığım saygıdeğer Prof. Dr. Adil MISIR ve Doç. Dr. Meltem GÖLGELİ hocalarıma en içten dileklerimle teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Hayatımın her evresinde bana destek olan ve hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan, desteklerini her an hissettigim değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez ”TÜBİTAK 2211-A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı” tarafından desteklenmiştir. Doktora yaptığım süre boyunca verdiği burs sebebiyle TÜBİTAK’a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR viii

1. GİRİŞ 1

2. SALINIM TEORİSİNE İLİŞKİN SONUÇLAR 5

3. LiNEER OLMAYAN OPERATÖRLERi İÇEREN İKiNCi BASAMAKTAN DiFERENSiYEL DENKLEMLER iÇiN YENİ SALINIM TEORiSi 17

   3.1. Giriş 17

   3.2. Ana Sonuçlar 18

4. LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERİ İÇEREN YÜKSEK BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN YENİ SALINIM TEORİSİ 31

   4.1. Giriş 31

   4.2. Ana Sonuçlar 31

5. LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERİ İÇEREN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN KAMENEV-TİPİ YENİ SALINIM TEORİSİ 41

   5.1. Giriş 41

   5.2. Ana Sonuçlar 47

6. SONUÇ VE ÖNERİLER 61

KAYNAKLAR 63

ÖZGEÇMİŞ 69

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\Phi_p(.) = \lvert.\rvert^{p-2}(.)$	p-Laplace operatörü
$div = \nabla.$	Divergens operatörü
$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, ..., \frac{\partial}{\partial u_n}\right)$	Gradiyent operatörü
$\varphi_+ = \frac{\lvert.\rvert^{p-2}(.)}{(1+\lvert.\rvert^p)^{\frac{p-1}{p}}}$	p-öngörülen eğrilik operatörü
$\varphi_- = \frac{\lvert.\rvert^{p-2}(.)}{(1-\lvert.\rvert^p)^{\frac{p-1}{p}}}$	q-relativistik operatörü
$\lVert\cdot\rVert$	Öklid normu
$\langle\,,\rangle$	İç çarpım

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
Bkz.	Bakınız
Eş.	Eşitlik/Eşitsizlik
Vb.	Ve benzeri

1. GİRİŞ

Mühendislik, fizik, astronomi, ekonomi ve sosyal bilimler gibi birçok bilim dalında problemleri çözümleyebilmek için önce bu problemleri matematiksel bir modelle ifade etmek ve bu problemi sağlayan fonksiyonları elde etmek gerekmektedir. Bu matematiksel ifadeler, aranan fonksiyonun en azından birinci basamaktan veya daha yüksek basamaktan türevlerini içermektedir. Bu modeller yardımıyla elde edilen diferensiyel denklemler oldukça geniş bir uygulama alanına sahip olduğu için her diferensiyel denklemin çözümünün elemanter fonksiyon olarak elde edilmesini istemek oldukça doğaldır. Fakat, literatürde bilinen yöntemlerle her diferensiyel denklemin çözümü analitik olarak elde edilememektedir. Bu gibi durumlarda, diferensiyel denklemin analizinden yola çıkarak çözümün davranışıyla ilgili yorumda bulunmak büyük önem taşımaktadır. Buradan hareketle, çözüm için kararlılık, sınırlılık ve asimptotik davranışları gibi kalitatif incelemeler yapılmaktadır. Kalitatif incelemelerin bir diğer önemli konusu ise çözümlerin sıfır yerleri ile ilgili olan salınım teorisidir.

Salınım teorisi, Sturm tarafından 1836 yılında yayınlanan bir çalışmada ısı iletim problemi çalışmasında bahsedilmesiyle ortaya çıkmış [1] ve ilerleyen yıllarda oldukça ilgi gören bir konu olup literatürde çeşitli diferensiyel denklem sınıfları için birçok çalışma yapılmıştır. İkinci basamaktan lineer bir diferensiyel denkleminin çözümü, keyfi sayıda yeterince büyük sıfırlara sahipse salınımlı, aksi halde salınımsız olarak adlandırılır. Diferensiyel denklemin, tüm çözümleri salınımlı ise diferensiyel denklem salınımlı olarak adlandırılır.

Örneğin ikinci basamaktan,

$$y''(u) - 9y(u) = 0$$

diferensiyel denklemi göz önüne alınsın. Bu diferensiyel denklemin iki çözümü $y_1(u) = e^{3u}$ ve $y_2(u) = e^{-3u}$ olmak üzere genel çözümü c_1 ve c_2 keyfi sabitleri için $y(u) = c_1 e^{3u} + c_2 e^{-3u}$ olarak yazılabilir. Bu genel çözümü sıfır yapan değer olmadığı için çözümler salınımsızdır. Bu nedenle $y''(u) - 9y(u) = 0$ diferensiyel denklemi salınımsızdır.

$y''(u)+9y(u)=0$

diferensiyel denkleminin iki çözümü ise $y_1(u)=cos3u$ ve $y_2(u)=sin3u$ olmak üzere genel çözümü c_1 ve c_2 keyfi sabitleri için $y(u)=c_1sin3u+c_2cos3u$ şeklindedir. Bu genel çözümün sonsuz sayıda sıfırı olduğu için $y''(u)+9y(u)=0$ diferensiyel denklemi salınımlıdır.

Şimdi, üçüncü basamaktan

$y'''(u)-9y'(u)=0$

diferensiyel denklemi göz önüne alınsın. Bu diferensiyel denklem $y_1(u)=1$, $y_2(u)=e^{3u}$ ve $y_3(u)=e^{-3u}$ çözümlerine sahiptir. Bu çözümlerin tamamı salınımsız olduğundan diferensiyel denklem salınımsızdır.

$y'''(u)+9y'(u)=0$

diferensiyel denklemi ise $y_1(u)=1$, $y_2(u)=c_1sin3u$ ve $y_3(u)=c_2cos3u$ çözümlerine sahiptir ve bu çözümlerden en az bir tanesi salınımlı olduğu için diferensiyel denklem salınımlıdır.

$n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $2n$-inci basamaktan

$y^{(2n)}(u)+(-1)^{n+1}y(u)=0$

diferensiyel denkleminin ise çözümü olan $y(u)=cosu$ fonksiyonu salınımlıdır.

Son olarak, c dalganın yayılma hızı olmak üzere fiziksel sistemlerde titreşimleri ve dalga yayılımını modellemek için kullanılan ikinci basamaktan

$y_{zz}=c^2y_{uu}$

dalga denklemi göz önüne alınsın. $k_1,k_2>0$ ve $ck_1=k_2$ olmak üzere bu denklemin genel çözümü hem uzayda hem zamanda salınımlı olan

$y(u,z)=(Asink_1u+Bcosk_1u)(Csink_2z+Dcosk_2z)$

dir. Özel olarak $A = 1, B = 1, C = -1$ ve $D = -1$ olarak seçilirse salınımlı olan $y(u,z) = -[cos(k_1u + k_2z) + sin(k_1u + k_2z)]$ özel çözümü bulunur.

Salınım teorisi, diferensiyel denklemler teorisinde önemli bir rol oynayan bir konudur ve mühendislik, fizik, biyoloji gibi birçok alanda geniş uygulama alanına sahiptir. Bir diferensiyel denklemin çözümünün salınımlı olup olmadığını incelemek, özellikle sınır değer problemlerinde kritik bir öneme sahiptir. Bu bağlamda salınım teorisi, sistemlerin dinamik davranışlarını anlamak için kullanılan güçlü bir araç sunmaktadır.

Salınım teorisinin temelini oluşturan ana kavramlardan biri, bir çözümün kökleri arasındaki davranışı incelemektir. Salınımın varlığını tespit etmek ve bu davranışın özelliklerini analiz etmek için farklı yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu teorik çerçevenin içinde, özellikle ikinci basamaktan lineer diferensiyel denklemler için Sturm-Liouville teorisi ve Sturm karşılaştırma teoremi büyük bir yer tutar.

Sturm karşılaştırma teoremi, iki farklı ikinci basamaktan lineer diferensiyel denklemin çözümleri arasındaki ilişkiyi incelemeye olanak tanır. Bu teorem, iki diferensiyel denklemin çözümlerinin salınım davranışını karşılaştırmak için kullanılır ve bir çözümün diğerine göre daha fazla veya daha az köke sahip olup olmadığını belirler. Bu bağlamda Sturm karşılaştırma teoremi, bir çözümün köklerinin diğerine göre yerleşimi konusunda güçlü sonuçlar verir. Örneğin, $y'' + y = 0$ ve $y'' + 4y = 0$ diferensiyel denklemleri ele alınsın. Bu diferensiyel denklemlerin özel çözümleri olarak sırasıyla $y = sinu$ ve $y = sin2u$ fonksiyonları alındığında $y = sinu$'nun ardışık sıfırlarının $n\pi, n = 0, \pm1, \pm2, ...$ olduğu görülür ve bu sıfırların arasında $\frac{n\pi}{2}$, $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ için $sin2u$ fonksiyonu en az bir sıfır yerine sahiptir.

Öte yandan, Sturm ayırma teoremi, bir lineer ikinci basamaktan diferensiyel denklemin iki bağımsız çözümünün köklerinin birbirleriyle nasıl ilişkili olduğunu incelemektedir. Bu teoreme göre, bir diferensiyel denklemin iki farklı çözümü, kökleri arasında herhangi bir çakışma olmaksızın birbirini izler. Bu özellik, salınımlı çözümlerin davranışını anlamada kilit bir rol oynar. Örneğin, $y'' + 4y = 0$ diferensiyel denkleminin lineer bağımsız özel

çözümleri olan $y_1 = sin2u$ ve $y_2 = cos2u$ fonksiyonlarından birinin ardışık iki sıfır yeri arasında diğerinin bir sıfır yeri vardır.

Diferensiyel denklemler, birçok fiziksel ve matematiksel sistemin davranışlarını modellemek için temel bir araç olarak kullanılır. İkinci basamaktan diferensiyel denklemler, özellikle dalga denklemi, ısı denklemi ve Laplace denklemi gibi klasik fiziksel sistemlerin temel taşlarını oluşturur. Yüksek basamaktan diferensiyel denklemler, iki ve daha fazla basamaktan türevler içeren modeller sunarken; kısmi diferensiyel denklemler sistemin zaman ve uzay gibi birden fazla bağımsız değişken üzerindeki etkilerini anlamada kritik rol oynayan modeller sunmaktadır. Kısmi diferensiyel denklemler, lineer ve lineer olmayan formlarda ortaya çıkabilir ve çözümleri genellikle başlangıç ve sınır koşullarına bağlıdır.

2. SALINIM TEORİSİNE İLİŞKİN SONUÇLAR

İkinci basamaktan $u \geq u_0$ için

$$y'' + f(u)y = 0 \tag{2.1}$$

lineer adi diferensiyel denklem için salınım problemi birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır [2–11]. Bu alandaki araştırmacıların temel hedeflerinden biri, bazı diferensiyel denklem sınıfları için salınım, varlık, teklik, sınırlılık, periyodiklik ve kararlılık gibi kalitatif teoriler elde etmektir. Temel makalelerin ortaya çıkmasından bu yana, literatürde çeşitli ispatlar, genellemeler ve geliştirmeler ortaya çıkmıştır. Literatürde çoğu çalışma lineer ve yarı-lineer ikinci basamaktan diferensiyel denklemlerin salınım teorisine ayrılmıştır [12]. Ancak, ikinci basamaktan bir diferensiyel denklemi incelemeye yönelik tüm yöntemlerin daha yüksek basamaktan bir diferensiyel denkleme genişletilmemesi nedeniyle, daha yüksek basamaktan bir diferensiyel denklem için bu tür çalışmalar nispeten nadirdir. Kneser [13] tarafından

$$\lim_{u\to+\infty} u^2 f(u) > \frac{1}{4}$$

şartının sağlaması durumunda (2.1) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğu gösterilmiştir. (2.1) diferensiyel denklemiyle ilgili iyi bilinen salınım teorilerinden biri ise Fite [14]-Wintner [15] teoremi olarak bilinir ve $f(u) \geq 0$ ve $f \in C([u_0, +\infty), \mathbb{R})$ için

$$\lim_{u\to+\infty} \int_{u_0}^{u} f(s)ds = +\infty$$

sağlanırsa (2.1) diferensiyel denklemi salınımlıdır. Ek olarak Wintner [15] tarafından $f(u) \geq 0$ şartı kaldırılarak

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u} \int_{u_0}^{u} \int_{u_0}^{s} f(r)\, drds = \infty$$

sağlanırsa (2.1) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğu gösterilmiştir. Daha sonra, $u > 0$ ve $r(u) > 0$ için $r(u), r'(u)$ ve $f(u)$ reel değerli sürekli fonksiyonlar için $r(u)f(u)$ pozitif

monoton fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{ds}{r(s)} \text{ ve } \lim_{u\to\infty}\int_1^u f(s)ds$$

limitleri varsa

$$\left(r(u)y'\right)' + f(u)y = 0$$

diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu gösteren genel bir sonuç Leighton [16] tarafından verilmiştir. Pozitif ε sayısı için Zlamal [17] tarafından ise

$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^u s^{1-\varepsilon} f(s)ds = +\infty$$

şartının sağlandığı durumda (2.1) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğu gösterilmiştir. f, $[0,+\infty)$ aralığında sürekli ve pozitif bir fonksiyon olmak üzere, Atkinson [18] tarafından

$$\int_0^\infty uf(u)du = \infty$$

şartının sağlanmasının $n > 1$ olmak üzere

$$y'' + f(u)y^{2n-1} = 0$$

diferensiyel denkleminin salınımlı olması için yeterli olduğu gösterilmiştir. Nehari [19] tarafından

$$\lim_{u\to+\infty} \sup u\int_u^\infty f(u)du = \infty$$

olduğu durumda (2.1) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğu gösterilmiştir. Daha sonra Fite ve Wintner'in sonucu Kamenev [20] tarafından geliştirilip $n > 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\limsup_{u\to+\infty} \frac{1}{u^{n-1}}\int_{u_0}^u (u-s)^{n-1} f(s)ds = +\infty \tag{2.2}$$

şartının sağlanmasının (2.1) diferensiyel denkleminin salınımlı olması için yeterli olacağı ispatlanmıştır.

Philos tipi salınımlılığı vermeden önce salınım teorilerinde kullanılacak önemli bir tanım aşağıda verilmiştir.

2.0.1. Tanım ([21])

$D_0 = \{(u,s) : u > s \geq u_0\}$ ve $D = \{(u,s) : u \geq s \geq u_0\}$ olsun. $H \in C(D,\mathbb{R})$ fonksiyonunun

1. $u \geq u_0$ için $H(u,u) = 0$; $(u,s) \in D_0$ için $H(u,s) > 0$
2. $h : D \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olmak üzere H fonksiyonunun ikinci değişkenine göre D_0 üzerinde her $(u,s) \in D_0$ için

$$-\frac{\partial H(u,s)}{\partial s} = h(u,s)\sqrt{H(u,s)} \tag{2.3}$$

olacak şekilde D_0 üzerinde sürekli ve pozitif olmayan kısmi türevi var ise H fonksiyonuna $\mathscr{P}$ sınıfındandır denir ve $H \in \mathscr{P}$ ile gösterilir.

Uyarı

Eğer H fonksiyonu $H(u,s) = (u-s)^n$ olarak seçilirse h fonksiyonu $h(u,s) = n(u-s)^{\frac{n}{2}-1}$ olarak elde edilir. Bu H fonksiyonunun $\mathscr{P}$ sınıfından olduğu kolaylıkla görülür. Ayrıca bu fonksiyonun (2.2)'de verilen Kamenev tipi fonksiyon olduğuna dikkat edilmelidir. H fonksiyonunun diğer seçimleri için $\ln\left(\frac{u}{s}\right)^n$, d sabit olmak üzere $\left((u-d)^3-(s-d)^3\right)^n$, $\left(\sqrt{u}-\sqrt{s}\right)^n$ ve $\left(e^{u-s}-e^{s-u}\right)^n$ fonksiyonları alınabilir veya daha genel olarak $H(u,s) = \left(\int_s^u \frac{dv}{\theta(v)}\right)^n$ olarak seçildiğinde ise $n > 1$ ve $\theta \in C([u_0,+\infty],\mathbb{R}^+)$ için $h(u,s) = \frac{n}{\theta(s)}\left(\int_s^u \frac{dv}{\theta(v)}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ ve $\lim\limits_{u\to\infty}\int_s^u \frac{dv}{\theta(v)} = \infty$ olur.

Yukarıdaki tanımı kullanarak Philos [21],

$$\limsup_{u\to+\infty}\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^{u}\left[f(s)H(u,s)-\frac{h^2(u,s)}{4}\right]ds = +\infty$$

şartının sağlanması durumunda (2.1) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu göstermiştir.

Horng [22], Philos'un kriterini ikinci basamaktan

$$\Phi_p^{'}(y^{'}) + f(u)\Phi_p(y) = 0 \tag{2.4}$$

yarı-lineer diferensiyel denklemine genişletmiştir. Bunun için, Tanım 2.0.1.'deki (2.3) şartı yerine $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere her $(u,s) \in D_0$ için

$$-\frac{\partial H(u,s)}{\partial s} = h(u,s)H^{\frac{1}{q}}(u,s) \tag{2.5}$$

şartını alarak, her $u \geq u_0$ için $\int_{u_0}^{u} h^p(u,s)ds < +\infty$ ve

$$\limsup_{u\to+\infty} \frac{1}{H(u,u_0)} \int_{u_0}^{u} \left[f(s)H(u,s) - \left(\frac{h(u,s)}{p} \right)^p \right] ds = +\infty$$

şartının sağlanması durumunda (2.4) yarı-lineer diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu göstermiştir.

Licko ve Svec [23] tarafından $[u_0,\infty)$ aralığında tanımlı sürekli ve pozitif bir f fonksiyonu ele alınmıştır. Ayrıca, $n > 1$ çift tamsayısı, k ve l aralarında asal tek tamsayı olmak üzere $\alpha = \frac{k}{l}$ sabiti, $u > u_0$ ve $0 < \alpha < 1$ için

$$\int_u^{\infty} s^{\alpha(n-1)} f(s)ds = \infty$$

şartının sağlanması durumunda

$$y^{(n)} + f(u)y^{\alpha} = 0$$

diferensiyel denkleminin salınımlı olacağı gösterilmişir.

Şimdi Onese [24] tarafından verilen bir salınım kriterinde kullanılan tanım verilecektir. İlk olarak, Wong [25] tarafından güçlü sürekli tanımı verilmiştir. Daha sonra, Onose [24] ise bu tanımdan daha genel bir tanım olan genelleştirilmiş güçlü sürekli tanımını vermiştir.

2.0.2. Tanım

$f(u,y_1,...,y_n)$ fonksiyonu u'da ve $i=1,2,...,n$ için y_i'de sürekliyse ve $\varepsilon>0$ için, her $y_1 \in [y_{1c}-\delta, y_{1c}]$ için, k_i herhangi bir sabit olmak üzere $|y_i-k_i| \leq \delta$ eşitsizliğini sağlayan her y_i için ve her $u \geq n$ ve $i=2,...,T$ için

$$(1-\varepsilon)f(u,y_\delta,k_2,...,k_n) \leq f(u,y_1,...,y_n) \leq (1+\varepsilon)f(u,y_{1c},k_2,...,k_n)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $y_\delta \in [y_{1c}-\delta, y_{1c}]$, $\delta>0$ ve $T \geq 0$ varsa $f(u,y_1,...,y_n)$ fonksiyonu y_{1c}'de soldan genelleştirilmiş güçlü süreklidir. Sağdan genelleştirilmiş güçlü süreklilik tanımı benzerdir. $f(u,y_1,...,y_n)$ fonksiyonu hem sağdan hem soldan genelleştirilmiş güçlü sürekliyse genelleştirilmiş güçlü sürekli fonksiyondur. Örneğin, $f(u,y_1,...,y_n)=a(u)f(y_1,...,y_n)$ genelleştirilmiş güçlü sürekli fonksiyondur. Daha sonra, bu şartın yerine n çift tamsayı ve $y_1 \neq 0$ için $y_1 f(u,y_1,...,y_n)>0$ alınmıştır. Ek olarak, $c \neq 0$, $i=2,...,n$ iken k_i için $y_1>0$ için soldan, $y_1<0$ için sağdan genelleştirilmiş güçlü sürekli $f(u,y_1,...,y_n)$ fonksiyonunun

$$\left| \int_{u_0}^{\infty} s^{n-1} f(s,c,k_2,...,k_n) ds \right| = \infty$$

şartını sağlaması durumunda

$$y^{(n)} + f(u,y,y',...,y^{(n-1)}) = 0$$

diferensiyel denkleminin salınımlı olacağını göstererek Atkinson'un sonucu Onose tarafından genişletilmiştir.

f fonksiyonu $[u_0,+\infty)$ aralığından $(u_0,+\infty)$ aralığına tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. $0<\alpha<2n-1$ için

$$\int_0^{\infty} s^{\alpha} f(s) ds < \infty$$

şartının sağlanması durumunda $n \geq 1$ için çift basamaktan

$$y^{(2n)} + f(u)y = 0 \tag{2.6}$$

diferensiyel denkleminin salınımlı olduğu Lovelady [26] tarafından gösterilmiştir. Ayrıca

$$\limsup_{u\to+\infty} u \int_u^{\infty} (s-u)^{2n-2} f(s)ds > (2n-2)!$$

olduğu durumda (2.6) diferensiyel denkleminin salınımlı olacağını gösterilmiştir.

Kusano [27] ve Naito [28] tarafından $[u_0, +\infty)$ aralığından $(0, +\infty)$ aralığına tanımlı sürekli f fonksiyonu ve $[u_0, +\infty)$ aralığından $\mathbb{R}$'ye tanımlı sürekli türevlenebilir τ fonksiyonu $\tau'(u) > 0$ ve $\lim_{u\to\infty} \tau(u) = \infty$ şartlarını sağlasın. Böylece n çift tamsayı olmak üzere

$$y^{(n)} + f(u)y(\tau(u)) = 0 \tag{2.7}$$

diferensiyel denklemi ele alınmıştır. Kusano, $u \geq u_0$ için $\tau(u) \leq u$ ve $\lim\limits_{u\to+\infty} \inf \frac{\tau(u)}{u} > 0$ alarak

$$\lim_{u\to+\infty} \sup u \int_u^{\infty} s^{n-2} f(s)ds = \infty$$

şartının sağlanması durumunda (2.7) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu, Naito ise

$$\int_{u_0}^{\infty} [\tau(s)]^{n-2} f(s)ds = \infty$$

şartının sağlanması durumunda (2.7) diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu göstermiştir.

$f \in C(\mathbb{R})$ için $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azalmayan fonksiyon olsun. $s \neq 0$ ve $\beta > 0$ için

$$H(s)sgns \geq |s|^{\beta}$$

olsun. $g \in C([u_0, \infty), \mathbb{R})$, $\tau \in C^1([u_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $u \geq u_0$ için $\tau'(u) \geq 0$ ve $u \to \infty$ iken

$$\tau(u) \leq \inf\{u, g(u)\} \to \infty$$

sağlansın. Bu durumda Agarwal ve diğerleri [29] tarafından $p,q>1$ ve her $K>0$ için

$$\left(\left|y^{(n-1)}\right|^{p-2}y^{(n-1)}\right)'+f(u)G\left(Kg^{n-1}(u)\left|y(\tau(u))\right|^{q-2}y(\tau(u))\right)=0$$

diferensiyel denklemi salınımlı ise

$$\left(\left|y^{(n-1)}\right|^{p-2}y^{(n-1)}\right)'+f(u)\left|y(\tau(u))\right|^{p-2}y(\tau(u))=0$$

diferensiyel denkleminin salınımlı olduğu gösterilmiştir.

r fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde n-kez türevlenebilir sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\int_U^\infty \frac{ds}{r(s)}=\infty$$

şartı sağlansın. Eğer f negatif olmayan sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\limsup_{U\to+\infty}\int_U^s \frac{ds}{r(s)}\int_s^\infty f(u)(u-t)^{2(n-1)}du>[(n-1)!]^2$$

veya

$$\limsup_{U\to+\infty}\int_U^s (t-s)^{2(n-1)}\frac{ds}{r(s)}\int_s^\infty f(u)du>[(n-1)!]^2$$

eşitsizliklerinden biri sağlanırsa

$$(-1)^n\left(r(u)y^{(n)}\right)^{(n)}-f(u)y(u)=0$$

diferensiyel denklemi salınımlı olduğu Oinarov ve Rakhimova [30] tarafından gösterilmiştir.

$u\geq U_0\geq u_0$ için

$$\lim_{u\to\infty}\int_{u_0}^\infty\left[\frac{1}{r(s)}exp\left(-\int_{U_0}^s\frac{k(\tau)}{r(\tau)}d\tau\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}ds=\infty$$

şartı sağlansın. $I=[u_0,\infty)$ olmak üzere $\tau(u)\in C^1(I,\mathbb{R}^+)$ için $\tau(u)\leq u$, $\lim_{u\to\infty}\tau(u)=\infty$ ve $\tau'(u)>0$ olsun. Eğer $0<\theta<1$, $M>0$, $G(s)=(p-1)\theta M\tau^{n-2}(s)\tau'(s)$ ve $N(s)=$

$\left(1+\frac{(u-s)k(s)}{\lambda r(s)}\right)^p$ fonksiyonu için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\limsup_{u\to+\infty}\frac{1}{u^\lambda}\int_{u_0}^{u}(u-s)^{\lambda-p}\left[(u-s)^p f(s)-(q-1)\left(\frac{\lambda}{p}\right)^p G^{1-p}(s)N(s)r(s)\right]ds=\infty$$

olacak şekilde $\lambda > p-1$ sabiti varsa

$$\left(r(u)\left|y^{(n-1)}\right|^{p-2}y^{(n-1)}\right)'+k(u)\left|y^{(n-1)}\right|^{p-2}y^{(n-1)}+f(u)\left|y\left(\tau(u)\right)\right|^{p-2}y\left(\tau(u)\right)=0$$

diferensiyel denkleminin salınımlı olduğu gösterilmiştir [31].

$\tau\in C([u_0,\infty),\mathbb{R})$ fonksiyonu için $\tau(u)\le u$ ve $\lim_{u\to\infty}\tau(u)=\infty$ olsun. $\mu(u_0)=\int_{u_0}^{\infty}\frac{ds}{[r(s)]^{\frac{1}{p-1}}}=\infty$ ve $n\ge 2$ çift tamsayısı için

$$\liminf_{u\to+\infty}\int_{\tau(u)}^{u}\frac{f(s)}{r(\tau(s))}\left(\tau(s)\right)^{(n-1)(p-1)}ds>\frac{((n-1)!)^{p-1}}{e}$$

şartları sağlanırsa

$$\left(r(u)\left|y^{(n-1)}\right|^{p-2}y^{(n-1)}\right)'+f(u)\left|y(\tau(u))\right|^{p-2}y(\tau(u))=0$$

diferensiyel denklemininin salınımlı olduğu Park ve diğerleri [32] tarafından gösterilmiştir.

(2.6) diferensiyel denkleminin salınım problemi için çeşitli çalışmalar yapılmıştır [26, 33–38].

Daha sonra [27, 31, 39–46]'de yazarlar, yüksek basamaktan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin Philos tipi salınımı için bazı yeter koşullar vermişlerdir. Özellikle, $f(u)$ katsayısının integralinin davranışını içeren birçok salınım kriteri bulunmuştur.

Ayrıca, son yapılan çalışmalarda ise (2.2) diferensiyel denkleminde y' ve y yerine çeşitli operatörlerin alındığı görülmektedir. Burada, $p>1$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $\Phi_p(.)=|\ .\ |^{p-2}\ (.)$, p-Laplace operatörü olmak üzere $u\ge u_0$ için $\Phi_p(y)$'nin tersi $\Phi_q(y):=\Phi_p^{-1}(y)$'dir. Örneğin, (2.1) diferensiyel denkleminde y' ve y yerine sırasıyla $|y'|^{p-2}y'$ ve $|y|^{p-2}y$ alınarak Φ_p, p-Laplace operatörü olmak üzere (2.4) yarı-lineer adi

diferensiyel denklemi elde edilir. Son yirmi yılda; (2.4) şeklindeki yarı-lineer diferensiyel denklemin salınım teorisi ilgi çeken bir konu olmuştur [12, 47]. Diğer yandan, $u=(u_1,u_2,...,u_n)\in\mathbb{R}^n$; $div=\nabla\cdot=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_i}$ divergens operatörü; $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial u_1},\frac{\partial}{\partial u_2},...,\frac{\partial}{\partial u_n}\right)$ gradiyent operatörü olmak üzere (2.4) yarı-lineer adi diferensiyel denkleminde p-Laplace (adi) operatörü $\left(|y'|^{p-2}y'\right)'$ yerine p-Laplace (kısmi) operatörü $div\left(\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y\right)$ alındığında $u\geq u_0$ için $p>1$ olmak üzere

$$div\left(\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y\right)+f(u)\,|y|^{p-2}y=0 \tag{2.8}$$

yarı-lineer kısmi diferensiyel denklemi elde edilir. Yarı-lineer kısmi diferensiyel denklemlerin salınım problemi için birçok çalışma yapılmıştır [48–51].

Kısmi diferensiyel denklemler için bilinen ilk genel salınım kriteri ise Glazman tarafından ortaya konulmuştur [52]. Literatürdeki pek çok salınım kriteri, n değişkenli bir problemi tek değişkenli bir probleme dönüştüren ve böylece kısmi diferensiyel denklemleri adi diferensiyel denklemlere indirgeyen radyalleşme tekniklerine dayanmaktadır. Bu sayede, adi diferensiyel denklemler için geliştirilen bazı yöntem ve sonuç, kısmi diferensiyel denklemlere de uyarlanabilmiştir [53–55]. Toraev [56] ile Atakarryev ve Toraev [57], radyalleşme yöntemlerini kullanmak yerine doğrudan varyasyonel tekniklerle çalışarak, sınırsız bölgeler üzerinde salınım kriterleri geliştirmişlerdir. Varyasyonel tekniklerin yanı sıra, Riccati tipi dönüşüm ve Picone özdeşliği, karşılaştırma ve salınım teorisinde önemli araçlar arasında yer almaktadır [58–63].

$\omega_n=\int_{|u|=1}d\mathbf{S}$, $\mathbb{R}^n$'de birim yuvarın yüzey alanı olmak üzere

$$\widetilde{f}(r)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{|u|=r}f(u)\,d\mathbf{S}$$

fonksiyonu için Usami [64] tarafından

$$\int^{\infty}\frac{s^{n-1}\,|\sigma'(s)|^p}{(\sigma(s))^{p-1}}ds<\infty\,,\ \int^{\infty}\frac{ds}{\left(s^{n-1}\sigma(s)\right)^{\frac{1}{p-1}}}=\infty$$

ve

$$\int^{\infty} s^{n-1}\sigma(s)\tilde{f}(s)ds = \infty$$

şartlarını sağlayan C^1 sınıfından pozitif σ fonksiyonu varsa (2.8) kısmi diferensiyel denkleminin salınımlı olduğu gösterilmiştir.

Xu ve Xing [65] tarafından $u \geq \tau \geq u_0$ için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

$$\kappa \in C\left([u_0,\infty),\mathbb{R}\right),$$

$$\kappa_{\tau}^{\rho}(H;r) = \int_{\tau}^{r} H(r,s)\kappa(s)\rho(s)ds,$$

$$g(r) = \frac{p}{2}\left[\omega_N r^{N-1}\phi(r)\right]^{1-q} \text{ ve } \theta(r) = \omega_N r^{N-1}\tilde{f}(r)\phi(r) - \frac{1}{p}\left|\frac{\phi'(r)}{\phi(r)}\right|^{p}[g(r)]^{1-p}$$

olmak üzere

$$\lim_{u\to+\infty}\sup\frac{1}{H(u,u_0)}\kappa_{u_0}^{\rho}\left(\theta - \frac{1}{p}\left|h-\frac{\rho'}{\rho}\right|^{p} g^{1-p}\right) = \infty$$

şartı sağlanacak şekilde $\phi,\rho \in C^1\left([u_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$ fonksiyonları var ise (2.8) kısmi diferensiyel denkleminin salınımlı olduğu gösterilmiştir.

Eğer

$$\limsup_{s\to\infty}\frac{1}{\int_{\mathbf{S}(s_0)} H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\int_{\Omega(s_0,s)}\left[\rho(\tau)H(s,\tau)f(\tau) - \frac{\rho(\tau)\left\|\mathbf{h}(s,\tau)\right\|^{p}}{p^{p}H^{p-1}(s,\tau)}\right]d\tau = \infty$$

şartı sağlanacak şekilde $H \in \Re_1$ fonksiyonu varsa Marik [66, Teorem 2.1] tarafından (2.8) kısmi diferensiyel denkleminin salınımlı olduğu gösterilmiştir.

Marik [67, Sonuç 2.1, s. 13] tarafından $\Omega(1,u) = \{u \in \mathbb{R}^n : 1 \leq \|s\| \leq u\}$ olmak üzere

$$\lim_{u\to+\infty}\int_{\Omega(1,u)}\|s\|^{1-n} f(s)\,ds = \infty$$

şartının sağlanması durumunda (2.8) kısmi diferensiyel denkleminin salınımlı olacağını gösteren Leighton-Wintner-tipi salınım kriteri elde edilmiştir. Daha sonra Marik [67, Teorem 3.1, s. 15] tarafından

$$F_p(u) = \frac{p-1}{u^{p-1}} \int_1^u s^{p-2} \int_{\Omega(1,s)} \|\tau\|^{1-n} f(\tau)\, d\tau ds \text{ ve } F_0 = \lim_{u\to\infty} F_p(u)$$

olmak üzere

$$\lim_{u\to+\infty} \sup \frac{u^{p-1}}{\ln u} [F_0 - F_p(u)] > \left|\frac{p-n}{p}\right|^p \omega_n$$

şartının sağlanmasının (2.8) kısmi diferensiyel denkleminin salınımı için yeterli olacağı gösterilmiştir. $p = n$ ise (2.8) diferensiyel denkleminin salınımı için

$$\lim_{u\to+\infty} \sup u^{n-1} [F_0 - F_p(u)] = \infty$$

yeter koşulu elde edilmiştir. $\Omega(r_0) = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| \geq s\}$ olmak üzere $p \geq n$ ve $l > 1$ için

$$\int_{\Omega(r_0)} \left[f(s) - \frac{1}{p} \left(\frac{l}{p}\right)^{p-1} n^{\frac{p}{2}} \|g(s)\|^p \right] ds = \infty$$

şartı sağlanırsa

$$div\left(\|\nabla y\|^{p-2} \nabla y\right) + \left\langle g(u), \|\nabla y\|^{p-2} \nabla y \right\rangle + f(u)\, |y|^{p-2} y = 0$$

kısmi diferensiyel denkleminin salınımlı olduğunu gösteren Fite-tipi salınım kriteri Xu [68] tarafından elde edilmiştir. Literatürde (2.8) kısmi diferensiyel denkleminin salınım teorisiyle ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır [11, 55]. [59, 66, 67]'de ise Philos-tipi salınım için kısmi diferensiyel denklemlerde de çalışmalar yapılmıştır.

Tezde sırasıyla ikinci basamaktan lineer olmayan

$$\Phi_p^{'}(y^{'}) + f(u)\Phi_p(y) = 0$$

diferensiyel denkleminde $|y'|^{p-2}y'$ ve $|y|^{p-2}y$ yerine sırasıyla $\frac{|y'|^{p-2}y'}{(1+|y'|^p)^{\frac{p-1}{p}}}$ ve $\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}}$

alınarak elde edilen

$$\left(\frac{|y'|^{p-2}y'}{(1+|y'|^{p})^{\frac{p-1}{p}}}\right)' + f(u)\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^{p})^{\frac{p-1}{p}}} = 0$$

diferensiyel denklemi ve n çift tamsayı olmak üzere, lineer olmayan operatörleri içeren çift basamaktan $n \geq 2$ için

$$\Phi_p^{'}(y^{(n-1)}) + f(u)\Phi_p(y) = 0 \tag{2.9}$$

diferensiyel denkleminde $\left|y^{(n-1)}\right|^{p-2}y^{n-1}$ ve $|y|^{p-2}y$ yerine $\frac{\left|y^{(n-1)}\right|^{p-2}y^{(n-1)}}{\left(1+\left|y^{(n-1)}\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}}$ ve $\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^{p})^{\frac{p-1}{p}}}$ alınarak elde edilen

$$\left(\frac{\left|y^{(n-1)}\right|^{p-2}y^{(n-1)}}{\left(1+\left|y^{(n-1)}\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}}\right)' + f(u)\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^{p})^{\frac{p-1}{p}}} = 0$$

diferensiyel denklemi ve son olarak $u \geq u_0$ için

$$div\left(\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y\right) + f(u)|y|^{p-2}y = 0$$

yarı-lineer kısmi diferensiyel denkleminde $div\left(\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y\right)$ ve $|y|^{p-2}y$ yerine sırasıyla $div\left(\frac{\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y}{(1+\|\nabla y\|^{p})^{\frac{p-1}{p}}}\right)$ ve $\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^{p})^{\frac{p-1}{p}}}$ alınarak elde edilen

$$div\left(\frac{\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y}{(1+\|\nabla y\|^{p})^{\frac{p-1}{p}}}\right) + f(u)\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^{p})^{\frac{p-1}{p}}} = 0$$

kısmi diferensiyel denklemi için yeni salınım sonuçları elde edildi.

3. LiNEER OLMAYAN OPERATÖRLERi İÇEREN İKiNCi BASAMAKTAN DiFERENSiYEL DENKLEMLER iÇiN YENİ SALINIM TEORiSi

3.1. Giriş

$f(u)$, işaretinde herhangi bir kısıtlama olmayan ve $u_0 \geq 0$ için $I = [u_0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ aralığı üzerinde sürekli reel değerli bir fonksiyon, $p > 1$ ve $|y| < 1$ için $\varphi_{\mp}(y) = \frac{|y|^{p-2}y}{(1\mp|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}}$ olmak üzere $u \geq u_0$ için

$$\varphi'_{+}\left(y'\right) + f\left(u\right)\varphi_{-}\left(y\right) = 0 \tag{3.1}$$

ikinci basamaktan lineer olmayan adi diferensiyel denklemi göz önüne alınsın. Lineer olmayan (3.1) diferensiyel denkleminin y çözümüyle $U_y \geq u_0$ için $[U_y, +\infty)$ aralığı üzerinde (3.1) diferensiyel denklemini ve y, $\varphi_{+}(y') \in C^1([u_0, +\infty), \mathbb{R})$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon kastedilmektedir. Bu tezde $[U_y, +\infty)$ yarı-ekseni üzerindeki $u_1 \geq U_y$ için $\sup\{|y(u)| : u_1 \leq u < \infty\} > 0$ şartını sağlayan lineer olmayan (3.1) diferensiyel denkleminin çözümleri ele alınacaktır. Bu bölüm boyunca bu tür bir çözümün olduğu kabul edilecektir. (3.1) diferensiyel denkleminin bu tür bir çözümü, $y(u_2) = 0$ olacak şekilde $u_2 \geq u_1$ olan herhangi bir $u_1 \in [U_y, +\infty)$ için $[U_y, +\infty)$ aralığı üzerinde keyfi sayıda yeterince büyük sıfıra sahipse salınımlıdır denir.

p-öngörülen eğrilik fonksiyonu $y \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi_{+}(y) = \frac{|y|^{p-2}y}{(1+|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}} \tag{3.2}$$

ve q-relativistik fonksiyonu $| y | < 1$ için

$$\varphi_{-}(y) = \frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}} \tag{3.3}$$

olmak üzere (3.1) şeklindeki ikinci basamaktan lineer olmayan diferensiyel denklemin salınımıyla ilgili sonuçlar verilecektir.

Burada, (3.2) ve (3.3) fonksiyonlarında $p = 2$ alınırsa, bunların sırasıyla diferensiyel

geometri ve kısmi diferensiyel denklemlerde dikkat çeken öngörülen eğrilik ve relativistik fonksiyonları olduğu ortaya çıkar ve bu fonksiyonların birçok uygulaması yapılmıştır [12, 69].

3.2. Ana Sonuçlar

Philos-tipi ortalama integral koşulunu kullanarak (3.1) diferensiyel denklemi için bazı yeni salınım sonuçları vermeden önce ispatlarda kullanılacak olan önemli bir lemma verilmiştir.

3.2.1. Lemma ([22, Lemma 1])

$q > 1$, X ve Y negatif olmayan reel sayılar olsun. Böylece

$$X^q + (q-1)Y^q - qXY^{q-1} \geq 0 \tag{3.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter koşul $X = Y$ olmasıdır.

3.2.2. Teorem

(2.5) koşulu sağlansın. Eğer

$$\lim_{u\to+\infty} \sup \frac{1}{H(u,u_0)} \int_{u_0}^{u} \left[f(s) H(u,s) - \left(\frac{h(u,s)}{p} \right)^p \right] ds = +\infty \tag{3.5}$$

koşulu sağlanıyorsa (3.1) diferensiyel denkleminin herhangi bir $y(u)$ çözümü salınımlıdır.

İspat

$y(u)$, (3.1) diferensiyel denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun ve her $u \geq U_0$ için $y(u) > 0$ olacak şekilde $U_0 \geq u_0$ sayısı olsun. $u \geq U_0$ için $w(u) = \dfrac{\varphi_+(y'(u))}{\varphi_-(y(u))}$, olarak $w(u)$

fonksiyonunu tanımlansın. Bu durumda, (3.1) diferensiyel denkleminden

$$w' = -f(u) - \frac{\varphi_+(y')}{\varphi_-^2(y)}(p-1)y'\left[\frac{\varphi_-^2(y)}{(1-|y|^p)^{\frac{1}{p}}} + \frac{\varphi_-(y)}{y}\right]$$

ve

$$w' = -f(u) - (p-1)\frac{\dfrac{|y'|^p}{(1+|y'|^p)^{\frac{p-1}{p}}}}{(1-|y|^p)^{\frac{1}{p}}} - (p-1)\frac{\dfrac{|y'|^p}{(1+|y'|^p)^{\frac{p-1}{p}}}}{\dfrac{|y|^p}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}}}$$

elde edilir. $p>1$ ve $|y|<1$ için $\left(1+|y'|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq 1+|y'|^p$ ve $1-|y|^p \leq (1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}$ eşitsizlikleri sağlandığından $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere her $u \geq U_0$ için

$$w' \leq -f(u) - (p-1)\frac{\dfrac{|y'|^p}{1+|y'|^p}}{\dfrac{|y|^p}{1-|y|^p}}$$

ve

$$w' \leq -f(u) - \frac{|w|^q}{q-1} \tag{3.6}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (3.6) eşitsizliğinin her iki tarafı $H(u,s)$ ile çarpılıp u_0'dan u'ya integral alınırsa,

$$\int_{u_0}^{u} H(u,s)\,w'(s)\,ds \leq -\int_{u_0}^{u} f(s)\,H(u,s)\,ds - \frac{1}{q-1}\int_{u_0}^{u} H(u,s)\,|w(s)|^q\,ds \tag{3.7}$$

elde edilir.

$$\int_{u_0}^{u} H(u,s)\,w'(s)\,ds = -H(u,u_0)\,w(u_0) - \int_{u_0}^{u} H_s(u,s)\,w(s)\,ds$$

eşitliği sağlandığından (3.7) eşitsizliğinden

$$\int_{u_0}^{u} f(u) H(u,s)\, ds \leq H(u,u_0) w(u_0) + \int_{u_0}^{u} \left[h(u,s) H^{\frac{1}{q}}(u,s) |w(s)| - \frac{H(u,s)}{q-1} |w(s)|^q \right] ds \tag{3.8}$$

eşitsizliği bulunur. Lemma 3.2.1.'de

$$X = \left(\frac{H(u,s)}{q-1} \right)^{\frac{1}{q}} |w(s)| \text{ ve } Y = \left[(q-1)^{\frac{1}{q}} \frac{h(u,s)}{q} \right]^{\frac{1}{q-1}}$$

olarak seçilirse

$$h(u,s) H^{\frac{1}{q}}(u,s) |w(s)| - \frac{H(u,s)}{q-1} |w(s)|^q \leq \left(\frac{q-1}{q} h(u,s) \right)^{\frac{q}{q-1}} = \left(\frac{h(u,s)}{p} \right)^p$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, (3.8) eşitsizliğinden $u \geq U_0$ için

$$\frac{1}{H(u,u_0)} \int_{u_0}^{u} \left[f(s) H(u,s) - \left(\frac{h(u,s)}{p} \right)^p \right] ds \leq w(u_0) \tag{3.9}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.9) eşitsizliğinde $u \to \infty$ için limsup alınırsa (3.5) ile çelişki elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Bu teoremin önemini vurgulayan bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek

$u \geq u_0$ ve $|y(u)| < 1$ için ikinci basamaktan lineer olmayan

$$\left(\frac{y'}{\left(1 + |y'|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right)' + \frac{\cos u}{(1+\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}} \frac{y}{\left(1 - |y|^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 0 \tag{3.10}$$

diferensiyel denklemi göz önüne alınsın. $H(u,s) = (u-s)^2$ olarak alınırsa $h = 2$ olur.

Böylece

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{1}{(u-u_0)^2}\int_{u_0}^{u}\left[\frac{\cos s}{(1+\cos^2 s)^{\frac{3}{2}}}(u-s)^2-1\right]ds$$
$$\geq \limsup_{u\to\infty}\frac{1}{(u-u_0)^2}\int_{u_0}^{u}\left(\frac{(u-s)^2}{3^{\frac{3}{2}}}-1\right)ds=+\infty$$

elde edilir. Bu durumda, Teorem 3.2.2.'den, (3.10) diferensiyel denkleminin herhangi bir $y(u)$ çözümü salınımlıdır. Böyle bir çözüme örnek olarak $y(u)=\sin u$ fonksiyonu verilebilir.

Aşağıdaki iki sonuç, (3.5) şartının sağlanmasının zor olduğu durumlarda alternatif salınım kriterleridir.

3.2.3. Teorem

(2.5) koşulu sağlansın. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere her u_0 için

$$0<\inf_{s\geq u_0}\left[\liminf_{u\to+\infty}\frac{H(u,s)}{H(u,u_0)}\right]\leq+\infty \tag{3.11}$$

ve

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^{u}h^p(u,s)\,ds<+\infty \tag{3.12}$$

olsun. Her $U\geq u_0$ için $\Psi\in C([u_0,\infty),\mathbb{R})$ fonksiyonu, $\Psi_+(u)=maks\{\Psi(u),0\}$ ve

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,U)}\int_{U}^{u}\left[f(s)H(u,s)-\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^p\right]ds\geq\Psi(U) \tag{3.13}$$

olmak üzere

$$\int_{u_0}^{\infty}\Psi_+^q(s)\,ds=+\infty \tag{3.14}$$

olsun. Bu durumda, (3.1) diferensiyel denkleminin herhangi bir $y(u)$ çözümü salınımlıdır.

İspat

$u \geq u_0$ için $y(u) \neq 0$ olacak şekilde (3.1) diferensiyel denkleminin herhangi bir çözümü $y(u)$ olsun. $w(u)$ fonksiyonu Teorem 3.2.2.'nin ispatındaki gibi tanımlanırsa (3.8) ve (3.9) eşitsizlikleri sağlanır. Bu durumda, $u > U \geq u_0$ için

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{1}{H(u,U)} \int_U^u \left[f(s) H(u,s) - \left(\frac{h(u,s)}{p} \right)^p \right] ds \leq w(U)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, (3.13) koşulundan $U \geq u_0$ için

$$\Psi(U) \leq w(U) \tag{3.15}$$

ve

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{1}{H(u,u_0)} \int_{u_0}^u f(s) H(u,s)\, ds \geq \Psi(u_0) \tag{3.16}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Şimdi her $u > u_0$ için

$$F(u) = \frac{1}{H(u,u_0)} \int_{u_0}^u h(u,s) H^{\frac{1}{q}}(u,s) |w(s)|\, ds$$

ve

$$G(u) = \frac{1}{(q-1) H(u,u_0)} \int_{u_0}^u H(u,s) |w(s)|^q ds$$

fonksiyonları tanımlansın. Bu durumda (3.8) ve (3.16)'dan

$$\begin{aligned} \liminf_{u\to+\infty} |G(u) - F(u)| &\leq w(u_0) - \limsup_{u\to\infty} \frac{1}{H(u,u_0)} \int_{u_0}^u f(s) H(u,s)\, ds \\ &\leq w(u_0) - \Psi(u_0) < +\infty \end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edildiği görülür.

Şimdi

$$\int_{u_0}^{u} |w(s)|^q \, ds < +\infty \tag{3.18}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilsin. (3.18) eşitsizliğinin yanlış olduğunu varsayılırsa ξ,

$$\inf_{s \geq u_0} \left[\liminf_{u \to +\infty} \frac{H(u,s)}{H(u,u_0)} \right] > \xi > 0 \tag{3.19}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir pozitif sabit, μ keyfi bir pozitif sayı olmak üzere her $u \geq u_1$ için

$$\int_{u_0}^{u} |w(s)|^q \, ds > (q-1) \frac{\mu}{\xi} \tag{3.20}$$

olacak şekilde $u_1 > u_0$ vardır. Kısmi integrasyon ve (3.20) eşitsizliğinden her $u \geq u_1$ için

$$\begin{aligned} G(u) &= \frac{1}{(q-1)H(u,u_0)} \int_{u_0}^{u} H(u,s) \, d \left(\int_{u_0}^{s} |w(\tau)|^q \, d\tau \right) \\ &= -\frac{1}{(q-1)H(u,u_0)} \int_{u_0}^{u} H_s(u,s) \left(\int_{u_0}^{s} |w(\tau)|^q \, d\tau \right) ds \\ &\geq -\frac{1}{(q-1)H(u,u_0)} \int_{u_1}^{u} H_s(u,s) \left(\int_{u_0}^{u} |w(\tau)|^q \, d\tau \right) ds \\ &\geq -\frac{\mu}{\xi H(u,u_0)} \int_{u_1}^{u} H_s(u,s) \, du = \frac{\mu H(u,u_1)}{\xi H(u,u_0)} \end{aligned}$$

bulunur. (3.19) eşitsizliğinden her $u \geq u_2$ için $\frac{H(u,u_1)}{H(u,u_0)} \geq \xi$ olacak şekilde $u_2 \geq u_1$ vardır ve buna göre $u \geq u_2$ için $G(u) \geq \mu$ olur. μ sabit olduğundan $\lim_{u \to +\infty} G(u) = +\infty$ olur.

Şimdi, (u_0,∞) aralığında $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ ve

$$\lim_{n\to\infty}[G(u_n)-F(u_n)] = \liminf_{u\to\infty}[G(u)-F(u)] < \infty$$

şartını sağlayan $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ele alınsın. (3.17) eşitsizliğinden $n = 1,2,...$ için

$$G(u_n)-F(u_n) \le M \tag{3.21}$$

olacak şekilde M sayısı vardır. Ayrıca $\lim_{u\to+\infty} G(u) = +\infty$ olduğundan

$$\lim_{n\to+\infty} G(u_n) = +\infty \tag{3.22}$$

olduğu görülür. Böylece (3.21) eşitsizliğinden

$$\lim_{n\to+\infty} F(u_n) = +\infty \tag{3.23}$$

elde edilir. Böylece (3.21) ve (3.22)'den yeterince büyük n'ler için

$$1-\frac{F(u_n)}{G(u_n)} \le \frac{M}{G(u_n)} < \frac{1}{2}$$

bulunur. Buradan yeterince büyük n'ler için

$$\frac{F(u_n)}{G(u_n)} > \frac{1}{2} \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.23) ve (3.24) eşitliklerinden

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F^q(u_n)}{G(u_n)} = \infty$$

elde edilir. Diğer taraftan, Hölder eşitsizliğinden herhangi bir n doğal sayısı için

$$\begin{aligned} F^q(u_n) &= \left(\frac{1}{H(u_n,u_0)}\int_{u_0}^{u_n} h(u_n,s)H^{\frac{1}{q}}(u_n,s)\,w(s)\,ds\right)^q \\ &\le \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{H(u_n,u_0)}\int_{u_0}^{u_n} h^p(u_n,s)\,ds\right)^{q-1}\left(\frac{p-1}{H(u_n,u_0)}\int_{u_0}^{u_n} H(u_n,s)\,|w(s)|^q\,ds\right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{G(u_n)}{p-1}\left(\frac{1}{H(u_n,u_0)}\int_{u_0}^{u_n} h^p(u_n,s)\,ds\right)^{q-1}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece yeterince büyük n'ler için

$$\frac{F^q(u_n)}{G(u_n)} \leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{H(u_n,u_0)}\int_{u_0}^{u_n} h^p(u_n,s)\,ds\right)^{q-1}$$

elde edilir. Ancak, (3.19) eşitsizliğinden

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{H(u,u_1)}{H(u,u_0)} > \xi$$

bulunur. Böylece her $u \geq u_3$ için

$$\frac{H(u,u_1)}{H(u,u_0)} \geq \xi$$

sağlanacak şekilde $u_3 > u_0$ vardır. Buradan yeterince büyük n'ler için

$$\frac{H(u_n,u_1)}{H(u_n,u_0)} \geq \xi$$

olduğu görülür. Böylece

$$\frac{F^q(u_n)}{G(u_n)} \leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{\xi H(u_n,u_0)}\int_{u_0}^{u_n} h^p(u_n,s)\,ds\right)^{q-1}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten ise

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H(u_n,u_0)}\int_{u_0}^{u_n} h^p(u_n,s)\,ds = \infty \tag{3.25}$$

olur. Buradan

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^{u} h^p(u,s)\,ds = \infty \tag{3.26}$$

elde edilir. Böylece (3.26), (3.12) ile çelişir ve (3.18) sağlanır. Böylece (3.15) eşitsizliğinden

$$\int_{u_0}^{\infty} \Psi_+^q(s)\,ds \leq \int_{u_0}^{\infty} |w(s)^q|\,ds < \infty \tag{3.27}$$

elde edilir. (3.27) eşitsizliği ise (3.14) ile çelişir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3.'ün Teorem 3.2.2.'nin geçerli olmadığı bazı durumlarda uygulanabileceğini gözlemlenmektedir. Böyle bir durum aşağıdaki örnekte açıklanmıştır.

Örnek

$u \geq u_0$ ve $|y(u)| < 1$ için ikinci basamaktan lineer olmayan

$$\left(\frac{y'}{\left(1+|y'|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right)' + \frac{1}{u^3} \frac{y}{\left(1-|y|^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 0 \tag{3.28}$$

diferensiyel denklemi ele alınsın. $H(u,s)$ fonksiyonunu $H(u,s) = (u-s)^2$ olarak alınırsa $h(u,s) = 2$ olur ve

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{1}{H(u,u_0)} \int_{u_0}^{u} h^2(u,s)\,ds = \limsup_{u\to\infty} \frac{1}{(u-u_0)^2} \int_{u_0}^{u} 4ds = 0 < \infty$$

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{1}{H(u,U)} \int_{U}^{u} \left[f(s) H(u,s) - \left(\frac{h(u,s)}{p} \right)^p \right] ds$$

$$= \limsup_{u\to\infty} \frac{1}{(u-U)^2} \int_{U}^{u} \left[\frac{(u-s)^2}{s^3} - 1 \right] ds = \frac{1}{2U^2} = \Psi(U)$$

ve

$$\limsup_{u\to\infty} \int_{u_0}^{u} \Psi_+^{\frac{1}{2}}(s)\,ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \limsup_{u\to\infty} \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{s} = +\infty$$

olduğu kolayca görülür. Teorem 3.2.3.'ün koşulları sağlandığından (3.28) diferensiyel denkleminin herhangi bir $y(u)$ çözümü salınımlıdır. (3.5) koşulu sağlanmadığı için Teorem 3.2.2., (3.28) diferensiyel denklemine uygulanamaz.

3.2.4. Teorem

Teorem 3.2.3.'ün (3.12) koşulu hariç bütün koşulları sağlansın ve (3.12) koşulu yerine her u_0 için

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^{u}H(u,s)\,f(s)\,ds<\infty \tag{3.29}$$

koşulu sağlansın. Her $U\leq u_0$ için $[u_0,\infty)$ üzerinde

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,U)}\int_{U}^{u}\left[f(s)H(u,s)-\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^{p}\right]ds\geq\Psi(U)$$

koşulu sağlanacak şekilde Ψ fonksiyonu olsun. Bu durumda, (3.1) diferensiyel denkleminin herhangi bir $y(u)$ çözümü salınımlıdır.

İspat

Genelliği bozmaksızın bazı $U_0\geq u_0$'lar için (3.1) diferensiyel denkleminin $[u_0,\infty)$ aralığı üzerinde $y(u)>0$ olacak şekilde bir $y(u)$ çözümü olsun. Teorem 3.2.3.'den $u>U>U_0$ için (3.8) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}&\frac{1}{H(u,U)}\int_{U}^{u}\left[f(u)H(u,s)-\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^{p}\right]ds\\ \leq&w(U)+\frac{1}{H(u,U)}\int_{U}^{u}\left[h(u,s)\left[H(u,s)\right]^{\frac{1}{q}}w(s)-\frac{H(u,s)}{q-1}\left|w(s)\right|^{q}-\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^{p}\right]ds\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $U \geq U_0$ için

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,U)}\int_U^u\left[f(s)H(u,s)-\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^p\right]ds$$
$$\leq w(U)+\limsup_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,U)}\int_U^u\left[h(u,s)\left[H(u,s)\right]^{\frac{1}{q}}w(s)-(p-1)H(u,s)\left|w(s)\right|^q-\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^p\right]ds$$

elde edilir. (3.15) eşitsizliğinden $U \geq U_0$ için

$$w(U)\geq\Psi(U)-\limsup_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,U)}\int_U^u\left[h(u,s)\left[H(u,s)\right]^{\frac{1}{q}}w(s)-\frac{H(u,s)}{q-1}\left|w(s)\right|^q-\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^p\right]ds$$

bulunur. Böylece her $U \geq U_0$ için (3.15) eşitsizliğinden

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,U)}\int_U^u\left[-h(u,s)\left[H(u,s)\right]^{\frac{1}{q}}w(s)+\frac{H(u,s)}{q-1}\left|w(s)\right|^q+\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^p\right]ds \;<\; \infty$$

elde edilir. Buradan Teorem 3.2.3.'deki gibi tanımlanan $F(u)$ ve $G(u)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned}\limsup_{u\to\infty}\left(G(u)-F(u)\right) &= \limsup_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,U_0)}\int_{U_0}^u\left[-h(u,s)\left[H(u,s)\right]^{\frac{1}{q}}w(s)+\frac{H(u,s)}{q-1}\left|w(s)\right|^q\right]ds\\ &\leq \limsup_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,U_0)}\int_{U_0}^u\left[-h(u,s)\left[H(u,s)\right]^{\frac{1}{q}}w(s)+\frac{H(u,s)}{q-1}\left|w(s)\right|^q\right]ds\\ &+ \limsup_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,U_0)}\int_{U_0}^u\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^p ds\\ &< \infty \qquad (3.30)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.13) eşitsizliğinden

$$\Psi(u_0) \;\leq\; \liminf_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^u\left[H(u,s)f(s)-\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^p\right]ds$$

$$\leq \liminf_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^{u}H(u,s)f(s)ds-\left(\frac{1}{p}\right)^{p}\liminf_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^{u}h^{p}(u,s)\,ds \quad (3.31)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.29) ve (3.31) eşitsizliklerinden

$$\liminf_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^{u}h^{p}(u,s)\,ds<\infty$$

elde edilir. Bu durumda (u_0,∞) aralığında $\lim_{n\to\infty}u_n=\infty$ olan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{H(u_n,u_0)}\int_{u_0}^{u_n}h^{p}(u_n,s)\,ds=\liminf_{u\to\infty}\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^{u}h^{p}(u,s)\,ds<\infty \quad (3.32)$$

eşitsizliğini sağlayan $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır.

Şimdi $\int_{u_0}^{\infty}|w(s)|^{q}ds=\infty$ eşitliğinin sağlandığını varsayalım. Teorem 3.2.4.'ün ispatına benzer şekilde işlemlerle (3.22) elde edilir. (3.30) eşitsizliğinden (3.21) eşitsizliği sağlanacak şekilde bir M sayısı vardır. Böylece Teorem 3.2.4.'ün ispatındaki gibi ilerlenerek (3.25) elde edilir. Bu ise (3.32) eşitsizliği ile çelişir. Buradan $\int_{u_0}^{\infty}|w(s)|^{q}ds=\infty$'un sağlanmadığı görülür.

Şimdi λ, $\lambda>p-1$ olacak şekilde bir sabit olmak üzere $u\geq s\geq u_0$ için $H(u,s)$ fonksiyonu

$$H(u,s)=(u-s)^{\lambda}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $D=\{(u,s):u\geq s\geq u_0\}$ üzerinde tanımlı olan $H(u,s)$ fonksiyonu süreklidir ve $u\geq u_0$ için $H(u,u)=0$ ve $u>s\geq u_0$ için $H(u,s)>0$ özelliklerini sağlar.

$H(u,s)$ fonksiyonu ikinci değişkene göre $D_0=\{(u,s):u>s\geq u_0\}$ aralığı üzerinde

süreklidir ve pozitif olmayan kısmi türevi vardır. Ayrıca, $u > s \geq u_0$ için

$$h(u,s) = \lambda (u-s)^{\frac{\lambda}{p-1}}$$

fonksiyonu süreklidir ve her $(u,s) \in D_0$ için $-\frac{\partial H(u,s)}{\partial s} = h(u,s)H^{\frac{1}{q}}(u,s)$'yi sağlar. (3.11) ve (3.12) sağlandığından her $s \geq u_0$ için

$$\lim_{u\to\infty} \frac{H(u,s)}{H(u,u_0)} = \lim_{u\to\infty} \frac{(u-s)^{\lambda}}{(u-u_0)^{\lambda}} = 1$$

ve

$$\lim_{u\to\infty} u^{-\lambda} \int_{u_0}^{u} (u-s)^{\lambda-p} ds = \lim_{u\to\infty} \frac{u^{-\lambda}}{\lambda - p + 1} (u-u_0)^{\lambda-p+1} = 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

4. LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERİ İÇEREN YÜKSEK BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN YENİ SALINIM TEORİSİ

4.1. Giriş

Bu bölümde $n \geq 2$ çift tam sayı, $p > 1$ ve $|u| < 1$ olmak üzere $f(u) \in C([u_0, +\infty), \mathbb{R}^+)$, $\varphi_{\mp}(u) = \frac{|u|^{p-2}u}{(1\mp|u|^p)^{\frac{p-1}{p}}}$ olmak üzere n-inci basamaktan $u \geq u_0$ için

$$\varphi'_+\left(y^{(n-1)}\right) + f(u)\varphi_-(y) = 0 \tag{4.1}$$

lineer olmayan diferensiyel denklemler için salınım teorisi üzerine sonuçlar göz önüne alınacaktır. (4.1) diferensiyel denkleminin bir çözümüyle $[U_y, +\infty)$ aralığı üzerinde (4.1) diferensiyel denklemini ve $y \in C^{n-1}([U_y, +\infty), \mathbb{R})$, $\varphi_+\left(y^{(n-1)}\right) \in C^1([U_y, +\infty), \mathbb{R})$ şartlarını sağlayan bazı $U_y \geq u_0$ için $y \in C([U_y, +\infty), \mathbb{R})$ olan bir fonksiyon kastedilmektedir. Sadece herhangi bir $u_1 \geq U_y$ için $\sup\{|y(u)| : u_1 \leq u < +\infty\} > 0$ şartını sağlayan ve $[U_y, +\infty)$ yarı-ekseni üzerindeki (4.1) diferensiyel denkleminin çözümlerini ve ek olarak (4.1) diferensiyel denkleminin böyle çözümlerinin olduğu varsayılmaktadır. (4.1) diferensiyel denkleminin böyle bir çözümüyle $[U_y, +\infty)$ aralığı üzerinde yeterince büyük sıfırlara sahipse salınımlı, aksi halde salınımsız olarak adlandırılır yani sonuçta pozitif veya negatif olacaktır.

4.2. Ana Sonuçlar

Şimdi ana sonuçların ispatında kullanılacak bazı önemli lemmalar verilecektir.

4.2.1. Lemma ([70, Lemma 2.2.1, s. 168])

$y(u) \in C^n([u_0, +\infty), \mathbb{R}^+)$ olsun. Eğer $y^{(n)}(u)$, $u_1 > u_0$ olmak üzere yeterince büyük u için tek işaretli oluyorsa $[u_y, +\infty)$ üzerinde

$l \leq n-1$ ise $m = l, l+1, ..., n-1$ için $(-1)^{l+m} y^{(m)}(u) > 0$

ve

$l > 0$ ise $m = 0, 1, ..., l-1$ için $y^{(m)}(u) > 0$

olacak şekilde $y^{(n)}(u) \leq 0$ için $n+l$ tek veya $y^{(n)}(u) \geq 0$ için $n+l$ çift olmak üzere $0 \leq l \leq n$ için bir l tam sayısı ve $u_y \geq u_0$ vardır.

4.2.2. Lemma ([70, Lemma 2.2.3, s. 169])

$y(u)$, Lemma 4.2.1.'deki gibi tanımlansın. Eğer $\lim_{u\to\infty} y(u) \neq 0$ ise yeterince büyük u için ve $0 < \theta < 1$ olan θ için

$$y(u) > \frac{\theta u^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)}(u)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi, çift basamaktan lineer olmayan (4.1) diferensiyel denkleminin en az bir çözümünün salınımlılığı için Philos [21]'nin salınımlılık sonucuna benzer bir yeter koşul verilecektir.

4.2.3. Teorem

(2.5) koşulu sağlansın. Eğer,

$$\lim_{u\to+\infty} \sup \frac{1}{H(u,u_0)} \int_{u_0}^{u} \left[f(s) H(u,s) - \left(\frac{(n-1)!}{\theta s^{n-1}} \right)^{p-1} \left(\frac{h(u,s)}{p} \right)^{p} \right] ds = +\infty \tag{4.2}$$

ise (4.1) diferensiyel denkleminin herhangi bir $y(u)$ çözümü salınımlıdır.

İspat

(4.1) diferensiyel denklemi salınımlı olmayan bir $y(u)$ çözümüne sahip olsun. Genelliği bozmaksızın bazı $u_1 \geq u_0$'lar için $[u_1, +\infty)$ üzerinde $y(u) > 0$ olsun. $y(u)$ negatif olduğunda

ispat benzerdir. Bu durumda (4.1) diferensiyel denkleminden,

$$\left(\frac{\left|y^{(n-1)}(u)\right|^{p-2}y^{(n-1)}(u)}{\left(1+\left|y^{(n-1)}(u)\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}}\right)' \leq 0 \tag{4.3}$$

elde edilir. (4.3) eşitsizliğinden $\frac{\left|y^{(n-1)}(u)\right|^{p-2}y^{(n-1)}(u)}{\left(1+\left|y^{(n-1)}(u)\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}}$'nin azalan ve $y^{(n-1)}(u)$'nun tek işaretli olduğu görülür. Böylece $u \geq U \geq u_1$ için $y^{(n-1)}(u) > 0$ olduğu iddia edilmektedir. Aksi takdirde, p-öngörülen eğrilik fonksiyonu ve (4.3) eşitsizliğinden $u \geq U$ için $y^{(n-1)}(u) \leq 0$ ise $0 < K = \frac{\left|y^{(n-1)}(U)\right|^{p-2}y^{(n-1)}(U)}{\left(1+\left|y^{(n-1)}(U)\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}} < 1$ olmak üzere $\frac{\left|y^{(n-1)}(u)\right|^{p-2}y^{(n-1)}(u)}{\left(1+\left|y^{(n-1)}(u)\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}} \leq -K$ elde edilir. Bu durumda $\frac{\left(-y^{(n-1)}(u)\right)^{p-1}}{\left(1+\left(-y^{(n-1)}(u)\right)^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}} \geq K$, yani $-y^{(n-1)}(u) \geq \frac{K^{\frac{1}{p-1}}}{\left(1-K^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}}$ elde edilir. Sonuç olarak,

$$y^{(n-2)}(u) \leq y^{(n-2)}(U) - \int_U^u \frac{K^{\frac{1}{p-1}}}{\left(1-K^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}} ds \tag{4.4}$$

bulunur. (4.4) eşitsizliğinde $u \to +\infty$ için limit alınırsa $\lim_{u\to+\infty} y^{(n-2)}(u) = -\infty$ elde edilir. Böylece $y(u)$ fonksiyonu negatiftir. Bu ise $y(u) > 0$ ile çelişir. Sonuç olarak, $u \geq U$ için $y^{(n-1)}(u) > 0$ eşitsizliği elde edilir.

(4.1) diferensiyel denkleminden, $\left(\frac{\left|y^{(n-1)}(u)\right|^{p-2}y^{(n-1)}(u)}{\left(1+\left|y^{(n-1)}(u)\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}}\right)' = \frac{(p-1)\left(y^{(n-1)}(u)\right)^{p-2}y^{(n)}(u)}{\left(1+\left(y^{(n-1)}(u)\right)^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}+1}} \leq 0$ elde edilir. Bu ise $u \geq U \geq u_1$ için $y^{(n)}(u) \leq 0$ olduğu anlamına gelir. Lemma 4.2.1. ve $u \geq U \geq u_1$ için $y^{(n)}(u) \leq 0$ olduğundan ve n çift olduğundan l tektir ve böylece $u \geq U \geq u_1$ için $y'(u) > 0$ olur. Buradan, $u \geq u_2$ için $y'(u) > 0$, $y^{(n-1)}(u) > 0$ ve $y^{(n)}(u) \leq 0$ olacak şekilde $u_2 \geq u_1$ vardır.

Şimdi, $u \geq u_2$ için Riccati-tipi $R(u)$ değişkeni

$$R(u) = \frac{\varphi_+\left(y^{(n-1)}(u)\right)}{\varphi_-\left(y(u)\right)} \tag{4.5}$$

tanımlansın. Bu durumda $u \geq u_2$ için $R(u) > 0$ olur. (4.5)'de türev alınıp (4.1) diferensiyel

denklemi, Lemma 4.2.1. ve 4.2.2. kullanılarak

$$\begin{aligned} R' &= -f(u) - \frac{\varphi_+\left(y^{(n-1)}\right)}{\varphi_-^2(y)}(p-1)\,y'\left[\frac{\varphi_-^2(y)}{(1-|y|^p)^{\frac{1}{p}}} + \frac{\varphi_-(y)}{y}\right] \\ &\leq -f(u) - \frac{\varphi_+\left(y^{(n-1)}\right)y^{(n-1)}}{\varphi_-^2(y)}\frac{(p-1)\,\theta u^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{\varphi_-^2(y)}{(1-|y|^p)^{\frac{1}{p}}} + \frac{\varphi_-(y)}{y}\right] \end{aligned}$$

ve

$$R' \leq -f(u) - \frac{(p-1)\,\theta u^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\left|y^{(n-1)}\right|^p}{\left(1+\left|y^{(n-1)}\right|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}}\frac{}{(1-|y|^p)^{\frac{1}{p}}} - \frac{(p-1)\,\theta u^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\left|y^{(n-1)}\right|^p}{\left(1+\left|y^{(n-1)}\right|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}}\frac{}{\frac{|y|^p}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}}}$$

elde edilir. $p>1$ ve $|y|<1$ için $\left(1+\left|y^{(n-1)}\right|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq 1+\left|y^{(n-1)}\right|^p$, $1-|y|^p \leq (1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}$ eşitsizlikleri sağlandığından her $u \geq u_2$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için

$$R' \leq -f(u) - \frac{(p-1)\,\theta u^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\frac{\left|y^{(n-1)}\right|^p}{1+\left|y^{(n-1)}\right|^p}}{\frac{|y|^p}{1-|y|^p}}$$

ve

$$R' \leq -f(u) - \frac{\theta}{(n-1)!\,(q-1)}u^{n-1}\,|R|^q \tag{4.6}$$

Riccati-tipi eşitsizlik elde edilir. (4.6) eşitsizliğinin her iki tarafı $H(u,s)$ ile çarpılıp, u_0'dan u'ya, s'ye göre integral alınırsa,

$$\int_{u_0}^{u} H(u,s)\,R'(s)\,ds \leq -\int_{u_0}^{u} f(s)\,H(u,s)\,ds - \frac{\theta}{(n-1)!\,(q-1)}\int_{u_0}^{u} H(u,s)\,s^{n-1}\,|R(s)|^q\,ds \tag{4.7}$$

elde edilir. Kısmi integrasyondan

$$\int_{u_0}^{u} H(u,s)R'(s)\,ds = -H(u,u_0)R(u_0) - \int_{u_0}^{u} H_s(u,s)R(s)\,ds \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.7) eşitsizliğinde (4.8) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\int_{u_0}^{u} f(s)H(u,s)\,ds \leq & H(u,u_0)R(u_0) \\ & + \int_{u_0}^{u}\left[h(u,s)H^{\frac{1}{q}}(u,s)|R(s)| - \frac{\theta s^{n-1}H(u,s)}{(n-1)!(q-1)}|R(s)|^q\right]ds\end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitsizliği bulunur. (3.4) eşitsizliğinde

$$X = \left(\frac{\theta s^{n-1}H(u,s)}{(n-1)!(q-1)}\right)^{\frac{1}{q}}|R(s)| \text{ ve } Y = \left[\left(\frac{(n-1)!(q-1)}{\theta s^{n-1}}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{h(u,s)}{q}\right]^{\frac{1}{q-1}}$$

olarak seçilirse Lemma 3.2.1.'den

$$\begin{aligned}h(u,s)H^{\frac{1}{q}}(u,s)|R(s)| - \frac{\theta s^{n-1}H(u,s)}{(n-1)!(q-1)}|R(s)|^q &\leq \left(\frac{(n-1)!}{\theta s^{n-1}}\right)^{\frac{1}{q-1}}\left(\frac{q-1}{q}h(u,s)\right)^{\frac{q}{q-1}} \\ &= \left(\frac{(n-1)!}{\theta s^{n-1}}\right)^{p-1}\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^{p}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle, (4.9) eşitsizliğinden $u \geq u_2$ için

$$\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^{u}\left[f(s)H(u,s) - \left(\frac{(n-1)!}{\theta s^{n-1}}\right)^{p-1}\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^{p}\right]ds \leq R(u_0) \tag{4.10}$$

eşitsizliği elde edilir. $u \to +\infty$ iken (4.10) eşitsizliğinde üst limit alınırsa çelişki elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. Sonuç olarak, (4.1) diferensiyel denkleminin herhangi bir $y(u)$ çözümü salınımlıdır.

Yukarıdaki teoreme örnek olması açısından salınımlı bir çözümü içeren bir örnek verilecektir.

Örnek

$u \geq u_0$ ve $p > 1$ için $n \geq 2$ çift tamsayı olmak üzere yüksek basamaktan lineer olmayan

$$\left(\frac{\left|y^{(n-1)}\right|^{p-2} y^{(n-1)}}{\left(1+\left|y^{(n-1)}\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}} \right)' + \frac{\sin u}{\left(1+\sin^2 u\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{|y|^{p-2} y}{\left(1-|y|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}} = 0 \tag{4.11}$$

diferensiyel denklemi ele alınsın. $H(u,s) = (u-s)^2$ seçilirse, $h(u,s) = 2$ elde edilir ve

$$\begin{aligned} &\limsup_{u\to+\infty} \frac{1}{(u-u_0)^2} \int_{u_0}^{u} \left[(u-s)^2 \frac{\sin s}{\left(1+\sin^2 s\right)^{\frac{3}{2}}} - \left(\frac{(n-1)!}{\theta s^{n-1}} \right)^{p-1} \left(\frac{2}{p} \right)^{p} \right] ds \\ \geq &\limsup_{u\to+\infty} \frac{1}{(u-u_0)^2} \int_{u_0}^{u} \left[\frac{(u-s)^2}{3^{\frac{3}{2}}} - \left(\frac{(n-1)!}{\theta s^{n-1}} \right)^{p-1} \left(\frac{2}{p} \right)^{p} \right] ds = +\infty \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece Teorem 4.2.3.'ten (4.11) diferensiyel denkleminin herhangi bir $y(u)$ çözümünün salınımlı olduğu görülür. Özel olarak, $y(u) = \cos u$'nun $p = 2$ ve $n = 4k+2$, $k \in \mathbb{Z}$ için (4.11) diferensiyel denkleminin salınımlı bir çözümü olduğu görülür.

Teorem 4.2.3.'teki (4.2) varsayımının sağlanmadığı durumlar olabilir. Sonuç olarak, Teorem 4.2.3. uygulanamaz. Aşağıdaki sonuçlar (4.1) diferensiyel denklemi için yeni salınım kriterleri sağlamaktadır.

4.2.4. Teorem

(2.5) şartı sağlansın. Her u_0 için

$$0 < \inf_{s\geq u_0} \left[\liminf_{u\to+\infty} \frac{H(u,s)}{H(u,u_0)} \right] \leq +\infty$$

ve

$$\limsup_{u\to+\infty} \frac{1}{H(u,u_0)} \int_{u_0}^{u} \frac{h^p(u,s)}{s^{(n-1)(p-1)}} ds < +\infty \tag{4.12}$$

olsun. $\Upsilon_{+}(u) = maks\{\Upsilon(u), 0\}$ olmak üzere her $U \geq u_0$ için

$$\limsup_{u\to+\infty} \frac{1}{H(u,U)} \int_{U}^{u} \left[f(s) H(u,s) - \left(\frac{(n-1)!}{\theta s^{n-1}} \right)^{p-1} \left(\frac{h(u,s)}{h} \right)^{p} \right] ds \geq \Upsilon(U) \tag{4.13}$$

ve

$$\int_{u_0}^{+\infty} s^{(n-1)(p-1)} \Upsilon_{+}^{\frac{p}{p-1}}(s)\, ds = +\infty$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $\Upsilon \in C([u_0, +\infty), \mathbb{R})$ var olsun. Bu durumda (4.1) diferensiyel denkleminin herhangi bir $y(u)$ çözümü salınımlıdır.

İspat

(4.1) diferensiyel denkleminin $u \geq u_0$ için $y(u) \neq 0$ olacak şekilde herhangi bir $y(u)$ çözümü olsun. $R(u)$ fonksiyonu Teorem 4.2.3.'ün ispatındaki gibi tanımlanırsa, (4.9) ve (4.10) elde edilir. Bu durumda, $u > U \geq u_0$ için

$$\limsup_{u\to+\infty} \frac{1}{H(u,U)} \int_{U}^{u} \left[f(s) H(u,s) - \left(\frac{(n-1)!}{\theta s^{n-1}} \right)^{p-1} \left(\frac{h(u,s)}{p} \right)^{p} \right] ds \leq R(U)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (4.13) koşulundan $U \geq u_0$ için

$$\Upsilon(u) \leq R(U)$$

ve

$$\limsup_{u\to+\infty} \frac{1}{H(u,u_0)} \int_{u_0}^{u} f(s) H(u,s)\, ds \geq \Upsilon(u_0) \tag{4.14}$$

elde edilir.

Şimdi,

$$F(u)=\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^{u}h(u,s)H^{\frac{1}{q}}(u,s)\,|R(s)|\,ds \tag{4.15}$$

ve

$$G(u)=\frac{\theta}{(n-1)!\,(q-1)\,H(u,u_0)}\int_{u_0}^{u}s^{n-1}H(u,s)\,|R(s)|^{q}\,ds \tag{4.16}$$

fonksiyonları tanımlansın. Bu durumda, (4.9) ve (4.14) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}\liminf_{u\to+\infty}|G(u)-F(u)| \leq & R(u_0)-\limsup_{u\to+\infty}\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^{u}f(s)H(u,s)\,ds\\ \leq & R(u_0)-\Upsilon(u_0)<+\infty\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi

$$\int_{u_0}^{u}s^{n-1}\,|R(s)|^{q}\,ds<+\infty \tag{4.17}$$

eşitsizliği ispatlanacaktır. (4.17) eşitsizliğinin sağlanmadığını varsayarsak, μ keyfi bir pozitif sayı ve ξ,

$$\inf_{s\geq u_0}\left[\liminf_{u\to+\infty}\frac{H(u,s)}{H(u,u_0)}\right]>\xi>0 \tag{4.18}$$

olacak şekilde bir pozitif sabit olmak üzere her $u\geq u_1$ için

$$\int_{u_0}^{u}s^{n-1}\,|R(s)|^{q}\,ds>\frac{(n-1)!\,(q-1)}{\theta}\frac{\mu}{\xi} \tag{4.19}$$

olacak şekilde $u_1 > u_0$ vardır. Kısmi integrasyon kuralı ve (4.19) kullanılarak her $u \geq u_1$ için

$$\begin{aligned} G(u) =& \frac{\theta}{(n-1)!\,(q-1)\,H(u,u_0)} \int_{u_0}^{u} H(u,s)\, d\left(\int_{u_0}^{s} \tau^{n-1} |R(\tau)|^q \, d\tau \right) \\ =& -\frac{\theta}{(n-1)!\,(q-1)\,H(u,u_0)} \int_{u_0}^{u} H_s(u,s) \int_{u_0}^{s} \tau^{n-1} |R(\tau)|^q \, d\tau ds \\ \geq& -\frac{\theta}{(n-1)!\,(q-1)\,H(u,u_0)} \int_{u_1}^{u} H_s(u,s) \int_{u_0}^{s} \tau^{n-1} |R(\tau)|^q \, d\tau ds \\ \geq& -\frac{\mu}{\xi H(u,u_0)} \int_{u_1}^{u} H_s(u,s)\, ds = \frac{\mu H(u,u_1)}{\xi H(u,u_0)} \end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.18) eşitsizliğinden her $u \geq u_2$ için $G(u) \geq \mu$ ve her $u \geq u_2$ için $\frac{H(u,u_1)}{H(u,u_0)} \geq \xi$ olacak şekilde bir $u_2 \geq u_1$ vardır. μ keyfi olduğundan $\lim_{u\to+\infty} G(u) = +\infty$ elde edilir.

İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.2.3.'ün ispatına benzerdir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.4.'ün uygulanabildiği ancak Teorem 4.2.3.'ün uygulanamadığı bazı durumlar olabilir. Böyle bir durum aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örnek

$u \geq u_0$ ve $1 < p < 2$ için $n \geq 2$ çift tamsayı olmak üzere yüksek basamaktan lineer olmayan

$$\left(\frac{\left| y^{(n-1)} \right|^{p-2} y^{(n-1)}}{\left(1 + \left| y^{(n-1)} \right|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}} \right)' + \frac{1}{u^3} \frac{|y|^{p-2} y}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}} = 0 \tag{4.21}$$

diferensiyel denklemi ele alınsın. Eğer H fonksiyonu $H(u,s) = (u-s)^2$ olarak seçilirse $h(u,s) = 2$ elde edilir ve

$$\limsup_{u\to+\infty} \frac{1}{H(u,u_0)} \int_{u_0}^{u} \frac{h^p(u,s)}{s^{(n-1)(p-1)}} ds = \limsup_{u\to+\infty} \frac{1}{(u-u_0)^2} \int_{u_0}^{u} \frac{2^p}{s^{(n-1)(p-1)}} ds = 0 < +\infty \tag{4.22}$$

$$\limsup_{u\to+\infty}\frac{1}{H(u,U)}\int_U^u\left[f(s)H(u,s)-\left(\frac{(n-1)!}{\theta s^{n-1}}\right)^{p-1}\left(\frac{h(u,s)}{p}\right)^p\right]ds$$

$$=\limsup_{u\to+\infty}\frac{1}{(u-U)^2}\int_U^u\left[\frac{(u-s)^2}{s^3}-\left(\frac{(n-1)!}{\theta s^{n-1}}\right)^{p-1}\left(\frac{2}{p}\right)^p\right]ds=\frac{1}{2U^2}=\Upsilon(U) \tag{4.23}$$

ve

$$\limsup_{u\to+\infty}\int_{u_0}^u\Upsilon_+^{\frac{p-1}{p}}(s)\,ds=\frac{1}{2^{\frac{p-1}{p}}}\limsup_{u\to+\infty}\int_{u_0}^u\frac{ds}{s^{\frac{2(p-1)}{p}}}=+\infty \tag{4.24}$$

eşitsizliklerinin sağlandığı kolayca görülür. Teorem 4.2.4.'ün koşulları sağlandığı için (4.21) diferensiyel denkleminin herhangi bir $y(u)$ çözümü salınımlıdır. Burada (4.2) koşulu sağlanmadığı için Teorem 4.2.3.'ün (4.21) diferensiyel denklemine uygulanamayacağına dikkat edilmelidir.

Aşağıdaki sonucun ispatı Teorem 4.2.4.'e benzerdir. Dolayısıyla ispatına yer verilmeyecektir.

4.2.5. Teorem

Teorem 4.2.4.'ün bütün koşulları (4.12) dışında sağlansın ve (4.12) koşulunu

$$\limsup_{u\to+\infty}\frac{1}{H(u,u_0)}\int_{u_0}^u f(s)H(u,s)\,ds<+\infty \tag{4.25}$$

koşulu ile değiştirilirse (4.1) diferensiyel denkleminin herhangi bir $y(u)$ çözümü salınımlı olur.

5. LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERİ İÇEREN KISMİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN KAMENEV-TİPİ YENİ SALINIM TEORİSİ

5.1. Giriş

Bu bölümde; $|y|<1$; $p>1$; $f(u)$, $\Omega(a)=\{u\in\mathbb{R}^n : a\leq\|u\|\}$ üzerinde Hölder sürekli fonksiyon; $\|\cdot\|$, $\mathbb{R}^n$'de Öklid normu; $\frac{|.|^{p-2}(.)}{(1+|.|^p)^{\frac{p-1}{p}}}$, p-öngörülen eğrilik operatörü ve $\frac{|.|^{p-2}(.)}{(1-|.|^p)^{\frac{p-1}{p}}}$, p-relativistik operatörü olmak üzere (2.8) kısmi diferensiyel denkleminde $div\left(\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y\right)$ ve $|y|^{p-2}y$ yerine sırasıyla $div\left(\frac{\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y}{(1+\|\nabla y\|^p)^{\frac{p-1}{p}}}\right)$ ve $\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}}$ alınarak $u\geq u_0$ için

$$div\left(\frac{\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y}{(1+\|\nabla y\|^p)^{\frac{p-1}{p}}}\right)+f(u)\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}}=0 \tag{5.1}$$

lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi için yeni salınım sonuçları elde edilmiştir. (5.1) kısmi diferensiyel denkleminin bir çözümüyle Ω üzerinde (5.1) kısmi diferensiyel denklemini sağlayan ve ayrıca $\frac{\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y}{(1+\|\nabla y\|^p)^{\frac{p-1}{p}}}$ diferensiyellenebilir olacak şekilde y fonksiyonu kastedilmektedir. Ω, $\mathbb{R}^n$'de sınırsız bir küme olsun. $y:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, her $u\geq u_0$ için $\Omega\cap\Omega(u)$ üzerinde keyfi sayıda yeterince büyük sıfıra sahipse salınımlıdır denir. Diğer yandan, (5.1) kısmi diferensiyel denklemi $\mathbb{R}^n$'de en az bir salınımlı çözümüme sahipse salınımlıdır denir.

Ayrıca (2.4)'de $p=2$ ise (2.1) diferensiyel denklemi, (2.9)'de $n=1$ ise

$$\left(\left|y'\right|^{p-2}y'\right)'+f(u)|y|^{p-2}y=0 \tag{5.2}$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Şimdiye kadar, böyle bir kısmi diferensiyel denklemin salınım problemi daha önce çalışılmamıştır. Bu durum bizi (5.1) lineer olmayan kısmi diferensiyel denkleminin salınımını çalışmak için motive etmiştir. Böylece, Marik [66]'den ilham alınarak (5.1) kısmi diferensiyel denkleminin salınımı için yeni sonuçlar elde edilmiştir. (5.2) diferensiyel denklemindeki p-Laplace operarötürün tersi $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere q-Laplace operatörü $|y|^{q-2}y$'dir. Benzer şekilde, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ için $\frac{|y|^{p-2}y}{(1+|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}}$

fonksiyonunun tersi $\frac{|y|^{q-2}y}{(1-|y|^q)^{\frac{q-1}{q}}}$'dur. Diğer taraftan, öngörülen eğrilik ve relativistik fonksiyonu olan denklemlerin fizikte ve biyolojide çeşitli uygulamaları bulunmaktadır [12, 69, 71–77].

(5.2) yarı-lineer adi diferensiyel denklemi, (2.8) yarı-lineer kısmi diferensiyel denklemi ile yakından ilişkilidir. Eğer $y(u)$, radyal simetrik fonksiyonsa yani, $y(u) = v(r)$ ve $r = \|u\|$ ($y(u) = v(\|u\|)$) oluyorsa bu durumda p-Laplace (kısmi) fonksiyon $div\left(\|\bigtriangledown y\|^{p-2} \bigtriangledown y\right)$, p-Laplace (adi) fonksiyon $r^{1-n}\left(r^{n-1}\left|v'(r)\right|^{p-2}v'(r)\right)$'ye indirgenir. Şimdi benzer bir durum verilecektir. $p > 1$ için $div\left(\frac{\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y}{(1+\|\nabla y\|^p)^{\frac{p-1}{p}}}\right)$ formunun p-öngörülen eğrilik (kısmi) fonksiyonu göz önüne alınsın. Eğer y radyal simetrik fonksiyonsa yani, $y(u) = v(r)$ ve $r = \|u\|$ oluyorsa, p-öngörülen eğrilik (kısmi) operatörü $p > 1$ için p-öngörülen eğrilik (adi) fonksiyonu $r^{1-n}\left(r^{n-1}\frac{|v'(r)|^{p-2}v'(r)}{(1+|v'(r)|^p)^{\frac{p-1}{p}}}\right)'$ ye indirgenir. Böylece, (2.8) ve (5.1) denklemleri radyal olarak simetrik formda yazılabilir. Sonuç olarak, lineer olmayan kısmi diferensiyel (2.8) ve (5.1) diferensiyel denklemleri $\mathbf{S}(r) = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = r\}$ ve ω_n, $\mathbb{R}^n$'de birim yuvarın yüzeyi olmak üzere

$$\widetilde{f}(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\mathbf{S}(r)} f(\tau)\, d\mathbf{S}$$

için sırasıyla

$$\left(r^{n-1}\left|v'(r)\right|^{p-2}v'(r)\right)' + r^{n-1}\widetilde{f}(r)\left|v(r)\right|^{p-2}v(r) = 0 \tag{5.3}$$

ve

$$\left(r^{n-1}\frac{|v'(r)|^{p-2}v'(r)}{(1+|v'(r)|^p)^{\frac{p-1}{p}}}\right)' + r^{n-1}\widetilde{f}(r)\frac{|v(r)|^{p-2}v(r)}{(1-|v(r)|^p)^{\frac{p-1}{p}}} = 0 \tag{5.4}$$

diferensiyel denklemlerine indirgenir. (5.4) ve (5.3) diferensiyel denklemleri sırasıyla lineer olmayan

$$\left(\frac{|y'|^{p-2}y'}{(1+|y'|^p)^{\frac{p-1}{p}}}\right)' + f(u)\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}} = 0$$

ve (5.2) adi diferensiyel denklemlerine dönüşür.

Diğer taraftan, Riccati-tipi diferensiyel vektör değişkeni $\mathbf{w} = \rho \frac{\frac{\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y}{(1+\|\nabla y\|^p)^{\frac{p-1}{p}}}}{\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}}}$ olmak üzere varyasyonel ve Riccati teknikleri arasında bir ilişki veren Picone-tipi özdeşlik

$$\frac{\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y}{(1+\|\nabla y\|^p)^{\frac{p-1}{p}}} - (1-|y|^p)^{\frac{1}{p}} f(u) = div\left((1-|y|^p)^{\frac{1}{p}}\mathbf{w}(u)\right)$$

$$+p\left[\frac{\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y}{(1+\|\nabla y\|^p)^{\frac{p-1}{p}}} + \frac{1}{p}\left\langle \nabla y, \mathbf{w}(u)\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}}\right\rangle + (1-|y|^p)^{\frac{1}{p}}\frac{\|\mathbf{w}(u)\|^q}{q}\right]$$

şeklindedir [59]. Böylece, radyalleşme metodu kullanılarak lineer olmayan (hem adi hem kısmi) diferensiyel denklemler için yeni salınım kriterleri elde edilmesini sağlayan genel salınım sonuçları türetilebilir (bkz. Teorem 5.1.2.). Bu bölümde, (5.1) diferensiyel denkleminin pozitif çözümlerinin var olmama durumu için yeter koşulları ve dolayısıyla (5.1) diferensiyel denkleminin salınım kriterlerini kullanacak olan Riccati-tipi eşitsizliği elde etmek için Riccati-tipi vektör değişken $\mathbf{w}(u)$ kullanılacaktır. (2.1) diferensiyel denklemi için Riccati tekniği kısaca aşağıdaki gibidir: Eğer (2.1), $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $I = [a,b]$ aralığı üzerinde pozitif bir y çözümüne sahipse, $w = y'/y$ fonksiyonu I aralığı üzerinde tanımlı $w' + w^2 + f(u) = 0$ Riccati diferensiyel denkleminin bir çözümüdür. Tersine, eğer $w' + w^2 + f(u) \leq 0$ Riccati eşitsizliğinin I aralığı üzerinde tanımlı bir w çözümü varsa, (2.1) diferensiyel denkleminin I aralığı üzerinde pozitif bir çözümü vardır.

Şimdi ana sonuçlarda kullanılacak bazı tanım ve notasyonlar verilsin. $\Omega(a)$, $\Omega(a,b)$, $\Omega_{0,s}(a,b)$, $S(a)$, $S_{0,s}(a)$, D ve D_0, $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$'de

$$
\begin{aligned}
\Omega(a) &= \{u \in \mathbb{R}^n : a \leq \|u\|\},\\
\Omega(a,b) &= \{u \in \mathbb{R}^n : a \leq \|u\| \leq b\},\\
\Omega_{0,s}(a,b) &= \{u \in \mathbb{R}^n : a \leq \|u\| \leq b, H(s,u) \neq 0\},\\
\mathbf{S}(a) &= \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = a\},\\
\mathbf{S}_{0,s}(a) &= \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = a, H(s,u) \neq 0\},\\
D &= \{(s,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : s \geq \|u\| \geq s_0\},\\
D_0 &= \{(s,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : s > \|u\| \geq s_0\}.
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı kümeler olsun. Buradaki $H(s,u)$ fonksiyonu literatürde iyi bilinen ve ana sonuçların ispatında kullanılacak Philos [21] tarafından verilen bir fonksiyondur. Bu fonksiyon ilk olarak ikinci basamaktan lineer Sturm-Liouville diferensiyel denklemi için salınım kriteri elde etmek amacıyla tanımlanmıştır. Bu çalışmada ise Marik'in çalışmasından esinlenilerek $\Re_1$ ve $\Re_2$ sınıfından fonksiyonlar tanımlanmıştır [66].

D_0 üzerinde $i = 1,2,...,n$ için u_i'ye göre sürekli kısmi türevleri var ve aşağıdaki h_{11}-h_{13} sağlanacak şekilde $H(s,u) \in C(D,[0,\infty))$ fonksiyonu ve $\rho(u) \in C^1(\Omega(s_0),(0,\infty))$ fonksiyonları var ise $H(s,u)$ fonksiyonunun $\Re_1$ sınıfından olduğu söylenir ve $H \in \Re_1$ ile gösterilir. Ayrıca, aşağıdaki h_{21}-h_{24} şartlarını sağlaması durumunda ise $H \in \Re_2$'dir.

(h_{11}) $H(s,u) = 0$ ancak ve ancak $s = \|u\|$.

(h_{12}) Her $s \geq z \geq s_0$ için z'ye göre azalmayan $e(s,z) = m(z)\int_{\mathbf{S}(z)} H(s,\tau)\,d\mathbf{S}$ olacak şekilde $m(z) \in C^1([s_0,\infty),(0,\infty))$ fonksiyonu vardır.

(h_{13}) $\nabla H(s,u) = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, ..., \frac{\partial}{\partial u_n}\right) H(s,u)$ olmak üzere D_0 üzerinde tanımlanan vektör değerli

$$\mathbf{h}(s,u) = \nabla H(s,u) + \frac{H(s,u)}{\rho(u)} \nabla \rho(u) \tag{5.5}$$

fonksiyonu $s \geq s_0$ için

$$\int_{\Omega(s_0,s)} \rho(\tau) \frac{\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{H^{p-1}(s,\tau)} d\tau < \infty \tag{5.6}$$

şartını sağlar.

(h_{21}) $\|u\| = s \geq s_0$ ise $H(s,u) = 0$.

(h_{22}) Bazı $(s,u) \in D_0$ için $H(s,u) = 0$ ise $\|\nabla H(s,u)\| = 0$.

(h_{23}) Her $s \geq z \geq s_0$ için z'ye göre azalmayan ve pozitif olan $e(s,z) = m(z) \int_{\mathbf{S}(z)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S} = m(z) \int_{\mathbf{S}_{0,s}(z)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}$ olacak şekilde $m(z) \in C([s_0,\infty),(0,\infty))$ fonksiyonu vardır.

(h_{24}) D_0 üzerinde (5.5) ile tanımlı vektör değerli $\mathbf{h}(s,u)$ fonksiyonu $s \geq s_0$ için

$$\int_{\Omega_{0,s}(s_0,s)} \rho(\tau) \frac{\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{H^{p-1}(s,\tau)} d\tau < \infty$$

şartını sağlar.

$\Re_2$ sınıfı, $\Re_1$ sınıfının bir varyantıdır. $\Re_1$ sınıfının aksine, $H(s,u)$ fonksiyonu $s \geq \|u\| \geq s_0$ için pozitif olmak zorunda değildir ve sıfır değerlerine ulaşabilir. Bu, $f(u)$'nun "kötü kısımlarının" çıkarılmasına olanak tanır. $\Omega_{0,s}(a,b)$ ve $\mathbf{S}_{0,s}(a)$ gösterimleri, $H(s,u)$ fonksiyonunun sıfıra eşit olduğu $\Omega(a,b)$ ve $\mathbf{S}(a)$ kümelerinin parçalarını integral alanından hariç tutulmasını sağlar.

Uyarı

(h_{23}) koşulu, $\mathbf{S}_{0,s}(z)$ kümesinin $s > z > s_0$'ı sağlayan her s için boş olmadığını iddia eder. Dolayısıyla $H(s,u)$ fonksiyonunun orijin merkezli her yuvarda pozitif değerli kısımları vardır.

Uyarı

(5.6) koşulunun sağlanması durumunda $s > z > s_0$ için

$$g(s,z) = \int_{\mathbf{S}_{0,s}(z)} \rho(\tau) \frac{\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{H^{p-1}(s,\tau)} d\mathbf{S}$$

olarak tanımlanan $g(s,z)$ fonksiyonu (s_0,s) aralığında z'ye göre integrallenebilirdir ($\|u\| = s$ için $H(s,u) = 0$ olduğundan s noktası integralin singüler noktası olabilir).

q sayısı p'nin eşlenik sayısıdır, yani $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$'dir. $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathbb{R}^n$'de normal skaler çarpımı belirtir ve ω_n, $\mathbb{R}^n$'deki birim kürenin yüzeyidir. $\Omega(a,b)$ üzerindeki integral, hiperküresel (r,θ) ile ifade edilir. Yani, $d\mathbf{S}$, $\mathbf{S}(r)$ küresinin yüzey elementi olmak üzere

$$\int_{\Omega(a,b)} f(\tau)\, d\tau = \int_a^b \int_{\mathbf{S}(r)} f(\tau(r,\theta))\, d\mathbf{S} dr \tag{5.7}$$

ile ifade edilir.

Şimdi, ikinci basamaktan yarı-lineer kısmi diferensiyel denklemler alanında önemli olan bir teorem verilecektir.

5.1.1. Teorem ([78, Teorem 2.2])

$$F_p(u) = \frac{p-1}{u^{p-1}} \int_1^u s^{p-2} \int_{\Omega(1,s)} \|\tau\|^{1-n} f(\tau)\, d\tau ds$$

olarak tanımlanan $F_p(u)$ fonksiyonu,

$$-\infty < \liminf_{u\to\infty} F_p(u) < \limsup_{u\to\infty} F_p(u) \leq \infty \text{ veya } \lim_{u\to\infty} F_p(u) = \infty$$

şartını sağlarsa (2.8) kısmi diferensiyel denklemi salınımlıdır.

(2.8) kısmi denkleminin salınımı, Kusano ve diğerleri tarafından [61]'da verilen salınım kriteri kullanılarak yarı-lineer bir adi diferensiyel denklemin salınımından çıkarılabilir. Bu teoremin bir çeşidi de Dosly ve Marik [59] tarafından bağımsız olarak ispatlanmıştır.

5.1.2. Teorem ([59, Teorem 3.5])

Eğer yarı-lineer (5.3) adi diferensiyel denklemi salınımlı ise (2.8) yarı-lineer kısmi diferensiyel denklemi salınımlı değildir.

5.1.1. ve 5.1.2. Teoremlerindeki kriterlerin dezavantajı, $\mathbb{R}^n$ içindeki yuvarlar üzerinde integrasyonun tercih edilmesinin $\mathbf{S}(r)$ küresi üzerindeki $f(u)$ fonksiyonunun dağılımı hakkında bilgi kaybına neden olmasıdır. Ancak, Teorem 5.1.2.'nin uygulanabilir olmadığı durumlarda küre üzerindeki potansiyel dağılımı önemli olabilir. $\widetilde{f}(u)$ fonksiyonu yeterince küçükse, (5.3) diferensiyel denklemi salınımlı değildir, ancak (2.8) kısmi diferensiyel denklemi hala salınımlı olabilir. Ayrıca, Marik tarafından yarı-lineer kısmi diferensiyel denklem (2.8) için ortalama tekniği genişletildi ve 5.1.1. ve 5.1.2. Teoremlerinin dezavantajını ortadan kaldırabilecek yeni salınım kriterleri elde edildi [66]. Ayrıca bu tekniğin sadece bir yuvarın dışı için değil, aynı zamanda aşağıdaki sonuçta olduğu gibi farklı tipteki sınırsız bölgeler için de salınım kriterleri elde etmeyi sağladığı gösterildi.

5.1.3. Teorem ([66, Teorem 2.1])

Eğer

$$\limsup_{s\to\infty}\frac{1}{\int_{\mathbf{S}(s_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\int_{\Omega(s_0,s)}\left[\rho(\tau)H(s,\tau)f(\tau)-\frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^pH^{p-1}(s,\tau)}\right]d\tau=\infty$$

şartı sağlanacak şekilde $H\in\mathfrak{R}_1$ fonksiyonu varsa (2.8) kısmi diferensiyel denklemi salınımlıdır.

5.2. Ana Sonuçlar

İlk olarak, lineer olmayan (5.1) kısmi diferensiyel denklemi için Teorem 5.1.3.'e benzer olan bir sonuç verilecektir.

5.2.1. Teorem

$$\limsup_{s\to\infty}\frac{1}{\int_{\mathbf{S}(s_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\int_{\Omega(s_0,s)}\left[\rho(\tau)H(s,\tau)f(\tau)-\frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^pH^{p-1}(s,\tau)}\right]d\tau=\infty \tag{5.8}$$

sağlanacak şekilde $H\in\Re_1$ fonksiyonu varsa (5.1) kısmi diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat

(5.1) kısmi diferensiyel denklemi salınımsız olsun. Genelliği bozmaksızın $\Omega(S)$ üzerinde (5.1) kısmi diferensiyel denklemi pozitif bir y çözümüne sahip olacak şekilde bir $S\geq s_0$ sayısı olsun. $\Omega(S)$ üzerinde iyi tanımlı

$$\mathbf{w}=\rho\frac{\frac{\|\nabla y\|^{p-2}\nabla y}{(1+\|\nabla y\|^p)^{\frac{p-1}{p}}}}{\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}}} \tag{5.9}$$

Riccati-tipi vektör değişkeni olsun. Bu durumda Riccati-tipi kısmi diferensiyel denklem

$$div\mathbf{w}(u)=\frac{\frac{\|\nabla y\|^{p-2}}{(1+\|\nabla y\|^p)^{\frac{p-1}{p}}}}{\frac{|y|^{p-2}y}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}}}\langle\nabla y,\nabla\rho\rangle-\rho(u)f(u)$$

$$-(p-1)\rho(u)\frac{\|\nabla y\|^p}{(1+\|\nabla y\|^p)^{\frac{p-1}{p}}}\left(\frac{1}{(1-|y|^p)^{\frac{1}{p}}}+\frac{1}{\frac{|y|^p}{(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}}}\right) \tag{5.10}$$

olarak yazılır. (5.10) diferensiyel denkleminde $p>1$ ve $|y|<1$ için $(1+\|\nabla y\|^p)^{\frac{p-1}{p}}\leq 1+\|\nabla y\|^p$ ve $1-|y|^p\leq(1-|y|^p)^{\frac{p-1}{p}}$ eşitsizliklerinden yararlanılarak

$$div\mathbf{w}(u)\leq\frac{\langle\mathbf{w}(u),\nabla\rho(u)\rangle}{\rho(u)}-\rho(u)f(u)-(p-1)\rho(u)\frac{\frac{\|\nabla y\|^p}{1+\|\nabla y\|^p}}{\frac{|y|^p}{1-|y|^p}}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.9)'dan ise $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $u\in\Omega(S)$ için Riccati-tipi

$$\rho(u)f(u)\leq\frac{\langle\mathbf{w}(u),\nabla\rho(u)\rangle}{\rho(u)}-div\mathbf{w}(u)-(p-1)\frac{\|\mathbf{w}(u)\|^{q}}{\rho^{q-1}(u)}$$

kısmi diferensiyel eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte her iki taraf $H(s,u)$ ile çarpılıp $s>S$ için $\Omega(S,s)$ üzerinde integral alınırsa,

$$\int_{\Omega(S,s)}\rho(\tau)H(s,\tau)f(\tau)d\tau\leq\int_{\Omega(S,s)}\frac{H(s,\tau)}{\rho(\tau)}\langle\mathbf{w}(\tau),\nabla\rho(\tau)\rangle d\tau$$

$$-\int_{\Omega(S,s)}H(s,\tau)div\mathbf{w}(\tau)d\tau-(p-1)\int_{\Omega(S,s)}\frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^{q}}{\rho^{q-1}(\tau)}d\tau$$

elde edilir. Bundan yararlanarak,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega(S,s)}\rho(\tau)H(s,\tau)f(\tau)d\tau\\&\leq\int_{\Omega(S,s)}H(s,\tau)\frac{\langle\mathbf{w}(\tau),\nabla\rho(\tau)\rangle}{\rho(\tau)}d\tau+\int_{\Omega(S,s)}\langle\nabla H(s,\tau),\mathbf{w}(\tau)\rangle d\tau\\&-\int_{\Omega(S,s)}div(H(s,\tau)\mathbf{w}(\tau))d\tau-(p-1)\int_{\Omega(S,s)}\frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^{q}}{\rho^{q-1}(\tau)}d\tau\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Gauss-Ostrogradski teoremi, $\Re_1$ sınıfının (h_{11}) özelliği ve (5.5) uygulanırsa, v birim normal vektör olmak üzere

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega(S,s)}\rho(\tau)H(s,\tau)f(\tau)d\tau\leq\int_{\mathbf{S}(S)}H(s,\tau)\langle\mathbf{w}(\tau),v\rangle d\tau\\&+\int_{\Omega(S,s)}\langle\mathbf{h}(s,\tau),\mathbf{w}(\tau)\rangle d\tau-(p-1)\int_{\Omega(S,s)}\frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^{q}}{\rho^{q-1}(\tau)}d\tau\end{aligned}\tag{5.11}$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi $\mathbf{A}=\frac{\mathbf{w}(u)H^{1/q}(s,u)}{\rho^{1/p}(u)}$ ve $\mathbf{B}=\frac{\rho^{1/p}(u)\mathbf{h}(s,u)}{pH^{(p-1)/p}(s,u)}$ için Young eşitsizliği

$$\langle\mathbf{A},\mathbf{B}\rangle\leq\frac{\|\mathbf{A}\|^{q}}{q}+\frac{\|\mathbf{B}\|^{p}}{p}\tag{5.12}$$

kullanılarak

$$\int_{\Omega(S,s)}\rho(\tau)H(s,\tau)f(\tau)d\tau$$

$$\leq \int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau)\langle \mathbf{w}(\tau), v\rangle d\tau + \int_{\Omega(S,s)} \frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)} d\tau$$

eşitsizliği elde edilir ve buradan

$$\int_{\Omega(S,s)} \left[\rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau) - \frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)}\right] d\tau \leq \int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau)\langle \mathbf{w}(\tau), v\rangle d\tau$$

olduğu görülür. Böylece $\mathbf{w}_*(S) = maks_{u\in\mathbf{S}(S)}\{\|\mathbf{w}(u)\|\}$ olmak üzere

$$\int_{\Omega(S,s)} \left[\rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau) - \frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)}\right] d\tau \leq \mathbf{w}_*(S) \int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau) d\mathbf{S} \tag{5.13}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.13) eşitsizliğinden ve (5.8) koşulundan $s > S$ için $\rho_*(z) = maks_{u\in\mathbf{S}(z)}\{|\rho(u)|\}$ ve $f_*(z) = maks_{u\in\mathbf{S}(z)}\{|f(u)|\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega(s_0,s)} \left[\rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau) - \frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)}\right] d\tau \\
\leq\ &\int_{\Omega(s_0,S)} \rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau) d\tau + \mathbf{w}_*(S) \int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau) d\mathbf{S} \\
\leq\ &\int_{s_0}^{S} \left[\int_{\mathbf{S}(z)} H(s,\tau) d\mathbf{S}\right] m(z) \frac{\rho_*(z) f_*(z)}{m(z)} dz \\
+\ &\frac{\mathbf{w}_*(S)}{m(S)} m(S) \int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau) d\mathbf{S}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

yazılır. $e(s,z) = m(z)\int_{\mathbf{S}(z)} H(s,\tau) d\mathbf{S}$, z'ye göre azalmayan bir fonksiyon olduğundan (5.14) eşitsizliği

$$\int_{\Omega(s_0,s)} \left[\rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau) - \frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)}\right] d\tau$$

$$\leq m(s_0) \int_{\mathbf{S}(s_0)} H(s,\tau) d\mathbf{S} \left[\int_{s_0}^{S} \frac{\rho_*(\tau) f_*(\tau)}{m(\tau)} d\tau + \frac{\mathbf{w}_*(S)}{m(S)}\right]$$

eşitsizliklerini gösterir ve böylece yeterince büyük s için (5.8) ile çelişen

$$\frac{1}{\int_{\mathbf{S}(u_0)} H(s,\tau) d\mathbf{S}} \int_{\Omega(s_0,s)} \left[\rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau) - \frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)}\right] d\tau$$

$$\leq m(s_0)\int_{s_0}^{S}\frac{\rho_*(\tau)f_*(\tau)}{m(\tau)}d\tau+\frac{m(s_0)\mathbf{w}_*(S)}{m(S)}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi (5.1) lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemi için [66]'deki Teorem 2.2'ye benzer bir sonuç verilecektir.

5.2.2. Teorem

Eğer

$$\limsup_{s\to\infty}\frac{1}{\int_{\mathbf{S}(s_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\int_{\Omega_{0,s}(s_0,s)}\left[\rho(\tau)H(s,\tau)f(\tau)-\frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^pH^{p-1}(s,\tau)}\right]d\tau=\infty \tag{5.15}$$

şartı sağlanacak şekilde $H\in\mathfrak{R}_2$ fonksiyonu varsa (5.1) kısmi diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat

Olmayana ergi yöntemiyle ispatlansın. Teorem 5.2.1.'in ispatındaki gibi ilerlenerek, (5.11) eşitsizliğine ulaşılır. Diğer taraftan, $u\in\Omega(S,s)\setminus\Omega_{0,s}(S,s)$ için $H(s,u)=\|\mathbf{h}(s,u)\|=0$ olduğundan

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega(S,s)}\langle\mathbf{h}(s,\tau),\mathbf{w}(\tau)\rangle\,d\tau-(p-1)\int_{\Omega(S,s)}\frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)}d\tau\\ =\;&\int_{\Omega_{0,s}(S,s)}\left[\langle\mathbf{h}(s,\tau),\mathbf{w}(\tau)\rangle-(p-1)\frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)}\right]d\tau\end{aligned} \tag{5.16}$$

elde edilir. (5.7), (5.16) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega(S,s)}\langle\mathbf{h}(s,\tau),\mathbf{w}(\tau)\rangle\,d\tau-(p-1)\int_{\Omega(S,s)}\frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)}d\tau\\ =&\int_S^s\left[\int_{\mathbf{S}_{0,s}(z)}\langle\mathbf{h}(s,\tau),\mathbf{w}(\tau)\rangle\,d\mathbf{S}-(p-1)\int_{\mathbf{S}_{0,s}(z)}\frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)}d\mathbf{S}\right]dz\end{aligned}$$

$$\leq \int_S^s \left[\left(\int_{\mathbf{S}_{0,s}(z)} \rho(\tau) \frac{\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{H^{p-1}(s,\tau)} d\mathbf{S} \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbf{S}_{0,s}(z)} \frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)} d\mathbf{S} \right)^{1/q} \right.$$
$$\left. -(p-1) \int_{\mathbf{S}_{0,s}(z)} \frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)} d\mathbf{S} \right] dz$$

ilişkisi bulunur. (5.12) Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_{\Omega(S,s)} \langle \mathbf{h}(s,\tau), \mathbf{w}(\tau) \rangle d\tau - (p-1) \int_{\Omega(S,s)} \frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)} d\tau$$

$$\leq \int_S^s \int_{\mathbf{S}_{0,s}(z)} \frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)} d\mathbf{S} dz = \int_{\Omega_{0,s}(S,s)} \frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)} d\tau$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (5.11) ile birleştirilirse

$$\int_{\Omega_{0,s}(S,s)} \left[\rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau) - \frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)} \right] d\tau \leq \int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau) \langle \mathbf{w}(\tau), \mathbf{v} \rangle d\tau \qquad (5.17)$$

elde edilir ve $\mathbf{w}_*(z)$, $\rho_*(z)$ ve $f_*(z)$, Teorem 5.2.1.'in ispatındaki gibi tanımlanmak üzere Teorem 5.2.1.'in ispatına benzer olarak işlemlere devam edilirse

$$\int_{\Omega_{0,s}(s_0,s)} \left[H(s,\tau)\rho(\tau) f(\tau) - \frac{\rho(\tau)\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)} \right] d\tau$$
$$\leq \int_{\Omega(s_0,S)} H(s,\tau)\rho(\tau) f(\tau) d\tau + \int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau) \langle \mathbf{w}(\tau), \mathbf{v} \rangle d\mathbf{S}$$
$$\leq \int_{s_0}^S \left[\int_{\mathbf{S}(z)} H(s,\tau) d\mathbf{S} \right] m(z) \frac{\rho_*(z) f_*(z)}{m(z)} dz + \mathbf{w}_*(S) \int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau) d\mathbf{S}$$
$$\leq m(s_0) \left[\int_{\mathbf{S}(s_0)} H(s,\tau) d\mathbf{S} \right] \left[\int_{s_0}^S \frac{\rho_*(z) f_*(z)}{m(z)} dz + \frac{\mathbf{w}_*(S)}{m(S)} \right]$$

eşitsizlikleri elde edilir. Elde edilen son eşitsizlik (5.15) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı

$\Omega \subset \Omega(s_0)$, yeterince düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırsız bir küme olsun. Teorem 5.2.2.'nin koşullarına ek olarak, $H(s,u)$ fonksiyonu Ω dışında sıfır değilse ve her $s \geq s_0$ için $\partial\Omega$ üzerinde hem $H(s,u)$ hem de $\|\nabla H(s,u)\|$ sıfır değilse, (5.1) kısmi diferensiyel denklemi Ω üzerinde salınımlıdır. Dolayısıyla Teorem 5.2.2., Teorem 5.2.1. tarafından kapsanamayan yuvarın dışından farklı bölgeler üzerinde salınım kriteri üretmek için kullanılabilir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 5.2.2.'nin doğrudan bir sonucudur.

5.2.3. Sonuç

Eğer

$$\limsup_{s\to\infty}\frac{1}{\int_{\mathbf{S}(s_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\int_{\Omega_{0,s}(s_0,s)}\frac{\rho(\tau)\,\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{H^{p-1}(s,\tau)}d\tau<\infty \tag{5.18}$$

ve

$$\limsup_{s\to\infty}\frac{1}{\int_{\mathbf{S}(s_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\int_{\Omega(s_0,s)}\rho(\tau)H(s,\tau)f(\tau)\,d\tau=\infty$$

sağlanacak şekilde $H\in\Re_2$ fonksiyonu varsa (5.1) kısmi diferensiyel denklemi salınımlıdır.

Teorem 5.2.2.'deki (5.15) varsayımının sağlanmadığı kabul edilsin. Sonuç olarak, Teorem 5.2.2. uygulanamaz. Aşağıdaki sonuçlar, (5.1) kısmi diferensiyel denklemi için yeni salınım kriterleri vermektedir.

5.2.4. Teorem

$H\in\Re_2$ olsun.

$$0<\inf_{z\geq s_0}\left\{\liminf_{s\to\infty}\frac{m(z)\int_{\mathbf{S}(z)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}{m(s_0)\int_{\mathbf{S}(s_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\right\} \tag{5.19}$$

eşitsizliğinin ve (5.18)'in sağlandığını varsayılsın. $\Psi_+(S)=maks\{0,\Psi(S)\}$ ve

$$k(S)=\sup_{s>S}\frac{1}{\int_{\mathbf{S}(S)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}(S)}\rho(\tau)H(s,\tau)\,d\mathbf{S} \tag{5.20}$$

olmak üzere $S\geq s_0$ için

$$\inf_{s>S}\frac{1}{\int_{\mathbf{S}(S)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\int_{\Omega_{0,s}(S,s)}\left[\rho(\tau)H(s,\tau)f(\tau)-\frac{\rho(\tau)\,\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^pH^{p-1}(s,\tau)}\right]d\tau\geq\Psi(S) \tag{5.21}$$

ve

$$\int_{s_0}^{\infty} \frac{\Psi_+^q(\tau)}{m(\tau)\, k^{q-1}(\tau)} d\tau = \infty \tag{5.22}$$

sağlanacak şekilde $\Psi \in C(\Omega(s_0), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa (5.1) kısmi diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat

(5.1) kısmi diferensiyel denklemi salınımlı olmasın ve bazı $S_0 \geq s_0$'lar için y, (5.1) kısmi diferensiyel denkleminin $\Omega(S_0)$ üzerinde pozitif bir çözümü olsun. $\mathbf{w}(u)$, (5.9)'daki gibi tanımlanan Riccati-tipi değişken olsun. Teorem 5.2.2.'nin ispatına benzer olarak işlemler yapılırsa, (5.17) elde edilir ve (5.21)'den ise her $s > S > S_0$ için

$$\Psi(S) \leq \frac{\int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau) \|\mathbf{w}(\tau)\| d\mathbf{S}}{\int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau) d\mathbf{S}}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla her $s > S$ için

$$\Psi(S) \int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau) d\mathbf{S} \leq \int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau) \|\mathbf{w}(\tau)\| d\mathbf{S}$$

bulunur. Hölder eşitsizliği ise

$$\begin{aligned} &\Psi(S) \int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau) d\mathbf{S} \\ &\leq \left(\int_{\mathbf{S}(S)} \frac{H(s,\tau) \|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)} d\mathbf{S} \right)^{1/q} \left(\int_{\mathbf{S}(S)} \rho(\tau) H(s,\tau) d\mathbf{S} \right)^{1/p} \end{aligned}$$

eşitsizliğini verir. Böylece,

$$\Psi_+^q(S) \left(\int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau) d\mathbf{S} \right)^q$$

$$\leq \int_{\mathbf{S}(S)} \frac{H(s,\tau) \|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)} d\mathbf{S} \left(\int_{\mathbf{S}(S)} \rho(\tau) H(s,\tau) d\mathbf{S} \right)^{q-1}$$

ve k fonksiyonunun tanımından $s > S > S_0$ için

$$\frac{\Psi_+^q(S)}{k^{q-1}(S)} \leq \frac{1}{\int_{\mathbf{S}(S)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}} \int_{\mathbf{S}(z)} \frac{H(s,\tau)\,\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)} d\mathbf{S}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan $s > S_0$ için

$$L(s) = \frac{1}{\int_{\mathbf{S}(S_0)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}} \int_{\Omega(S_0,s)} \|\mathbf{h}(s,\tau)\| \cdot \|\mathbf{w}(\tau)\|\, d\tau$$

ve

$$G(s) = \frac{p-1}{\int_{\mathbf{S}(S_0)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}} \int_{\Omega(S_0,s)} \frac{H(s,\tau)\,\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)} d\tau$$

fonksiyonları tanımlansın. Teorem 5.2.2.'nin ispatındaki gibi ilerlenerek, (5.11) elde edilir ve buradan $s > S_0$ için $\mathbf{w}_*(s)$, Teorem 5.2.1.'in ispatında tanımlandığı gibi olmak üzere

$$\begin{aligned} G(s) - L(s) &\leq \frac{1}{\int_{\mathbf{S}(S_0)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}} \left[\int_{\mathbf{S}(S_0)} H(s,\tau)\,\|\mathbf{w}(\tau)\|\, d\mathbf{S} - \int_{\Omega(S_0,s)} \rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau)\, d\tau \right] \\ &\leq \mathbf{w}_*(S_0) - \frac{1}{\int_{\mathbf{S}(S_0)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}} \int_{\Omega(s_0,s)} \rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{5.23}$$

elde edilir. Böylece (5.21) eşitsizliğinden

$$\liminf_{s\to\infty} [G(s) - L(s)] \leq \mathbf{w}_*(S_0) - \Psi(S_0) < \infty$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi

$$\liminf_{s\to\infty} \int_{S_0}^{s} \frac{\int_{\mathbf{S}(z)} \frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)} d\mathbf{S}}{m(z) \int_{\mathbf{S}(z)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}} dz < \infty \tag{5.24}$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilsin. Eğer (5.24) eşitsizliği sağlanmazsa

$$\lim_{s\to\infty}\int_{S_0}^{s}\frac{\int_{\mathbf{S}(z)}\frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)}d\mathbf{S}}{m(z)\int_{\mathbf{S}(z)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}dz=\infty \tag{5.25}$$

elde edilir. (5.19) eşitsizliği ve (5.25)'den

$$0<\eta<\inf_{z\geq s_0}\left\{\liminf_{s\to\infty}\frac{m(z)\int_{\mathbf{S}(z)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}{m(s_0)\int_{\mathbf{S}(s_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\right\}$$

sağlanacak şekilde $\eta\in\mathbb{R}$ sayısı vardır. Her $\mu\in\mathbb{R}^+$ ve $s\geq S_1$ için

$$(p-1)\int_{S_0}^{s}\frac{\int_{\mathbf{S}(z)}\frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)}d\mathbf{S}}{m(z)\int_{\mathbf{S}(z)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}dz\geq\frac{\mu}{\eta k(S_0)} \tag{5.26}$$

olacak şekilde $S_1>S_0$ vardır. Ayrıca, her $s\geq S_2$ için

$$\frac{m(S_1)\int_{\mathbf{S}(S_1)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}{m(S_0)\int_{\mathbf{S}(s_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}>\eta \tag{5.27}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $S_2>S_1$ vardır. $G(s)$ fonksiyonunun tanımından $s\geq S_2$ için

$$G(s)=\tfrac{p-1}{\int_{\mathbf{S}(s_0)}H(s,\tau)d\mathbf{S}}\int_{S_0}^{s}\left[\left(m(z)\int_{\mathbf{S}(z)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}\right)\tfrac{\int_{\mathbf{S}(z)}\frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)}d\mathbf{S}}{m(z)\int_{\mathbf{S}(z)}H(s,\tau)d\mathbf{S}}\right]dz$$

sağlandığı görülür. Kısmi integrasyondan ve $H(s,\tau)$ fonksiyonunun (h_{21}) özelliğinden

$$G(s)\geq\frac{p-1}{\int_{\mathbf{S}(S_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\times$$

$$\int_{S_0}^{s}\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(m(z)\int_{\mathbf{S}(z)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}\right)\int_{S_0}^{z}\frac{\int_{\mathbf{S}(\xi)}\frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^q}{\rho^{q-1}(\tau)}d\mathbf{S}}{m(\xi)\int_{\mathbf{S}(\xi)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}d\xi\right]dz$$

elde edilir. (h_{23}) özelliği göz önüne alındığında

$$G(s)\geq\frac{p-1}{\int_{\mathbf{S}(S_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\times$$

$$\int_{S_1}^{s}\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(m(z)\int_{\mathbf{S}(z)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}\right)\left(\int_{S_0}^{z}\frac{\int_{\mathbf{S}(\xi)}\frac{H(s,\tau)\|\mathbf{w}(\tau)\|^{q}}{\rho^{q-1}(\tau)}d\mathbf{S}}{m(\xi)\int_{\mathbf{S}(\xi)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}d\xi\right)\right]dz$$

elde edilir. (5.26) eşitsizliği uygulandığında ise

$$\begin{aligned}G(s)\geq&\frac{1}{\int_{\mathbf{S}(S_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\frac{\mu}{\eta m(S_0)}\int_{S_1}^{s}\left[-\frac{\partial}{\partial z}\left(m(z)\int_{\mathbf{S}(z)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}\right)dz\right]\\ \geq&\frac{\mu m(S_1)}{\eta m(S_0)}\frac{\int_{\mathbf{S}(S_1)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}{\int_{\mathbf{S}(S_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar (h_{23}) özelliği göz önüne alındığında

$$G(s)\geq\frac{\mu m(S_1)}{\eta m(S_0)}\frac{\int_{\mathbf{S}(S_1)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}{\int_{\mathbf{S}(S_0)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}$$

ve (5.27) eşitsizliğinden ise her $s\geq S_2$ için

$$G(s)\geq\mu$$

elde edilir. μ keyfi olarak seçildiğinden $\lim_{s\to\infty}G(s)=\infty$ olur.

Bu durum için ispatın tamamlanması, Teorem 3.2.3.'ün ispatına benzerdir ve bu nedenle atlanmıştır. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Uyarı

$$\frac{1}{\int_{\mathbf{S}(S)}H(s,\tau)\,d\mathbf{S}}\int_{\mathbf{S}(S)}\rho(\tau)H(s,\tau)\,d\mathbf{S}\leq\underset{u\in\mathbf{S}(S)}{maks}\{\rho(u)\}$$

eşitsizliği olduğundan (5.20)'de supremum daima vardır.

Uyarı

Teorem 5.2.4.'te (5.21) koşulunun yerini $\inf_{s>S}$ yerine $\limsup_{s\to\infty}$ kullanılan daha zayıf bir koşulun aldığına dikkat ediniz. Daha güçlü bir koşul olan (5.21)'e ihtiyaç duyulmasının sebebi, Teorem 5.2.4.'ün ispatında $\Psi(S)$ fonksiyonunu Riccati-tipi denklem yardımıyla

aranmasıdır. Bu, adi diferensiyel denklem durumunda s değerine bağlı değildir. Ancak, (5.1) kısmi diferensiyel denkleminde s değerine bağlıdır.

5.2.5. Teorem

$H \in \Re_2$ olsun. (5.19) ve

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{1}{\int_{\mathbf{S}(s_0)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}} \int_{\Omega(s_0,s)} \rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau)\, d\tau < \infty \tag{5.28}$$

koşulu sağlansın. (5.21) ve (5.22) sağlanacak şekilde $\Psi \in C(\Omega(s_0), \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa (5.1) kısmi diferensiyel denklemi salınımlıdır.

İspat

(5.1) kısmi diferensiyel denkleminin salınımlı olmadığı varsayılsın ve y, (5.1) kısmi diferensiyel denkleminin bazı $S_0 \geq s_0$'lar için $\Omega(S_0)$ üzerinde pozitif bir çözümü olsun. Teorem 5.2.1.'in ispatındaki gibi ilerlenerek, (5.11)'in sağlandığı görülür. Teorem 5.2.4.'ün ispatından ise (5.23) eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Böylece,

$$\begin{aligned}\limsup_{s\to\infty} [G(s) - L(s)] \leq & \mathbf{w}_*(S_0) - \liminf_{s\to\infty} \frac{1}{\int_{\mathbf{S}(S_0)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}} \int_{\Omega(s_0,s)} \rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau)\, d\tau \\ \leq & \mathbf{w}_*(S_0) - \Psi(S_0) < \infty\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. $s \geq s_0$ için (5.21)'den

$$\Psi(s_0) \leq \frac{1}{\int_{\mathbf{S}(S_0)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}} \int_{\Omega_{0,s}(s_0,s)} \left[\rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau) - \frac{\rho(\tau) \|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)} \right] d\tau$$

elde edilir. (5.28)'den

$$\begin{aligned}& \liminf_{s\to\infty} \frac{1}{\int_{\mathbf{S}(S_0)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}} \int_{\Omega_{0,s}(s_0,s)} \frac{\rho(\tau) \|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)} d\tau \\ \leq & \liminf_{s\to\infty} \frac{1}{\int_{\mathbf{S}(S_0)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}} \int_{\Omega_{0,s}(s_0,s)} \rho(\tau) H(s,\tau) f(\tau)\, d\tau - \Psi(s_0) < \infty\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, (S_0,∞) aralığında tanımlı $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ ve

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\int_{\mathbf{S}(s_0)} H(s_n,\tau)\, d\mathbf{S}} \int_{\Omega_{0,s_n}(s_0,s_n)} \frac{\rho(\tau)\,\|\mathbf{h}(s_n,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s_n,\tau)} d\tau \\ =&\liminf_{s\to\infty} \frac{1}{\int_{\mathbf{S}(s_0)} H(s,\tau)\, d\mathbf{S}} \int_{\Omega_{0,s}(s_0,s)} \frac{\rho(\tau)\,\|\mathbf{h}(s,\tau)\|^p}{p^p H^{p-1}(s,\tau)} d\tau \end{aligned} \tag{5.29}$$

koşulunu sağlayan $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi alınsın. İspatın geri kalan kısmı Teorem 3.2.4.'ün ispatına benzerdir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk olarak salınım teorisi tanıtılmış ve teorinin gelişiminden kısaca bahsedilmiştir. Ayrıca, literatürde ilk defa kullanılan p-öngörülen eğrilik ve q-relativistik operatörleri tanıtılmış ve sırasıyla tez boyunca bu fonksiyonları ikinci basamaktan, çift basamaktan ve kısmi diferensiyel denklemlerde salınım teorisi için çalışılmıştır. Literatürde mevcut olan sonuçlar tez çalışmasında kullanılan diferensiyel denklemlerle kıyaslanarak yeni salınım sonuçları elde edilmiştir.

İkinci bölümde,

$$\left(\frac{\left|y'\right|^{p-2} y'}{\left(1+\left|y'\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}} \right)' + f(u) \left(\frac{|y|^{p-2} y}{(1-|y|^{p})^{\frac{p-1}{p}}} \right) = 0$$

üçüncü bölümde

$$\left(\frac{\left|y^{(n-1)}\right|^{\alpha-2} y^{(n-1)}}{\left(1+\left|y^{(n-1)}\right|^{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \right)' + f(u) \frac{|y|^{\alpha-2} y}{\left(1-|y|^{\alpha}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = 0$$

ve dördüncü bölümde ise

$$div \left(\frac{\|\nabla y\|^{p-2} \nabla y}{(1+\|\nabla y\|^{p})^{\frac{p-1}{p}}} \right) + f(u) \frac{|y|^{p-2} y}{(1-|y|^{p})^{\frac{p-1}{p}}} = 0$$

diferensiyel denklemleri için Philos-tipi ortalama integral koşulu kullanılarak yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu diferensiyel denklemler kullanılarak teoremler verilmiştir. Verilen teoremlerin sağlanmadığı durumlar için yeni koşullar tanıtılıp yeni teoremler elde edilmiştir.

Bunun dışında, bütün bölümlerde $f(u)$ fonksiyonunun özel seçimi için bazı teoremleri sağlayan örnekler vererek ele alınan diferensiyel denklemlerin en az bir çözümünün varlığı gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Sturm, J. C. F. (1836). Memoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées,* 1, 106-186.

2. Agarwal, R. P., Bohner, M., Grace, S. R., ve O'Regan, D. (2005). *Discrete Oscillation Theory*. Hindawi Publishing Corporation, New York, 1-961.

3. Coles, W. J. (1968). An oscillation criterion for second-order linear differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 19, 755–759.

4. Erbe, L., Kong, Q., ve Zhang, B. G. (1995). *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*. Marcel Dekker Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1-13, doi: 10.1201/9780203744727.

5. Kong, Q. (1999). Interval criteria for oscillation of second-order linear ordinary differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 229(1), 258–270.

6. Kreith, K. (1973). *Oscillation Theory*. Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, Berlin-Heidelberg, 7(314), 301, doi:10.1007/BFb0067537.

7. Kwong, M. K., ve Zettl, A. (1983). Asymptotically constant functions and second-order linear oscillation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 93, 475–494.

8. Ladde, G. S., Lakshmikantham, V., ve Zhang, B. G. (1987). *Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Marcel Dekker Inc., New York.

9. Mingarelli, A. B., ve Halvorsen, S. G. (1988). *Non-Oscillation Domains of Differential Equations with Two Parameters*. Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, Berlin, (1338), 1-106 doi:10.1007/BFb0080637.

10. Swanson, C. A. (1968). *Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations*. Academic Press, Mathematics in Science and Engineering, New York, (48), 1-227, doi:10.1007/BF01153154.

11. Yoshida, N. (2008). *Oscillation Theory of Partial Differential Equations*. World Scientific, Singapore, 1-326, doi:10.1142/7046.

12. Dosly, O., ve Rehak, P. (2005). *Half-linear Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies, 202. Elsevier Science B.V., Amsterdam, (1), 1-326, doi:10.1016/j.jmaa.2007.01.080.

13. Kneser, A. (1893). Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, 409-435.

14. Fite, W. B. (1918). Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society,* 19, 341-352.

15. Wintner, A. (1949). A criterion of oscillatory stability. *Quarterly of Applied Mathematics,* 7, 115-117.

16. Leighton, W. (1949). On self-adjoint differential equations of second order. *Journal of the London Mathematical Society*, 35, 656-657.

17. Zlamal, M. (1950). Oscillation criterions. *Casopis pro pestovani matematiky a fysiky*, 75, 213-218.

18. Atkinson, F. V. (1955). On second-order non-linear oscillations. *Pacific Journal of Mathematics*, 5(5), 643-647.

19. Nehari, Z. (1957). Oscillation criteria for second-order linear differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 85(2), 428-445.

20. Kamenev, I. V. (1978). An integral criterion for oscillation of linear differential equations of second order. *Matematicheskie Zametki,* 23, 136-138.

21. Philos, C. G. (1989). Oscillation theorems for linear differential equation of second order. *Archiv der Mathematik,* 53, 482-492.

22. Horng, J. L. (1995). Oscillation criteria for half-linear second order differential equations. *Hiroshima Mathematical Journal,* 25, 571-583.

23. Licko, I., ve Svec, M. (1963). Le caractere oscillatoire des solutions de l'equation $y^{(n)} + f(x)y^{\alpha} = 0, n > 1$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 13(4), 481-491.

24. Onose, H. (1971). Oscillatory properties of solutions of even order differential equations. *Pacific Journal of Mathematics*, 38(3), 747-757.

25. Wong, J. S. W. (1968). On second order nonlinear oscillation. *Funkcialaj Ekvacioj*, 11, 207-234.

26. Lovelady, D. L. (1976). Oscillation and even order linear differential equations. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 6(2), 299–304.

27. Kusano, T. (1981). On strong oscillation of even order differential equations with advanced arguments. *Hiroshima Mathematical Journal*, 11, 617-620.

28. Naito, M. (1981). On strong oscillation of retarded differential equations. *Hiroshima Mathematical Journal*, 11(3), 553-560.

29. Agarwal, R. P., Grace, S. R., ve O'Regan, D. (2001). Oscillation criteria for certain *n*th order differential equations with deviating arguments. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 262(2), 601-622.

30. Oinarov, R., ve Rakhimova, S. Y. (2010). Oscillation and nonoscillation of two terms linear and half-linear equations of higher order. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, (49), 1-15.

31. Zhang, Q., Liu, S., ve Gao, L. (2011). Oscillation criteria for even-order half-linear functional differential equations with damping. *Applied Mathematics Letters,* 24, 1709-1715.

32. Park, C., Moaaz, O., ve Bazighifan, O. (2020). Oscillation results for higher order differential equations. *Axioms*, 9(1), 1-11.

33. Howard, H. C. (1964). Oscillation criteria for even order differential equations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 66(1), 221-231.

34. Hunt, R. W. (1965). Oscillation properties of even-order linear differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 115, 54-61.

35. Li, T., ve Rogovchenko, Y. V. (2016). Oscillation criteria for even-order neutral differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 61, 35–41.

36. Li, T., ve Rogovchenko, Y. V. (2017). On asymptotic behavior of solutions to higher-order sublinear Emden–Fowler delay differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 67, 53–59.

37. Zhang, C., Agarwal, R. P., Bohner, M., ve Li, T. (2013). New results for oscillatory behavior of even-order half-linear delay differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 26(2), 179–183.

38. Zhang, C., Li, T., Sun, B., ve Thandapani, E. (2011). On the oscillation of higher-order half-linear delay differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 24(9), 1618–1621.

39. Agarwal, R. P., Bohner, M., Li, T., ve Zhang, C. (2015). Even-order half-linear advanced differential equations: Improved criteria in oscillatory and asymptotic properties. *Applied Mathematics and Computation*, 266, 481–490.

40. Grace, S. R., Jadlovska, I., ve Zafer, A. (2017). Oscillation criteria for odd-order nonlinear delay differential equations with a middle term. *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* 40, 5147-5160.

41. Lewis, R. T. (1974). Oscillation and nonoscillation criteria for some self-adjoint even order linear differential operators. *Pacific Journal of Mathematics*, 51(1), 221–234.

42. Lin, X., Liu, W., ve Yu, Y. (2010). Oscillation criteria for even-order half-linear distributed delay differential equations with damping. *Computers and Mathematics with Applications,* 60, 2206-2211.

43. Liu, S., Zhang, Q., ve Yu, Y. (2011). Oscillation of even-order half-linear functional differential equations with damping. *Computers and Mathematics with Applications,* 61, 2191-2196.

44. Meng, F., ve Xu, R. (2007). Kamenev-type oscillation criteria for even order neutral differential equations with deviating arguments. *Applied Mathematics and Computation,* 190, 1402-1408.

45. Xu, Z., ve Xia, Y. (2004). Integral averaging technique and oscillation of certain even order delay differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 292, 238-246.

46. Zhang, C., Agarwal, R. P., ve Li, T. (2014). Oscillation and asymptotic behavior of higher-order delay differential equations with *p*-Laplacian like operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 409, 1093-1106.

47. Dosly, O., ve Lomtatidze, A. (2006). Oscillation and nonoscillation criteria for half-linear second-order differential equations. *Hiroshima Mathematical Journal*, 36, 203–219.

48. Holmes, P., ve Marsden, J. (1981). A partial differential equation with infinitely many periodic orbits: Chaotic oscillations of a forced beam. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 76, 135–165.

49. Luo, J. (2002). Oscillation of hyperbolic partial differential equations with impulses. *Applied Mathematics and Computation*, 133(1–2), 309–318.

50. Prakash, P., Harikrishnan, S., ve Benchohra, M. (2015). Oscillation of certain nonlinear fractional partial differential equation with damping term. *Applied Mathematics Letters*, 43, 72–79.

51. Tartar, L. (1990). H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 115(3–4), 193–230.

52. Glazman, I. M. (1958). On the negative part of the spectrum of one-dimensional and multidimensional differential operators over vector-functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 119(3), 421–424.

53. Fiedler, F. (1988). Oscillation criteria of Nehari-type for Sturm–Liouville operators and elliptic differential operators of second order and the lower spectrum. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, 109(1–2), 127-144.

54. Kusano, T., Naito, Y., ve Ogata, A. (1994). Strong oscillation and nonoscillation of quasilinear differential equations of second order. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2(1), 1-10.

55. Kusano, T., ve Naito, Y. (1997). Oscillation and nonoscillation criteria for second order quasilinear differential equations. *Acta Mathematica Hungarica*, 76(1-2), 81-99.

56. Toraev, A. (1985). The oscillation of solutions of elliptic equations. *Doklady Akademii Nauk*, 280(2), 300–303.

57. Atakarryev, M., ve Toraev, A. (1986). Oscillation and non-oscillation criteria of Knezer type for elliptic nondivergent equations in unlimited areas. *Proceedings of the Academy of Sciences of Turkmen SSR*, 6, 3–10.

58. Allegretto, W., ve Huang Y. X. (1998). A Picone's identity for the p-Laplacian and applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 32(7), 819-830.

59. Dosly, O., ve Marik, R. (2001). Nonexistence of positive solutions of PDE's with p-Laplacian. *Acta Mathematica Hungarica*, 90(1-2), 89–107.

60. Kreith, K. (1984). PDE Generalization of Sturm comparison theorem. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 48(298), 31-46.

61. Kusano, T., Jaros, J., ve Yoshida, N. (2000). A Picone-type identity and Sturmian comparison and oscillation theorems for a class of half-linear partial differential equations of second order. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 40(1-8), 381-395.

62. Schmincke, U. W. (1981). The lower spectrum of Schrödinger operators. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 75, 147-155.

63. Noussair, E. S., ve Swanson, C. A. (1980). Oscillation of semilinear elliptic inequalities by Riccati transformations. *Canadian Journal of Mathematics*, 32(4), 908-923.

64. Usami, H. (1998). Some oscillation theorems for a class of quasilinear elliptic equations. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 175, 277-283.

65. Xu, Z. T., ve Xing, H. Y. (2003). Oscillation criteria of Kamenev-type for PDE with p-Laplacian. *Applied mathematics and computation*, 145, 735-745.

66. Marik, R. (2004). Integral averages and oscillation criteria for the half-linear partial differential equation. *Applied Mathematics and Computation*, 150, 69-87.

67. Marik, R. (2008). *Oscillation Theory of Partial Differential Equations with p-Laplacian*. Folia Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelianae Brunensis, 1(3).

68. Xu, Z. (2008). Oscillation criteria for certain damped PDE's with p-laplacian. *Glasgow Mathematical Journal*, 50, 129-142.

69. Gilbarg, D., ve Trundinger, N. S. (1983). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin.

70. Agarwal, R. P., Grace, S. R., ve O'Regan, D. (2002). *Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations*, Springer Science, Dordrecht.

71. Aktaş, M. F. (2020). Periodic solutions of relativistic Liénard-type equations. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 38, 1–12.

72. Aktaş, M. F. (2021). On Lyapunov-type inequalities for $(n+1)$st order nonlinear differential equations with antiperiodic boundary conditions. *Turkish Journal of Mathematics*, 45, 2614-2622.

73. Aktaş, M. F. (2022). On Lyapunov-type inequalities for nonlinear Hamiltonian-type problems. *Filomat*, 36, 3423-3432.

74. Carletti, T., ve Villari, G. (2020). Existence of limit cycles for some generalizations of the Liénard equations: The relativistic and prescribed curvature cases. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2, 1–15.

75. Jebelean, P., Mawhin, J., ve Serban, C. (2020). Multiple critical orbits to partial periodic perturbations of the p-relativistic operator. *Applied Mathematics Letters*, 104,106220.

76. Jebelean, P., Mawhin, J., ve Serban, C. (2016). A vector p-Laplacian type approach to multiple periodic solutions for the p-relativistic operator. *Communications in Contemporary Mathematics*, 19, 1–16.

77. Jebelean, P., ve Serban, C. (2015). Boundary value problems for discontinuous perturbations of singular ϕ-Laplacian operator. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 431, 662–681.

78. Marik, R. (2000). Hartman-Wintner type theorem for PDE with p-Laplacian. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations: Proceedings of The Colloquium on The Qualitative Theory of Differential Equations*, 18, 1-7.



Gazili olmak ayrıcalıktır